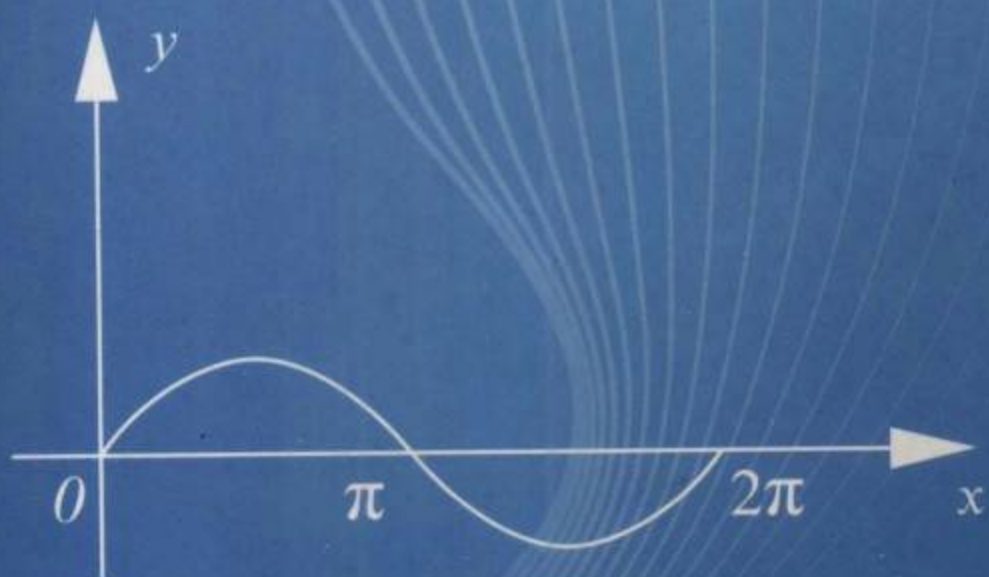


名家导学系列

# 孙维刚高中数学

孙维刚 编著



$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

名家导学系列

# 孙维刚高中数学

孙维刚 编著

北京大学出版社

· 北 京 ·

## 第三版序

拿着笔,眼前不断地浮现出孙维刚老师著述时的情景。

他真的很忙,也很累。对于出版社的约稿,从不会拒绝别人要求的孙老师,总是一拖又拖,直至无法再拖,最后,只好硬着头皮放下手里永远干不完的“活儿”,伏案而书。

每逢写作,他总习惯桌子上除了稿纸以外,就是一支笔,其他东西统统搬走。

桌子还是那张桌子,灯光依旧。

我还清楚地记得他写作本书时用的那支笔,一支套着白色金属帽,有着草绿色笔杆的普通钢笔。因长时间的频繁使用,笔尖早已磨秃了,但写起字来却很流畅。他说:“这支笔可立了功,从一参加工作,我就用它,从没有离开过。”后来,这支笔在一次开会时不慎遗失,为此,他遗憾了很多日子。

孙老师写作起来,速度很快。从早晨到晚上,头都不肯抬一抬,只看见他握笔的手在稿纸上疾速地移动,发出沙沙的声音,间或夹杂着晃动涂改液的嗒嗒声。就这样,一天一万字,一气呵成。那笔尖流淌出的智慧,分明是他和学生心的碰撞。因此,读他的文字,就像听见他在课堂上的讲课,娓娓道来,带领着他的学生思潮如涌。

当这部著述终于完成时,他微微活动一下早已疲惫的身躯,细细地审视着手中的稿子,自言自语地说:“我要对得住我的读者。”这是他的心声。我还清楚地记得他很多次地引用过好友周沛耕老师的话:“教师的一切成就都是学生给的。”

另外,当您拿到这本由北京大学出版社出版的《孙维刚高中数学》时,一定要将前面“作者的话”细细地阅读,因为里面有很多重要的话要告诉您,这也是孙老师生前常常说给来信、来电或当面咨询的读者的话。

最后,衷心地希望这本《孙维刚高中数学》能对广大青少年朋友学习数学有所启迪。

如今,斯人已逝,谨以此序寄以无限的思绪。

王海亭

2003年元月于北京

## 第二版修订说明

幸蒙老师和同学们的关怀,拙述《初中数学》、《高中数学》两本书,至今已六次印刷,逾 16 万册。其间,我受到各地老师和同学们热情来信的勉励和盛情建议,使两本书修订再版。

在保留原书主体的基础上,两书都在解题思考规律的应用,即提高解题能力方面,进行了补充。《初中数学》在一些主要章节,补充了一些新的例题分析;《高中数学》,则补充了“第四篇 解题思考分析的再示范”。

《初中数学》书中某些知识,在新的九年义务教育大纲中列为选学或不学,本次再版,仍予保留。我的考虑是:

1. 读者中许多学生初中毕业后要继续学习,特别是要升入普通高中,书中对这些少量知识的学习指导,还是很有价值的;

2. 本书立足于对知识分析把握的指导,立足于对方法和思想的建议和指导,所以阅读这些部分是有益的。

另外,想多说几句的是关于如何学好数学的问题。

数学,是学生投入最多的一门课程,但许多同学却为并没取得理想效果所苦,部分同学甚至陷入题海,昏天黑地,以至望而却步。

究其原因,在于方法不得要领,或根本不当。

本人认为,学好数学,首重概念扎实、基础知识牢固,这几乎是人所共识。但究竟什么是“扎实”、“牢固”?又怎样才能“扎实”、“牢固”?则恐多有差异,甚至大相径庭了。

汽车飞驰,离不开动力的心脏——发动机,但必须通过变速箱、大轴,最后作用到轮子上。解数学题亦如此,概念、基础知识(发动机),要发挥作用,也必须靠一连串连接装置,即对概念的理解、引伸,概念外围的规律、方法,以及解题思考规律,这些在课本上是没有的。

学好数学,还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干,又不为其所累。怎样才是和才能“聪明地做题”?

而最根本的出路,是在学习过程中,提高了能力,完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切?本书就是要向广大同学、青年教师展示其途径。

限于水平,书中疏误仍将很多,诚请批评指正,不胜感谢。

孙维刚

1999 年 2 月于北京



## 作者的话

“有谁能相信,北京 22 中今年毕业的高三(4)班,全班 40 人中,有 15 人被清华大学、北京大学录取。”

这是《北京日报》1992 年 9 月 8 日的一篇报道“润物细无声(记北京市特级教师孙维刚)”的第一自然段。所报道的是我第二轮实验班(1986~1992 年)的情况。

第三轮实验班的情况又如何呢?

“中学数学特级教师孙维刚创下一个纪录——

他当班主任的北京 22 中高三(1)班,全班 40 人,1997 年高考百分之百上了录取线,38 人上重点线,有 22 人考入北京大学、清华大学,占全班总人数的 55%,这在全市各校的统计中是绝无仅有的。而六年前,这 40 名来自工薪阶层家庭的子弟入初中时,26 人达不到区重点中学的录取分数线,14 人是就近入学的‘大拨轰学生’。”

这是《北京日报》1997 年 9 月 10 日第六版的整版报道“特级教师孙维刚”的第一自然段,由于 1991~1992 学年我同时带第二和第三两轮班,所以,第三轮班(1991~1997)在 1997 年 7 月中学毕业。

特别是,这轮班的闫珺同学,1996 年 7 月夺得了第 37 届国际数学奥林匹克的金牌,为祖国争得了荣誉。

北京 22 中是一所非重点中学,面对学生来源并不十分理想的现实,从 1980 年起,我在各级领导和同志们的帮助下,进行了六年一循环的数学教育改革实验。从初一接新生,教数学兼班主任,直到学生高三毕业,全面落实党的教育方针,努力使学生德智体全面发展,大幅度提高学生素质。这个素质,首先是思想品德素质,同时是紧密结合的智力素质,是以思维水平为核心的智力素质。从数学课来说,在第三轮班的中学六年,我基本没留过硬性家庭作业,从未收过作业,考试极少,又由于别的科目的老师留作业量也很少,因而使同学们每天晚上 9 点半左右就可以睡眠,优秀生则在 9 点左右睡眠。即使上高三后,大多数学生也能保证 9 个小时左右的睡眠,这种做法保持了学生清醒的头脑和旺盛的精力,使他们不是以题海战术取胜,而是以高水平的思维使难题迎刃而解。更重要的是这种良好的习惯为学生将来进一步的学习和深造,为他们毕生事业的成功打下了坚实的基础。

1986 年秋初一入学的第二轮班,当年入学成绩排北京市东城区第 8 位(小学升中学,是按区考试的)。三年后,在 1989 年全国初中数学联赛北京赛区一、二等奖的共 15 名得奖者中,本班占了 7 名。又过三年,在全国高中数学联赛北京赛区的一、二等奖的共 15 名得奖者中,本班占了 4 名,并且是第 1、4、7、9 这 4 个靠前的名次。实验班的彭壮壮同学,1991 年赴美探亲,随即在全美数学竞赛中考入前 25 名(由于不是美国公民也不是永久居留者,未能获得美国奥林匹克数学国家集训队资格,不能参加集训和进一步选拔),1992 年初,他又以一篇数学论文“ON SOLVING FRACTIONS REPRESENTED BY  $p$ -ADIC INTEGERS”及答辩,获美国 Westinghouse Science Talent Search Contest 奖(西屋寻找科学天才竞赛,是一年一度美国高中学生最高规格竞赛),十多家报纸杂志报导了这一消息并刊登照片,他被哈佛大学免试录取。

第三轮班,不但夺得了国际数学奥林匹克的金牌,同时,在1996~1997年度全国高中数学联赛中,获一等奖5人,二等奖3人,三等奖6人,高考时数学平均分为117分,这个分高出当年北京市任何一所中学的校平均分。这个班高考五科总分平均分为558.67分,而在当年升中学时,全班 $\frac{2}{3}$ 的学生成绩低于区属重点中学的录取线。我是不是只抓了数学,挤了别的科目?以上事实已经作出回答。

那么,是什么原因,促成了学生的进步呢?

客观条件上,实验班的工作,得到了北京22中校长的领导和支持,三轮实验班的全体老师:张振良老师、何启真老师(政治),金润芝老师、李向前老师、李锦文老师、关益成老师(语文),娄宁老师、聂影梅老师、贾桂芳老师、隋志伟老师(物理),董爽老师、邹法瑜老师(化学),蒋倩梅老师、姚远老师、费松丽老师、徐崇孝老师、韩春英老师(英语),周宝兰老师、景文老师、华亚铃老师(体育),肖尧望老师、周强老师(生物),王青梅老师、宋立真老师(历史),王淑芳老师、李式娴老师(地理),他们不但业务造诣很深,而且热爱学生,热爱教育事业,使整个教师集体和学生集体心心相印、息息相通、血肉相连。

东城区教育局、区委、区政府,北京市教育局,一直关怀我们实验班的工作,许多著名教师,如陶晓勇等常常来班讲学,使学生受益匪浅。

主观上,实验班一贯重视把对学生的思想教育落到实处,教育学生勤奋学习、积极进取,做诚实、正派的人,立志为人民多作贡献。

另外,师生共同在探索一个新的思路,一套崭新的数学学习方法。

本书,就是要向读者介绍这套方法。

这套方法,首先是指导思想上的新认识,而后,才是由此而产生和由它所决定的具体做法。本书的第一篇“怎样学好高中数学”,就是介绍上述认识和方法。结合实例,边叙边议。阅读本书时要两者兼顾,既不要光看条条,也不能只读举例。一定请读者结合例题,认真体会所介绍的思想和方法的真谛。

学习方法产生于具体数学内容的学习过程中,其价值在于促成高水平的学习。为此,在本书第二篇“高中数学各章学习指要”的每一章中,都分为“学习指导”和“解题思考方法小结”,这主要是着眼于本章知识的联系和规律,进行简要分析,帮助读者深入认识知识本质,并能做到切实掌握;总结本章题目内容有关特点,学会归纳解题思路。在写法上,凡课本上已写出的定义、定理、公式及解题方法,均不再重复。议叙分析一般从简,多数情况不再配以例题。

为了避免造成读者浮光掠影,收益受限,本书第一篇第4章中分别举例,就如何学习概念,如何学习定理、公式,如何学习和小结一个单元,如何总结一章习题的解题思考方法,做了示范,请读者细读消化之后,能运用到第二篇的各章,依照“学习指导”和“解题思考方法小结”所列出的纲目,结合课本和习题,依照第一篇第4章,写出深入详细的分析和总结。这是请读者一定要完成的作业。

本书修订后,还增加了第四篇“解题思考分析的再示范”。

我们反对题海战术,反对让学生通过大量考试、大量做题以成为做题的“熟练工”,而去对付考试应试教育的做法,这种做法不但与我们的教育方针相悖,而且损害学生健康,使学生思维僵化,其结果只能是劳民伤财,于国于民不利。

但是要学好数学,不做题是不行的。题要精彩,做题不在多而在精;对待做题的思想认识和方法要对头,要通过做题,深刻理解概念,扎实掌握基本知识,学会运筹帷幄、纵横捭阖,使自己的思维

水平不断上升,高屋建瓴,只有这样,学生在面对千变万化、面目各异的题目时,才能做到胸有成竹、应付自如,使一道道的难题“落花流水”。当然,这里最关键的是学生形成了系统的解题思考规律。在“解题思考分析的再示范”中,我们对此将作典型的示范。

鉴于篇幅的限制,本书各章之后不再编配习题,请读者在完成上述作业的基础上,选择质量好的习题集,检验自己的解题思考方法,以便提高解题技巧。同时,对新发现的不足之处要及时进行修正。这种循环往复、螺旋式上升的过程,会使自己的思维方法的水平以及能力的水平扶摇直上。

## 内 容 简 介

本书是著名的数学教育家孙维刚老师的著作,涵盖了现行高中数学教育大纲中所要求掌握的内容,是孙老师三轮实验班的教材。本书立足于对高中数学中基础知识的分析把握,以及对方法和思想的指导,在详述概念后,引申概念外围的规律、方法,以及解题思考规律。书中提出,学好数学必须站在系统的角度看问题,力求一题多解、多解归一(结论一个)、多题归一(善于总结),善于用“动”的观点思考问题(做到“风物长宜放眼量”),这对开启学生的数学智慧,掌握科学的学习方法、思维规律,提高学习效率有很大的帮助。

本书可作为教师和学生的辅导用书或自学教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

孙维刚高中数学/孙维刚编著. —北京:北京大学出版社,2005.1

(名家导学系列)

ISBN 7-301-08497-8

I. 孙… II. 孙… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 135309 号

书 名: 孙维刚高中数学

著作责任者: 孙维刚 编著

责任编辑: 温丹丹

标准书号: ISBN 7-301-08497-8/G · 1381

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 58874083 编辑部 62765126

电子信箱: [xxjs@pup.pku.edu.cn](mailto:xxjs@pup.pku.edu.cn)

排 版 者: 北京东方人华北大彩印中心 电话: 62754190

印 刷 者: 河北滦县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米 × 1092 毫米 16 开本 13 印张 332 千字

2005 年 1 月第 1 版 2005 年 11 月第 2 次印刷

定 价: 19.00 元



# 目 录

## 第一篇 怎样学好高中数学

第1章 热爱数学,学好数学 .....	(1)
一、热爱数学,是学好数学的前提与途径 .....	(1)
二、学好数学,需“醉翁之意不仅在酒” .....	(2)
第2章 站在系统的高度学习 .....	(4)
一、理解概念要深入本质,注意抓住知识之间的联系 .....	(4)
二、在类比中发现和谐,简化记忆 .....	(5)
第3章 把知识的学习、能力的培养、素质的发展与完善有机地结合起来 .....	(7)
一、主动学习 .....	(7)
二、注意学习、积累和掌握数学方法与思想 .....	(10)
第4章 各类知识学习方法示范 .....	(21)
一、概念与基础知识的学习 .....	(21)
二、公式、定理的学习 .....	(32)
三、一个单元的学习与小结 .....	(34)
四、一个数学方法(数学归纳法)的学习和小结 .....	(47)
五、一个思考方法的学习和小结 .....	(55)
第5章 学会做题 .....	(65)
一、题不求多,但求精彩 .....	(65)
二、讲究做题的方法 .....	(66)
第6章 学会复习 .....	(75)
一、培养做小结的习惯和能力 .....	(75)
二、有效地进行高中数学总复习 .....	(83)

## 第二篇 高中数学各章学习指要

I 重要概念、基础知识、方法、思想 .....	(86)
一、有关命题的知识 .....	(86)
二、充分条件和必要条件 .....	(86)
三、数学归纳法 .....	(86)
四、反证法 .....	(86)
五、同一法 .....	(89)

六、换元法 .....	(90)
七、列方程组的方法 .....	(92)
八、待定系数法 .....	(93)
九、配方法 .....	(95)
十、转化归结思想 .....	(96)
十一、动的思想方法——换个角度看问题 .....	(96)
十二、对称的观点和思想 .....	(96)
十三、数形结合的方法 .....	(96)
 II 高中代数 .....	(97)
第7章 幂函数、指数函数和对数函数 .....	(97)
一、学习指导 .....	(97)
二、解题思考方法小结 .....	(100)
第8章 三角函数、三角变换、反三角函数与三角方程 .....	(103)
一、学习指导 .....	(103)
二、解题思考方法小结 .....	(105)
第9章 数列与数学归纳法 .....	(110)
一、学习指导 .....	(110)
二、解题思考方法小结 .....	(111)
第10章 不等式 .....	(119)
一、学习指导 .....	(119)
二、解题思考方法小结 .....	(121)
第11章 复数 .....	(124)
一、学习指导 .....	(124)
二、解题思考方法小结 .....	(126)
第12章 排列、组合、二项式定理 .....	(128)
一、学习指导 .....	(128)
二、解题思考方法小结 .....	(129)
 III 微积分初步 .....	(134)
第13章 极限 .....	(134)
一、学习指导 .....	(134)
二、解题思考方法小结 .....	(135)
 IV 立体几何 .....	(137)
第14章 直线和平面 .....	(137)
一、学习指导 .....	(137)
二、解题思考方法小结 .....	(139)

第 15 章 多面体和旋转体 ..... (142)

    一、学习指导 ..... (142)

    二、解题思考方法小结 ..... (144)

V 平面解析几何 ..... (146)

第 16 章 直线 ..... (146)

    一、学习指导 ..... (146)

    二、解题思考方法小结 ..... (148)

第 17 章 圆锥曲线 ..... (150)

    一、学习指导 ..... (150)

    二、解题思考方法小结 ..... (151)

第 18 章 坐标变换 ..... (153)

    一、学习指导 ..... (153)

    二、解题思考方法小结 ..... (153)

第 19 章 参数方程、极坐标 ..... (154)

    一、学习指导 ..... (154)

    二、解题思考方法小结 ..... (156)

第三篇 学会考试

一、做好应考前的准备 ..... (158)

二、学会在考场上科学应对 ..... (158)

三、养成检验习惯,积累检验方法,提高检验能力 ..... (159)

四、分析一份综合练习,看对待难题的态度和方法 ..... (159)

第四篇 解题思考分析的再示范

一、示范一 ..... (172)

二、示范二 ..... (181)

三、示范三 ..... (183)

四、示范四 ..... (189)

后记 ..... (195)

# 第一篇 怎样学好高中数学

## 第1章 热爱数学,学好数学

### 一、热爱数学,是学好数学的前提与途径

要完成任何一番事业,首先要热爱它,只有这样,才会满腔激情、全身心地投入,聪明才智、灵感悟性一齐涌上心头,铺平成功之路.这是人人皆知的道理.

但是,数学凭什么让人“爱”?

近两年来,我接到过上百封信,希望了解怎样才能学好数学,这些信北京和其他省市的都有,不但来自中学生,还来自许多家长.

广大中学生希望学好数学,他们的父母也都希望自己孩子的数学“棒”!为什么呢?

做家长的谁不望子成“龙”,成为祖国四化建设栋梁之材!但成“龙”之路怎么走?一些人认为,必须要升高中、上大学,甚至考硕士、当博士.而每每考试,数学总首当其冲,必考,又最难;况且,数学又是许多课程的基础,应用广泛,于是,尽管数学十分枯燥,拼命也得学好.

我不怀疑,伟大目标,将为刻苦学习数学带来巨大的力量,但是能否学好,这里就大有文章了.

因为,被迫地刻苦学习,有如捏住鼻子灌药,咽下去,又可能呕吐出来.近来,许多苦口良药外面裹上了糖衣,大概就是要避免这种遗憾吧!

如果拼命去学的动力,是发现了数学的美,为数学本身的魅力所吸引,则将如美味佳肴,凭它的色香味,使人油然升起强烈的向往.这才是美好数学的沧桑正道.

但是,数学是美味佳肴吗?它的色香味在哪里?

数学的美,是由它的高度严谨和合理而达到的和谐,这是一种令人神怡的内在和谐.

举个小小的例子.

小学生开始学习除法,老师说:把一个量分成若干等份,求其中“1份”那个量(一倍量)的运算叫除法.这样,孩子便产生了一个想法:商肯定不会大于被除数!

可是后来, $6\text{米} \div \frac{1}{2} = 12\text{米}$ ,商怎么大于被除数呢?不可思议!只好死记:这是分数除法法则中“颠倒相乘”的结果.于是,

$$6\text{米} \div \frac{1}{2} = 6\text{米} \times \frac{2}{1} = 12\text{米}.$$

其实,把一个量分成若干等份,可以换言为:一个量(指被除数)如果是“1份”那个量的若干倍,除法,就是去计算那个“1份”是多少.于是,在本例中,6米即是那个“1份”的 $\frac{1}{2}$ 倍,那么“1份”当然



应该是  $6 \text{ 米} \div \frac{1}{2} = 12 \text{ 米}$  了。

这样,在寻求彼此孤立的现象统一解释的过程中,对一个概念(除法)的认识不知不觉地深化了。

事情并未到此结束,从这里继续想下去. 由于6米还可以是那个“1份”的 $\frac{1}{20}$ 倍, $\frac{1}{200}$ 倍, $\frac{1}{2000}$ 倍, $\dots$ ,这时,那个“1份”就是120米,1200米,12000米, $\dots$ ,越来越大. 可以想见,对于 $6 \div a$ ,当 $a \rightarrow 0$ 时, $6 \div a$ 将无限地增长,由于 $a \rightarrow 0$ 可以从正、负两个方向进行,所以, $6 \div a$ 也将向正或负两个方向无限增大. 记做,当 $a \rightarrow 0$ 时, $\frac{6}{a} \rightarrow \pm \infty$ . 这时,我们就从小学算术,经过初中代数、高中代数,而达到高等数学的边缘了. 因为,我们从中对高等数学的极限问题,获得了初步的感性认识.

当然,再深入一步,又会产生新的疑问, $a \rightarrow 0$ 在数轴上,是趋向于一个点,而 $\frac{6}{a} \rightarrow \pm \infty$ ,却是背道而驰的两个方向. 这怎么统一呢?

在非欧空间中统一这个矛盾现象,并非难事,当然,这远远超出了中学的范围.

这样的例子,数学中俯拾皆是. 而这种寻求联系、统一的过程,不仅令人兴趣盎然,也是学好数学的正确途径. 这样就能置知识于系统中,从系统的高度去理解、去把握每一个概念,着眼于并掌握每个环节的内涵和它与它以外事物的关联,以及相互联系中的规律.

这样学习,将能扎实地掌握知识. 因为,得到的知识是具有结构的整体. 不仅如此,由于总是着眼于联系的发现和规律的研究,一方面,养成了联想的习惯;另一方面,经常需要从本质上认识事物,逐步形成较深刻的观点,从而提高了能力,完善了素质. 这其实是学习数学的重要目的. 因为,近年有人提出,数学不但是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学,数学还要研究人类的存在形式和人类思维的模式.

当然,伴随着能力的提高,素质的发展,学习效果必不可同日而语了.

## 二、学好数学,需“醉翁之意不仅在酒”

据说,爱因斯坦曾对一位朋友说:“我有一位朋友,他是一位才子,他认为,当一名学生毕业离开老师和学校时,如果把几年来所学的功课全部忘记了(当然,这是不可能的),这时,他所剩下的,才是这所学校和他的老师的教学及教育的实在成果.”

都忘光了,谈何成果? 不可思议.

细想之下,令我折服. 这段话的意思是,教学和教育的真谛在育人,在学生能力的提高,素质的发展和完善.

那么,作为学生,不是也应该有同样的理解和认识吗! 自己的目标,当是通过学习知识来学习思考,学会分析和解决问题,培养和提高自己的能力,发展和完善自己的素质,把自己变得更加聪明,实现了这个目标后,无论是继续进一步的学习,还是指导实践,都会干出突出的成就.

这就是说,学习的是知识,但“醉翁之意不在酒(知识)”,而在能力、素质的发展.

但是,能力和素质的追求,实现于学习知识的过程中,离不开知识. 而且,掌握知识,是进学校的初衷. 所以,应该全面地认识“醉翁之意不仅在酒”的深刻道理.

怎样才能实现上述的目标?

就学习数学而言,要掌握以下几个方面:学习任何知识,都要从系统的角度出发,着眼于知识的联系和规律,发掘其本质,注意数学思想的渗透和哲理观点的升华;为此,要经常进行总结,善于比较和区别,学习知识要总结,做题也要经常总结,一题多解,多解归一,多题归一,有所发现,有所创造,有所前进;从而,在主动学习中,实现扎实掌握知识、提高自己能力、完善自己素质的目标.

本书第一篇,将分别就以上几个方面,进行详细地讲解.

## 第2章 站在系统的高度学习

### 一、理解概念要深入本质,注意抓住知识之间的联系

中学课程的每一门学科,都有自己的基本概念、基础知识,即通常所说的双基.它们不仅本身有着广泛的应用,而且,对于其他知识有着较大的甚至规定性的影响,所以,掌握好它们,就成为十分必要的了.

但是,怎样才算把它们抓住了?背得滚瓜烂熟,是没有多大价值的.重要的是,理解它们,才能掌握和应用它们.那么,怎样才算理解呢?字面上弄懂仅仅是第一层次,还必须弄清它和它以外事物的关联,从本质上融会贯通,这当然应该从系统的角度去分析认识它们了.

举个例子.

有一次,我曾对一所高中数学奥林匹克学校的学生提出一个问题:

请你写出,命题“直角相等”的否命题.

居然,在数百名数学学习的尖子生中,几乎没有人能正确作出回答.他们异口同声地答道:所求否命题是,“不是直角不相等.”

问他们,根据是什么?他们说,一个命题的否命题,就是在原命题的题设和结论的前面,分别添上“不是”两个字.

多么表面和肤浅的理解!

因为,所谓添上“不是”二字,只是形式.它的实质,是要把原来的说法否定,就是写出原来说法的反面情况.

原来题设的反面情况是什么呢?

$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \dots, \angle n$  都是  $90^\circ$  的反面情况,既包括它们都不是直角,也包括它们之中有的角是直角,有的角不是直角,一言以蔽之,应当说,  $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \dots, \angle n$  不都是直角.

同样地,  $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \dots, \angle n$  都相等的否定,应当是,不都相等.

这样,所提问题的正确回答应当是,“不都是直角的角,不全相等.”

同学们所犯错误的根源,即在于,对于“不是”的理解只求表面现象,不抓实质.

其实,这个错误,不仅暴露了同学们对“否命题”概念的理解还停留在表面上,而且,对于“补集”概念的理解,也没有抓住实质.

如果,记  $\angle 1 = 90^\circ$  为  $A_1$ ,  $\angle 2 = 90^\circ$  为  $A_2$ ,  $\angle 3 = 90^\circ$  为  $A_3$ ,  $\dots$ ,  $\angle n = 90^\circ$  为  $A_n$ , 那么,  $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \dots, \angle n$  都是直角,就可表示为  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ , 那么,它的补集是  $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \dots \cup \overline{A_n}$ , 意思就是,  $\angle 1 \neq 90^\circ$ , 或,  $\angle 2 \neq 90^\circ$ ,  $\dots$ , 或  $\angle n \neq 90^\circ$ , 换言之,  $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle n$  不都是直角.

类似地可以得到:  $\angle 1 = \angle 2$ , 并且,  $\angle 1 = \angle 3$ , 并且  $\angle 2 = \angle 3, \dots, \angle (n-1) = \angle n$ . 它的补集是,  $\angle 1 \neq \angle 2$ , 或  $\angle 2 \neq \angle 3$ , 或  $\angle 1 \neq \angle 3, \dots$ , 或  $\angle (n-1) \neq \angle n$ , 即  $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \dots, \angle n$  不都相等.

由此看来,无论是在理解“否命题”这个概念,还是在理解“补集”这个概念时,如果能抓住它们的实质,上述错误都可避免.不仅如此,还将发现,在课本上,相距“迢迢”的两个概念(“否命题”出现

在初中《几何》中,“补集”出现在高中代数中),竟然互相沟通了起来。

挖掘知识之间的联系,会使我们加深对每个知识的理解,它,多么重要!

## 二、在类比中发现和谐,简化记忆

数学,是中学课程中的一门主科,课时最多,内容浩瀚,记忆和掌握起来,都比较困难。

站在系统的高度,注意比较知识间的联系和区别,不但有利于抓住问题本质,而且可以找出规律即共性,简化记忆,便于掌握。这也是因为,联系、规律、和谐,正是数学科学的本来面目。

举一个例子。

如果在学习初中代数正比例函数  $y = kx (k \neq 0)$  的图像时,注意到函数的图像是随函数解析式中常数  $k$  的不同而不同,换言之, $k$  决定着图像直线的位置。在这里, $k$  的符号,决定着直线所在象限的位置; $|k|$  则决定着直线向上方向和  $y$  轴正向夹角的大小。而当  $k$  值遍取  $(-\infty, +\infty)$  上的全体实数时,直线  $y = kx$  则绕原点旋转而扫遍除  $y$  轴以外的整个坐标平面(若允许  $k = 0$ )。

这样,后来学习二次函数  $y = ax^2 (a \neq 0)$  时,可以事先就猜想,是否常数  $a$  的取值将决定曲线  $y = ax^2$  的位置? 结果发现  $a$  的符号决定着曲线所在象限的位置情况; $|a|$  则决定着曲线与  $y$  轴的相对位置情况;当  $a$  值跑遍在  $(-\infty, +\infty)$  上的全体实数时,曲线  $y = ax^2$  将扫过除  $y$  轴之外的整个坐标平面。那么,这将在入门伊始,就抓住了学习二次函数的关键,使得利用二次函数求最大(小)值,解一元二次不等式等一系列问题,不难得到解决。

当然,由于  $y = ax^2$  的图像是一条曲线, $|a|$  在决定曲线与  $y$  轴相对位置的时候,已经影响了曲线的形状。

升入高中,学习幂函数  $y = x^a$ ,在同样思想的指导下,不难发现,仍是常数  $a$  决定着曲线  $y = x^a$  的位置和形状。当然,由于常数的位置发生了变化,从系数的位置,移动了指数的位置,那么,常数  $a$  的符号,已不再决定曲线所在象限的位置情况,而是决定曲线通过  $(0,0)$  点还是  $(1,1)$  点; $|a|$  则决定着曲线在  $x$  取定某个值时,曲线的曲率情况。但有一方面又是类似的,即  $a$  跑遍在  $(-\infty, +\infty)$  上的实数时,曲线扫遍除直线  $x = 1$  以外的整个第一象限。

以上的两次类比,启发我们去想像,函数解析式中的常数,可能总是以某种分类方式(按符号分类,是以 0 作为界点的分类)来影响着函数图像曲线的某种特征,而且,当这个常数跑遍它所允许范围内的每个实数时(是连续取值),图像曲线总是扫遍某个区域。

对于指数函数  $y = a^x (a > 0, \text{并且 } a \neq 1)$ ,由于  $a > 0$ ,我们以 1 作分类的界点。当  $a > 1$  时,函数图像曲线呈上升状态;当  $0 < a < 1$  时,曲线呈下降状态; $|a|$  较大时,则在曲线的高于直线  $y = 1$  的部分,较靠近  $y$  轴正向; $|a|$  较小时,则在曲线的高于  $y = 1$  的部分,比较远离  $y$  轴正向。抓住了这几点,以及曲线都在  $x$  轴上方并且通过  $(0,1)$  点,那么,熟记指数函数的各种性质,将易如反掌。

例如,由于曲线都在  $x$  轴上方,当然,  $y > 0$ ,如图 2-1 所示。

又如,  $0 < a < 1$  时,曲线呈下降状态,当然函数  $y = a^x$  为减函数,如图 2-2 所示。又由于,曲线通过  $(0,1)$  点,当  $x < 0$  时,  $y > 1$ ; 当  $x > 0$  时,  $y < 1$ ,如图 2-2 所示。这样掌握和记忆指数函数的性质,当然比单纯死记用列表法写出的性质表,要好得多了。

关于对数函数  $y = \log_a x (a > 0, \text{并且 } a \neq 1)$  中常数  $a$  作用的讨论,与对于指数函数中  $a$  的讨论十分相似,请读者自己动手完成。

上述这种讨论,对于高中数学中所学习的最后一种函数——三角函数,同样是有益的。



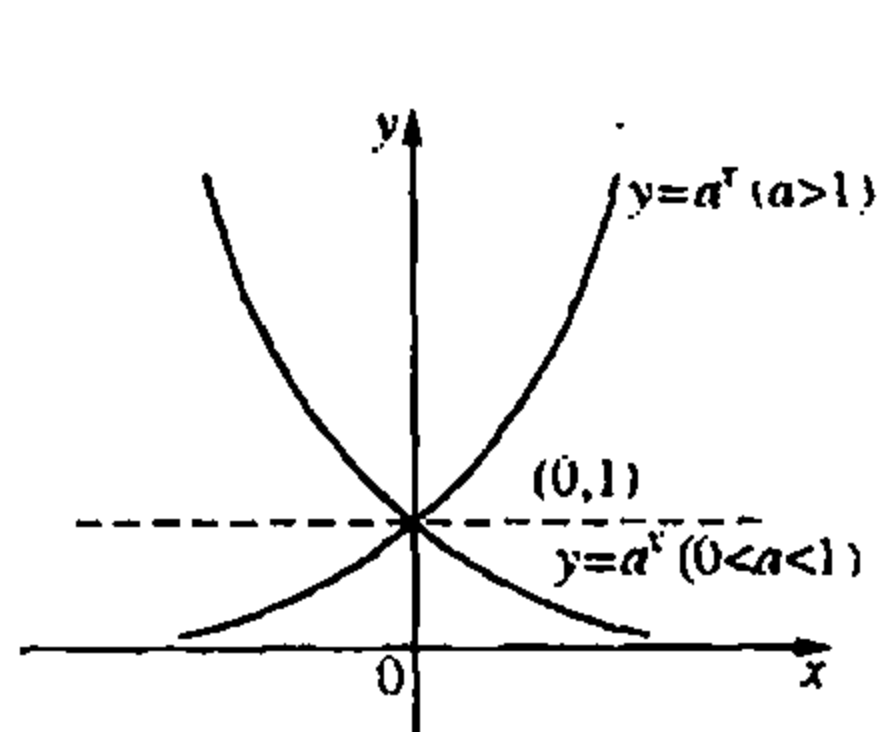


图 2-1

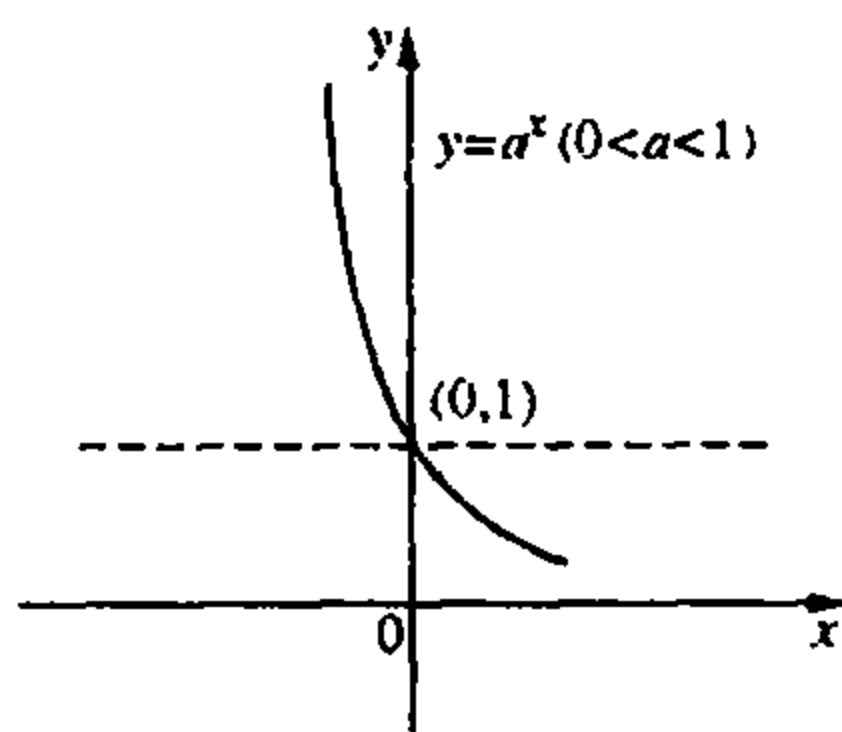


图 2-2

例如,在  $y = a\sin(\omega x + \varphi_0)$  中,有三个常数:  $\omega, \varphi_0, a$ .

比较  $y = \sin\omega x$  与  $y = \sin x$ ,  $|\omega|$  大于 1 或是小于 1,决定着  $y = \sin|\omega|x$  是对曲线  $y = \sin x$  在 原点处固定后,沿  $x$  轴向两方进行压缩或伸长变换;而  $\omega$  的符号,则决定着曲线  $y = \sin\omega x$  是否由曲线  $y = \sin|\omega|x$  以  $x$  轴为对称轴,作翻转变换.

对于常数  $a, \varphi_0$ ,也可以作类似的分析,请同学们自己动手去完成.

上述讨论,从对函数解析式中常数作用的类比分析,使我们对函数性质的认识系统化了.

甚至,对于等差数列、等比数列,也可以做类似的讨论.

因为,数列  $\{a_n\}$  可以看做是以  $n$  为自变量的一种函数(离散型函数),那么,在等差数列  $a_n = a_1 + (n-1)d$  的图像中,常数  $a_1$ ,是排头兵的高度,而常数  $d$  的符号和绝对值,就对于图像的点列是呈上升还是下降的状态,以及点列中相邻两点的高度差,起着决定作用.在等比数列中,也有类似的分析,请读者完成.

回顾上面的类比和总结,它使代数中许多分散的知识,统一在一个认识之下,这种系统化的结果,加深了理解,简化了记忆.

顺便说一句,从对解析式中常数的某种分析入手,分析相应曲线的特征,是一个常用的方法,不仅适用于代数,我们还可举个解析几何的例子:

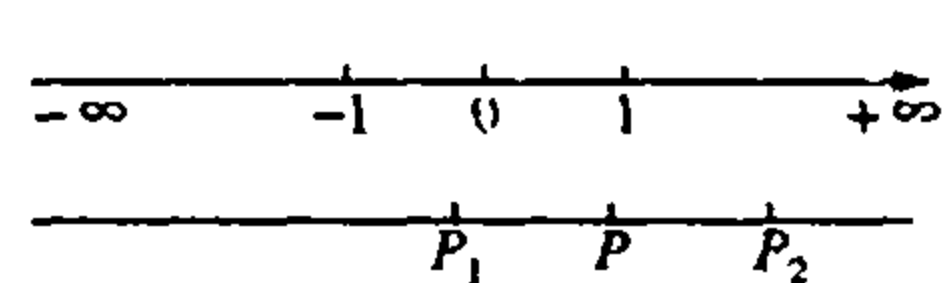
在分析坐标平面上的线段的定比分点公式时发现,对于  $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ ,  当  $\lambda$  从  $-\infty \rightarrow +\infty$  遍取全体实数时,分点  $P$  跑遍  $P_1P_2$  直线,如图 2-3 所示.

图 2-3

当  $\lambda = 0$  时,  $P$  点和  $P_1$  点重合;当  $\lambda$  由  $0 \rightarrow 1$  时,  $P$  点由  $P_1$  向  $P_1P_2$  的中点移动;当  $\lambda = 1$  时,  $P$  点在  $P_1P_2$  的中点上;当  $\lambda$  由  $1 \rightarrow +\infty$  时,  $P$  点由  $P_1P_2$  的中点向  $P_2$  移动,从  $P_2$  的左侧,无限接近  $P_2$ ;而当  $\lambda$  由  $-\infty \rightarrow -1$  时,  $P$  点从  $P_2$  的右侧无限接近  $P_2$ ,沿  $P_1P_2$  的方向,向无穷远方移动;当  $\lambda$  从无限接近  $-1$  的  $-1$  右侧向 0 连续取值时,  $P$  点则从沿  $P_2P_1$  方向的无穷远方移向  $P_1$ ,直至  $\lambda = 0$  时,  $P$  再次回到  $P_1$  上.

这个讨论还使我们发现,整个过程是一个从实数集( $\lambda$  取值)到点集直线  $P_1P_2$  ( $P$  点位置)上的一一映射,这样几何和代数又融合到一起了.

并且,在这里又出现了本篇第 1 章例子中所出现的有趣现象:当  $\lambda$  往两个相反方向趋向无穷远时,  $P$  点在直线  $P_1P_2$  上,却从两个方向无穷趋近于一点  $P_2$ ;当  $P$  点在  $P_1P_2$  直线上往两个相反方向趋向无穷远时,  $\lambda$  则在数轴上从两个方向无穷趋近于一点  $-1$ .不言而喻,解释这个乍看矛盾、细想合理的有趣问题,当然又超出了中学数学的范围,而要到非欧空间中了.

上面两个例子表明,抓住知识之间的联系和规律学习数学,是深入到数学王国去的好方法.

# 第3章 把知识的学习、能力的培养、素质的发展与完善有机地结合起来

## 一、主动学习

一个学生的学习过程,有人把它分成了“预习”、“课堂听讲”、“复习”三个环节.也有人把“预习”、“课堂听讲”合并为“听讲”,因为“课堂听讲”是听老师讲,“预习”则是听编书人在讲.也有人把“复习”分为“做作业”和“复习”两个环节.

本书第一篇的第5章和第三篇,将分别就“做题”和“复习”时的主动学习问题提出看法.本章主要谈谈“听讲”时的主动学习问题.

听讲要专心,但专心的标准是什么?

人们当然会回答:精神集中,不走神.

我认为,这并不是一个理想的回答.因为,只做到把精神集中到老师的讲授内容上,是跟在老师的后边亦步亦趋呢,还是把老师的讲解作为一个因素,独立思考、主动思考,创造性地进行思维,这两者之间就有很大差别了.

听讲时,紧跟老师,把老师的每一句话都听进耳朵里,再弄懂它的意思,从而把它们都记熟.一般地说,这对于知识的学习,能收到较好的学习效果,但总是处于被动的状态,思维的创造性和飞跃都会受到限制.

怎样才能摆脱这种被动,我建议同学们,给自己的课堂听讲应当规定下面这样两条要求.

一是要“超前思维”.这是指,一个概念提出来了,自己先试着去定义它;一个命题提出来了,自己先试着去判断它的真假;一个定理或公式写出来了,自己先试着去证明它;一道例题写出来了,自己先试着分析、解出它;甚至在学习过程中,自己设想,该提出什么命题了,该定义什么概念了等.总而言之,让自己的思维跑在老师讲解(包括预习阅读时的文字叙述)的前面,达不到大跨度的超前时,则争取设想老师正在说着的这句话的下一句话是什么.

这样做的结果,由于名词、定理、公式是自己定义、推导出来的,身临其境,清楚过程中的坎坎坷坷,当然理解就深刻,掌握就会牢固.即使将来忘记了,自己还可以再重新推证出来.而且是在游泳中学游泳,推理能力、思维能力经常得到训练,当然会逐步地得到培养提高.

二是在判断问题时,敢于“向老师挑战”.在进行“超前思维”的听课中,有时老师已经讲出了结论,自己还没想出来;或者老师想出了一种解题思路,自己的思路却没完成,这时该怎么办?

我想,从“一分为二”的观点出发,两种极端都是不可取的.

一种极端就是前面所讲的,完全做老师讲课的尾巴、应声虫;另一种极端是,完全撇开老师,自己另搞一套.

我建议,如果自己的想法和老师的大体一致,要分析老师之所以能完成的原因,找到自己的症结是在知识上,还是在方法上,或是在思维上?如果自己的大致判断和老师的结论不一致,那么,不妨试试去推翻老师(包括书上)的结论.

为什么要这样做?因为,第一,老师(包括书上)的结论未必永远正确;第二,在你失败的尝试推翻的过程中,将会从反面加深对概念的理解.同时,这种独立构思、带有辩论性质的论证,更有助于

能力、素质的发展.

举一个例子说明这个道理.

我送走的 1992 届的高三(4)班,是 1986 年 9 月我从初一开始教起的.我一直鼓励学生在数学课上挑我的错,反对我.记得 1988 年 2 月份上初二时,我为了说明数形结合的好处,在黑板上写了这样一道题:

**例 1** 已知  $a < b < c$ ,  $x$  代表实数,求  $|x-a| + |x-b| + |x-c|$  的最小值.

课上,除了不会做的同学之外,绝大多数同学是这样解的:

先把“||”号打开,这时,根据实数绝对值的定义得到

$$\text{原式} = \begin{cases} -x+a-x+b-x+c = -3x+a+b+c & (x \leq a) & \text{①} \\ x-a-x+b-x+c = -x-a+b+c & (a < x \leq b) & \text{②} \\ x-a+x-b-x+c = x-a-b+c & (b < x \leq c) & \text{③} \\ x-a+x-b+x-c = 3x-a-b-c & (x > c) & \text{④} \end{cases}$$

在①中,由于  $x \leq a$ ,  $x$  的系数为  $-3$ ,所以①式的最小值在  $x=a$  时取得,所以

$$\text{①式值} \geq -2a+b+c = c-a+b-a > c-a$$

在②中,由于  $x$  的系数为  $-1$ ,  $x \leq b$ ,所以②式的最小值在  $x=b$  时取得,所以

$$\text{②式值} \geq -b-a+b+c = c-a$$

在③式中,由于  $x$  的系数为  $1$ ,  $x > b$ ,所以

$$\text{③式值} > b-a-b+c = c-a$$

在④式中,由于  $x$  的系数为  $3$ ,  $x > c$ ,所以

$$\text{④式值} > 3c-a-b-c = c-a+c-b+c-c > c-a$$

综合以上可得,原式的最小值是  $c-a$ ,这时  $x=b$ .

我很高兴看到同学们都是这个解法,因为,这恰好给了我个机会,用我的简单得多的解法与之比较,来说明数形结合的重要性.

我的解法如下,

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-a| + |x-b| + |x-c| \\ \text{则} \quad f(x) &= \begin{cases} -3x+a+b+c & (x \geq a) \\ -x-a+b+c & (a < x \leq b) \\ x-a-b+c & (b < x \leq c) \\ 3x-a-b-c & (x > c) \end{cases} \end{aligned}$$

它的图像如图 3-1 所示.

显然,当  $x=b$  时,  $f(x)$  取得最小值,这时

$$f(x) = -b-a+b+c = c-a$$

当我刚刚把我的解法讲解完毕,李毅同学就把手举了起来,他说:“老师,我的解法比您的解法更简单.”

他的解法如下,

$|x-a|$  的几何意义是:在数轴上,表示数  $x$  和  $a$  的两个点之间的距离.

于是,求  $|x-a| + |x-b| + |x-c|$  最小值的意义就是在数轴上求一点  $x$ ,使它到  $a, b, c$  三个点的距离和最小,那么,如图 3-2 所示,当这个点  $x$  取在点  $b$  的位置时,它到  $a, b, c$  三点的距离和最小,为  $c-a$ .

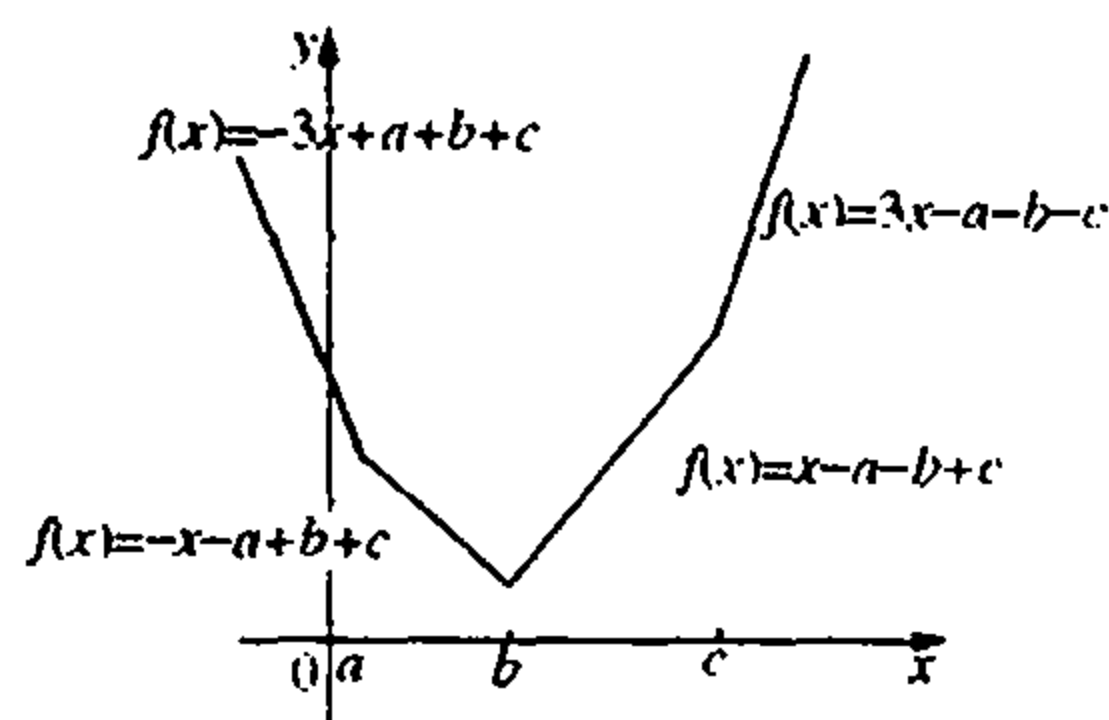


图 3-1

因为,点  $x$  取在  $b$  以外的任何位置时,三条线段  $|x-a|, |x-b|, |x-c|$  都有重复部分,因而总长度大于  $c-a$ ,如图 3-3 所示.

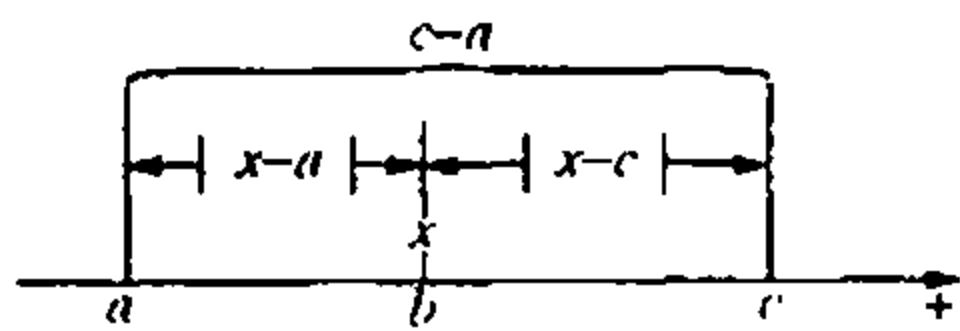


图 3-2

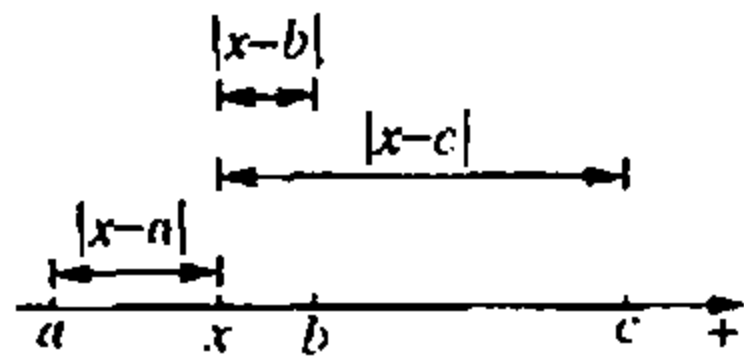


图 3-3

这个解法多么漂亮,大大简捷于老师的解法.

为什么能得到这个简捷的解法?

原因之一是,对绝对值概念的多方位认识,因而理解广泛,应用灵活;

原因之二是,面对问题,从代数到几何,换了个思考角度;

原因之三是,从心理上,不只是跟在老师的后面亦步亦趋,而敢于向老师“挑战”,独立思考,这一条是前提,是一切的出发点.

一年后,1989 年 4 月,李毅同学在“全国初中数学联赛”中获北京赛区一等奖. 之后,他又获“北京市初中物理竞赛”二等奖,并越级参加“北京市高一数学竞赛”,再获一等奖. 半年后,刚上高二的李毅同学,又在“全国高中数学联赛”中,两试都得满分,并列北京市和全国第一,1991 年又获一等奖和北京赛区第一名.

主动学习的做法,成为李毅同学在能力和素质上逐步提高的一个因素.

在这个班上,和李毅同学同时在 1989 年 4 月“全国初中数学联赛”中获北京赛区一等奖和二等奖的还有 6 名同学,其中 2 名在越级参加“北京市高一数学竞赛”时,再获一等奖. 半年后,刚进入高一年级学习的他们,在参加“全国高中数学联赛”时,除李毅同学得满分获一等奖外,又有 3 人获三等奖. 1991 年廖翊民获一等奖,另 2 人获二等奖,1 人获三等奖.

在听讲中能主动学习,是他们的共同特点.

当然,如前所述,在听讲时主动学习,并不是把老师的讲课放在次要地位. 多数情况下,老师的理解是要深刻得多,方法也要高明得多. 这时,学生主动学习,不仅要弄懂老师的意思,弄懂老师的方法,更应当弄清老师(包括课本)之所以这样想、之所以得到这个解法的全部酝酿过程.

例如,高中《代数》不等式这一章有一道习题:

已知  $n > 0, n \in R$ .

求证  $n + \frac{4}{n^2} \geq 3$ .

很多同学证不出来,因为,应用平均数不等式  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ,于是

$$n + \frac{4}{n^2} \geq 2 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{4}{n^2}} = \frac{4}{\sqrt{n}},$$

接着就证不下去了. 第二天上课,一看老师用的是平均数不等式

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} (a, b, c \in R^+),$$

因而

$$n + \frac{4}{n^2} = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{4}{n^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{4}{n^2}} = 3.$$

解法这么简单,使学生们后悔得直拍大腿,埋怨自己怎么糊涂了,没想到这个平均数不等式呢?



那么,这时一定要想一想,老师为什么就想到这个平均数不等式了呢?  
恐怕,老师一开始也是想到了不等式

$$a + b \geq 2 \sqrt{ab} \quad (a, b \in R^+),$$

但在应用时,得

$$n + \frac{4}{n^2} \geq \frac{4}{\sqrt{n}},$$

不等式的右端式子中含有变量  $n$ ,就无法确定最小值是多少了.

不等式的右端出现  $n$  的原因是什么呢? 是因为,在不等式右端的根号内进行约分的过程中,分母中的  $n$  比分子上的  $n$  多了一个(即  $n + \frac{4}{n^2} \geq \sqrt{n \cdot \frac{4}{n^2}}$ ).

这样,为了使分子上也多出来一个  $n$ ,才把  $n$  拆成

$$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2},$$

但是,思考并不应该到此结束.

因为,把  $n$  拆成  $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ ,可以达到把  $\frac{4}{n^2}$  分母上的  $n$  全部约掉的目的,但把  $n$  拆成  $\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}$ ,或  $\frac{n}{4} + \frac{3n}{4}$ ,...,不同样可以把  $\frac{4}{n^2}$  分母上的  $n$  全部约掉吗? 为什么不这样拆呢?

这里的原因是,不等式  $a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}$  中的“=”号,当且仅当  $a = b = c$  时才成立. 而如果把  $n$  拆成  $\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}$  时,  $\frac{n}{3}$  和  $\frac{2n}{3}$  是不可能相等的. 所以,为了解出本题,正确的处理就只能是,把  $n$  拆成  $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ .

到这里,才算把老师得到他的解法的想法弄清楚了,才会对自己今后的解题思维水平的提高有所裨益.

## 二、注意学习、积累和掌握数学方法与思想

在数学学习中,主动学习的具体内容是什么? 在学习概念、理解定理、解答习题过程中提高自己,应该着眼于何处呢?

应注意积累、掌握数学方法和思想.

这里所说的数学方法,既包括一些具体的证明方法、计算方法(如将在本篇第4章中所剖析的“数学归纳法”),也包括一些抽象的解决数学问题的思考方法(如将在本篇第4章中所总结的“形成正确的空间想像”). 而数学思想,是指导处理数学问题时的观点,它是一些哲理性观点在数学中的体现(如本章中所提到的“运动”的观点、“对称”的观点、“一分为二”的观点).

下面举几个例子,谈谈怎样积累和应用数学思想和方法.

### (一) 转化归结思想

把新课题转化归结到已经解决的旧课题上再加以解决,是典型的数学方法.

得以运用它解决问题的关键有两个:一是善于发现应与新课题相联系的旧课题;二是善于设计转化的方法.

举一个例子.

在初一第二学期的一堂课上,彭壮壮同学听我讲公式

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a, b \geq 0),$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (a > 0, b \geq 0)$$

的证明.

课本上用类似的方法,对两个等式分别证明如下:

$$(1) \because a, b \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a \cdot b}, \sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0,$$

$$\text{又} \because (\sqrt{a \cdot b})^2 = ab, (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab,$$

$$\therefore \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

$$(2) \because a > 0, b \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a} > 0, \sqrt{b} \geq 0, \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq 0, \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 0,$$

$$\text{又} \because \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{b}{a}, \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2} = \frac{b}{a},$$

$$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

而彭壮壮同学却运用转化归结的思想,借助于刚刚证出的第一个公式,去证明第二个公式,到黑板上写出了如下的证明:

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a} \cdot a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (a > 0, b \geq 0).$$

几个月后,对于公式

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (M, N > 0, a > 0, \text{且 } a \neq 1)$$

的证明,几乎全班同学,都立即想出了较课本上的证明简单得多的证法,即借助于刚刚证出的公式

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (M, N > 0, a > 0, \text{且 } a \neq 1)$$

来证明这个公式,

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a \frac{M}{N} + \log_a N - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \cdot N - \log_a N = \log_a M - \log_a N$$

$$(M, N > 0, a > 0, \text{且 } a \neq 1)$$

这是因为,彭壮壮同学对转化归结思想的运用,启发了大家.

又过了一年多上初三了(我们讲高一功课),对于公式

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

的证明,在高中数学中不要求,因为证明过程很长. 比较起来,第二个公式的证明更麻烦,但彭壮壮同学却借助于第一个公式,证出了第二个公式.

因为

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)} = \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$$

根据第一个公式,

$$\text{上式} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) = \overline{(A \cup B)} \cup \overline{(A \cup C)} = \overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

所以

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

整个证明,同一般大学生用的方法比较,要简捷得多,漂亮得多.这说明,转化归结的思想,在化难为易、化复杂为简单上的重要作用.事实上,这种思想不但在学习新概念、新公式时常常用到(例如在高等代数中,许多定理的证明,是先证明它在一个特殊情况下成立,然后,只要通过一定的设计,把一般情况转化为特殊情况),而且在解题中的应用更加广泛.

当时奇怪的是,为什么只有彭壮壮同学想出了这个证法呢?不是大家都掌握了转化归结思想吗?

我想原因在于,当初是彭壮壮同学在听讲时用主动学习的精神,敢于向老师(课本)“挑战”,独立思考,自己发现总结出来了“成果”——转化归结思想,因而,他的理解就更深刻,掌握也更牢固.

## (二) “动”的思想方法——换个角度看问题

“生命在于运动”,这是医生最愿意讲的一句话.事实上,“运动”的观点,是辩证法的核心.

本书第一篇第4章五“一个思考方法的学习与小结”中,将介绍用“动”的思想“形成正确的空间想像”.

而本节,则是用“动”的思想的另一个含义——换个角度看问题.思考过程受阻时,换个角度看问题,常常是打破僵局的希望.

这种思考方法的价值,在本书第一篇第4章五(二)中的例37的思考分析中已经表现了出来,把思考的立足点,从只想让 $AB$ 作梯形的底,转移到让 $AB$ 作梯形的一腰,才使问题考虑全面,得到正确的答案.

事实上,大数学家高斯幼年时巧算 $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$ 的问题,也是换个角度看问题的结果.

原题所显示的看问题的方向是如箭头所示:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

而小高斯则是站在对准50的位置上看问题,

$$1, 2, \cdots, 49, 50, 51, \cdots, 99, 100$$

如图3-4所示,因而得到了简便算法.

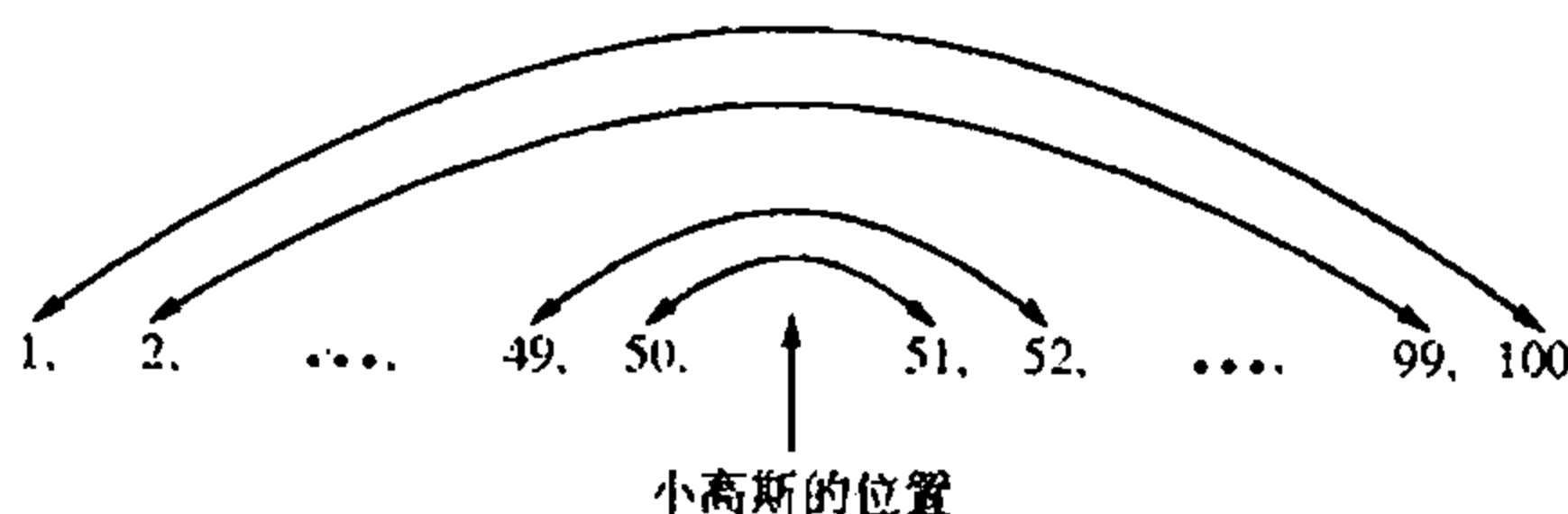


图 3-4

下面看一道较难的数学竞赛试题.

**例2** 已知 在 $2n \times 2n$ 的方格棋盘中放 $3n$ 个棋子,每格至多放一个棋子,如图3-5所示,如果棋盘的每一横行称为行,每一纵行称为列.

**求证** 这 $3n$ 个棋子,至多占有 $n$ 行、 $n$ 列,即至多用 $n$ 个行条、 $n$ 个列条可以把这些棋子都盖住.

**分析** 为了用有限的条子把棋子都盖住,开始时,应尽量使每条条子多盖一些棋子,由于条子只有 $2n$ 张,棋子有 $3n$ 个,那么,必定需要一部分条子所盖的棋子数目 $\geq 2$ .这时,就找到了解决本问题的入手点.

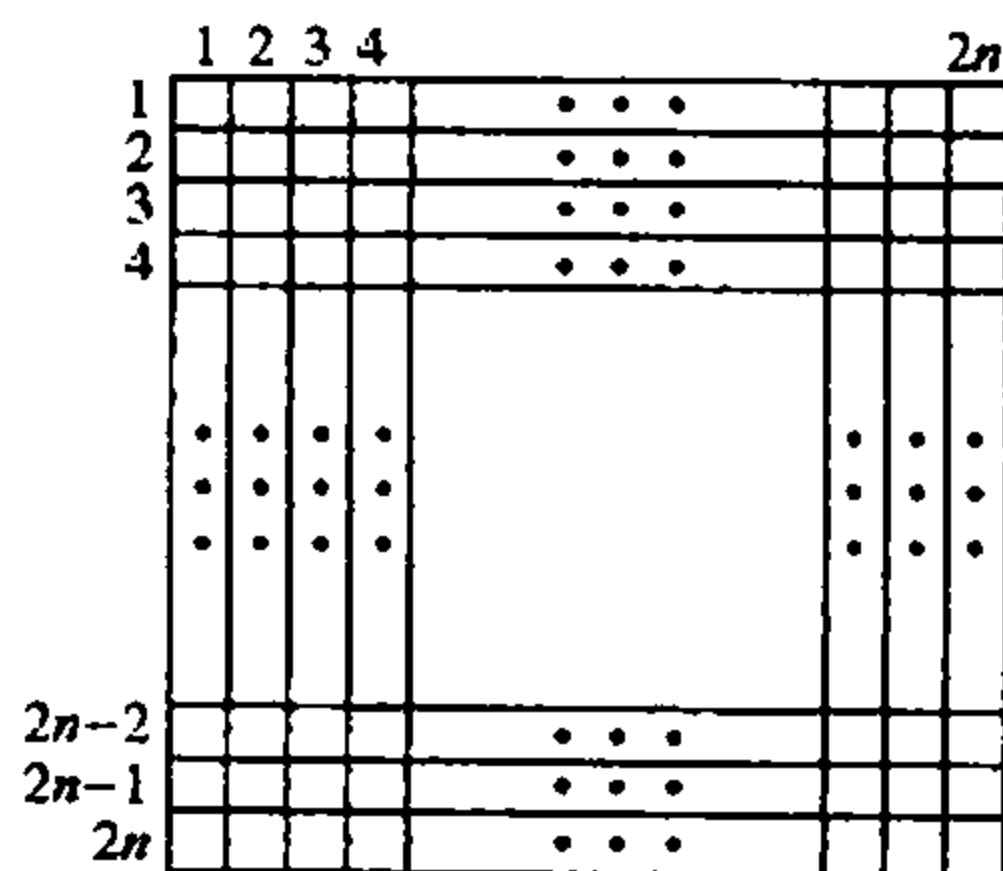


图 3-5

1° 当棋盘中;每行的棋子数大于等于 2 的行数  $\geq n$  时,先用  $n$  行条子盖住其中的  $n$  行,这时,所盖住的棋子总数  $k \geq 2n$ .

这样,所剩棋子总数为  $3n - k \leq n$ ,那么再用  $n$  列条子,足可以全部盖住它们(因为每列条子至少可以盖住一个棋子).

2° 当棋盘中,棋子数大于等于 2 的行数  $< n$  时\*,先从  $n$  行条子中取出一部分把它们盖住,设用去了  $l$  行,盖住了棋子  $2l$  个,再用剩下的  $n - l$  行条子去盖每行一个棋子的行,这时,总共盖住的棋子数为

$$k \geq 2l + (n - l) = n + l.$$

再往下的推证就比较困难了,势必讨论这  $l$  行中棋子更精确些的总数问题,可以说,问题变得复杂,一时陷入僵局.

这时,如果我们换个角度考虑问题:

对情况 2°(从带有“\*”标记的地方开始),先用  $n$  行盖住这些行和另外一些行.

由于所剩  $n$  行内每行棋子数不超过 1,因而所剩棋子总数不超过  $n$ ,那么,再用  $n$  列条子,足可以把它们都盖住.证毕.

多么简捷明了!原因在哪里?

原因是,对于情况 1°,是用  $3n$  减去被盖住的棋子总数来证明剩余棋子总数不大于  $n$ .

而对于情况 2°,则是用剩余行数为  $n$  证明剩余棋子总数不大于  $n$ .

从情况 1°到情况 2°,因条件的改变使原思路受阻,这时应立刻抓住特点,把看问题的角度,从观察盖住的棋子总数转移到尚未盖住棋子的行数上.

以上举例中的换个角度看问题,都是指原来总的思路不变以及过程中随机应变而说的.

有时则是应从受阻的地方,退回到出发点,改变开始时的思考方向,甚至,从代数的思考跨到几何上,或从几何跨到代数上.

**例 3** 在  $y$  轴正向上有两点  $A(0, a), B(0, b)$ , 并且  $b > a$ , 试在  $x$  轴正向上求一点  $P$ , 使得  $\angle APB$  最大, 如图 3-6 所示. (1986 年全国高等学校统一招生考试理工类数学第五题)

**分析** 当年 95% 以上的考生解不出此题, 因为, 大家用余弦定理, 得到

$$\cos \angle APB = \frac{(x^2 + a^2) + (x^2 + b^2) - (b - a)^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}$$

后, 由于分式的分子分母上都含有变量  $x$ , 难以讨论分式的最小值, 进而得到  $\angle APB$  的最大值, 因此就无法前进, 半途而废了.

其实, 如果这时从受阻的地方, 退回到出发点, 改变开始时的思考方向, 从解析几何的思考, 跨到平面几何上, 问题便意想不到地迎刃而解了.

当然, 用平面几何的思考来解决这个问题的分析中, 也要处处用“动”的思想作指导. 思考方式如下:

让点  $P$  在  $x$  轴正向上运动, 显然, 当  $P$  无限靠近原点或无限远离原点时,  $\angle APB$  都趋近于零, 如图 3-7 所示.

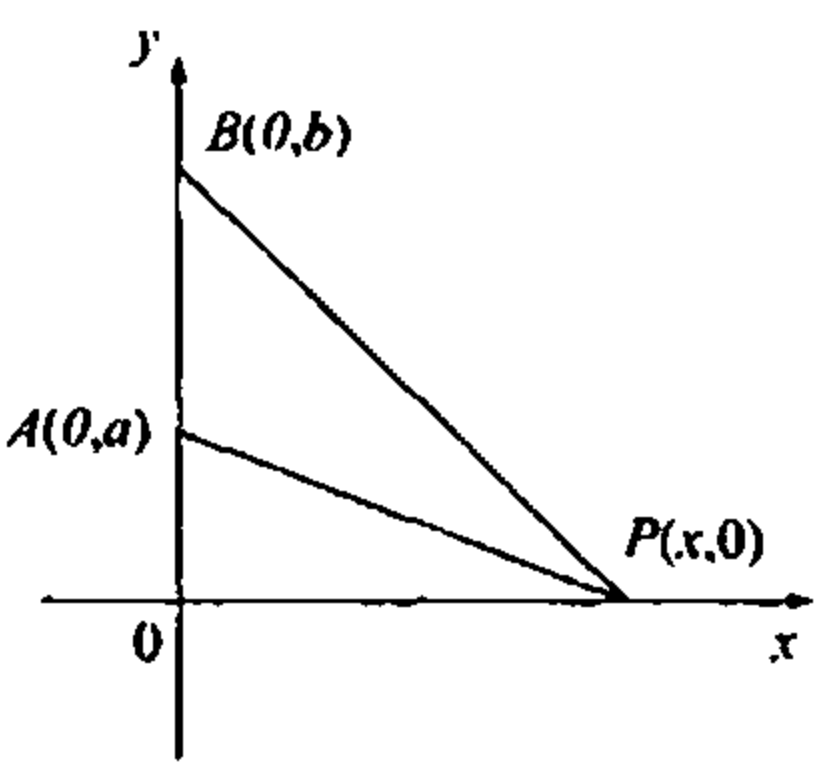


图 3-6

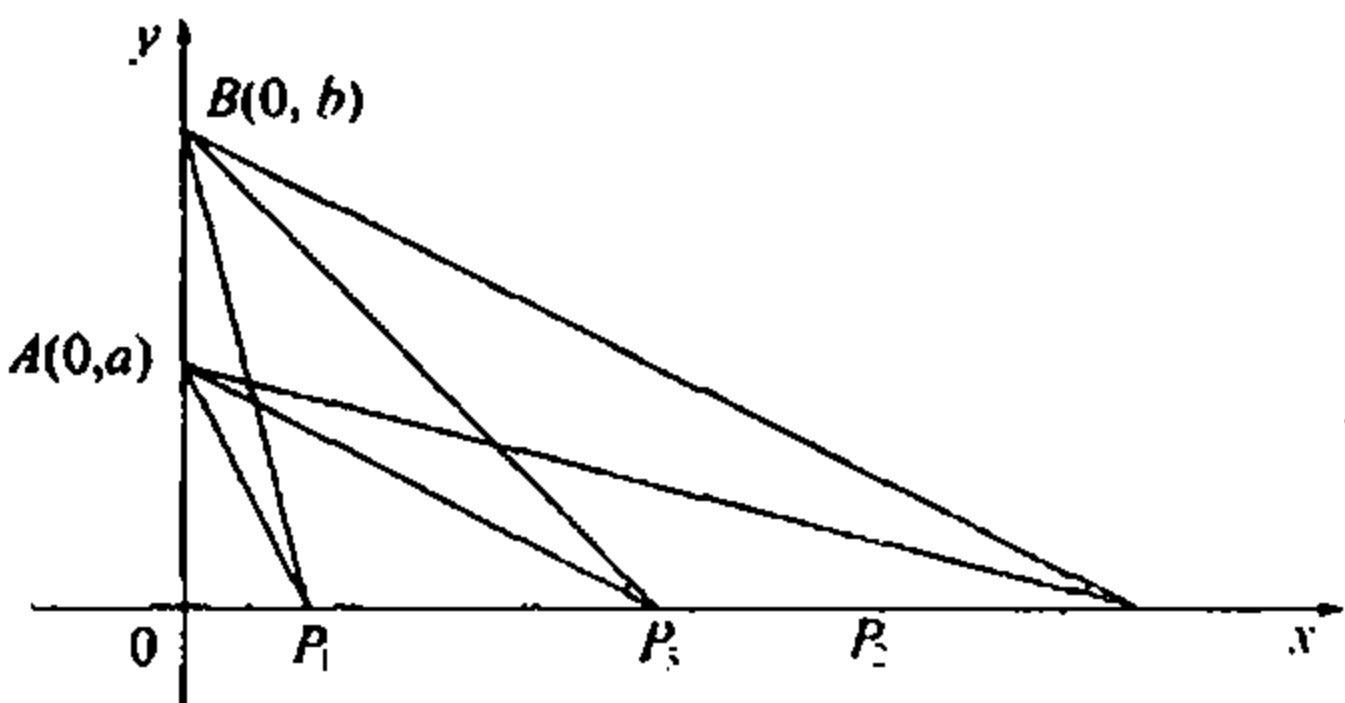


图 3-7

因而,在  $x$  轴正向上,必存在  $P_1, P_2$  两个点,使  $\angle AP_1B = \angle AP_2B$ , 由于这两个角都立于线段  $AB$  上,根据平面几何的知识,  $P_1, P_2$  必在以  $AB$  为弦的同一个圆  $O'$  上,并且在  $AB$  弦的同侧(初中《几何》课本提到点的轨迹). 即  $P_1, P_2$  是过  $A, B$  两点的一个圆与  $x$  轴正向的两个交点(见图 3-8).

根据立于同弧  $AB$  上的圆内角大于圆周角(这里,可以用“动”的思想把立于同弧的圆内角、圆周角、圆外角排成从大到小的顺序),那么,  $x$  轴正向上,在  $P_1, P_2$  之间的  $P$  点,当然有  $\angle APB > \angle AP_1B$ ,  $\angle APB > \angle AP_2B$ .

这时,再运用“动”的思想指导思考,让  $P_1, P_2$  距离越来越短,那么,  $P$  点可取的范围就越越来越小. 根据圆和直线的位置关系,必然存在一个时刻,使圆  $O'$  和  $x$  轴正向只有一个交点  $P$ , 即,圆  $O'$  与  $x$  轴正向相切(见图 3-9). 这时,  $\angle APB$  大于一切  $\angle AP'B$ . 这里的点  $P'$ , 是  $x$  轴正向上异于  $P$  的点,因为,立于同弧的圆周角大于圆外角.

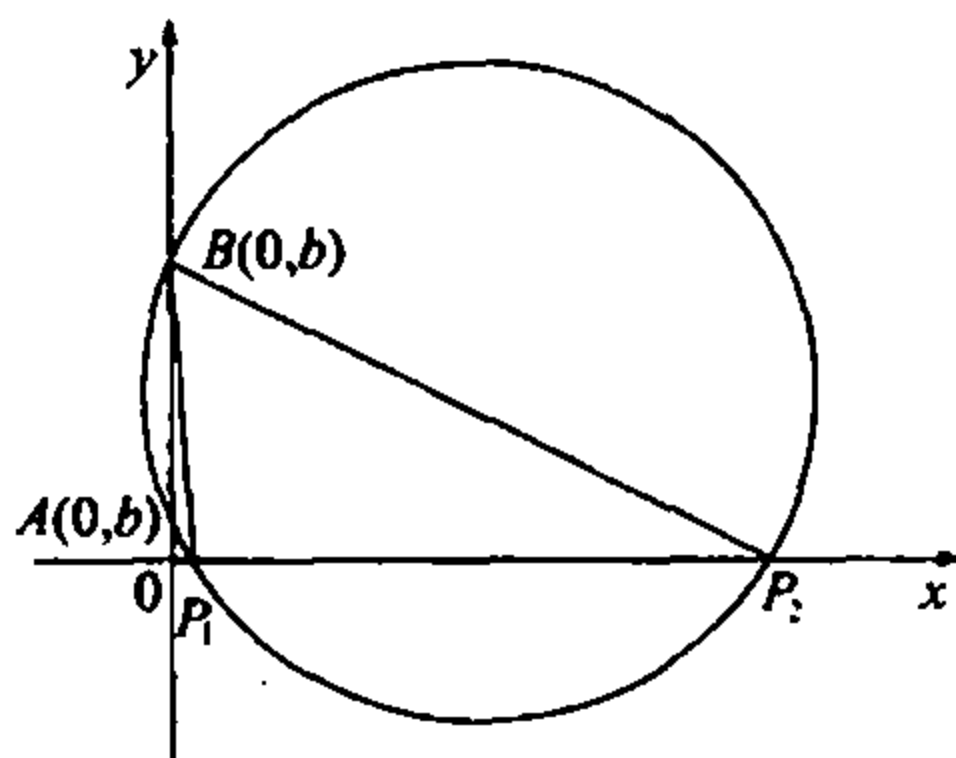


图 3-8

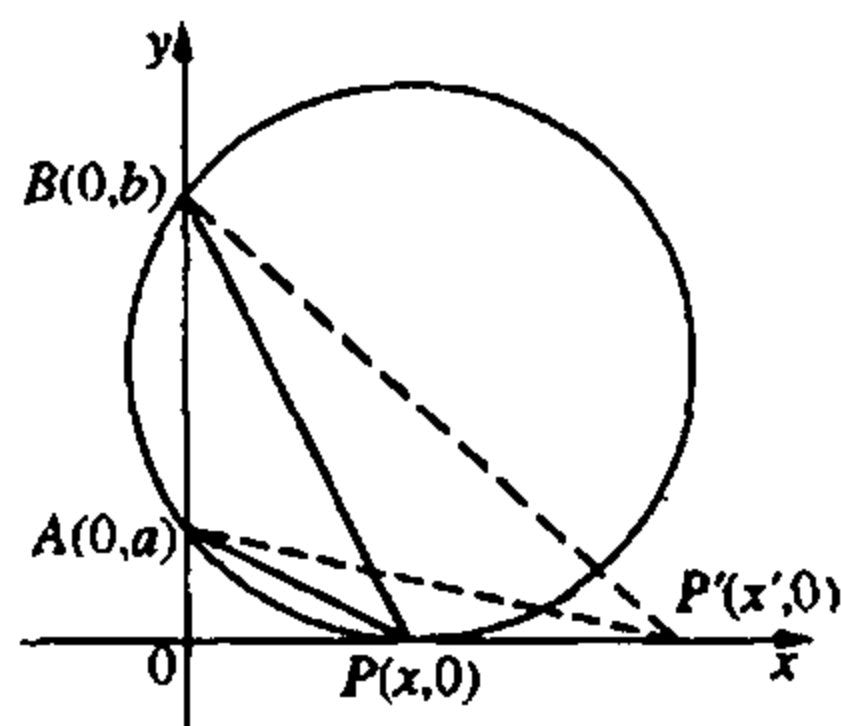


图 3-9

所求  $P$  点的几何位置找到了,但  $P$  点坐标怎么求?

这时又要用“动”的思想换个角度来思考,把思考的立足点从点  $P$  转移到点  $O$  上. 那么,根据平面几何中“切割线定理”,立即可以写出  $x^2 = ab$ .

下面写出完整的解题过程:

**解** 作线段  $AB$  的垂直平分线  $MN$ , 它必与  $x$  轴平行,记它们之间距离为  $d$ ,以  $A$  为圆心,  $d$  为半径画弧,在第一象限交  $MN$  于  $O'$ , 那么,以  $O'$  为圆心,  $d$  长为半径的  $\odot O'$  必与  $x$  轴正向切于一点,记为  $P(x, 0)$ .

设  $P'$  为  $x$  轴正向上异于  $P$  的任意一点,由于同弧的圆周角大于圆外角,有  $\angle APB > \angle AP'B$ , 于是点  $P$  即为所求点. 如图 3-10 所示.

根据切割线定理,有  $x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$ .

**说明** 整个解的过程十分简捷,说句趣话,恐怕是命题人始料未及的. 因为,这个解法比标准答案简单得多了,标准答案请见本篇第 4 章二(二)的例子. 简单的原因,是构思巧妙,而构思巧妙的原因,在于无论是大的思考方向的选择,还是小的思考步骤的处理,处处以“动”的思想作指导,经常性地,一遇到阻碍,就换一个角度来思考.

运用“动”的思想,使思考别开生面,豁然开朗的生动例子,俯拾皆是,限于本书的篇幅,至此为止.

### (三) “对称”的观点和思想

首先说明,看到这个标题,同学们会自然地认为,它指的是“轴对称”、“中心对称”,或者还有“对称式”、“轮换对称式”等.

不错,上面提到的这些都属于“对称”,但这里所说“对称”的含义,要广得多. 它是指认识问题和处理问题的一种指导思想.

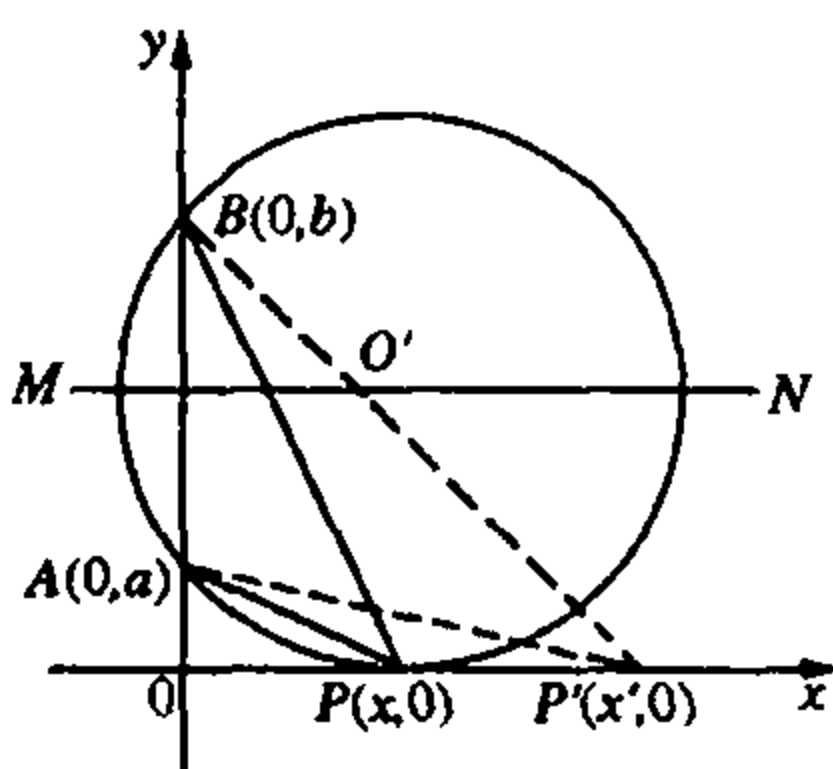


图 3-10

它是对于客观世界合理性的一种理解. 好比说, 任何一个矛盾, 都必然存在着互相矛盾的两个侧面, 互相制约, 又互相依赖, 共存于一个统一体内.

著名物理学家李政道博士曾说过, 对称就是平衡, 但不是狭义的力学上的杠杆平衡, 乃是指, 一切都处于它所应该处于的地位上. 比如, “去和回”, 就是一种对称.

举几个例子.

**例 4** 在数轴正向上, 区间  $(0, 1)$  上的点和  $(1, +\infty)$  上的点, 哪个多?

**分析** 乍一看题, 多数人会异口同声地说: “当然是  $(1, +\infty)$  上的点多了, 因为它长嘛!”

这个回答是错误的.

将来, 在高等数学中“实变函数”这门课程里, 对此不难给予严格证明.

但如果用“对称”思想为指导, 任何初中学生都不难理解这个结论, 如图 3-11 所示, 在  $(1, +\infty)$  区间上的任意一个点  $a$ , 在  $(0, 1)$  区间上, 都会有惟一的点  $\frac{1}{a}$  与它对应, 而且, 当  $a$  和  $a'$  不同时,  $\frac{1}{a}$  和  $\frac{1}{a'}$  也不同; 反之, 在  $(0, 1)$  区间上的任意一点  $b$ , 在  $(1, +\infty)$  上也有惟一的一点  $\frac{1}{b}$  与它对应, 并满足,  $b$  和  $b'$  不同时,  $\frac{1}{b}$  和  $\frac{1}{b'}$  也不相同.

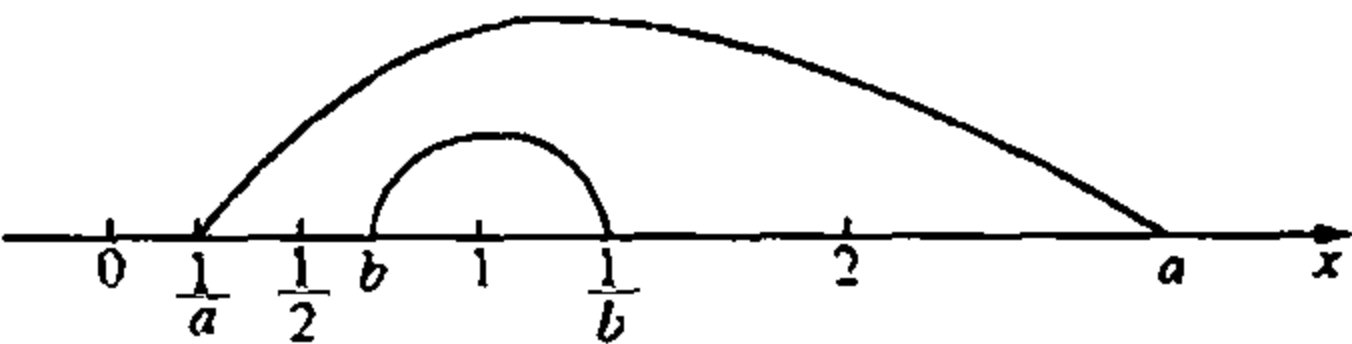


图 3-11

因此, 在数轴正向上, 区间  $(0, 1)$  上的点和  $(1, +\infty)$  上的点一样多.

**例 5** 给三角形面积公式

$$S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}, \tag{①}$$

$$S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C, \tag{②}$$

$$S = \frac{abc}{4R}. \tag{③}$$

寻找一些记忆方法(见图 3-12).

**分析** 对于公式①, 为了得出面积单位,  $a^2$  应当在分子上, 只要再记住  $\sin A, \sin B, \sin C$  三个正弦值有两个在分子上, 由于在与  $a$  的关系上,  $\angle B$  和  $\angle C$  的地位是平等的, 那么,  $\sin B$  和  $\sin C$  就不宜一个在分子上, 而另一个在分母上. 这样,  $\sin B, \sin C$  应都在分子上,  $\sin A$  自然在分母上.

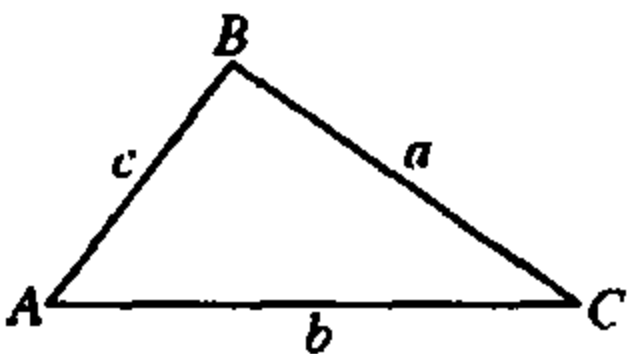


图 3-12

再看公式②、③, 由于对于  $R$  来说,  $A, B, C$  的地位是平等的, 所以,  $\sin A, \sin B, \sin C$  及  $a, b, c$  要么都在分子上, 要么都在分母上.

在高中课本中, 介绍了两个不等式

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab, \quad (a, b \in R)$$

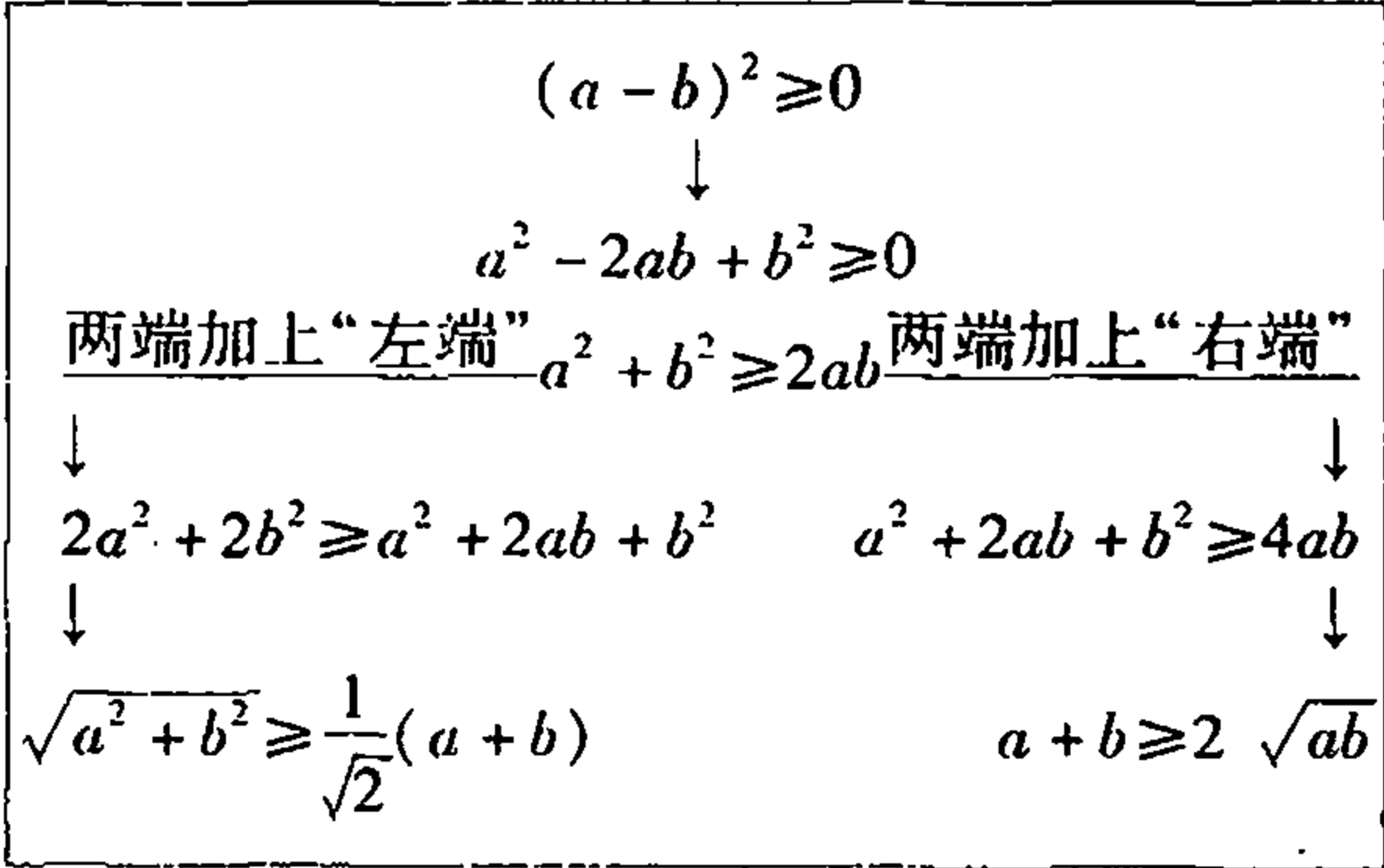
$$a + b \geqslant 2 \sqrt{ab}, \quad (a, b \in R^+)$$

而解题中有时要用到的不等式

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b), \quad (a, b \in R^+)$$

没有介绍,大概是为了避免增加负担吧.

但如果用“对称”的思想指导我们去推导出前两个不等式,那么,第三个不等式应是在其中的,请看下面的关系图.



因为,在上面的关系图中,既然能在  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  的两端加上它的“右端”(2ab)推出了不等式

$$a + b \geq 2 \sqrt{ab}, \quad (a, b \in R^+),$$

那么,为什么不应试试在  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  的两端加上它的“左端”(a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup>)呢?得出的结果正是

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b).$$

以上用“对称”思想作指导所进行的分析,从知识于系统中的角度,沟通了三个不等式的联系,抓住了它们的共同本质,原来都是“非负数性质”

$$(a-b)^2 \geq 0$$

的某种表现形式.

在解题思考中,用“对称”思想指导作分析,更是有力的武器.

**例 6** 已知 如图 3-13 所示, E, F, G, H 分别是正方体 ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> 的棱 AB, BB<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub> 的中点, AB = 2.

求 过 H、G 两点,并且平行于线段 EF 的正方体 ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> 的截面面积.

**解** 记结论中的截面所在的平面为 γ.

1° 确定 γ 与平面 DD<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C 的交线.

过不在一条直线上的 E, F, H 作平面 ω, 由 EF // 平面 DD<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C, 那么, ω 与平面 DD<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C 的交线 HI' 应平行于 EF; 而由平面 γ // EF, 而且 γ 过点 H, 所以, 平面 ω 与 γ 的交线 HI'' 也应平行于 EF. 设 I 是 CD 的中点.

但由三角形中位线的定理, HI // DC<sub>1</sub> // AB<sub>1</sub> // EF, 根据平行公理 HI, HI', HI'' 是同一条直线, 由于 HI' ⊂ 平面 DD<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C, HI'' ⊂ 平面 γ, 所以, HI 是平面 γ 和平面 DD<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C 的交线.

2° 确定 γ 与平面 ABCD 的交线.

设 γ 与平面 ABCD 交于过 I 的直线 IJ', 易证 IJ' 不平行于 HG, 若不然, 根据本篇第 4 章五中的例 37 分析中证明的结论, IJ' 和 HG 都平行于它们分别所在平面 ABCD 和 BB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C 的交线 BC, 与 HG 不平行于 BC 矛盾. 于是 IJ' 不平行于 AD, 可设它们交于 J, 并且, 同在平面 γ 上的 IJ' 和 HG 必定交于一点 M, 根据公理二, M ∈ 平面 ABCD 和 BB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C 的交线 BC.

由 G, H, I 分别是 B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub>, CD 的中点, 可证 IC = CH = CM = DJ = ID ⇒ J 为 AD 中点, 即 IJ 是 γ

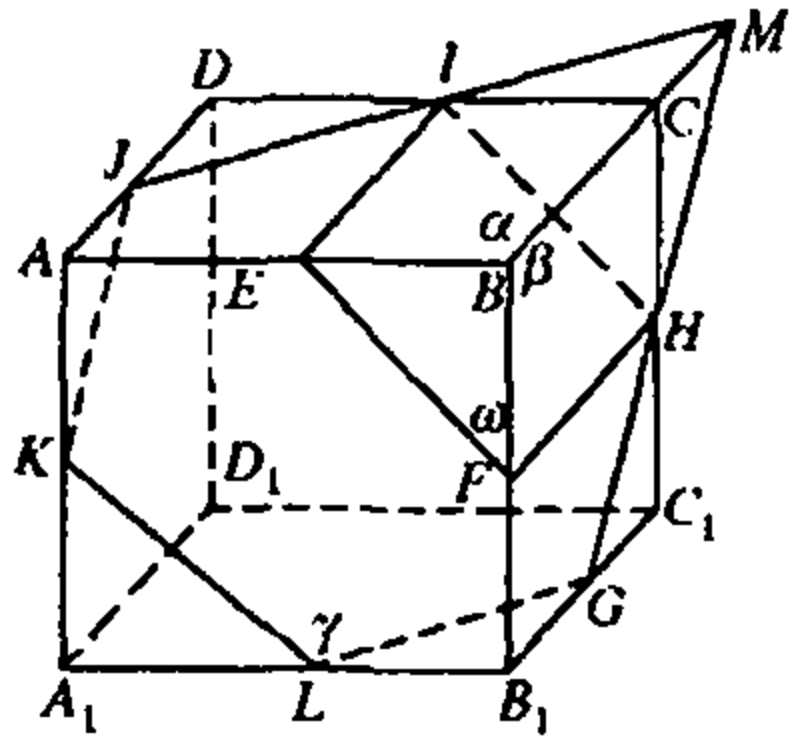


图 3-13



和平面  $ABCD$  的交线.

3° 确定  $\gamma$  与平面  $AA_1D_1D$  的交线.

因为平面  $AA_1D_1D \parallel$  平面  $BB_1C_1C$ , 所以  $\gamma$  与平面  $AA_1D_1D$  的交线  $JK'$  必平行于  $HG$ , 则必不平行于  $AA_1$ . 可设  $JK'$  交  $AA_1$  于  $K'$ , 设  $AA_1$  中点为  $K$ , 根据三角形中位线定理,  $JK \parallel A_1D \parallel B_1C \parallel HG$ , 再根据平行公理,  $JK'$  与  $JK$  重合, 于是,  $K'$  和  $K$  重合, 即  $JK$  是所求截面  $\gamma$  和平面  $AA_1D_1D$  的交线.

4° 与 3° 同理, 可证  $KL$  是平面  $\gamma$  与平面  $AA_1B_1B$  的交线, 其中  $L$  是  $A_1B_1$  的中点.

5° 根据公理二,  $LG$  是平面  $\gamma$  与平面  $A_1B_1C_1D_1$  的交线.

再由正方体的性质, 证出  $GHIJKL$  是正六边形, 并算出它的面积为  $3\sqrt{3}$ .

这是一道难度较大的题目, 但李毅同学运用“对称”思想来思考, 想出了十分漂亮的证法.

他先以“对称”思想为指导进行猜想:

由于平面  $AA_1D_1D$  和  $BB_1C_1C$  关于  $GH$  所在的又与  $EF$  平行的平面在位置上的对称性(指平面  $AA_1D_1D$  与平面  $BB_1C_1C$  都和该平面相交这个意义), 猜想  $AA_1, AD$  的中点  $K, J$  似可能在截面  $\gamma$  上. 这时发现  $G, H, J, K$  到点  $B$  的距离都是  $\sqrt{5}$  (用勾股定理计算), 那么, 应该把和点  $B$  距离也是  $\sqrt{5}$  的  $CD, A_1B_1$  的中点  $I$  和  $L$  也考虑进去.

于是, 这 6 个中点, 都在以  $B$  为球心的同一个球面上, 下面的问题是, 如何证明这 6 个中点  $G, H, I, J, K, L$  在同一个平面上.

再利用“对称”思想作思考. 对于这 6 个中点,  $D_1$  和  $B$  处于完全平等的地位, 因为  $D_1$  到这 6 个中点的距离也是  $\sqrt{5}$ . 那么, 这 6 个中点也在以  $D_1$  为球心的球面上, 而两个球面的公共点在一个圆上, 则六边形  $GHIJKL$  是圆内接六边形, 又根据三角形中位线定理,  $GH = HI = IJ = JK = KL = LG$ , 于是六边形  $GHIJKL$  是正六边形.

下面, 把李毅同学的解题过程写出来.

解 取  $CD, DA, AA_1, A_1B_1$  的中点  $I, J, K, L$ . 由勾股定理计算, 有

$$BG = BH = BI = BJ = BK = BL = \sqrt{5},$$

所以  $G, H, I, J, K, L$  在以  $B$  为球心的球面上.

同理,  $G, H, I, J, K, L$  也在以  $D_1$  为球心的球面上. 所以  $G, H, I, J, K, L$  就在上述两个球面的交线圆周上.

又根据三角形中位线定理的计算, 有

$$GH = HI = IJ = JK = KL = LG,$$

所以圆内接六边形  $GHIJKL$  是正六边形.

也就是说, 平面  $GHIJKL$  是正方体的一个截面, 又由三角形中位线定理, 有  $EF \parallel AB_1 \parallel DC_1 \parallel IH \Rightarrow EF \parallel$  平面  $GHIJKL$ , 而过两条异面直线 ( $GH, EF$ ) 中的一条且平行于另一条的平面是惟一的, 则六边形  $GHIJKL$  为题目所求的截面.

把  $GH = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot AB = \sqrt{2}$  代入面积公式有

$$S_{\text{正六边形}GHIJKL} = \frac{3\sqrt{3}}{2}GH^2 = 3\sqrt{3}.$$

在本章例 2 的解答中, 先从“行”的角度进行分类, 得到了解答, 如果先从“列”的角度进行分类, 也必能得到解答, 而且过程必定完全相同, 因为在本题中, “行”和“列”是完全平等的, 这里的“行”、“列”的概念, 不是指图形, 这样, 无论在几何题还是代数、三角问题中, “对称”思想就都有广泛的指

导意义.

#### (四) 数形结合的方法

把数、式与图形结合起来,用代数的方法分析图形;用图形来直观地理解数、式中的关系,称做数形结合.上述的两个方面,从前述的观点来看,是对称的.

但在高中同学的学习中,对于“用代数的方法分析图形”,比较注重,对于“用图形来直观地理解数、式中的关系”,却很生疏.究其原因是没养成“用图形研究数和式”的习惯.而用图形研究数和式,却常常给解决问题带来一线新的光亮.

**例 7** 求函数  $f(x) = \sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13}$  的最大值.

**分析** 由于  $f(x)$  的解析式中含有两个根号,根号内都是  $x$  的二次式,用中学数学的方法很难求出它的最大值,即使使用高等数学中求导的方法,虽然可以求得  $f(x)$  的最大值,但计算过程十分繁长.

但如果用“数形结合”的方法,问题就很简单了.

**解**  $f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-\sqrt{15})^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2}$ .

设  $A(0, \sqrt{15}), B(3, 2), P(x, 0)$ .

那么,函数  $f(x)$  表达了  $x$  轴上的动点  $P$  到定点  $A$  的距离减去  $P$  到  $B$  的距离,这时,点  $P, A, B$  为顶点,组成了  $\triangle PAB$  (见图 3-14).

根据三角形两边之差小于第三边,那么,当  $P$  位于  $AB$  和  $x$  轴的交点  $C$  的位置时,  $|PA| - |PB|$  最大,这时

$$f(x) = |CA| - |CB| = |AB| = \sqrt{(0-3)^2 + (\sqrt{15}-2)^2} = 2\sqrt{7} - \sqrt{15}.$$

**说明** 解法过程的确十分简捷,需要研究的是,这个数形结合的想法是怎样酝酿出来的?

一是要有数形结合的意识;

二是熟悉各种式子的几何意义.对于本例,则是见到  $\sqrt{x^2 + 15}$  时,立即联想到

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

因此,需要常常在这方面作总结和积累.

**例 8** 求函数  $f(x) = \frac{\sin x - 2}{3 + 2\cos x}$  的最大值和最小值.

**分析** 虽然本分式的分母大于 0,但当  $x$  使  $f(x)$  的解析式的分子取最大(小)值时,分母并不是最小(大)值,所以,用  $\sin x$  和  $\cos x$  的有界性,难以求得  $f(x)$  的最大(小)值.

如果心目中对于  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  的几何意义很清楚,就自然地想试试把  $f(x) = \frac{\sin x - 2}{3 + 2\cos x}$  化为

$$k = \frac{b - 2}{a - (-3)}, \text{ 其中 } a = 2\cos x, b = \sin x.$$

那么,  $\frac{a^2}{2^2} + b^2 = 1$ , 表示了坐标系  $aOb$  平面上的一个椭圆,那么  $k$  就是点  $P(-3, 2)$  到椭圆上各点连线  $PQ$  的斜率值.

如图 3-15 所示,当动直线  $PQ$  处于切线  $PQ_1$  和  $PQ_2$  位置时,斜率  $k$  取得最小值和最大值.

**解** 在  $aOb$  坐标平面上,设  $a = 2\cos x, b = \sin x$ , 则由

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

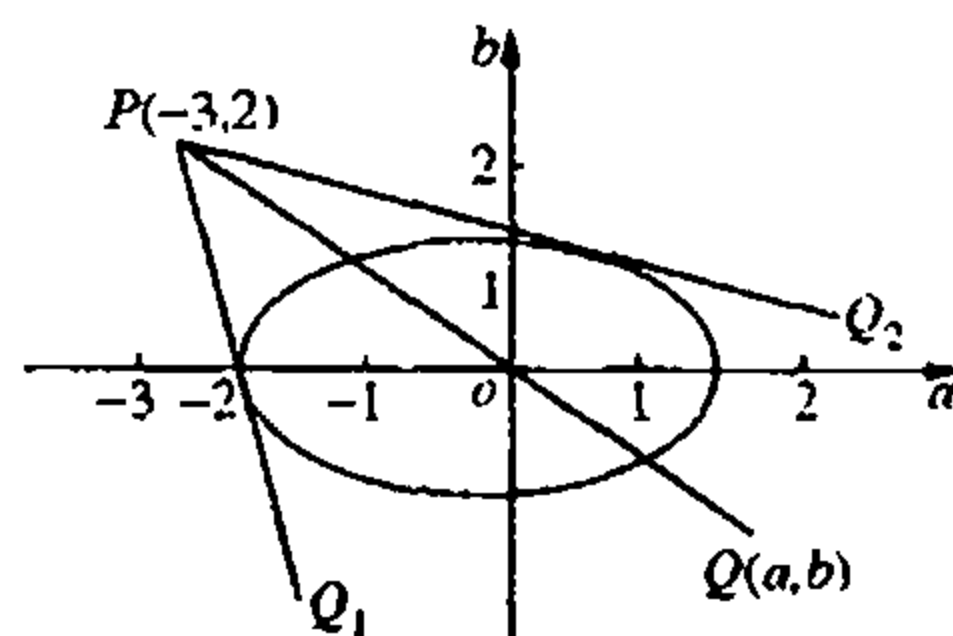


图 3-15

推出

$$\frac{a^2}{2^2} + b^2 = 1, \quad \text{①}$$

表示一个椭圆.

设过  $P(-3, 2)$  的直线方程为

$$b - 2 = k(a + 3), \quad \text{②}$$

为求它与椭圆相切时的斜率, 把②代入①, 得

$$\frac{a^2}{4} + [k(a + 3) + 2]^2 = 1.$$

整理得

$$(4k^2 + 1)a^2 + 8k(3k + 2)a + 36k^2 + 48k + 12 = 0.$$

由于直线  $PQ$  与椭圆相切  $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow 5k^2 + 12k + 3 = 0,$$

$$k_1 = \frac{-6 - \sqrt{21}}{5}, \quad k_2 = \frac{-6 + \sqrt{21}}{5}.$$

即两条切线的斜率分别为  $\frac{-6 - \sqrt{21}}{5}, \frac{-6 + \sqrt{21}}{5}$ .

由于直线  $PQ$  与椭圆相交或相切时的斜率

$$k_{PQ} \in \left[ \frac{-6 - \sqrt{21}}{5}, \frac{-6 + \sqrt{21}}{5} \right]$$

即  $k = \frac{b-2}{a-(-3)}$  的最小值为  $\frac{-6 - \sqrt{21}}{5}$ , 最大值为  $\frac{-6 + \sqrt{21}}{5}$ .

那么  $f(x) = \frac{\sin x - 2}{3 + 2\cos x} = \frac{b-2}{a-(-3)}$  的最小值为  $\frac{-6 - \sqrt{21}}{5}$ , 最大值为  $\frac{-6 + \sqrt{21}}{5}$ .

**例 9** 已知  $a > 0, a \neq 1$ , 求使方程  $\log_a(x - ak) = \log_{a^2}(x^2 - a^2)$  有解的  $k$  的范围. (1989 年全国高等学校统一招生考试理工类数学第 22 题)

**解** 因为  $a > 0$ , 并由换底公式得

$$\log_{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{1}{2}\log_a(x^2 - a^2) = \log_a \sqrt{x^2 - a^2},$$

所以原方程等价于

$$\log_a(x - ak) = \log_a \sqrt{x^2 - a^2}.$$

由对数性质可知, 原方程的解  $x$  应满足\*

$$\begin{cases} (x - ak)^2 = x^2 - a^2, & \text{①} \\ x - ak > 0, & \text{②} \\ x^2 - a^2 > 0. & \text{③} \end{cases}$$

当①, ②同时成立时, ③显然成立, 因此只需解

$$\begin{cases} (x - ak)^2 = x^2 - a^2, \\ x - ak > 0. \end{cases}$$

由①得

$$2kx = a(1 + k^2), \quad \text{④}$$

当  $k=0$  时,由  $a>0$ ,知④无解,因而原方程无解.

当  $k\neq 0$  时,由④得

$$x = \frac{a(1+k^2)}{2k}. \quad \text{⑤}$$

把⑤代入②,得

$$\frac{1+k^2}{2k} > k.$$

当  $k<0$  时,有  $k^2>1\Leftrightarrow -\infty < k < -1$ ;

当  $k>0$  时,有  $k^2<1\Leftrightarrow 0 < k < 1$ .

所以,所求  $k$  的取值范围是  $\{k | -\infty < k < -1 \text{ 或 } 0 < k < 1, k \in R\}$ .

说明 这道代数题目的代数解法严谨无误,缺点是在分类讨论时,容易丢情况而漏解.

如果运用“动”的思想为指导,由  $\sqrt{x^2-a^2}$  引起对双曲线  $y=\sqrt{x^2-a^2}$  的联想,数形结合,则一举得到答案.解法如下(从标有“\*”号的地方开始):

$$\begin{cases} x - ak = \sqrt{x^2 - a^2}, \\ x - ak > 0, \\ x^2 - a^2 > 0. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$  直线  $y=x-ak$  在  $x$  轴上方的部分与曲线  $y=\sqrt{x^2-a^2}$  (它是双曲线  $x^2-y^2=a^2$  在  $x$  轴上方的部分)有交点.

由图 3-16 可知,此时直线  $y=x-ak$  在  $y$  轴上的截距  $-ak$ ,应满足  $-ak>a$  或  $-a<-ak<0$ .

解得

$$k < -1 \quad \text{或} \quad 0 < k < 1.$$

这些例子说明,数形结合常常可以使数、式问题形象化,从而较易看出捷径.

不仅在解答习题时如此,在理解概念时,数形结合的方法,也由于它形象化的优点,使概念和公式更易掌握.

以上,在本章中介绍了如何主动地学习,并重点阐述了积累、掌握数学思想、方法和哲理性观点的重要性及方法,介绍了如何理解和应用 4 个重要的思想方法,它们对于能力和素质的提高,都有十分重要的作用,请同学们认真体会.

由于篇幅所限,其他的数学思想和方法,例如“方程组的方法”、“整体思想”、“一分为二的观点”、“一般和特殊的关系的思想”、“量变到质变思想”、“降维思想”、“构造的方法”、“类比的方法”、“迭代迭加的方法”等,就不再赘述了.

要说明的是,一方面许多思想或方法之间,有共通的内容;另一方面,在解决问题的思考中,经常是把它们互相配合,综合运用,才能得到较好的效果.

因而,对其中每种思想、方法的训练,都要主动地经常地进行,分别掌握得纯熟,才能自如地把它们互相配合,综合运用.

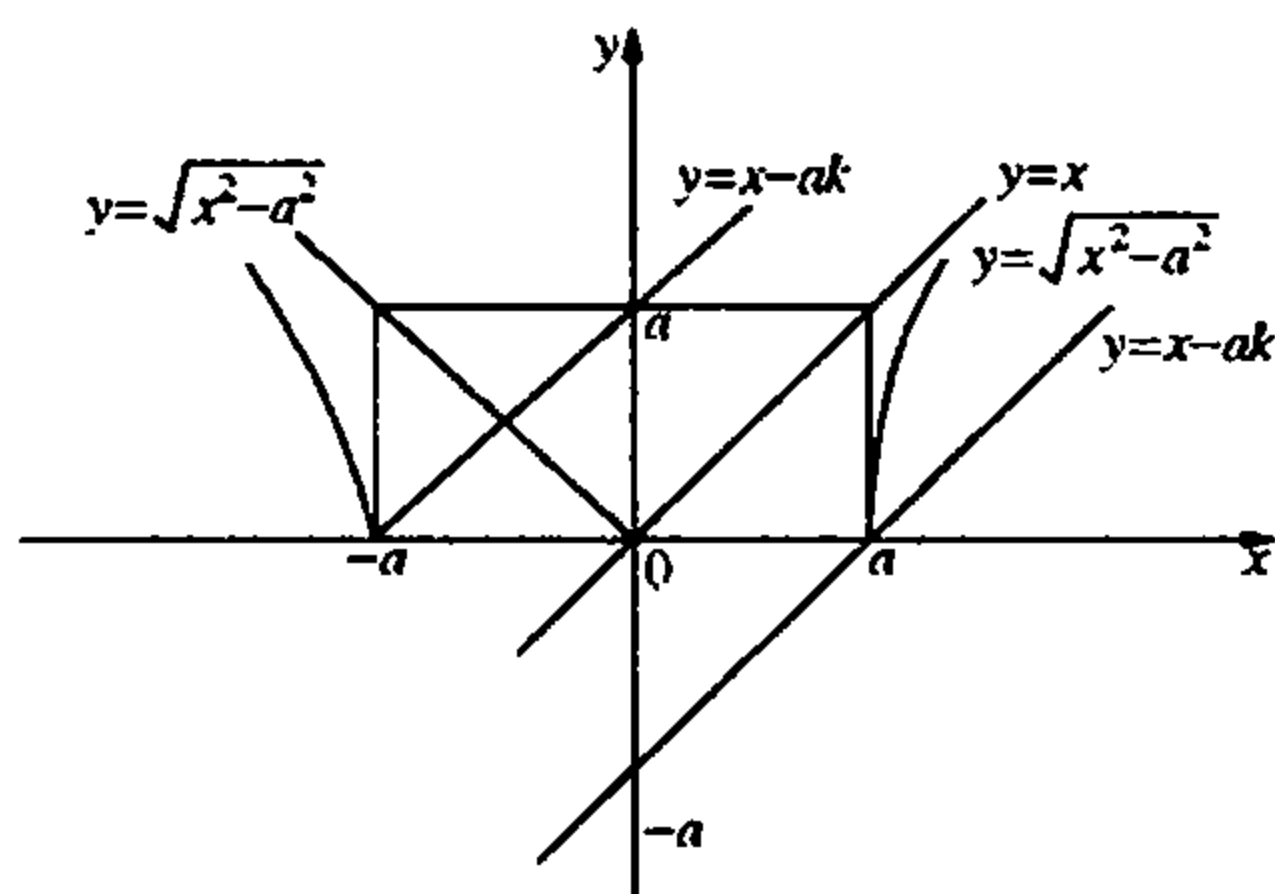


图 3-16

# 第 4 章 各类知识学习方法示范

## 一、概念与基础知识的学习

### (一) 有关命题的知识

命题是数学中最基本的概念. 发现以及证明某个命题的真或假, 是数学的基本问题.

#### 1. 命题和它的真假

##### (1) 命题

所谓命题, 是指判断一件事情的语句.

例如, 对于事物  $A$ , 作出  $B$  的判断.

把  $A$  称做命题的题设或前提, 把  $B$  称做结论. 上面的命题可记做  $A \Rightarrow B$ , 读做“若  $A$ , 则  $B$ ”.

于是, 也可以认为, 命题是指出两个事物有是或不是的关系.

也可以从集合的角度来理解命题的意义: 认为事物  $A$ 、 $B$  分别代表着两个集合, 这时,  $A \Rightarrow B$  表示, 任何  $A$  的元素, 一定是  $B$  的元素.  $A \Rightarrow \bar{B}$  表示, 任意  $A$  的元素, 一定是  $B$  的补集的元素.

##### (2) 真命题, 假命题

成立或者说正确的命题称真命题, 例如: 对顶角相等; 反之, 则称为假命题, 例如: 对顶角不相等.

由于,  $A \Rightarrow B$  表示, 任意  $A$  的元素, 一定是  $B$  的元素, 所以, 如果在题设  $A$  的条件下, 有时得到  $B$  的结论, 有时得不到  $B$  的结论, 那么, 命题  $A \Rightarrow B$ , 只能算做假命题. 例如“对顶角互补”, 虽然对顶角有时互补, 但对顶角互补仍是假命题.

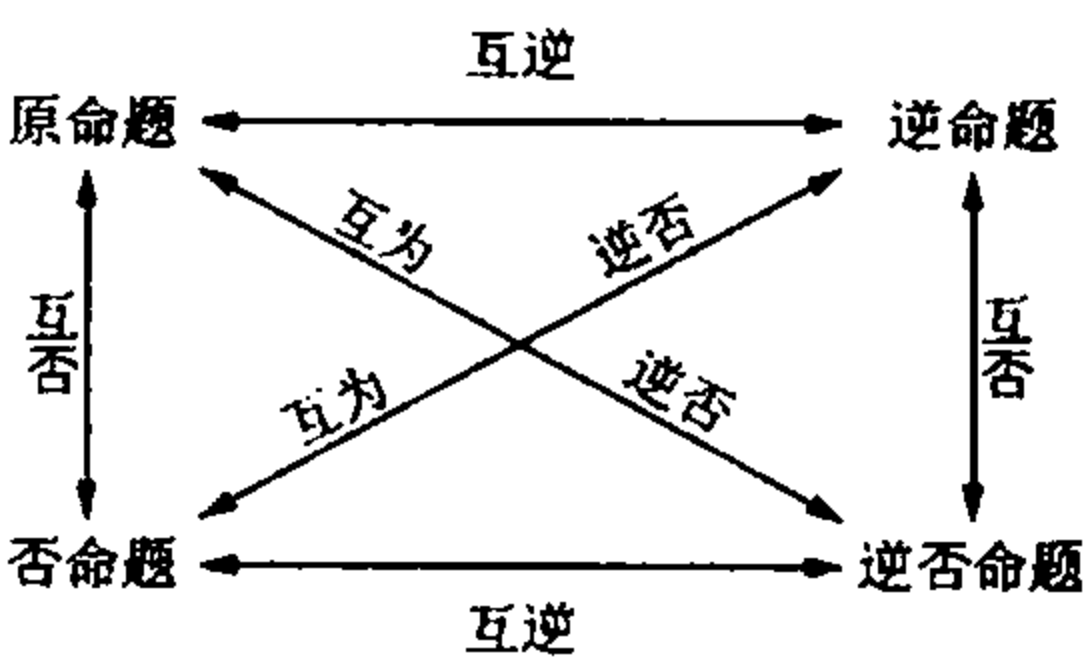
#### 2. 四种命题和等价关系

##### (1) 四种命题

当把  $A \Rightarrow B$  称为原命题时, 称  $B \Rightarrow A$  为这个原命题的逆命题,  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$  (不是  $A$ , 则不是  $B$ ) 为否命题,  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  为逆否命题.

“原”、“逆”、“否”、“逆否”只具有相对的意义.

四种命题的关系如下:



否命题在形式上, 不一定有“不”字. 因为  $(\bar{\bar{A}}) = A$ , 如, “不是有理数”的否定, 为“是有理数”.

##### (2) 命题的等价

两个命题中的任意一个成立时, 另一个也成立, 称它们是等价的. 即, 命题甲成立时, 命题乙也成立, 而且, 命题乙成立时, 命题甲也成立.

因而, 一个命题和它的逆命题、否命题、逆否命题, 只可能同真, 或同假, 或两真两假.

### (3) 四种命题间的等价关系

一个命题和它的逆否命题等价,一个命题的逆命题和否命题等价.

**例 1** 求证 一个命题和它的逆否命题等价.

**证明** (用反证法)

1° 用  $A \Rightarrow B$  表示原命题成立.

若  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ , 则  $\bar{B} \Rightarrow A$ , 而已知  $A \Rightarrow B$ , 于是,  $\bar{B} \Rightarrow B$ , 矛盾.

故只能  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ .

2° 因为,原命题是它的逆否命题的逆否命题,那么,由 1° 的结论可得,当一个命题的逆否命题成立时,它也成立.

综合 1° 和 2°,原命题和它的逆否命题等价,即它们同真或同假.

**说明** 对于原命题成立,  $A \Rightarrow B$  可以理解为,若任意  $x \in A$ , 必有  $x \in B$ . 这时,  $A$  和  $B$  的关系如图 4-1 所示.

显然,这时,任意  $x \notin B$ , 必有  $x \notin A$ , 即,  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ , 逆否命题为真.

与这个解释类似,若  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ , 则  $A \Rightarrow B$ .

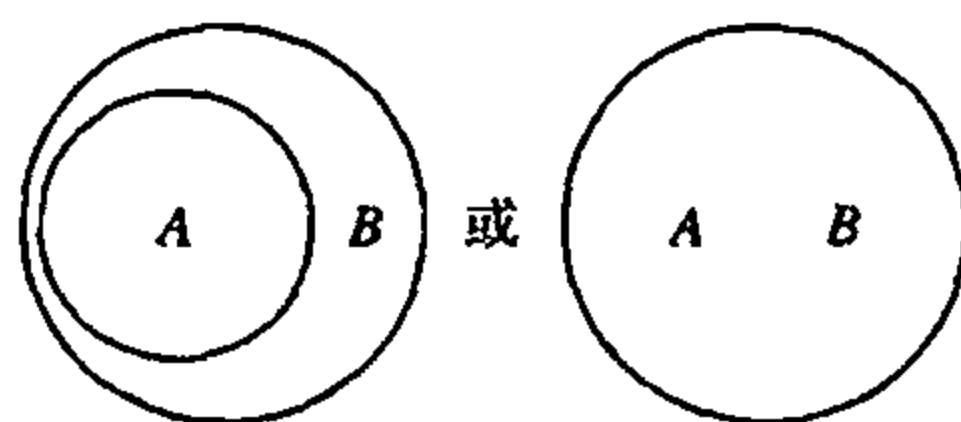


图 4-1

**例 2** 求证 一个命题的逆命题和否命题等价.

**证明** 因为一个命题的逆命题和否命题有互为逆否的关系. 那么,利用例 1 的结论,本题结论得证.

**说明** 证明一个任意命题和它的逆命题并不等价,只要举出一个反例即可. 例如,命题“对顶角相等”虽为真,但它的逆命题“相等的角是对顶角”却不为真.

又由于,一个命题的逆命题和否命题等价,因此,一个任意命题,和它的否命题并不等价.

关于原命题真时,它的逆命题可能为“真”,也可能为“假”,也可以做如下的理解:

当  $A \Rightarrow B$  时,集合  $A$ 、 $B$  的关系只能如图 4-2 或如图 4-3 所示.

在图 4-2 的情况下,任意  $x \in B$ , 必有  $x \in A$ , 即  $B \Rightarrow A$  (指  $B \Rightarrow A$  成立);但在图 4-3 的情况下,若  $x \in B$ , 不一定有  $x \in A$ , 即,  $B \not\Rightarrow A$ .

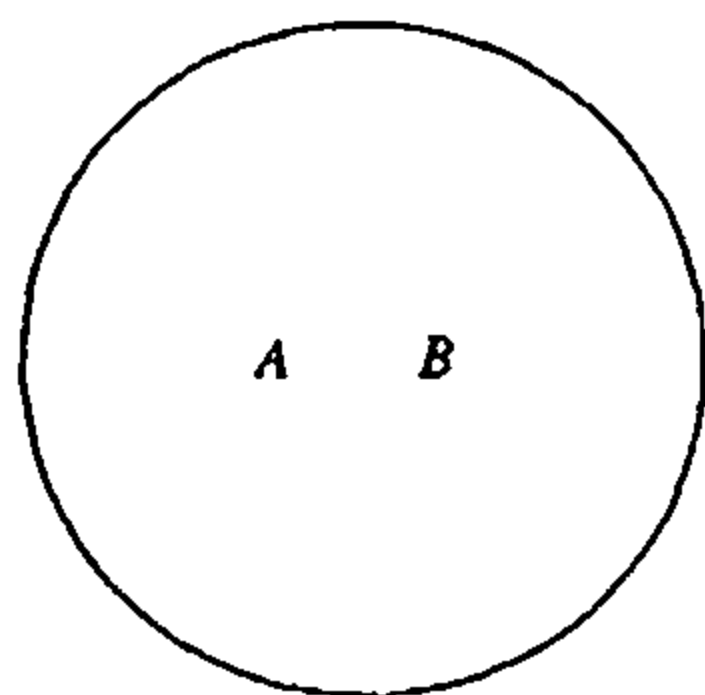


图 4-2

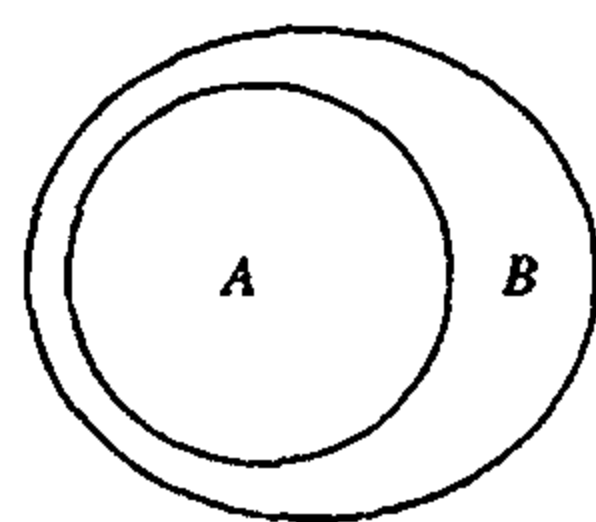


图 4-3

例如:原命题“两直线平行,则同位角相等”是真命题,它的逆命题也为真. 这是因为,“两条平行直线”和“同位角相等时的两条直线”,所刻画的是相等的集合,如图 4-2 所示.

原命题“对顶角相等”是真命题,它的逆命题为假的原因在于,“是对顶角的两个角”只是“有相等关系的两个角”集合的真子集.

### 3. 复合命题和它的否定

#### (1) 用“或”字连接的复合命题

把一些命题用“或”字连接为一个命题,称为用“或”字连接的命题,例如,

命题 A:10 能被 5 整除;

命题 B:10 能被 2 整除.

那么,命题 C:10 能被 5 或 2 整除,就称为用“或”字连接的复合命题.

显然,当组成复合命题的各基本命题都成立,或至少有一个成立时,用“或”字连接的复合命题就为真.

事实上,可以把用“或”字连接的复合命题,看成各基本命题的并集.

因此,“存在某个  $x$  如何如何”、“至少有一个  $x$  如何如何”等说法,都是用“或”字连接的复合命题,它们的意义是相同的.

## (2) 用“且”字连接的复合命题

把一些命题,用“且”字连接为一个命题,称为用“且”字连接的复合命题.“且”字有时也写做“和”、“与”.

例如,“10 能被 2 和 5 整除”、“矩形各内角都是直角”等命题,都是用“且”字连接的复合命题.

显然,当且仅当,组成复合命题的各基本命题都为真时,用“且”字连接的复合命题才成立.

事实上,可以把用“且”字连接的复合命题,看成各基本命题的交集.

因此,“一切  $x$  都如何如何”、“任意  $x$  如何如何”、“无论哪一个  $x$  都如何如何”等说法,都是用“且”字连接的复合命题,它们的意义是相同的.

**例 3** 判断命题的真假: $a$  代表实数,那么,若  $|a| = -a$ ,则  $a \leq 8$ .

**分析** 很多同学判它为“假”,理由是  $a = 8$  时,  $|a| = 8 \neq -a$ .

这是犯了以为一个命题和它的逆命题等价的错误,要求一个真命题的逆命题也必须为真.

判断一个命题的真假,只能从它的本身(或它的逆否命题)来分析:

若  $|a| = -a$ ,则  $a \leq 0$ ,而  $a \leq 0$  时,必有  $a < 8$ . 所以本命题为真.

有人又反驳说:“但结论中有  $a = 8$  呀! 而  $|a| = -a$  时,  $a$  不会是 8.”

这是对于  $a \leq 8$  的错误理解,  $a \leq 8$  的意义,是  $a < 8$  或  $a = 8$ . 由前述,用“或”字连接的复合命题的各基本命题只要有一个真,复合命题即真. 既然  $a < 8$  为真,那么,  $a \leq 8$  当然为真.

## (3) 复合命题的否定

把一个命题的结论改为它的补集,称做对原命题的否定,又称命题的“非”.

对复合命题进行否定时,若原来命题是用“或”字连接的复合命题,应把每个基本命题否定后再用“且”字连接;若原来命题是用“且”字连接的复合命题,应把每个基本命题否定后,再用“或”字连接.

这就是狄莫根公式(有的书译做德·摩根律,或摩尔根法则):

并集的否定是,  $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ ;

交集的否定是,  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ .

**例 4** 对命题“任意三角形中,至少有一个内角不小于  $60^\circ$ ”进行否定.

**分析** 记一个三角形的三个内角分别是  $\alpha, \beta, \gamma$ , 那么,至少有一个内角不小于  $60^\circ$  的等价说法是,  $\alpha \geq 60^\circ$ , 或  $\beta \geq 60^\circ$ , 或  $\gamma \geq 60^\circ$ . 应用狄莫根公式对它进行否定,应是,  $\alpha < 60^\circ$ , 并且  $\beta < 60^\circ$ , 而且  $\gamma < 60^\circ$ .

又由于,说法“任意”,是用“且”字连接的复合命题,对它否定,应是“存在”.

因而,对所给命题的正确否定,应是,“存在某个三角形,它的各内角都小于  $60^\circ$ ”.

当然,对于这种“至多  $n$  个如何如何”或“至少  $n$  个如何如何”的否定,也可以由补集的意义,直接从数轴上分析出正确答案,如图 4-4 所示.



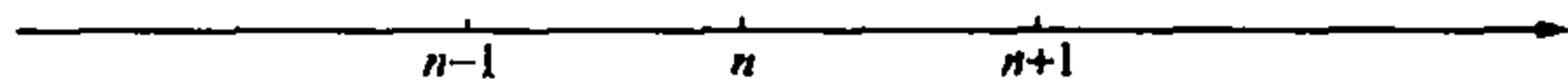


图 4-4

对于“至多  $n$  个如何如何”的否定,显然是,“至少  $n + 1$  个如何如何”;对于“至少  $n$  个如何如何”的否定,显然是,“至多  $n - 1$  个如何如何”.

(二) 充分条件和必要条件

“充分条件”和“必要条件”是数学中最主要的概念之一,数学推证的思维,总要从它出发去进行.因而,必须真正弄懂它,并善于从它出发,去考虑问题.

1. 概念的理解

当  $A \Rightarrow B$  时(此处指本命题为真),称条件  $A$  是条件  $B$  的充分条件,意指为使  $B$  成立,具备条件  $A$  就足够了.“充分”即“足够”的意思.

从集合的角度来理解,由于  $A \Rightarrow B$  时,其关系只能是如图 4-5 所示,那么,要使  $x \in B$ ,只要  $x \in A$  就足够了.

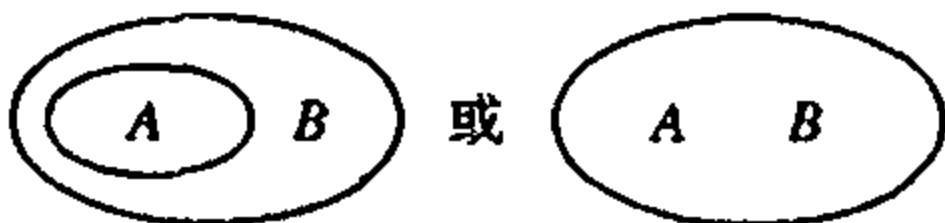


图 4-5

称条件  $B$  是条件  $A$  的必要条件. 因为,此时  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ,即若不具备  $B$ ,  $A$  必不成立,所以,欲使  $A$  成立,必须具备  $B$ . “必要”即“必须具备”的意思.

从集合的角度来理解,当  $A \Rightarrow B$  时,仍用图 4-5,如果  $x \notin B$ ,那么  $x \notin A$ ,也就是说,为使  $x \in A$ ,至少应使  $x \in B$ ,也体现了  $B$  是  $A$  的“必要”条件的意思.

同理,当  $B \Rightarrow A$  时,称  $B$  是  $A$  的充分条件,  $A$  是  $B$  的必要条件. 从集合的角度来理解时,则如图 4-6 所示.

那么,当  $A \Rightarrow B$ ,并且  $B \Rightarrow A$  时,  $A$  与  $B$  则互称充分且必要条件,简称充要条件.

由于  $B \Rightarrow A$  也可以记做  $A \Leftarrow B$ ,所以,  $A$  是  $B$  的充要条件,也记做  $A \Leftrightarrow B$ ,显然,这时  $A$  与  $B$  互为充要条件.

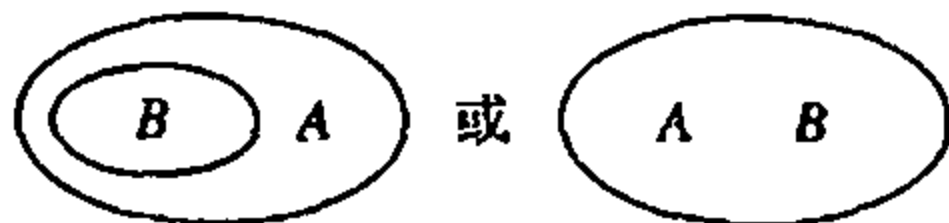


图 4-6

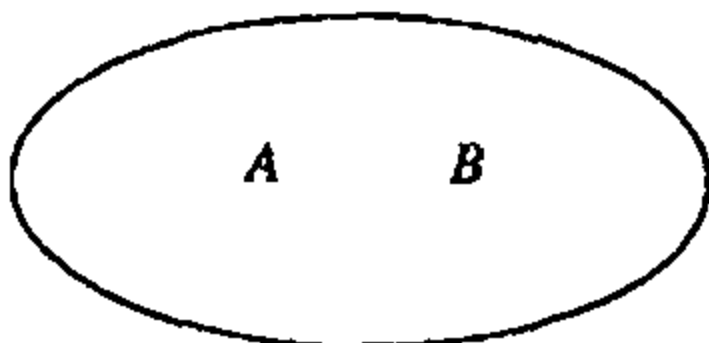


图 4-7

从集合的角度来理解,由于  $A \Rightarrow B$  时,  $A$  与  $B$  的关系只能如图 4-5 所示;而  $A \Leftarrow B$  时,  $A$  与  $B$  的关系只能如图 4-6 所示. 那么,  $A \Leftrightarrow B$  时,  $A$  与  $B$  的关系只能如图 4-7 所示. 这就是说,互为充要条件的两个条件刻画的是同一事物.

这样看来,在图 4-8 的情况(1)和情况(2)中,条件  $A$  既不是  $B$  的充分条件,也不是  $B$  的必要条件;在情况(3)中,  $A$  是  $B$  的充分但不必要条件,  $B$  是  $A$  的必要但不充分条件;在情况(4)中,  $A$  是  $B$  的必要但不充分条件,  $B$  是  $A$  的充分但不必要条件;在情况(5)中,  $A$  与  $B$  互为充要条件.

例 5 选择正确结论

条件甲:  $P \cap Q = P$ ; 条件乙:  $P \subset Q$ , 那么( ).

- (A) 甲是乙的必要但不充分条件;
- (B) 甲是乙的充分但不必要条件;
- (C) 甲是乙的充分且必要条件;
- (D) 甲既不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件.

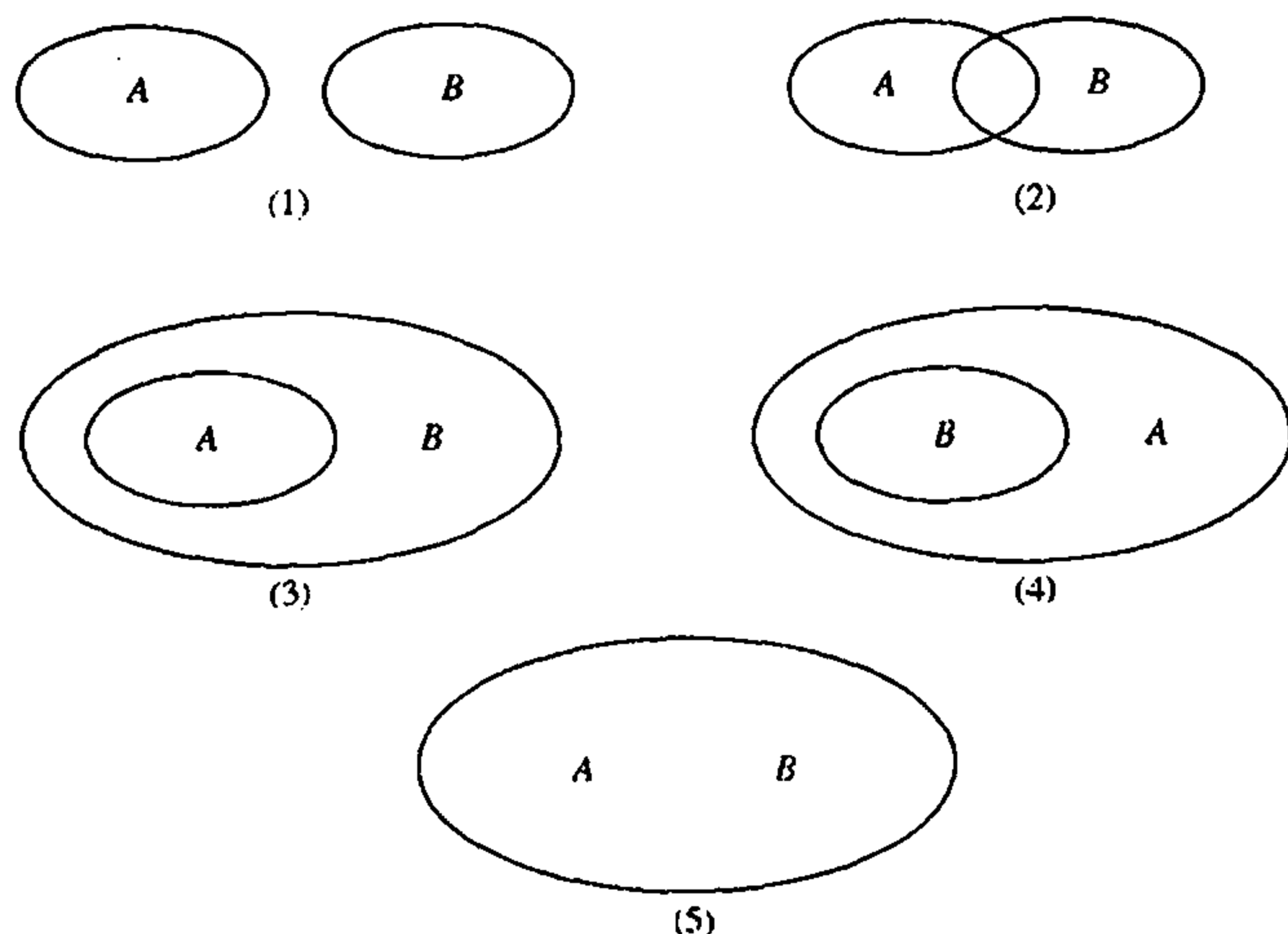


图 4-8

**分析** 若  $P \cap Q = P$ , 则可能  $P \subset Q$ , 也可能  $P = Q$ , 故“若甲则乙”不真, 即甲不是乙的充分条件, 若  $P \subset Q$ , 必有  $P \cap Q = P$ , 因而,  $B \Rightarrow A$ , 故甲是乙的必要条件. 所以, 应选择(A).

**说明** [1] 判断两个条件  $A, B$  的“充要关系”的思考方法是, 分别判断  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$  是否成立, 然后得出相应的结论.

[2] 当不容易判断  $A \Rightarrow B$  或  $B \Rightarrow A$  是否成立时, 可以用讨论它们各自的等价命题  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  或  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$  是否成立来代替.

[3] 欲证一个命题(例如  $A \Rightarrow B$ )不成立, 可以用本例分析中的方法: 由  $A$  出发, 得到除  $B$  之外还有其他情况的结论, 因而否定了  $A \Rightarrow B$ . 也可以用举反例的方法, 即寻找一个符合  $A$ , 但又不满足  $B$  的特例. 例如对本题, 可设集合  $P = \{2\}$ , 集合  $Q = \{2\}$ , 这时,  $P \cap Q = \{2\} = P$ , 但  $P$  却不是  $Q$  的真子集, 所以“若甲则乙”不真.

[4] 借助于韦恩图, 也可以帮助判断  $A$  和  $B$  之间的充要关系, 在这方面, 请参阅前面对图 4-8 的分析, 并补充一点, 如果  $A$  与  $B$  的关系, 是在图 4-8 中的(1)、(2)、(3)、(4)4 种情况中至少表现为两种时, 那么,  $A$  既不是  $B$  的充分条件, 也不是  $B$  的必要条件.

**例 6** 若  $A$  成立, 当且仅当  $B$  成立.

**求证**  $A$  是  $B$  的充要条件.

**证明** 1° 由已知, 当  $B$  成立时,  $A$  成立, 所以  $A$  是  $B$  的必要条件;

2° 由已知, 仅当  $B$  成立时,  $A$  成立, 意指  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ , 即  $A \Rightarrow B$ . 所以,  $A$  是  $B$  的充分条件.

综合 1°、2°,  $A$  是  $B$  的充要条件.

**说明** 同理可证, 用“要且仅要”、“是且仅是”、“有且仅有”、“须且仅须”等类似措辞连接的两个条件, 也互相是充要条件. 当然, “等价”的意义也是指“充要”.

**例 7** 求证 关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$ , 当且仅当  $p, q$  满足  $p^2 - 2q = 1$  及  $p < 0$  和  $0 < q \leq \frac{1}{2}$  时, 它的两个根为一个直角三角形的两锐角的正弦.

**分析** 根据例 2 的结论, 本题事实上是证明: “关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两个根, 成为一直角三角形两锐角正弦的充要条件是,  $p^2 - 2q = 1, p < 0$  及  $0 < q \leq \frac{1}{2}$ ”.

证明 1° 证必要性. 由已知可设:

$$\begin{aligned}x_1 &= \sin A, \quad x_2 = \sin B, \\A + B &= \frac{\pi}{2}, A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}p^2 - 2q &= [-(\sin A + \sin B)]^2 - 2\sin A \cdot \sin B = (\sin A + \sin B)^2 - 2\sin A \cdot \sin B \\&= \sin^2 A + \cos^2 A = 1.\end{aligned}$$

又因为

$$-p = \sin A + \sin B > 0,$$

所以

$$p < 0.$$

而

$$q = \sin A \cdot \sin B > 0,$$

并且

$$q = \sin A \cdot \cos A = \frac{1}{2}\sin 2A \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } 0 < q \leq \frac{1}{2}.$$

2° 证充分性.

$$\left. \begin{aligned}q &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2q \leq 1, \\p^2 - 2q &= 1,\end{aligned} \right\} \Rightarrow p^2 - 2q - 2q \geq 0 \Rightarrow p^2 - 4q \geq 0.$$

即关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$ , 有实数根  $x_1, x_2$ . 由

$$\left. \begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= q > 0, \\x_1 + x_2 &= -p > 0,\end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 > 0 \text{ 且 } x_2 > 0.$$

再考虑到  $q \leq \frac{1}{2}$ , 可设

$$x_1 = \sin A, \quad A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

由

$$\left. \begin{aligned}p^2 - 2q &= 1, \\x_1 + x_2 &= -p, \\x_1 x_2 &= q,\end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

及

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

可得

$$x_2^2 = \cos^2 A.$$

因为  $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos A > 0$ , 及  $x_2 > 0$ , 所以  $x_2 = \cos A$  (应舍去)

则

$$x_2 = \cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right),$$

即  $x_1, x_2$  是一个直角三角形的二锐角的正弦.

**说明** [1] 证明“条件  $A$  的充要条件是条件  $B$ ”这种问题,要分两步完成,即,证明“必要性”( $A \Rightarrow B$ ),和证明“充分性”( $B \Rightarrow A$ ).

[2] 证明“条件  $A$  是条件  $B$  的充分但非必要条件”,或“条件  $A$  是条件  $B$  的必要但非充分条件”,或“条件  $A$  既非条件  $B$  的充分条件、又非条件  $B$  的必要条件”,则归结为证明与它们相应的两个命题成立或不成立.

[3] 证明“条件  $A$  的充要条件是条件  $B$ ”时,关于“必要性”和“充分性”的两个证明,没有顺序的要求.先进行其中易于完成的一个证明,常常可以对如何完成另一个证明有所启发,如本例的证明,就是这样安排的.

[4] 当条件  $A$  或条件  $B$  是复合命题时,要特别注意它们是用“或”字连接的复合命题,还是用“且”字连接的复合命题.然后,根据本章“一(一)”小节中所述及的复合命题真假的判断标准,来确定条件  $A$  或条件  $B$  成立的具体意义,再去进行证明.其中,如果要利用证明  $A \Rightarrow B$  或  $B \Rightarrow A$  的等价命题  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  或  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ ,必须注意,对复合命题的否定要正确.

## 2. 概念的应用

上面对例 1、例 2 和例 3 的分析和解答,旨在加深同学们对“充要条件”这个概念的理解,并说明如何思考、解答有关“充要条件”的题目.但更重要的,是运用“充要条件”所表达的思想,去思考问题,正确解答数学问题,尽管在这些问题的文字中,并未出现“充分条件”或“必要条件”这些字样.

**例 8** 关于  $x$  的方程  $x^4 - ax^3 + 3x^2 - ax + 1 = 0$  的根都是虚数,求实数  $a$  的取值范围.

**分析** 对于 4 次方程,在中学范围内没有求根公式,那么,解出它的根,应该根据它的特点,灵活处理.

考虑方程左端的系数的对称性,又由于  $x \neq 0$ ,如果,把方程两端除以  $x^2$ ,将造成形式上进一步的对称和谐:

$$x^2 - ax + 3 - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

这时,易见可以通过配方、换元,转化为二次方程

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

进行到这一步后,许多同学利用判别式知识,由

$$\Delta = a^2 - 4 < 0$$

得到

$$-2 < a < 2.$$

因为,原方程的根  $x$  都是虚数,则  $\Delta < 0$ .

然而,这个解答是错误的.因为,判别式小于 0,和实系数一元二次方程的根都是虚数,的确互为充要条件,但在本例中,是指  $\Delta < 0$  与  $\left(x + \frac{1}{x}\right)$  是虚数的关系,并不是指  $\Delta < 0$ ,与  $x$  都是虚数的关系.

在这里,虽然  $\Delta < 0$  时,  $x + \frac{1}{x}$  必为虚数,则  $x$  必为虚数(若不然,设  $x$  为实数,由  $x + \frac{1}{x}$  为虚数,有  $x \neq 0$ ,则  $\frac{1}{x}$  也为实数,于是  $x + \frac{1}{x}$  必为实数,与假设矛盾).

但  $\Delta < 0$ , 即  $-2 < a < 2$ , 只是方程

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

的根  $x$  是虚数的充分但非必要条件. 因为,  $-2 < a < 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x}$  为虚数  $\Rightarrow x$  是虚数, 但  $x$  为虚数, 却未必  $x + \frac{1}{x}$  是虚数. 例如,  $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  时,  $x + \frac{1}{x} = 1$  不是虚数, 此时  $a = 2$ .

由此可见, 应用充要条件的概念, 在解题分析的思考中, 多么重要!

本例可以有如下正确解法.

解 因为  $x = 0$  不满足原方程, 所以原方程等价于

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

当  $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  为虚数时, 它的虚部  $r\sin\theta \neq 0$ . 那么,  $\frac{1}{x} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$  的虚部  $\frac{1}{r}\sin(-\theta) = -\frac{1}{r}\sin\theta \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x}$  也是虚数.

1° 当至少有一个根  $x$ , 使得  $|x| = r \neq 1$  时,  
 $\Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{r} \neq r$ . 若不然,  $r = \frac{1}{r}$  时,  $r^2 = 1$ , 由  $r > 0$ , 得  $r = 1$ , 与题设矛盾. 于是,  $r - \frac{1}{r} \neq 0$ .

这时

$x + \frac{1}{x} = \left[r\cos\theta + \frac{1}{r}\cos(-\theta)\right] + \left[r\sin\theta + \frac{1}{r}\sin(-\theta)\right]i = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \left(r - \frac{1}{r}\right)i\sin\theta$  的虚部  $\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \neq 0$ , 所以  $x + \frac{1}{x}$  为虚数.

设  $u = x + \frac{1}{x}$ , 那么, 关于  $u$  的方程

$$u^2 - au + 1 = 0$$

有,

$$\Delta < 0 \Rightarrow -2 < a < 2.$$

2° 当所有根  $x$  都有  $|x| = r = 1$  时, 得

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{r} = 1.$$

这时, 由  $\sin\theta \neq 0$ , 知  $\theta \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 于是  $\cos\theta \neq \pm 1$ . 那么,

$$x + \frac{1}{x} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \left(r - \frac{1}{r}\right)i\sin\theta = 2\cos\theta \in (-2, 2).$$

即关于  $u$  的方程

$$u^2 - au + 1 = 0$$

的两个根  $\alpha, \beta \in (-2, 2)$ , 这时,

一方面应有  $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$ , 解之, 得  $a \leq -2$ , 或  $a \geq 2$ ;

另一方面, 由根与系数关系定理有:  $\alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$ , 且  $\alpha, \beta$  同号, 而  $0 < \alpha < 2$  及  $\beta < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \beta < 2$ , 此时,  $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ .

同样地,当  $-2 < \beta < -\frac{1}{2}$  时,有  $-2 < \alpha < -\frac{1}{2}$ .

再由根与系数关系定理,得

$$a = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

① 当  $a > 0$  时,由平均数不等式,

$$a = \alpha + \frac{1}{\alpha} \geqslant 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = 2.$$

即正数  $a$  的最小值为 2,此时,  $\alpha = 1$ .

当  $\alpha \in [1, 2)$  时,可证  $a = \alpha + \frac{1}{\alpha}$  是增函数①.

于是,对于  $\alpha \in [1, 2)$ ,  $a < 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ . 那么,

$$2 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}.$$

当  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  时,有  $\beta \in [1, 2)$ , 而  $a = \beta + \frac{1}{\beta}$ . 同理可得:

$$2 \leqslant a < \frac{5}{2}.$$

② 当  $a < 0$  时,设

$$\alpha' = -\alpha, \quad \beta' = -\beta.$$

因为

$$-2 < \alpha < -\frac{1}{2}, \quad -2 < \beta < -\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{1}{2} < \alpha' < 2, \quad \frac{1}{2} < \beta' < 2, \quad -a = \alpha' + \frac{1}{\alpha'} = \beta' + \frac{1}{\beta'}.$$

那么,由①的结论可得

$$2 \leqslant -a < \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} < a \leqslant -2.$$

综合①,②,所求取值范围为

$$-\frac{5}{2} < a < \frac{5}{2}.$$

---

① 关于  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上是增函数的证明如下:在  $[1, +\infty)$  上,任取  $x_1 < x_2$ , 那么,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}.$$

由于  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 x_2 > 0$ , 以及  $x_1, x_2 > 1$ , 从而  $x_1 x_2 - 1 > 0$ .

因而

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2} < 0.$$

于是,  $y = x + \frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上是增函数.

说明 [1] 虽然在本例的题目中并未出现充分条件或必要条件的字样,但整个解题过程的每一步骤,几乎都离不开在它的指导下进行思考.

[2] 当把原方程等价变形为:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

以后,如果“数形结合”,将易于看出, $x$  为虚数时, $x + \frac{1}{x}$ 未必是虚数. 因为,当且仅当,在复平面上,单位圆上的点所代表的虚数  $x(x \neq \pm 1)$ ,与它的倒数  $\frac{1}{x}$  是共轭虚数(如图4-9所示)时,它们的和是实数,而且显而易见,这和  $(-2, 2)$  上.

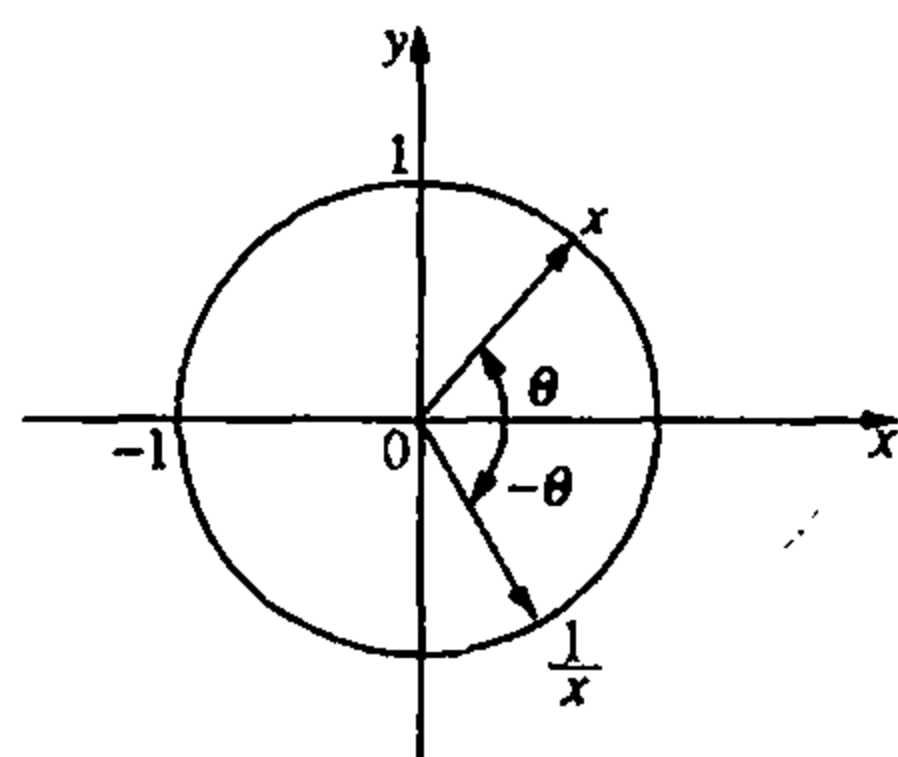


图 4-9

[3] 因而,在上述(ii)分析的基础上,利用数形结合,本题还可以有比较简单的解法如下.

解 因为  $x=0$  不满足原方程,所以原方程等价于

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0. \quad (1)$$

1° 当  $x + \frac{1}{x}$  为虚数时, $x$  必为虚数,若不然, $x \in R \Rightarrow \frac{1}{x} \in R (\because x \neq 0)$ ,与  $x + \frac{1}{x}$  为虚数矛盾.

于是, $x + \frac{1}{x}$  为虚数时,方程①的解都是虚数.

此时, $\Delta = a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$ .

2° 当  $x + \frac{1}{x} \in R$  时,

$$\text{记 } x + \frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x^2 - ux + 1 = 0.$$

若  $x$  为虚数  $\Leftrightarrow \Delta = u^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < u < 2$ ,

设二次函数  $f(u) = u^2 - au + 1$ ,那么, $f(u) = u^2 - au + 1$ ,可示意如图 4-10 所示.

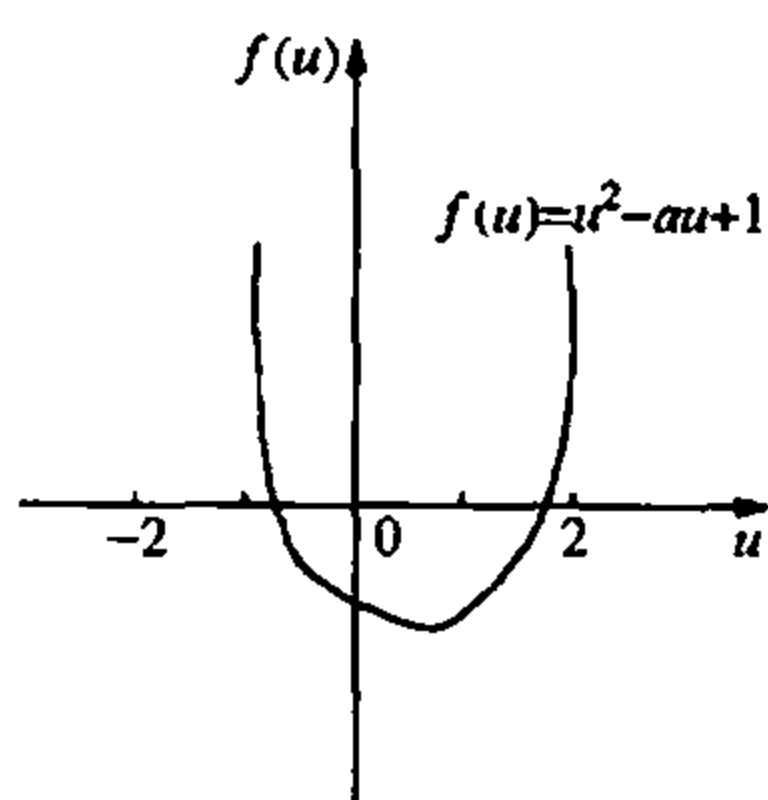


图 4-10

这时

$$\begin{cases} \Delta = a^2 - 4 \geq 0, \\ -2 \leq -\left(\frac{-a}{2}\right) \leq 2, \\ f(-2) > 0, \\ f(2) > 0. \end{cases}$$

解得

$$-\frac{5}{2} < a \leq -2 \text{ 或 } 2 \leq a < \frac{5}{2}.$$

综合 1°、2° 得,  $-\frac{5}{2} < a < \frac{5}{2}$ .

例 9 已知  $2 \leq a + b \leq 4, 1 \leq a - b \leq 2$ , 求  $4a - 2b$  的范围.

分析 对于本题,可能会出现以下两种解法:

解法一 对于

$$2 \leq a + b \leq 4, \quad (1)$$

$$1 \leq a - b \leq 2, \quad (2)$$



① + ②得

$$3 \leq 2a \leq 6, \tag{3}$$

可得

$$6 \leq 4a \leq 12. \tag{4}$$

②  $\times (-1)$ 得

$$-2 \leq -a + b \leq -1, \tag{5}$$

① + ⑤得

$$0 \leq 2b \leq 3,$$

可得

$$-3 \leq -2b \leq 0. \tag{6}$$

④ + ⑥得

$$3 \leq 4a - 2b \leq 12. \tag{7}$$

解法二 把上述解法中的不等式②的各端乘以2,得

$$2 \leq 2a - 2b \leq 4. \tag{8}$$

③ + ⑧得

$$5 \leq 4a - 2b \leq 10.$$

两种解法的结果不同,哪个解法正确? 结果不同原因在哪里?

对于上述两种解法,从道理说,都是错误的,尽管第二种解法的答案正确.

原因是,解题的人对于“不等式证明”和“解不等式”这两个过程的本质没有区分清楚.

如果从“充分条件”和“必要条件”的角度去区别它们,解法就简单了.

证明不等式,是寻求正确的结论,因而是寻求已知不等式的必要条件,并不同时要求它也是充分条件. 而不等式性质

$$\left. \begin{array}{l} a \geq b \\ c \geq d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c \geq b + d,$$

恰恰是具备必要性的关系,用来证明不等式,显然是正确的.

但是,求范围的问题,是求充分且必要条件,所以运用上述性质就不适宜了. 举个简单的例子:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5,$$

而不能

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 4.$$

事实上,由于区域要求“充要”,所以,常常利用它来求取值范围.

如图 4-11 所示,在坐标平面  $aOb$  上,  $2 \leq a + b \leq 4$ , 表示在直线  $a + b = 4$  的下方(包括直线上的点), 和直线  $a + b = 2$  的上方(包括直线上的点)之间的条形区域.

$1 \leq a - b \leq 2$ , 则表示在平行直线  $a - b = 2$  和  $a - b = 1$  之间的条形区域.

如果直线  $a + b = 4$ ,  $a + b = 2$ ,  $a - b = 2$  和  $a - b = 1$  相交于点  $A, B, C, D$ , 那么, 同时满足  $2 \leq a + b \leq 4$  和  $1 \leq a - b \leq 2$  的每组  $a, b$  值, 就是在  $\square ABCD$  的内部及其边界上的每个点的坐标数(这是由一个“点集”到一个“有序实数对集”上的一一映射), 而对这些点的每一组坐标数  $a, b$  值, 施行  $4a - 2b$  的运算, 得到的全部结果值的范围, 就是本题所求的范围.

因为, 对同一条平行于  $4a - 2b = 0$  的直线上的点的坐标数值, 施行  $4a - 2b$  运算后的结果相同,

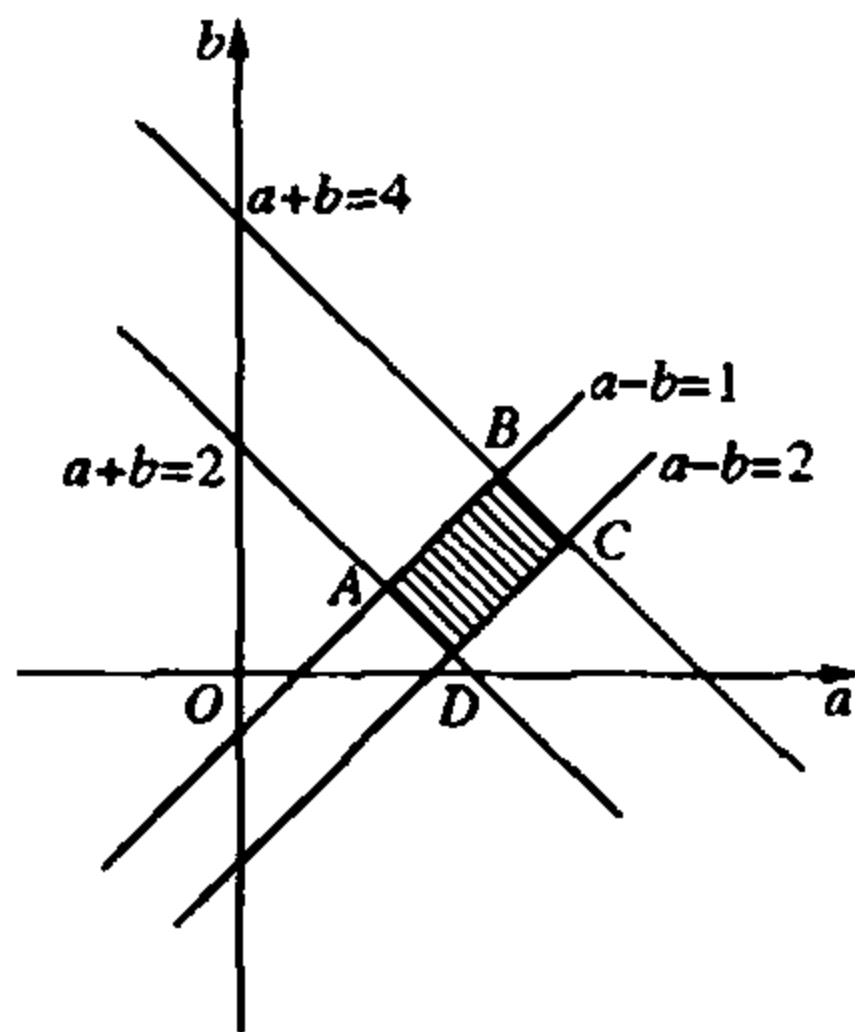


图 4-11

都等于这条直线在  $b$  轴上的截距 2 倍的相反数(设  $4a - 2b = p$ , 那么,  $b = 2a - \frac{p}{2}$ , 截距  $m = -\frac{p}{2}$ , 于是,  $p = -2m$ , 如图 4-12 所示). 由于这些平行线在  $y$  轴上截距的连续性, 那么, 只要求出这些截距的最大值、最小值,  $4a - 2b$  的取值范围就不难得到.

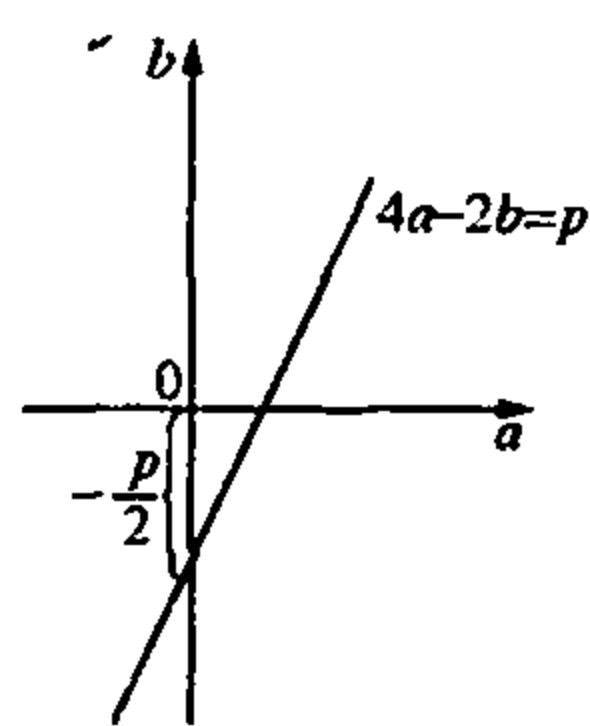


图 4-12

事实上, 由过一个平行四边形的 4 个顶点作一组平行线, 则这个四边形必夹在其中两条平行线之间, 因而对于本题, 只要把点  $A(1.5, 0.5)$ ,  $B(2.5, 1.5)$ ,  $C(3, 1)$  和  $D(2, 0)$  的坐标代入  $4a - 2b = p$  中, 得 4 个  $p$  值:  $p_A = 5$ ,  $p_B = 7$ ,  $p_C = 10$ ,  $p_D = 8$ . 其中, 最小值 5, 最大值 10. 那么, 本题所求  $4a - 2b$  的取值范围就是  $[5, 10]$ .

**说明** [1] 从对本例所示错误的分析中, 可以明确, 证明过程的每一步, 都是寻求前式的必要条件; 如果是用“分析法”来证明, 则每一步都是寻求前式的充分条件; 解方程或解不等式(包括求取值范围问题)的每一步, 都应与其前一式是充要的.

[2] 为了在解决有关不等式的问题时不出现混乱, 有必要弄清, 课本所给出的不等式的性质中, 哪些是“充要”的, 哪些不是.

这些, 在课本上, 分别用“ $\Leftrightarrow$ ”或“ $\Rightarrow$ ”作了区分.

有必要进一步说明的是:

(1) 课本上推论  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ , 且  $n > 1$ ) 和定理: 如果  $a > b > 0$ , 那么  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$ , 可以合并为一种“充要”形式的写法:

$$a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n, (n \in \mathbb{Z}, \text{且 } n > 0).$$

在解不等式时常常用到上式.

(2) 性质  $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ , 其实是“充要”的, 即

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$$

因为, 把  $a + c > b + c$  两端都加上“ $-c$ ”, 即得  $a > b$ . 在解不等式时, 只要不影响未知数的取值范围, 即可应用.

(3) 在  $c > 0$  的前提下,  $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ ; 在  $c < 0$  的前提下,  $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ . 在解不等式中, 只要不影响未知数的取值范围, 即可应用.

(4)  $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

## 二、公式、定理的学习

学习公式、定理, 要深入它的本质, 才能正确应用. 不能畏惧“深入”的艰难, 躲避现实, 另寻“捷径”, 不能死啃条条而机械套用, 更不能远离原则, “土法上马”, 编顺口溜.

### (一) 坐标轴平移公式

在高中课本《平面解析几何》给出的坐标平移公式中, 有这样的叙述:

“设  $O'$  在原坐标系  $xOy$  中的坐标为  $(h, k)$ , 以  $O'$  为原点平移坐标轴, 建立新坐标系  $x'O'y'$ . 平面内任意一点  $M$  在原坐标系中的坐标为  $(x, y)$ , 在新坐标系中的坐标为  $(x', y')$ ……”

“因此, 点  $M$  的原坐标、新坐标之间, 有下面的关系:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k. \tag{①}$$

或者写成

$$x' = x - h, \quad y' = y - k. \tag{②}$$

公式①、②叫做平移(移轴)公式.”

公式①、②中的“ $+$ ”号和“ $-$ ”号, 很容易记混, 为了解决这个困难, 一些同学开动脑筋找窍门,

发现了一个“规律”:不带“'”的等于带“'”的加  $h$  (或  $k$ ), 自然, 带“'”的等于不带“'”的减  $h$  (或  $k$ ).

这又是一种歪曲概念本质的学习方法. 因为, 用这个方法虽然能把公式牢牢记住, 但用来解下面这道题, 十之八九是会做错的.

**例 10** 坐标系  $x'O'y'$  是由坐标系  $xOy$  平移得到的, 这时  $O$  点在  $x'O'y'$  系下的坐标是  $(3, 5)$ , 点  $M$  在  $x'O'y'$  系下的坐标是  $(10, 20)$ , 求点  $M$  在坐标系  $xOy$  下的坐标.

**分析** 上述同学是这样套用公式①的:

因为

$$h = 3, \quad k = 5, \quad x' = 10, \quad y' = 20.$$

所以

$$x = x' + h = 13, \quad y = y' + k = 25.$$

如果套用公式②:

把  $h = 3, k = 5, x' = 10, y' = 20$ , 代入公式②, 得

$$10 = x - 3 \Rightarrow x = 13, \quad 20 = y - 5 \Rightarrow y = 25.$$

两种代入, 都得到了相同的错误结果, 为什么呢?

原因是, 上述记忆方法, 只看到  $x(y)$  在形式的带“'”或不带“'”, 而没注意到在这段叙述中的第一句话: “设  $O'$  点在原坐标系  $xOy$  中的坐标为  $(h, k)$ ”.

如果注意到了这点, 由于本题给出的是点  $O$  在  $x'O'y'$  系中的坐标  $(3, 5)$ , 那么, 点  $O'$  在  $xOy$  坐标系下的坐标就应该是  $(-3, -5)$ , 这样无论代入公式①或②, 都会得到正确的结果.

**解** 由已知  $O$  点在坐标系  $x'O'y'$  中的坐标是  $(3, 5)$ , 那么,  $O'$  点在坐标系  $xOy$  中的坐标就是  $(-3, -5)$ , 代入公式②, 得到

$$x = x' + h = 10 - 3 = 7, \quad y = y' + k = 20 - 5 = 15.$$

**说明** [1] 有些同学, 不采用上述先求出  $O'$  点在坐标系  $xOy$  中坐标的方法, 而是依题意画出了两个坐标系的图形, 得到了  $M$  点在  $xOy$  系下正确的坐标, 表明养成数形结合思考习惯的优越性.

[2] 如果一定要总结公式的记忆方法, 只要不单纯追求形式, 方法可以想出许多, 例如, 这样来记忆:

在坐标系平移中, 把原点的坐标被另一坐标系表示出来的坐标系称做新系, 它的坐标记为  $(h, k)$ , 另一坐标系称为旧系, 那么,

$$x_{\text{旧}} = x_{\text{新}} + h, \quad y_{\text{旧}} = y_{\text{新}} + k.$$

这样, 再来解答本题以及其他坐标系平移的题目, 就不发生错误了.

## (二) 平面上两条直线所成的角的公式的学习

在坐标平面上, 两条斜率分别是  $k_1, k_2$  的直线  $l_1, l_2$ , 并且  $1 + k_1 k_2 \neq 0$  (即它们不互相垂直), 把直线  $l_1$  依逆时针方向旋转到与直线  $l_2$  方向相同的位置, 记这个所转的角为  $\theta$ , 那么,

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad \textcircled{2}$$

这是高中课本《平面解析几何》所给出的平面上的两条直线的夹角公式.

课本上, 同时给出了公式的指导过程. 先证明了

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \textcircled{1}$$

然后有一段文字如下: “从一条直线到另一条直线的角, 可能不大于直角, 也可能大于直角, 但我们常常只需要考虑不大于直角的角就可以了, 这时可以用下面的公式”, 即公式②, 并且在它的外面套上了方框, 以示注意.

课本这段文字只是说“这时可用下面的公式(公式②), 并没有排斥公式①的意思. 因为, 公式①

恰恰是理解公式②的基础.

但许多同学在学习、记忆平面上两条直线所成的角的公式时,却畏于掌握公式①时要区分始边与终边等,图省事,只记这个带“||”号的公式②,这样,到了应用中,如果题目所给条件,使“||”号内可以计算为一个用数字表示的实数时,运用公式②当然和公式①一样方便;但当“||”号内含有字母参数时,“||”就常常不容易去掉了.于是,这些同学遇到这种情况时,只好用其他办法讨论所成的角,绕了弯路,甚至陷于“绝境”.

举一个例子.

1986年全国高等学校统一招生考试(理工类)数学试卷上有一道题目(第五题):

在 $y$ 轴正向上有两点 $A(0,a)$ , $B(0,b)$ ,并且 $b > a$ ,试在 $x$ 轴正向上求一点 $P$ ,使得 $\angle APB$ 最大,如图4-13所示.

按命题人的想法,这道题原本不难,因为,利用本节的公式①

$$\operatorname{tg} \angle BPA = \frac{k_{PA} - k_{PB}}{1 + k_{PB} \cdot k_{PA}} = \frac{\left(-\frac{a}{x}\right) - \left(-\frac{b}{x}\right)}{1 + \left(-\frac{b}{x}\right)\left(-\frac{a}{x}\right)} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

由于 $b-a > 0$ 是常数, $x + \frac{ab}{x} > 0$ ,及 $\angle BPA$ 是锐角,那么,有

$\angle BPA$ 最大 $\Leftrightarrow \operatorname{tg} \angle BPA$ 最大 $\Leftrightarrow x + \frac{ab}{x}$ 最小. 又因为 $x, \frac{ab}{x} > 0$ ,根据当且仅当 $a=b$ 时, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

中等号成立,有当且仅当 $x = \frac{ab}{x}$ ,即 $x = \sqrt{ab}$ 时, $x + \frac{ab}{x}$ 得到最小值 $2\sqrt{ab}$ , $\angle BAP$ 得到最大值.

这时, $P$ 的位置为 $(\sqrt{ab}, 0)$ .

但是,在所统计的180份考卷中,做对这道题目的同学只有5人,解错同学中的大部分人,是因

为应用公式②,当 $\operatorname{tg} \angle APB = \left| \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} \right|$ 的绝对值符号内有字母参数时,不会去掉“||”号,而公式①

平时又从来不用,只好求救于余弦定理,得到

$$\cos \angle ABP = \frac{(x^2 + a^2) + (x^2 + b^2) - (b-a)^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}.$$

但这时,分式的分子、分母上都有变量 $x$ ,因此难以讨论分式的最小值,从而得到 $\angle ABP$ 的最大值,解题进程只好半途而废了.

由此可见,掌握概念、公式,一定不要只满足记忆现成的结果和解题时只会套公式,需要理解它的来龙去脉,它和它以外事物的关联.

### 三、一个单元的学习与小结

如何学习课本上的一章或一个单元,以及进行小结呢.

第一步,深入理解它的各个概念(如本章“一”所示范的)、定理公式(如本章“二”所示范的),并初步予以归纳、比较,编织系统;第二步,结合题目,归纳它们的应用,总结解题思考方法.

总结一章或一个单元,是指学完包括它在内的一个更大的段落之后,例如一册书或一大章(相对于一个单元),应当返读这一章或单元的内容.

第一步,站在新的高度,完善原来的系统;第二步,解包含更大范围知识的综合题,提高应用水

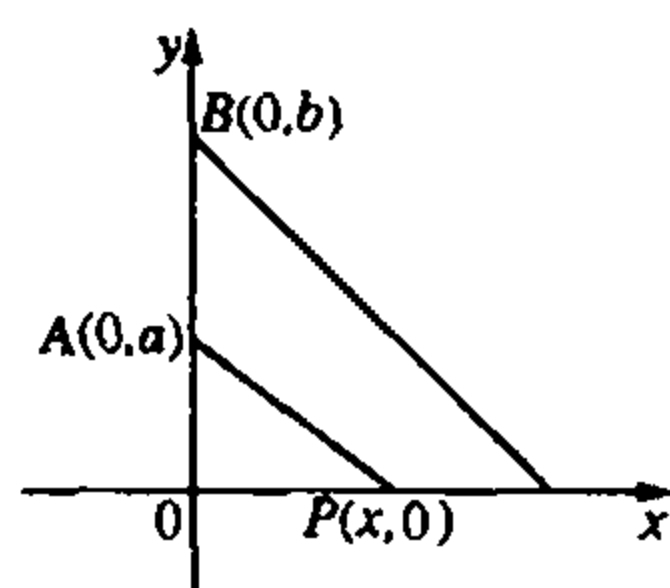


图 4-13

平,归纳解题思考方法.

函数,是高中代数的一个重点. 一方面,它的内容丰富;另一方面,利用它可以解决许多方面的问题. 于是,下面选择函数为对象,进行“一个单元的学习与小结”的示范.

(一) 概念的理解

1. 函数定义

在高中课本中,函数是这样定义的:

当集合  $A$ 、 $B$  都是非空的数的集合,且  $B$  的每一个元素都有原象时,这样的映射  $f:A \rightarrow B$ ,就是从定义域  $A$  到值域  $B$  上的函数. 记做: $y=f(x)$ ,其中  $x \in A, y \in B$ .

理解这个定义,首先要抓住,一个函数是从一个数集到另一个数集上的映射(有的书中,不强调是“到……上”的映射,只要是从一个数集到另一个数集的映射,即称做函数,当然,这时的第二个集合,不能称做是值域,数集才是值域).

例 11 下面的每一个图中,都给出了一个点集,如图 4-14. 其中有离散的点的集合,也有以曲线形式表示的无穷多点的集合,在坐标平面上,每个点的横坐标数  $x$ ,都对应着这个点的纵坐标数  $y$ .

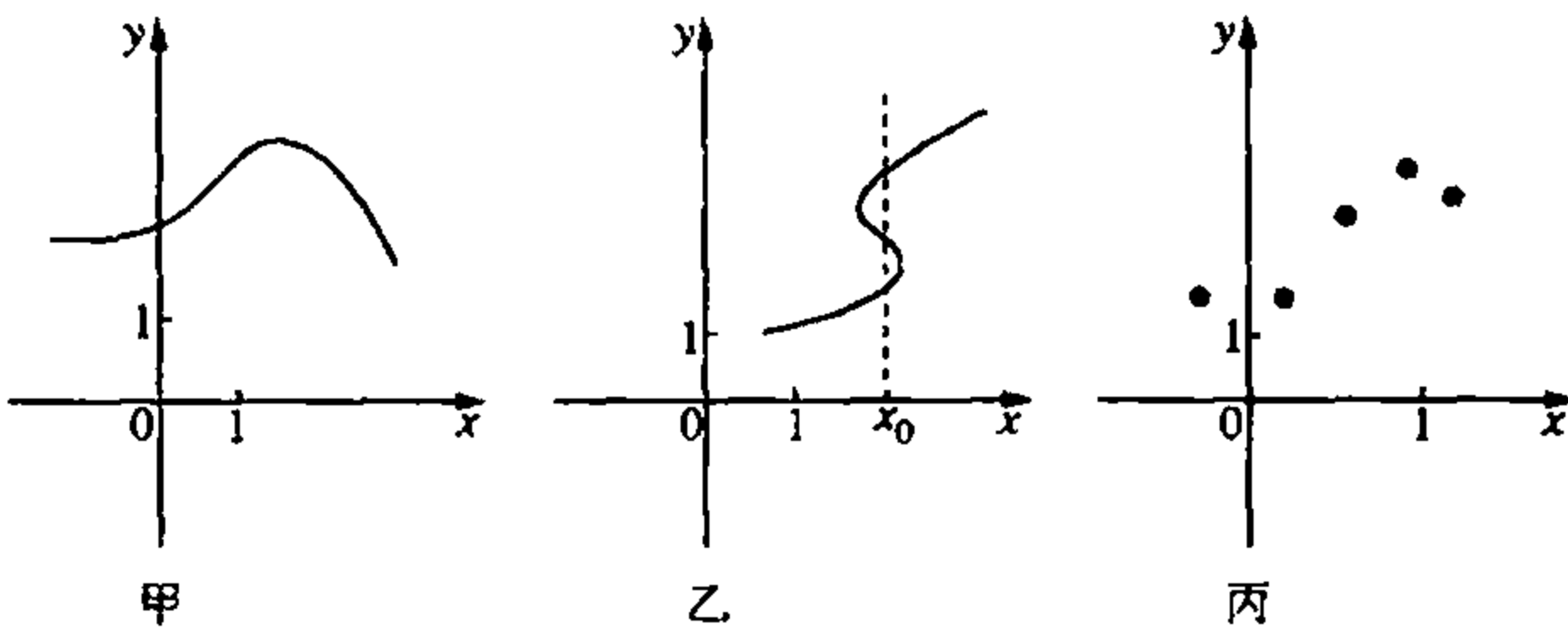


图 4-14

请指出,在这种情况下,每个图中各点的横坐标数  $x$  的集合  $X$ ,到纵坐标数  $y$  的集合  $Y$  的对应,哪几个构成了函数,哪几个不构成函数? 为什么?

解 在图 4-14 甲和丙中,所给点集的横坐标数  $x$  的集合  $X$ ,到纵坐标数  $y$  的集合  $Y$  的对应,构成了函数.

这是因为,数集  $X$  中的每一个元素,都隶属于一个点,便都有且只有一个  $y$  值与之对应,而  $Y$  集中的每一个数,都通过它所隶属的点,有一个原象  $x$  在数集  $X$  中,完全符合函数定义的要求.

而在图 4-14 乙中,从数集  $X$  到数集  $Y$ ,则不存在函数. 因为,虽然数集  $X$  中的每一个元素,都通过它所隶属的点,在数集  $Y$  中有数  $y$  可对应,但却不总是对应惟一的  $y$  值,从图上看得出,当取  $x_0 \in X$  时,在  $Y$  中有 3 个元素与之对应,这样,从  $X$  集到  $Y$  集,按照规定的对应法则(同一个点的纵坐标数与横坐标数对应),不构成映射,就更谈不上从  $X$  集到  $Y$  集上的映射了,因而无法称为函数.

理解了这一点,就不难理解为什么  $y=1$  构成了从定义域  $R$  到值域  $\{1\}$  上的函数. 但是, $x=1$ ,则不是从数集  $\{1\}$  到数集  $R$  上的函数了.

有些同学在理解中,强调“ $x$ 、 $y$  必须是变量”,“构成函数关系时, $x$  要变, $y$  也要变”. 从以上正反两个例子看,这种强调,显然都没抓住概念的本质,都是不正确的. 事实上,倒是应该强调:“ $x$  定, $y$  也定”,这里所谓的定,是指“惟一确定”.

形象地说,不能认为,从泛指的意义,上,体重是年龄的函数. 但对于一个具体的人的一生来说,他的体重,则与他年龄有函数关系. 当然,这里所说的年龄,是用实数表示的,指与出生时刻相距的时间.

理解函数定义,不难发现,在这里有三个要素,定义域、对应法则和值域.

认识、理解一个函数,应当从这些着手,但它们又不是平等的.事实上,给定了定义域和对应法则以后,值域就被确定了,所以,有人又称函数有两要素.

求函数定义域的问题,可以分为两类:一类是,已经给出了函数的解析式,并且未指出函数的实际意义;另一类是应用问题.

对于第一类,解法的本质是解方程或不等式组求交集.求谁的交集?这是指,在中学范围内,解析式 $\frac{1}{f_1(x)}$ , $\sqrt[n]{f_2(x)}$  ( $n$  是偶数), $\log_{f_3(x)} f_4(x)$ , $\lg[f_5(x)]$ , $\operatorname{ctg}[f_6(x)]$ , $\arcsin[f_8(x)]$ , $\arccos[f_9(x)]$  都有自己的并非全体实数的特殊取值集合,而另外的解析式,如多项式、指数式、正(余)弦式……的  $x$  的取值集合,则是全体实数.

一个函数  $y=f(x)$  的解析式,无非是上述这些解析式通过代数运算或复合的方式组合而成 ( $y=\lg \sin x$ , 是  $\lg x$  和  $\sin x$  复合而成). 那么,  $f(x)$  的定义域,就是相应这些解析式取值集合的交集.

例 12 求 函数  $f(x)=\frac{\sqrt{3-3^x}}{\log_3(x-1)-1}$  的定义域.

解 只需解不等式 
$$\begin{cases} 3-3^x \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ \log_3(x-1)-1 \neq 0. \end{cases}$$

对于表现为应用问题(指有物理、几何及其他实际意义)的函数求定义域,则根据其解析式求出一个取值集合,再根据问题实际意义的要求,剔除不合要求的部分.

例 13 式子  $y=(100-4x) \div 8$ , 表达了花光一元钱,所买的 8 分一张邮票的总数  $y$ ,与 4 分一张邮票总数  $x$  之间的函数关系,求函数  $y$  的定义域.

解 作为  $y=\frac{1}{8}(100-4x)$ , 从解析式的要求上,  $x \in R$ , 但作为实际问题,应有  $x$  是非负整数和  $100-4x \geq 0$  及  $\frac{1}{8} \times (100-4x)$  是非负整数的要求,所以所求定义域为  $\{1, 3, 5, \dots, 23, 25\}$ .

例 14 如图 4-15 所示,已知  $AD$  是  $\triangle ABC$  的一条中线,长为  $y$ ,  $BC=2$ ,  $AB+AC=3$ .

(1) 以  $AB$  长度为自变量  $x$ , 建立用  $AB$  长度表达  $AD$  长度的函数解析式;

(2) 求这个函数的定义域.

解 (1) 由余弦定理

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + 1^2 - 2x \cos B, \\ (3-x)^2 &= x^2 + 2^2 - 4x \cos B. \end{aligned}$$

消去  $\cos B$ , 得

$$y^2 = x^2 - 3x + \frac{7}{2}.$$

由题意,  $y > 0$ , 所以

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 3\frac{1}{2}}.$$

(2) 由  $x^2 - 3x + 3\frac{1}{2} \geq 0$ , 得

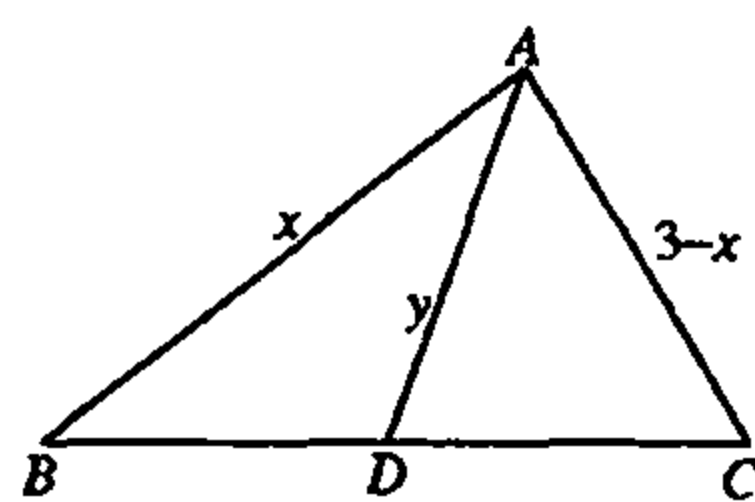


图 4-15

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \cdot \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow x \in R. \quad ①$$

$$\text{由} \quad AB + AC = 3 \Rightarrow x < 3, \quad ②$$

再根据三角形中任意两边之和大于第三边,有

$$\begin{cases} x + 2 > 3 - x, \\ 3 - x + 2 > x \\ x + 3 - x > 2. \end{cases} \Rightarrow 0.5 < x < 2.5, \quad ③$$

综合式①,②,③,得到所求定义域是  $\{x | 0.5 < x < 2.5, x \in R\}$ .

**说明** 本例的(1)题,涉及求函数的解析式,这是一类主要问题.因为,解析式是对应法则的一种常见表达形式.

求函数解析表达式问题,在中学范围主要有两类.

第一类是在应用问题中进行,解题的思考方法是,依应用问题的实际意义,列出含有  $x, y$  的等式.当其中含有  $x, y$  以外的变量(例如本题中的  $\angle B$ )时,则要增加所列等式的数目,以消去这些  $x, y$  以外的变量,并且在变形过程中,注意按问题的实际意义舍或取,如本例的解法所示.

第二类是,已知  $f[\varphi(x)]$  的解析式,求  $f(x)$  的解析式.

换元法是解决这类问题的方法之一.

先设

$$u = \varphi_1(x), \quad ①$$

得到

$$x = \varphi_2(u). \quad ②$$

把式①和②,都代入  $f[\varphi_1(x)]$  的解析表达式中,再把等式中的  $u$  都换为  $x$ ,在变换过程中,要注意等价性.

**例 15** 已知  $f(\ln x) = 3x^2 - x + 1$ ,求  $f(x)$ .

**解** 设  $u = \ln x \Rightarrow x = e^u$ ,代入  $f(\ln x) = 3x^2 - x + 1$ ,得

$$f(u) = 3(e^u)^2 - e^u + 1.$$

所以

$$f(u) = 3e^{2u} - e^u + 1, \quad f(x) = 3e^{2x} - e^x + 1.$$

考虑到上面两式中的  $u, x \in R$ ,因而

$$f(u) = 3e^{2u} - e^u + 1 \text{ 和 } f(x) = 3e^{2x} - e^x + 1$$

是等价的.

**说明** 从  $f(u)$  的解析式,代换为  $f(x)$  的解析式,表明了对于函数的对应法则“ $f$ ”的理解.

就以解析式表示的对应法则而言,“ $f$ ”的意义是,对于“ $f(x)$ ”中的  $x$ ,以指定的方式施行运算.因而,如果  $f(u) = 3e^{2u} - e^u + 1$ ,当然  $f(x) = 3e^{2x} - e^x + 1$ .

在对于“ $f$ ”的意义理解的基础上,不难解决如下例所示的求定义域问题.

**例 16** 已知  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,求函数  $y = f(1-x^2)$  的定义域,

**解** 先求  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  的定义域,

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1].$$

设  $\varphi(x) = f(1-x^2)$ ,那么,求  $f(1-x^2)$  的定义域,实质上,是求  $\varphi(x)$  的定义域.

而“ $f$ ”对于自变量的要求是,在  $[-1, 1]$  上,于是,

$$1 - x^2 \in [-1, 1] \Rightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$



**说明** 本题也可以先求出  $f(1-x^2)$  的表达式,再依据解析式运算或复合方式的要求,求出它的定义域.

因为

$$f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

所以

$$f(1-x^2) = \sqrt{1-(1-x^2)^2} = \sqrt{2x^2-x^4}.$$

求它的定义域:

$$2x^2-x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-2) \leq 0,$$

因为

$$x^2 \geq 0,$$

所以

$$x^2(x^2-2) \leq 0 \Leftrightarrow x^2-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

这种解法,不但麻烦,而且无法解决那种只给了  $f(x)$  的定义域,但未给出  $f(x)$  解析式的题目.

**例 17** 已知  $f(x)$  的定义域为  $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, x \in R\right\}$ , 求  $f(\sin 2x)$  的定义域.

**分析**  $f(x)$  的解析式没给出,第二类解法不能实行.

**解** 设  $\varphi(x) = f(\sin 2x)$ ,

由于  $f(x)$  的定义域为  $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, x \in R\right\}$ , 则

$$\frac{1}{2} \leq \sin 2x \leq 1.$$

观察  $y = \sin 2x$  的图像(如图 4-16 所示). 考虑到正弦函数的单调区间,及正弦函数的周期性,可得

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad (k \in Z).$$

所以

$$\varphi(x) = f(\sin 2x)$$

的定义域为

$$\left\{x \mid \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z, x \in R\right\}.$$

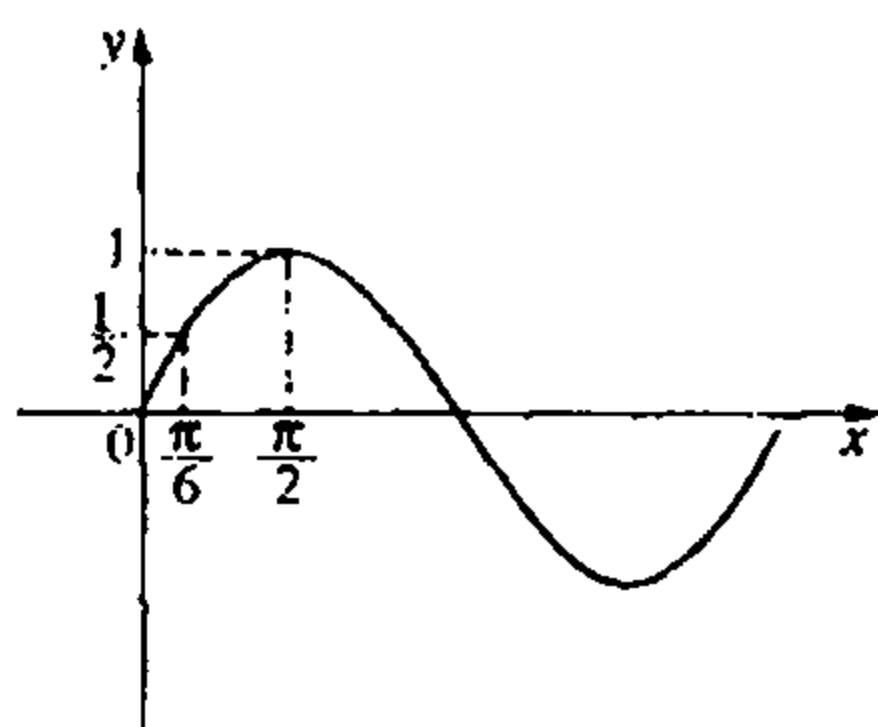


图 4-16

关于函数的第三要素,求值域的问题,是一个比较复杂的问题,要针对给出的函数的具体特点,灵活地选择适宜的解决方法. 这些方法包括:利用算术根性质,利用非负数(包括配方法)性质,利用函数的增(减)性,利用换元法,利用判别式法,当可以断定所给出的函数是从它定义域到值域上的一一映射时,求出它的反函数的定义域,作为它的值域;把解析式看做是关于  $x$  的方程,从解出所需要(定义域上的)  $x$  的角度,解出  $y$ ,得到  $y$  的范围……

要特别注意的是,变形过程中,必须保证等价性,防止扩大或缩小了  $y$  值范围.

由于本书篇幅所限,对求值域问题,不再另拟例题进行分析.

## 2. 函数性质

高中课本主要讨论的函数性质是:奇偶性、增减性、周期性.

### (1) 函数的奇偶性

对于函数  $f(x)$ ,记它的定义域为  $I$ .

如果任意  $x \in I$ ,都有  $f(-x) = -f(x)$ ,那么,称  $f(x)$  是奇函数;

如果任意  $x \in I$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ , 那么, 称  $f(x)$  是偶函数.

由于定义中  $f(-x)$  的存在, 表明当  $x \in I$  时, 有  $-x \in I$ , 因而奇(偶)函数的定义域是关于原点对称的. 这一点, 从定义出发, 是不难证明的.

函数是奇函数的充要条件, 是它的图像关于原点对称; 函数是偶函数的充要条件, 是它的图像关于  $y$  轴对称.

还可以证明:

若函数  $f(x)$  的定义域是  $(-a, a)$  或  $[-a, +a]$ , 其中  $a > 0$ , 那么,  $f(x)$  既是奇函数, 又是偶函数的充要条件, 是  $f(x) \equiv 0$ .

**证明** 因为  $f(x)$  的定义域是  $(-a, a)$ , 其中  $a > 0$ , 所以, 任意  $x \in (-a, a) \Rightarrow -x \in (-a, a)$ , 并且  $f(-x)$  和  $f(x)$  同时存在.

1° 证必要性. 由于  $f(x)$  是奇函数, 所以

$$f(-x) = -f(x).$$

由于  $f(x)$  是偶函数, 所以

$$f(-x) = f(x).$$

于是

$$-f(x) = f(x),$$

$$f(x) = 0,$$

由  $x$  的任意性, 得

$$f(x) \equiv 0.$$

2° 证充分性. 因为  $f(x) \equiv 0$ , 所以

$$f(-x) = 0 = -f(x),$$

其中,  $x, -x \in (-a, a)$  且  $x$  任意, 则  $f(x)$  是奇函数.

又

$$f(-x) = 0 = f(x),$$

其中,  $x, -x \in (-a, a)$  且  $x$  任意, 则  $f(x)$  是偶函数.

**例 18** 判断函数  $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$  的奇偶性.

**分析** 一些同学, 由于熟知  $(-x)^2 = x^2$ ,  $(-x)^4 = x^4$ ,  $\dots$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ , 当  $a$  为奇数时,  $(-x)^a = -x^a$ . 于是, 一见本例  $f(x)$  的解析式中, 既有  $x$  又有  $x^2$ , 便作出它非奇非偶的判断, 导致了错误. 正确的途径, 还是应该从奇函数或偶函数的定义域出发.

**解** 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lg(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lg \left[ \frac{-x - \sqrt{x^2 + 1}}{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(-x - \sqrt{x^2 + 1})} \right]^{-1} \\ &= -\lg \frac{-x - \sqrt{x^2 + 1}}{(-x)^2 - (x^2 + 1)} = -\lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x). \end{aligned}$$

而且,  $f(x)$  的定义域为

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow x > -\sqrt{x^2 + 1}.$$

$x$  取全体实数, 是关于原点对称的非空数集, 所以,  $f(x)$  是奇函数.

**说明** 由于本题函数  $f(x) \not\equiv 0$ , 根据一个函数既是奇函数又是偶函数充要条件是  $f(x) \equiv 0$ , 那么, 既然  $f(x)$  是奇函数了, 它就不再是偶函数, 不必再用偶函数定义去做判断了.

另外, 这个解法的缺点是, 第二步变形的方式在解题时很难想到, 为了解决这个问题, 提出以下关于奇(偶)函数的等价定义, 是大有裨益的:

奇函数  $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0$ .

偶函数 $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0$ .

那么,就易于想出对本例的另一个解法了.

因为

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x) &= \lg[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]+\lg(x+\sqrt{x^2+1}) \\&= \lg[(\sqrt{x^2+1})^2-(x)^2]=0,\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数,并且 $f(x)\neq 0$ ,它不是偶函数.

## (2) 函数的增减性

在函数 $f(x)$ 的一个区间 $I$ 上,如果任意 $x_1, x_2 \in I$ ,并且 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$ ,则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是增函数,换言之,区间 $I$ 称做是 $f(x)$ 的一个单调增区间.

如果任意 $x_1, x_2 \in I$ ,并且 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) > f(x_2)$ ,则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是减函数,换言之,区间 $I$ 称做 $f(x)$ 的一个单调减区间.

在理解函数奇偶性时,我们已经多次利用过它的图像,因为随时联系函数的图像,实在是学好和掌握函数概念的一个非常重要的途径.

从图像上看,增函数的图像,从左向右,可以形象地描述为“蒸蒸日上”,而减函数的图像,则是“每况愈下”.

判断或证明一个函数的增减性,根据定义,显然将转化为证明不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$ ,而这常常可以由判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负性来解决,当 $f(x_1), f(x_2)$ 同号时,又可由判断 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 的值大于1还是小于1来解决.

**例 19** 判断函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+6}$ 的增减性.

**分析** 本例函数,是函数 $y=x^2-4x+6$ 的倒数,它是顶点在 $(2,2)$ 开口向上的抛物线,画出它的图像,如图 4-17 所示;再根据实数倒数的意义,不难画出 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+6}$ 的图像.如图 4-17 所示,分析 $f(x)$ 的图像,利用增(减)函数的几何意义,不难看出,函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+6}$ 的单调增区间是 $(-\infty, 2]$ ,单调减区间是 $[2, +\infty)$ .

以上判断过程,充分利用了图像,这再次表明,研究函数时应时刻结合它的图像的重要性.以上判断过程,借助于已知其增(减)性的函数,来分析新函数的增(减)性,即把新函数转化为旧的已知其增(减)性的函数来研究,是分析函数增减性的一个途径.

当然,严格的证明,还是要根据函数的增(减)性的定义来完成.

**解** 1° 在 $(-\infty, 2]$ 上,任取 $x_1, x_2$ ,并且 $x_1 < x_2$ ,则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2) &= \frac{1}{x_1^2-4x_1+6}-\frac{1}{x_2^2-4x_2+6}=\frac{(x_2^2-4x_2+6)-(x_1^2-4x_1+6)}{(x_1^2-4x_1+6)(x_2^2-4x_2+6)} \\&= \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-4)}{[(x_1-2)^2+2][(x_2-2)^2+2]}.\end{aligned}$$

因为

$$(x_1-2)^2+2>0, \quad (x_2-2)^2+2>0,$$

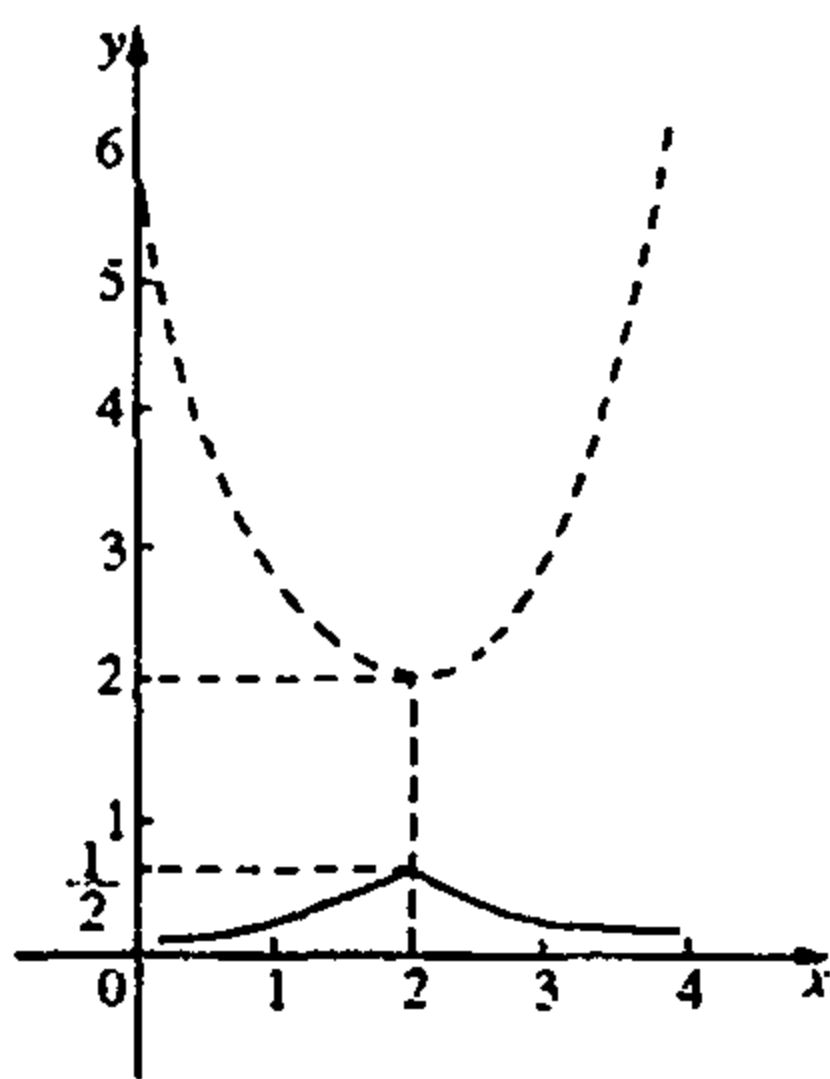


图 4-17

$$x_2 - x_1 > 0, \quad x_2 + x_1 - 4 < 2 + 2 - 4 = 0^*.$$

所以

$$f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

则  $f(x)$  这时是增函数.

2° 在  $[2, +\infty)$  上证明  $f(x)$  是减函数的过程, 与 1° 的证明过程类似, 请读者自己完成.

**说明** [1] 一个连续函数有不同的单调区间时, 区间的可取端点 (例如本题的  $x=2$ ) 是否包括在单调区间内, 有两种意见, 有的书上把它除外, 使单调区间都是开区间, 对于本题, 单调区间就变成了  $(-\infty, 2)$  和  $(2, +\infty)$ . 两种处理都可以.

[2] 证明过程中的带有记号“\*”的式子, 是完成证明的关键, 它利用了区间的端点 ( $x_1 < 2$ ,  $x_2 \leq 2$ ). 对于某函数只是在一段不是全体实数的区间上有单调性的证明, 必定要利用这个区间的端点.

为了培养数形结合分析问题的能力, 请作下面的练习.

**例 20** 判断函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$  的增(减)性, 并给出证明.

**提示** 如图 4-18 所示, 虚线是函数  $y = x^2 - 6x + 7$  的图像, 实线是函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$  的图像.

**解** 函数  $f(x)$  的单调增区间是  $(-\infty, 3 - \sqrt{2})$ ,  $(3 - \sqrt{2}, 3)$ ; 单调减区间是  $[3, 3 + \sqrt{2})$ ,  $(3 + \sqrt{2}, +\infty)$ .

**说明** 就本例而言, 不能认为  $(-\infty, 3]$  是它的单调增区间. 因为, 在  $x = 3 - \sqrt{2}$  处  $f(x)$  没有定义. 还需指出的是, 虽然在  $(-\infty, 3 - \sqrt{2})$  中,  $f(x)$  是增函数, 在  $(3 - \sqrt{2}, 3]$  中,  $f(x)$  也是增函数, 但在  $(-\infty, 3 - \sqrt{2})$  中取  $x_1$ , 在  $(3 - \sqrt{2}, 3]$  中取  $x_2$  时, 当然  $x_1 < x_2$ , 但  $f(x_1) > f(x_2)$ . 所以, 判断增(减)性的证明中, 必须强调  $x_1, x_2$  在区间内的任意性. 为了加深对这个问题的理解, 请读者辨析下列的证明是否正确.

**例 21** 已知 函数  $f(x)$  是偶函数, 在  $(-\infty, 0)$  上是增函数. 求证  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

**证明** 因为  $f(x)$  是偶函数, 并且在  $(-\infty, 0)$  上有定义, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义.

任取  $x_1, x_2$ , 使  $-\infty < x_1 < x_2 < 0$ , 则  $0 < -x_2 < -x_1 < +\infty$ .

因为  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上是增函数, 所以

$$f(x_1) < f(x_2).$$

又因为  $f(x)$  是偶函数, 所以

$$f(-x_1) = f(x_1), \quad f(-x_2) = f(x_2).$$

于是

$$f(-x_2) = f(x_2) > f(x_1) = f(-x_1).$$

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

**辨析** 上述证明是错误的, 原因在于, 根据减函数的定义, 必须在所论及的区间上, 任意较小的自变量取值所得到的函数值较大.

而这个证明中, 虽然  $-x_2, -x_1 \in (0, +\infty)$ , 并且, 由  $-x_2 < -x_1 \Rightarrow f(-x_2) > f(-x_1)$ , 但是, 并没有证明  $-x_2$  和  $-x_1$  是任取的.

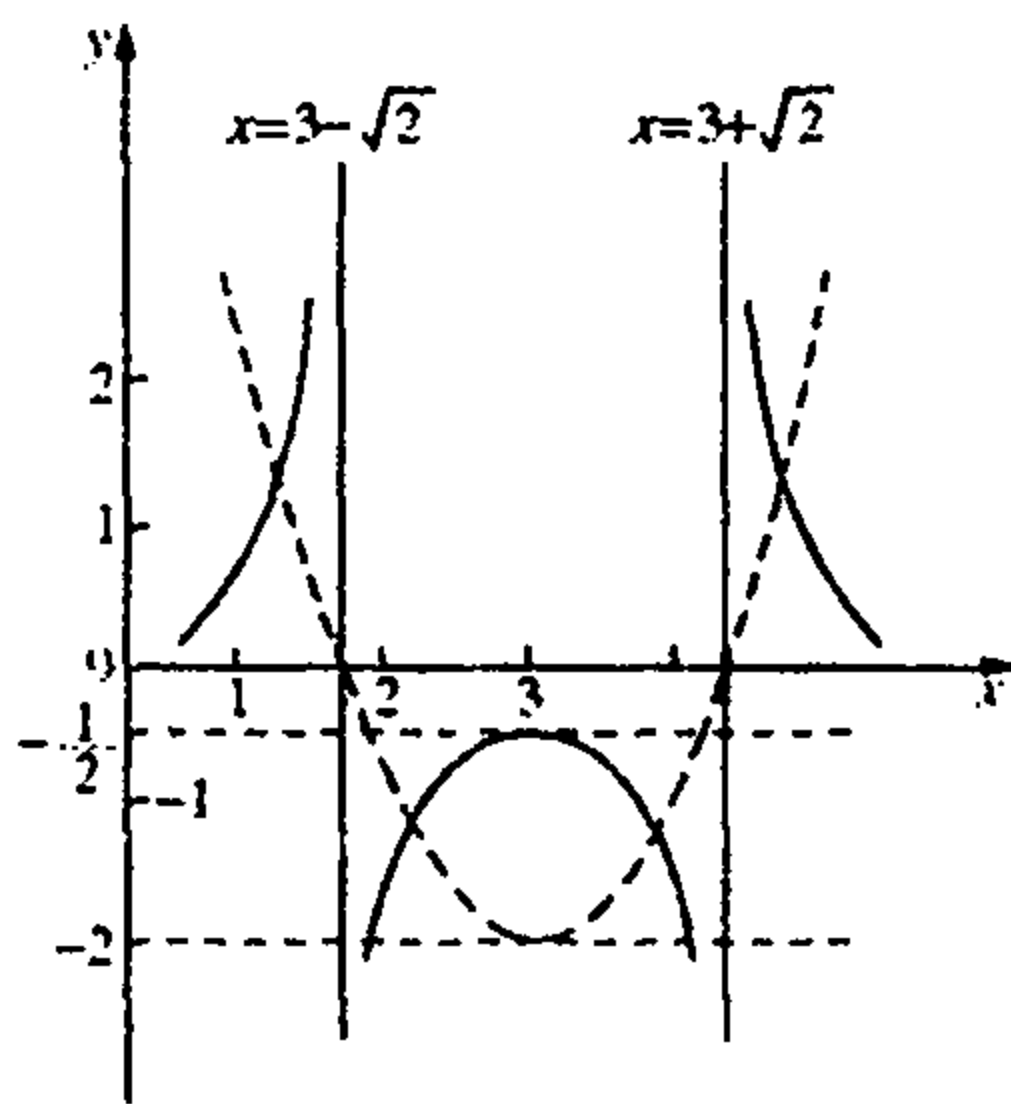


图 4-18

为了证明  $-x_2, -x_1$  的任意性, 可以首先证明, 在对应法则“关于原点对称”下, 数集  $(-\infty, 0)$  到  $(0, +\infty)$  上能建立一一映射, 然后, 由于  $x_1, x_2$  的任意性, 得到  $-x_2, -x_1$  是任取的.

但是, 下面的证明方法, 显得更好一些.

因为  $f(x)$  是偶函数, 并且在  $(-\infty, 0)$  上有定义, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义.

在  $(0, +\infty)$  上, 任取  $x_1, x_2$ , 使  $x_1 < x_2$ , 则  $-x_2 < -x_1$ , 且  $-x_2, -x_1 \in (-\infty, 0)$ . 因为  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上是增函数, 所以

$$f(-x_2) < f(-x_1).$$

由  $f(x)$  是偶函数, 有

$$f(-x_2) = f(x_2), \quad f(-x_1) = f(x_1).$$

所以

$$f(x_2) < f(x_1).$$

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

观察例 20, 题中给出的函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$ , 也可以看做是  $y = \frac{1}{u}, u = x^2 - 6x + 7$ , 这时, 把  $y$  称做复合函数. 那么, 函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$  的增(减)性, 和  $y = \varphi(u) = \frac{1}{u}, u = g(x) = x^2 - 6x + 7$  的增(减)性, 有没有联系呢?

答案是肯定的.

设  $y = \varphi(u), u = g(x)$ , 已知  $u = g(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增(或递减),  $y = \varphi(u)$  在  $[g(a), g(b)]$  (或  $[g(b), g(a)]$ ) 上单调, 那么复合函数  $y = \varphi[g(x)]$  在  $[a, b]$  上一定单调, 并且有如下所列的结论:

$u = g(x)$ $x \in [a, b]$	$y = \varphi(u)$ $u \in [g(a), g(b)]$ 或 $u \in [g(b), g(a)]$	$y = \varphi[g(x)]$ $x \in [a, b]$
增函数	增函数 $\Rightarrow$	增函数
增函数	减函数 $\Rightarrow$	减函数
减函数	增函数 $\Rightarrow$	减函数
减函数	减函数 $\Rightarrow$	增函数

以上结论, 都不难通过函数增(减)性的定义, 加以证明, 以证其中第一条为例.

已知  $u = g(x)$ , 在  $[a, b]$  上单调递增,  $y = \varphi(u)$  在  $[g(a), g(b)]$  上单调递增.

求证  $y = \varphi[g(x)]$  在  $[a, b]$  上单调递增.

证明 任取  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 并且  $x_1 < x_2$ , 因为  $u = g(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 所以

$$u_1 = g(x_1) < g(x_2) = u_2.$$

并且

$$g(a) \leq g(x_1) < g(x_2) \leq g(b),$$

即

$$g(a) \leq u_1 < u_2 \leq g(b).$$

又因为  $y = \varphi(u)$  在  $[g(a), g(b)]$  上是增函数, 所以

$$\varphi(u_1) < \varphi(u_2).$$

于是, 对于任意  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 且  $x_1 < x_2$ , 总有

$$\varphi[g(x_1)] < \varphi[g(x_2)].$$

即复合函数  $y = \varphi[g(x)]$  在  $[a, b]$  上是增函数.

这样, 如果已知一些函数的增减性, 再判断由它们复合而成的函数的增减性时, 问题常常可以变得简单些.

但应用这个方法, 必须满足, 当  $u = g(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增 (或递减) 时,  $y = \varphi(u)$  也要在  $[g(a), g(b)]$  (或  $[g(b), g(a)]$ ) 上单调.

所以对例 20, 就不能简单地套用这个方法. 因为,  $u = g(x) = x^2 - 6x + 7$  虽然在  $(-\infty, 3]$  上单调递减, 但  $y = \varphi(u) = \frac{1}{u}$  在相应的  $u \in [-2, +\infty)$  上却不是单调的, 在  $u = 0$  处  $\varphi(u)$  无定义.

当然, 对于例 20, 由于  $y = \varphi(u) = \frac{1}{u}$ , 在  $u \in [-2, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上分别都是单调的, 这样, 便可以应用这个方法了:

$u = x^2 - 6x + 7$	$y = \frac{1}{u}$	$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$
$x \in (-\infty, 3 - \sqrt{2})$ 递减	$u \in (0, +\infty)$ 递减 $\Rightarrow$	$x \in (-\infty, 3 - \sqrt{2})$ 递增
$u = x^2 - 6x + 7$	$y = \frac{1}{u}$	$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$
$x \in (3 - \sqrt{2}, 3]$ 递减	$u \in [-2, 0)$ 递减 $\Rightarrow$	$x \in (3 - \sqrt{2}, 3]$ 递增
$u = x^2 - 6x + 7$	$y = \frac{1}{u}$	$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$
$x \in [3, 3 + \sqrt{2})$ 递增	$u \in [-2, 0)$ 递减 $\Rightarrow$	$x \in [3, 3 + \sqrt{2})$ 递减
$u = x^2 - 6x + 7$	$y = \frac{1}{u}$	$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 7}$
$x \in (3 + \sqrt{2}, +\infty)$ 递增	$u \in (0, +\infty)$ 递减 $\Rightarrow$	$x \in (3 + \sqrt{2}, +\infty)$ 递减

请读者以求  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3}$  的单调区间作为练习.

类似这样的方法, 在学习概念的过程中, 如果注意总结, 是有很多的. 例如, 两个奇函数之和是奇函数; 两个偶函数之和是偶函数; 两个奇函数的积是偶函数; 两个偶函数的积是偶函数, 等等.

注意观察, 还会发现很多有趣的现象. 例如, 把实数乘法的符号法则:

$(+) \times (+)$ 得 $(+)$
$(+) \times (-)$ 得 $(-)$
$(-) \times (+)$ 得 $(-)$
$(-) \times (-)$ 得 $(+)$

和前面所列结论对照, 会发现在形式上它们十分相似. 发现了这种和谐, 有利于对这些结论的掌握, 等等.

### (3) 函数的周期性

对于函数  $y=f(x)$ , 如果存在一个不为零的正数  $T$ , 使得当  $x$  取定义域中的每一个数时,

$$f(x+T)=f(x)$$

总成立, 那么, 称  $y=f(x)$  是周期函数,  $T$  称做这个周期函数的周期.

显然, 如果一个函数存在一个周期  $T_1$ , 那么,  $2T_1$  也必是它的周期, 因为

$$f(x+2T_1)=f[(x+T_1)+T_1]=f(x+T_1)=f(x).$$

这样,  $3T_1, 4T_1, \dots$ , 也都是这个函数的周期. 于是, 如果一个函数是周期函数, 它必有无数个周期. 如果在这无数个周期中, 存在着一个最小的正数, 则把它称做是最小正周期.

理解最小正周期的概念, 要注意运用“充分必要”的思想.

就是说, 如果一个周期函数存在最小正周期, 它必然有无数个正周期; 然而一个具有无数个正周期的函数, 不一定有最小正周期.

例如, 对于函数  $f(x)=2, x \in R$ , 任意正实数  $T$  都是它的周期, 因为

$$f(x+T)=2=f(x).$$

但是, 正实数集合却没有最小值. 再如例 22:

**例 22** 对于函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & (x \text{ 是有理数}) \\ 0, & (x \text{ 是无理数}) \end{cases}$$

证明它是周期函数, 并且没有最小正周期.

**证明**  $1^\circ$  给定一个非零有理数  $q$ , 当  $x$  是有理数时,  $x+q$  仍是有理数, 这时

$$f(x+q)=1=f(x).$$

当  $x$  是无理数时,  $x+q$  仍是无理数, 这时

$$f(x+q)=0=f(x).$$

所以  $f(x)$  是周期函数, 任意非零有理数都是它的周期.

$2^\circ$  任何无理数都不是它的周期, 因为, 给定一个无理数  $p$ , 当  $x$  是有理数时,  $x+p$  则是无理数, 因而

$$f(x+p)=0 \neq 1=f(x)$$

不符合周期的定义.

综合  $1^\circ, 2^\circ$ , 函数  $f(x)$  的周期只能是有理数, 但正有理数中没有最小值, 所以, 周期函数  $f(x)$  没有最小正周期.

**说明** [1] 本例给出的函数  $f(x)$  称做分段函数, 分段的含义是, 对于定义域中一部分元素到值域上元素的对应, 遵循某个法则, 而另外元素到值域上元素的对应, 则采取另外一个或多个对应法则. 分段函数在中学不多见, 但在高等数学和实际问题中, 是经常遇到的.

[2] 本例的证明中已经完成了  $1^\circ$  以后, 只能说明, 任何有理数都是  $f(x)$  的周期, 为了由正有理数没有最小值来证明  $f(x)$  没有最小正周期, 还必须证明, 再没有更小的正实数, 是它的周期, 因而又通过  $2^\circ$ , 保证了这个要求. 当然, 也可以换一种方式实现这个要求, 即证明在正实数中, 不存在比任意正有理数还小的确定的正数, 但这个证明要完成起来, 在初等数学中还是比较困难的. 而通过  $2^\circ$  的证明, 既然无理数都不是  $f(x)$  的周期, 因而最小正周期只需要在有理数范围中讨论.

这一段话的意思, 如果从“充分必要条件”的角度来分析, 就是  $1^\circ$  的完成, 只能说明任意有理数都是  $f(x)$  的周期, 但不能说, 周期函数  $f(x)$  的周期都是有理数, 因而, 往下的讨论, 正有理数中没有最小值, 仍不能说明  $f(x)$  的正周期中没有最小值. 完成了  $2^\circ$  后, 才保证了函数  $f(x)$  的周期都是有理



数,因为,在实数中,无理数之外,只有有理数.

这再一次表明,“充分必要”的思想,对于形成正确的思考多么重要.

而在2°的证明中,只需在 $x$ 是有理数时,推出矛盾,不必如1°中,还要在 $x$ 是无理数时,也完成类似的证明,这也可以从“充分必要”的角度,作出明了的解释.

## (二) 概念的应用

许多形式上不是函数的问题,可以归结为函数问题加以解决,关键是善于设计转化的桥梁.

**例 23** 比较大小:(1)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-0.6}$  和  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-0.5}$ ; (2)  $0.3^{-0.3}$  和  $0.4^{-0.3}$ .

**分析** (1)注意到两个幂的底数相同,那么,如果定义指数函数  $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$ ,这时,这两个幂值,就分别是当  $x_1 = -0.6$  和  $x_2 = -0.5$  时的两个函数值. 由  $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 1$  时,  $y = a^x$  的单调递减性可得,  
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-0.6} > \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-0.5}.$$

(2)注意到两个幂的指数相同,于是定义幂函数  $y = x^{-0.3}$ ,这样便把比较大小转化为函数值的讨论,其过程与(1)类似.

**例 24** 解不等式  $\log_{(\sqrt{2}-1)} x^2 > \log_{(\sqrt{2}-1)} x$ .

**分析** 如果定义函数  $f(x) = \log_{(\sqrt{2}-1)} x$ ,那么,由它在  $(0, +\infty)$  上的单调递减性,立即可得

$$\begin{cases} x^2 < x \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1.$$

**例 25** 如果  $a \in R$ ,求  $-\cos^2 \alpha - 3\sin \alpha + 3$  的最大值和最小值.

**解**  $-\cos^2 \alpha - 3\sin \alpha + 3 = -(1 - \sin^2 \alpha) - 3\sin \alpha + 3 = \sin^2 \alpha - 3\sin \alpha + 2$ .

设  $x = \sin \alpha$  ( $\alpha \in R$ ),则原式的值为函数  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  在  $x \in [-1, 1]$  上的函数值.

由于  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  在  $[-1, 1]$  上单调递减,所以

$$f(-1) = 6, \text{ 为原式的最大值;}$$

$$f(1) = 0, \text{ 为原式的最小值.}$$

**说明** [1] 通过换元,把问题化为求二次函数在一段实数区间上的最大(小)值,问题就易于解决了.当然,这时要注意二次函数图像的顶点是否在这段区间上.

[2] 如果还要计算得到最大或最小值时的  $\alpha$  取值范围,只要让  $\sin \alpha = -1$  或  $\sin \alpha = 1$ ,即可算得

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in Z) \text{ 或 } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in Z).$$

[3] 如果问题变为,求使得原式大于0或小于0时的  $\alpha$  取值范围,那么,仍用上述换元转化的方法,问题易于得到解决,请读者完成.

**例 26** 常数  $a \in R$ ,求关于  $x$  的方程

$$x^5 - 5x - a = 0$$

的实根的个数.

**分析** 如果求出方程根的表达式,再讨论  $x$  何时为实数,对于这个5次方程,显然是很困难的.

由于解方程可以看做是求  $x$  的一个值,使等号两端关于  $x$  函数的函数值相等,那么,容易想到,把方程变形为

$$x^5 - 5x = a \text{ 或 } x^5 = 5x + a.$$

先分析第一种形式,求它的实数根,就是求函数  $f_1(x) = x^5 - 5x$  表示的曲线和函数  $f_2(x) = a$  表示的曲线的交点的横坐标,求实数根的个数,就是求交点的个数.

从图像上看,  $f_2(x) = a$ , 是随  $a$  值不同而改变位置的一条平行于  $x$  轴的直线,那么,  $f_1(x) = x^5 - 5x$  的图像又如何呢?

由于  $x^5 - 5x = 0$  时,  $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm \sqrt[4]{5}$ , 即  $f_1(x)$  表示的曲线和  $x$  轴有 3 个交点,而且这三个点组成关于原点对称的图形.

又由于

$$f_1(x) = (-x)^5 - 5(-x) = -(x^5 - 5x) = -f_1(x),$$

表明  $f_1(x)$  是奇函数,它所表示的曲线关于原点对称. 那么,我们只需讨论曲线在  $y$  轴右侧的情况.

在  $x = \sqrt[4]{5}$  的右侧选一个值,例如  $x = 2$ ,代入  $f_1(x) = 2^5 - 5 \times 2 = 22 > 0$ ,由于在  $(\sqrt[4]{5}, 0)$  右边,曲线和  $x$  轴再无交点,所以,当  $x > \sqrt[4]{5}$  时,总有  $f_1(x) > 0$ .

用同样的方法,可以推出,当  $0 < x < \sqrt[4]{5}$  时,总有

$$f_1(x) < 0.$$

再分析  $f_1(x)$  在  $(0, \sqrt[4]{5})$  和  $(\sqrt[4]{5}, +\infty)$  上的单调性.

当  $0 < x_1 < x_2$  时,

$$f_1(x_1) - f_1(x_2) = x_1^5 - 5x_1 - x_2^5 + 5x_2 = (x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 - 5).$$

由于  $x_1 - x_2 < 0$ ,再观察

$$x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 - 5.$$

当  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$  时,它小于 0,

当  $1 \leq x_1 < x_2$  时,它大于 0.

所以  $f_1(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递减,在  $[1, +\infty)$  上单调递增.  $f_1(x)$  在  $x = 1$  时,得到最小值  $-4$ .

那么,当  $x \geq 0$  时,  $f_1(x)$  的图像可示意为如图 4-19 所示.

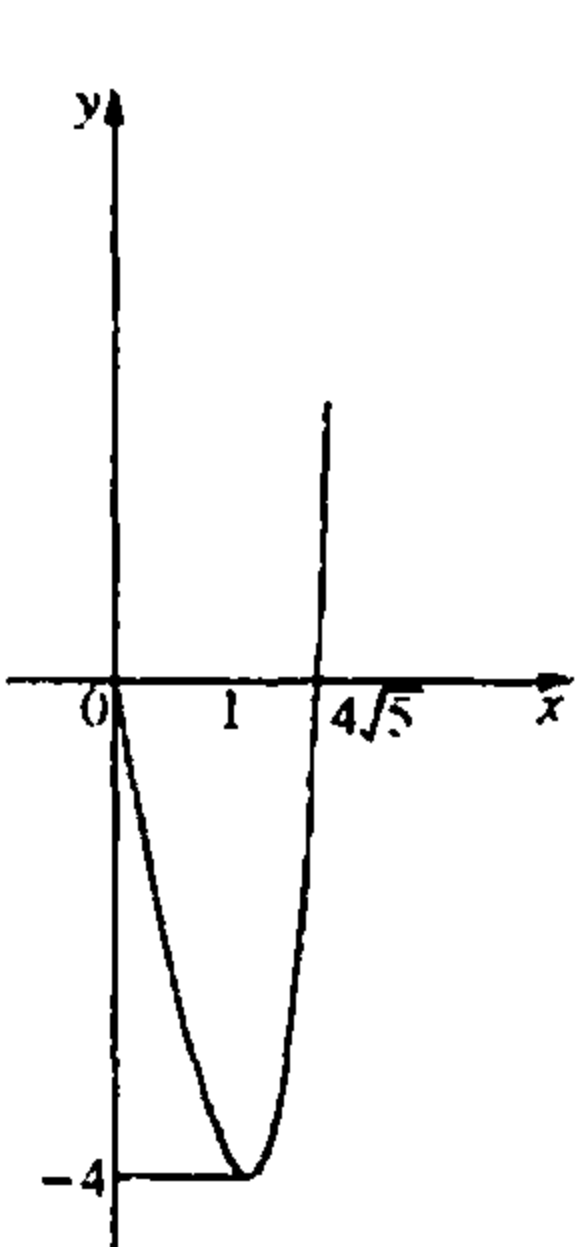


图 4-19

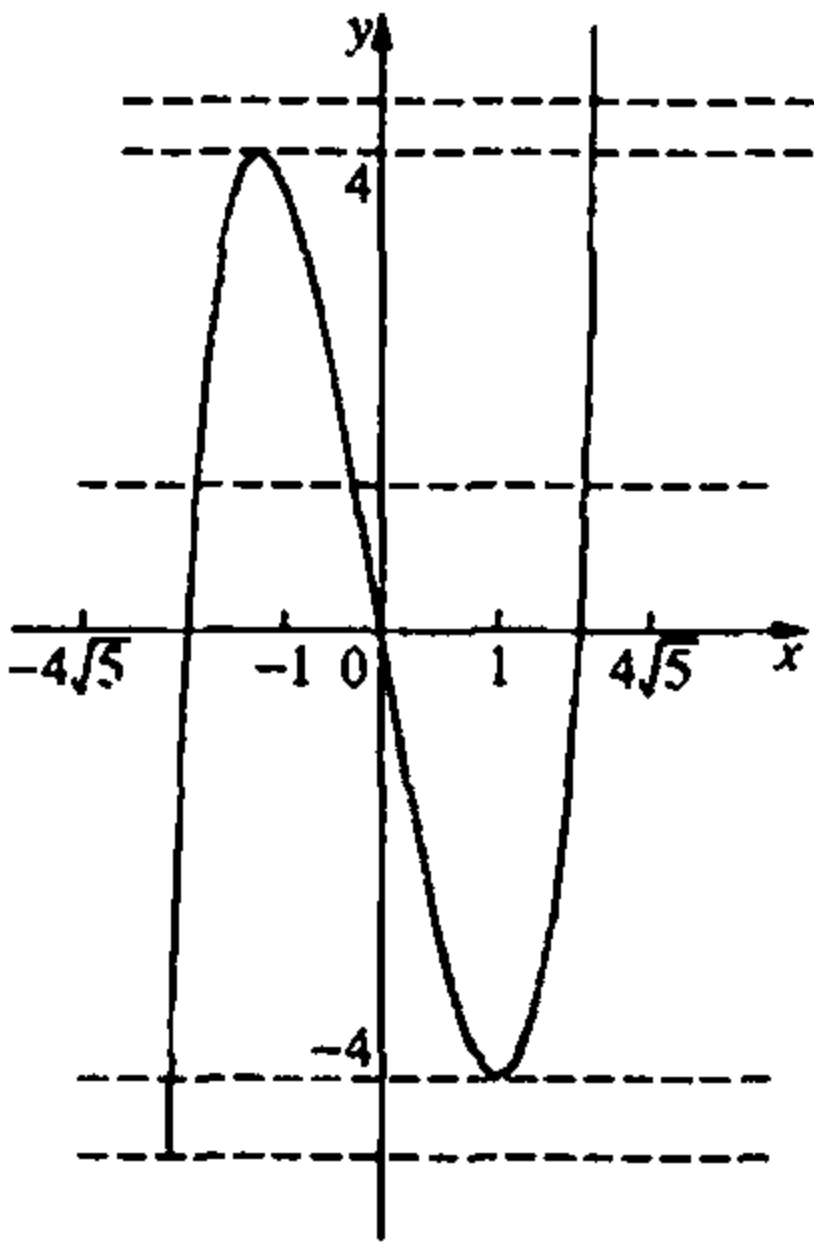


图 4-20

再根据  $f_1(x)$  是奇函数的性质,画出  $f_1(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的图像,如图 4-20 所示.

显然,当  $a \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$  时,  $f_1(x) = x^5 - 5x$  所表示的曲线和  $f_2(x) = a$  所表示的曲线有一个交点,那么,方程  $x^5 - 5x = a$  有 1 个实数根;

当  $a = \pm 4$  时,方程有 2 个实数根,

当  $a \in (-4, +4)$  时, 方程有 3 个实数根.

再分析方程变形的第二种形式:

$$x^5 = 5x + a.$$

设  $f_3(x) = x^5$ ,  $f_4(x) = 5x + a$ , 问题就转化为求它们所代表的曲线间交点个数问题, 如图 4-21 所示.

这时的关键, 是求出  $f_3(x)$  的两条斜率为 5 的切线 (即图 4-21 中的两条虚线) 在  $y$  轴上的截距 ( $a$  值).

这里需要用到高中课本选学内容《微积分初步》中的导数知识.

$f_3'(x) = (x^5)' = 5x^4$ , 它的几何意义是, 对于自变量取  $x$  时, 曲线在该点切线的斜率.

当  $5x^4 = 5$  时, 得到这时切点的横坐标  $x = \pm 1$ , 代入  $f_3(x) = x^5$  中, 得到两个切点的坐标为  $(-1, -1)$  和  $(+1, +1)$ .

则  $f_3(x)$  所表示的两条斜率为 5 的切线的方程为

$$y \pm 1 = 5(x \pm 1).$$

两条切线在  $y$  轴上的截距, 分别是 4, -4.

于是, 当  $a > 4$  或  $a < -4$  时,  $f_3(x)$  和  $f_4(x)$  所代表的曲线有一个交点, 方程  $x^5 = 5x + a$  便只有 1 个实数根; 当  $a = \pm 4$  时, 方程有 2 个实数根; 当  $-4 < a < 4$  时, 方程有 3 个实数根.

从例 23 ~ 26, 题目本身都未涉及到函数, 但都是利用函数作工具, 巧妙地解决了问题, 而解决方案的设计, 又取决于对函数概念的深刻理解, 所以说, 概念理解得深刻, 才能应用得准确、灵活. 为了进一步说明这点, 下面再来看对两个较小概念的理解.

## 四、一个数学方法 (数学归纳法) 的学习和小结

数学归纳法, 对于同学们无论在中学阶段还是在大学阶段的数学学习, 都是一个经常用到的工具, 因此是高中代数的一个重点. 由于它所解决的问题五花八门, 应用时的情况扑朔迷离, 所以, 它又是高中数学的一个难点.

因此, 本书选择它为对象, 示范如何学习和掌握好一个数学方法.

### (一) 概念的理解

#### 1. 不完全归纳法和完全归纳法

在数学推理过程中, 由一般到特殊, 根据已知正确的判断去作出新的判断, 称做演绎推理. 反过来, 从分析一些特例的共同特征, 得出一般性的结论, 这种由特殊到一般的推理方法, 称做归纳推理.

如果只从一些有限特例的验证, 就得到一般性的结论, 这种归纳推理, 称为不完全归纳法. 显然, 它所得到的结论不一定是可靠的, 但常常利用它, 提出猜想, 然后严格证明.

对于与自然数有关的数学命题, 依据数学归纳法原理, 可以得到可靠结论的一种归纳推理方法 (事实上, 是把归纳和演绎结合起来了), 称做数学归纳法. 它是一种完全归纳法.

#### 2. 数学归纳法

##### (1) 数学归纳法原理

设有一个与自然数有关的命题, 如果

- ① 当  $n$  取第一个值  $n_0$  (例如  $n = 1$ , 或 2 等) 时, 命题成立;
- ② 若  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ , 且  $k \geq n_0$ ) 时命题的成立, 能导致  $n = k + 1$  时命题也成立.

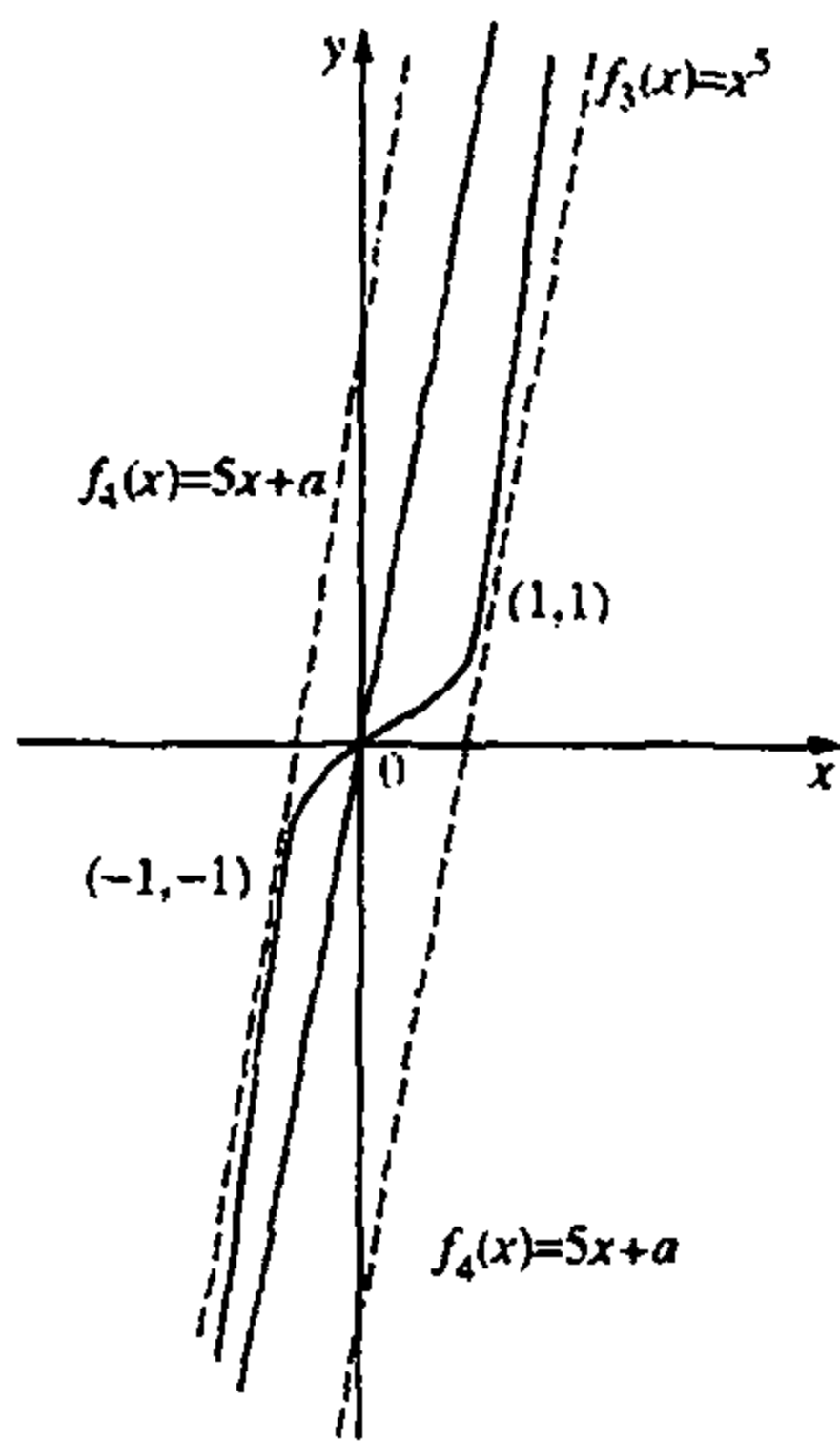


图 4-21

那么,这个命题对于一切自然数  $n(n \geq n_0)$  都成立.

## (2) 用数学归纳法证明一个命题的步骤

1° 证明当  $n$  取第一个值  $n_0$  (例如  $n=1$  或  $2$  等) 时, 结论成立;

2° 假设  $n=k(k \in N \text{ 且 } k \geq n_0)$  时结论正确, 证明当  $n=k+1$  时, 结论也正确.

结论, 所证命题对于从  $n_0$  开始的所有自然数  $n$  都成立.

## (3) 弄清几个问题

①  $n_0$  宜取尽可能小的自然数, 这样可使命题成立的范围较大, 但不一定必须取  $1$ .

② 必须先证明  $n=n_0$  时结论正确. 不能因为在 (2) 中的 2° 得到了  $n=k+1$  时命题成立的结论, 证明就完成了.

因为, 得到“ $n=k+1$  时命题成立”结论的前提是“ $n=k$  时命题成立”, 它只是假定, 称做归纳假设, 它必须以“ $n=n_0$  时命题成立”为基础.

③ 有时, 由“假设  $n=k$  时命题成立”, 易于推出  $n=k+2$  时命题成立. 这时, 只要在 (2) 中的 1° 中证明归纳假设的基础存在时, 分别证明,  $n=n_1$  及  $n=n_2$  时, 命题都成立, 这里  $n_1, n_2$  一个是奇数、一个是偶数. 那么, 欲证命题则对于一切大于或等于  $n_1, n_2$  中较大者的自然数都成立.

如果由“ $n=k$  时命题成立”, 易于推出  $n=k+3$ 、或  $n=k+4$ 、或……时命题成立, 处理方法类似.

## (二) 用好数学归纳法

从假设  $n=k$  时命题成立, 推出  $n=k+1$  时命题成立, 是完成数学归纳法的关键一步, 也是难点所在, 要掌握和用好数学归纳法, 需要总结、掌握处理这一步的思考规律.

### 1. 熟悉从“假设 $n=k$ 时命题成立”推导“ $n=k+1$ 时命题成立”的一般方法

下面, 通过例题, 介绍用数学归纳法证明等式或不等式时, 处理这一步的一般方法.

**例 27** 求证  $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \quad (n \in N)$ .

**证法一** 1° 当  $n=1$  时, 因为

$$\text{左} = 1 \times (3 \times 1 + 1) = 4,$$

$$\text{右} = 1 \times (1 + 1)^2 = 4,$$

$$\text{左} = \text{右}.$$

所以, 命题成立.

2° 若  $n=k(k \in N)$  时, 等式成立, 即

$$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + k(3k+1) = k(k+1)^2, \quad \text{①}$$

则

$$\begin{aligned} & 1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)[3(k+1)+1] \\ &= k(k+1)^2 + (k+1)[3(k+1)+1] = (k+1)[(k+1)+1]^2. \end{aligned}$$

即  $n=k+1$  时, 等式成立.

综合 1° 与 2°, 等式对于一切  $n \in N$  成立.

**证法二** (从证法一的①式开始)

则

$$\begin{aligned} (k+1)[(k+1)+1]^2 &= (k+1)[(k+1)^2 + (2k+3)] \\ &= k(k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)(2k+3) \\ &= k(k+1)^2 + (k+1)[(k+1) + 2k+2+1] \\ &= k(k+1)^2 + (k+1)[3(k+1)+1] \\ &= 1 \times 4 + 2 \times 7 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)[3(k+1)+1]. \end{aligned}$$

即  $n = k + 1$  时, 等式成立(以下略).

**证法三** (从证法一的①式开始)

若需证  $n = k + 1$  时等式成立, 只需证

$$1 \times 4 + 2 \times 7 + \cdots + k(3k + 1) + (k + 1)[3(k + 1) + 1] = (k + 1)[(k + 1) + 1]^2 \quad ②$$

成立, 则只需证

$$(k + 1)[3(k + 1) + 1] = (k + 1)[(k + 1) + 1]^2 - k(k + 1)^2$$

成立, 即只需证

$$3k + 3 + 1 = k^2 + 4k + 4 - k^2 - k \quad ③$$

成立.

而③式显然成立.

故  $n = k + 1$  时, 等式成立(以下略).

**说明** [1] 证法一是从欲证的  $n = k + 1$  时的等式的左端化向它的右端. 证法二则相反. 从这两个证法的比较来看, 以从复杂端(本题是左端)化向简单端, 比较易于思考.

[2] 证法三是通过对欲证等式的逆推分析(通常所称的分析法), 把证明等式转化为证明条件等式(在本例为②式), 降低了思考的难度, 转化的方法等价于②式 - ①式, 对于用数学归纳法证明较复杂的不等式, 这种方法尤可降低思维的难度, 这将在下一个例子的“证法一”中明显地表现出来.

[3] 无论哪种证法, 都利用了归纳假设中写出的具体等式, 在要求必须应用数学归纳法来完成证明的题目里, 如果没有利用归纳假设, 不能被认为是正确的解答.

**例 28** 用数学归纳法证明:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} (n \in N \text{ 且 } n \geqslant 2).$$

**证法一**  $1^\circ$   $n = 2$  时, 不等式显然成立.

$2^\circ$  若  $n = k$  ( $k \in N$  且  $k \geqslant 2$ ) 时, 不等式成立, 即

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}. \quad ①$$

欲证  $n = k + 1$  时不等式也成立, 即证

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k + 1)^2} < 2 - \frac{1}{k + 1} \quad ②$$

成立, 只要证

$$\frac{1}{(k + 1)^2} \leqslant -\frac{1}{k + 1} + \frac{1}{k} \quad ③$$

成立.

由于  $k \geqslant 2 \Rightarrow k(k + 1)^2 > 0$ , 从而, 可以用  $k(k + 1)^2$  乘③式两端, 使③式的成立等价于

$$k \leqslant -k(k + 1) + (k + 1)^2.$$

即

$$k \leqslant k + 1 \quad ④$$

成立.

而④式显然成立.

综合  $1^\circ, 2^\circ$ , 对于一切  $n \geqslant 2$  及  $n \in N$ , 原不等式成立.

证法二 (从证法一的①式开始)

当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &< 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)^2} < 2 - \frac{k^2 + k}{k(k+1)^2} \\ &= 2 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

不等式也成立(以下略).

说明 [1] 证法一运用了例 1 中证法三所用的方法,降低了思考难度.

必须注意的是,③式的得到是在①式的基础上,寻找出使②式成立的一个充分(不一定必要)条件,具体做法是,用②式的左端减去①式左端得到的式子作为新不等式的左端;用②式右端减去①式右端得到的式子,作为新的不等式的右端.新不等式的不等号的方向取①、②的不等号方向(①、②不等号的方向一定要相同),并且,若①、②的不等号是严格大于“ $>$ ”号或严格小于“ $<$ ”号,新不等式要相应地取“ $\geq$ ”号或“ $\leq$ ”号.

在这里,新不等式③并不是不等式②与①的差.

[2] 证法二用的是例 27 证法一的方法,由于是从“复杂端”化向了“简单端”,过程简捷,但在思考的难度上,则较本例的证法一为高.

证法二这种证明不等式的方法称做“放大法”;用于证明“ $>$ ”或“ $\geq$ ”方向的不等式时,则称为“缩小法”.应用这种方法证明不等式时,关键是“放大”(或“缩小”)得要适度.

所谓“适度”是指,放大(或缩小)后的量要介于“被放大量”(或“被缩小量”)和“目标量”之间.

2. 准确理解“数学归纳法”,才能用好“数学归纳法”

例 29 已知  $n \geq 4$ , 且  $n \in N$ . 求证  $2^n \geq n^2$ .

证明 1° 当  $n = 4$  时,

$$2^n = 16 = 4^2 = n^2$$

命题成立.

2° 若  $2^k \geq k^2$

欲使

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2$$

成立,即

$$2 \cdot 2^k \geq k^2 + 2k + 1$$

成立,只需

$$2 \cdot k^2 \geq k^2 + 2k + 1,$$

$$k^2 - 2k - 1 \geq 0,$$

$$k \leq 1 - \sqrt{2} \text{ 或 } k \geq 1 + \sqrt{2}$$

①

成立.

由已知  $n \geq 4$ , 显然①式成立.

综合 1°、2°, 当  $n \geq 4$  且  $n \in N$  时,  $2^n \geq n^2$ .

说明 有人认为,以上的证明有严重缺陷,因为在 1°中只推出了  $2^n = n^2$ ,而归纳假设所用的是  $2^n \geq n^2$ ,其中的  $2^n > n^2$  尚无先例.于是说,这个证法的错误是归纳假设的“基础不全”,并认为,正确证明本题应在 1°中补充:

“当  $n = 5$  时,  $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2 = n^2$ .”

其实,这是不必要的. 因为,  $2^n = n^2 \Rightarrow 2^n \geq n^2$ , 归纳假设已经有“完全”的基础了.

又有人说,既然  $2^n = n^2$  能够推出  $2^n \geq n^2$ , 那么,  $2^n = n^2$  不是也可以推出  $2^n \leq n^2$  吗? 这样的话,不就得到了与原来相反的结论了吗?

事实上,这个担心是多余的,因为,归纳假设  $2^k \leq k^2$ , 推不出  $2^{k+1} \leq (k+1)^2$  的结论,因而,数学归纳法的过程无法完成.

**例 30** 分析下面的数学归纳法证明是否正确,若有错误,写出正确的证明来.

已知  $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1, n \in N, x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ .

求证  $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 2^n$ .

**证明**  $1^\circ$   $n=1$  时,有  $x_n=1$ , 则  $(1+x_n)=2 \geq 2^n$ . 命题成立.

$2^\circ$  若当  $n=k$  时命题成立,此时

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k = 1, \quad \text{①}$$

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geq 2^k. \quad \text{②}$$

那么,当  $n=k+1$  时,由已知

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1.$$

把①式代入上式,得  $x_{k+1}=1$ .

再利用②式,于是

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) &= (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+1) \\ &\geq 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

即  $n=k+1$  时命题成立.

综合  $1^\circ, 2^\circ$ , 命题对一切  $n \in N$  成立.

**分析** 这个证明是错误的.

错误的发生,是因利用归纳假设中的①式推出了  $n=k+1$  时的  $x_{k+1}=1$ .

因为,归纳假设的①和②是一个整数,它是指“如果有  $k$  个正数的积为 1,能推出这  $k$  个数分别加 1 的和连乘,所得积不小于  $2^k$ ”这整个关系. 而欲证的  $n=k+1$  时命题成立,则是指“如果有  $(k+1)$  个正数的积为 1,那么,它们各自加 1 的和连乘,所得积应不小于  $2^{k+1}$ ”.

在这里,  $n=k+1$  时的  $(k+1)$  个正数,与归纳假设中那  $k$  个正数并没有联系,它的前  $k$  个并不一定就是归纳假设中的那  $k$  个正数.

正确的数学归纳法证明如下:

**证明**  $1^\circ$  (略)

$2^\circ$  若  $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k = 1$  时,有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geq 2^k.$$

对于  $n=k+1$  时,因为

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1, \quad \text{①}$$

及  $x_i > 0$ , 则其中必存在两个数,不妨设为  $x_k, x_{k+1}$ , 使得  $x_k \geq 1$  及  $0 \leq x_{k+1} \leq 1$ .

于是,①式可为

$$\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{k-1}}_{k \text{ 个因子}} \cdot (x_k \cdot x_{k+1}) = 1.$$

那么,可以利用归纳假设,得

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k-1})(1+x_k \cdot x_{k+1}) \geq 2^k.$$

欲证

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k-1})(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq 2^{k+1}$$

成立,只需证

$$\frac{(1+x_k)(1+x_{k+1})}{1+x_k \cdot x_{k+1}} \geq 2$$

成立,即证

$$(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq 2(1+x_k \cdot x_{k+1}),$$

(因为  $1+x_k \cdot x_{k+1} > 0$ )

$$(1-x_k)(1-x_{k+1}) \leq 0,$$

②

成立.

由  $x_k \geq 1$  及  $0 < x_{k+1} \leq 1$  可知,②式成立.

综合 1°, 2°, 对一切  $n \in N$ , 原命题成立.

说明 对本例正误两种证法的比较, 同学们对数学归纳法的归纳假设的理解, 应加深一步.

### 3. 注意积累对不同特点题目的处理技巧

用数学归纳法可以证明的题目, 涉及面较广, 分类型总结思考要点是有益的, 由于篇幅所限, 下面仅能就 3 种类型做一次分类总结的示范.

#### • 第一种 证明整除性问题

例 31 用数学归纳法证明:

(1)  $n^3 + 5n (n \in N)$  能被 6 整除;

(2)  $3^{4n+2} + 5^{2n+1} (n \in N)$  能被 14 整除;

(3)  $x^n + y^n (n \text{ 是正奇数})$  能被  $x+y$  整除;

(4)  $3^{2n+2} - 8n - 9 (n \in N)$  能被 64 整除.

证 (1) 1°  $n=1$  时,  $n^3 + 5n = 6$  能被 6 整除.

2° 若  $k^3 + 5k (k \in N)$  能被 6 整除, 则对于

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = (k^3 + 5k) + 3(k^2 + k + 2),$$

因为  $k \in N$  时,  $k^2 + k + 2$  是偶数, 所以  $3(k^2 + k + 2)$  能被 6 整除.

于是,  $(k^3 + 5k) + 3(k^2 + k + 2)$  能被 6 整除.

综合 1°, 2°,  $n^3 + 5n (n \in N)$  能被 6 整除.

(2) 1°  $n=1$  时,  $3^{4 \times 1 + 2} + 5^{2 \times 1 + 1} = 61 \times 14$ , 能被 14 整除.

2° 若  $n=k (k \in N)$  时命题成立, 即  $3^{4k+2} + 5^{2k+1}$  能被 14 整除.

则对于

$$\begin{aligned} 3^{4(k+1)+2} + 5^{2(k+1)+1} &= 3^{4k+2} \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 5^{2k+1} - 3^4 \cdot 5^{2k+1} + 5^{2k+1} \cdot 5^2 \\ &= 3^4 (3^{4k+2} + 5^{2k+1}) - 56 \cdot 5^{2k+1} \end{aligned}$$

能被 14 整除, 即  $n=k+1$  时, 命题正确.

综合 1°, 2°,  $3^{4n+2} + 5^{2n+1} (n \in N)$  能被 14 整除.

(3) 1° 当  $n=1$  时, 结论显然正确.

2° 若  $n=k (k \text{ 为正奇数})$  时, 结论正确, 即  $x^k + y^k$  能被  $x+y$  整除. 则

$$x^{k+2} + y^{k+2} = x^k \cdot x^2 + x^2 \cdot y^k - x^2 \cdot y^k + y^k \cdot y^2 = x^2(x^k + y^k) - y^k(x+y)(x-y)$$

能被  $x+y$  整除, 即  $n=k+2$  时命题成立.

由 1°, 2°,  $x^n + y^n (n \text{ 是正奇数})$  能被  $x+y$  整除.

(4) 1°  $n=1$  时, 结论正确.



2° 若  $n = k (k \in N)$  时结论正确, 即  $3^{2k+2} - 8k - 9$  能被 64 整除, 则

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 &= 3^{2k+2} \cdot 3^2 - 3^2 \cdot 8k + 3^2 \cdot 8k - 3^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 9 - 8k - 8 - 9 \\ &= 3^2(3^{2k+2} - 8k - 9) + 8k(3^2 - 1) + 64 \end{aligned}$$

能被 64 整除. 即  $n = k + 1$  时, 结论正确.

(以下略)

**说明** 做完这道题目, 应对用数学归纳法证明多“项”式的整除问题进行思考, 作如下的总结:

[1] 当  $n$  只出现在底数中时, 采用把  $k + 1$  的幂展开后, 分段组合, 往归纳假设的  $n = k$  的式子上“凑”的方法;

[2] 当  $n$  只出现在指数中时, 采用加一“项”再减去这“项”的办法. 这个“项”的构造, 应观察题目的具体特点, 以有利于分段因式分解后, 达到便于往归纳假设成立的那个式子上“凑”的目的.

以本例的第[2]小题为例, 上述这个“项”构造时的思考是, 含有  $3^{4n+2}$  这一项从  $3^{4k+2}$  到  $3^{4(k+1)+2}$  后多出来的因子  $3^4$ , 再含有在归纳假设中和  $3^{4k+2}$  配在一起时, 能被 14 整除的  $5^{2k+1}$ .

[3]  $n$  同时出现在指数和底数中时, 先按出现在指数中思考, 用加一“项”再减去这“项”的方法, 让这一“项”含有因为指数中  $k$  变成  $k + 1$  而使幂增加的那个因子; 又要含有在  $n = k$  时的式子中, 底数含有  $k$  的某项, 可作为另一个因子.

### ● 第二种 证明图形中与自然数 $n$ 有关的命题

**例 32** 在平面上的  $n$  个圆中, 每两个圆都相交, 每三个圆都不交于一点. 求证它们把平面分成了  $n^2 - n + 2$  部分.

**证明** 1° 当  $n = 1$  时, 分平面为两部分, 符合  $n^2 - n + 2 = 2$ .

2° 若  $n = k (k \in N)$  时, 命题成立, 即把平面分成了  $k^2 - k + 2$  部分.

那么, 当  $n = k + 1$  时, 新增加的一个圆与前  $k$  个圆有  $2k$  个交点, 这些点把新圆周分成  $2k$  段, 其中每段弧把它穿过的区域又分成两部分, 这样, 刚才平面被分割的部分又增加了  $2k$  块, 则总共分为

$$(k^2 - k + 2) + 2k = (k + 1)^2 - (k + 1) + 2$$

部分, 即  $n = k + 1$  时, 命题成立.

(以下略)

**说明** 用数学归纳法证明图形问题, 关键是, 要结合图形进行思考, 特别是对于从  $n = k$  到  $n = k + 1$  时图形变化的情景要细致地弄清楚.

### ● 第三种 适时运用加强命题的结论的方法, 证明某些不等式

**例 33** 用数学归纳法证明:

$$\frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n - 2)} < \sqrt{2n} \quad (n > 1 \text{ 且 } n \in N).$$

**分析** 本例若采用下述证法, 都不会成功.

**第一种证法** 1°  $n = 2$  时,

$$\frac{3 \times \cdots \times (2n - 1)}{2 \times \cdots \times (2n - 2)} = 1.5 < 2 = \sqrt{2n}$$

命题成立.

2° 若  $n = k (k > 1 \text{ 且 } k \in N)$  时命题成立, 即

$$\frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2k - 1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k - 2)} < \sqrt{2k} \quad \textcircled{1}$$

成立, 那么, 欲使  $n = k + 1$  时命题成立, 即

$$\frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2k - 1)(2k + 1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k - 2)2k} < \sqrt{2(k + 1)} \quad \textcircled{2}$$

成立,只需

$$\frac{2k+1}{2k} \leq \frac{\sqrt{2k+2}}{\sqrt{2k}} (\because \text{①、② 两式的小端都大于 } 0) \quad \text{③}$$

成立,但③式并不成立,因为③式等价于

$$\begin{aligned} \frac{4k^2 + 4k + 1}{4k^2} &\leq \frac{2k+2}{2k} \left( \text{因为 } \frac{2k+1}{2k} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{4k^2 + 4k + 1}{2k} &\leq \frac{2k+2}{1} \quad (\text{因为 } 2k > 0) \\ \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 &\leq 4k^2 + 4k \quad (\text{因为 } 2k > 0) \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

于是,证明失败.

第二种证法 从第一种证法的①式开始.

那么,当  $n=k+1$  时,

$$\begin{aligned} \frac{3 \times \cdots \times (2k-1)(2k+1)}{2 \times \cdots \times (2k-2)2k} &< \sqrt{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k} \\ &= \frac{\sqrt{4k^2 + 4k + 1}}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2(k+1) + \frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

但是  $\sqrt{2(k+1) + \frac{1}{2k}}$  却大于  $\sqrt{2(k+1)}$ . 于是,证明失败.

无论用寻找欲证命题的一个“充分条件”的方法,还是用“放大法”,都失败了的原因是原命题的结论过弱. 这可以从“ $1^\circ n=1$ ”时的验证过程看出来,因为  $1.5 < 2$  之间的“缝隙”很大.

因而解决的办法可以是,适当加强原命题的结论,改为求证:

$$\frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2)} < \sqrt{2n-1} \quad (n > 1 \text{ 且 } n \in N).$$

证法一  $1^\circ n=2$  时,左  $= 1.5 < \sqrt{3}$  = 右,命题成立.

$$2^\circ \text{ 若 } \frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k-2)} < \sqrt{2k-1} \quad (k > 1 \text{ 且 } k \in N), \quad \text{①}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{3 \times \cdots \times (2k-1)(2k+1)}{2 \times \cdots \times (2k-2)2k} &< \sqrt{2k-1} \cdot \frac{(2k+1)}{2k} \\ &= \frac{\sqrt{4k^2-1}}{2k} \cdot \sqrt{2k+1} < \frac{\sqrt{4k^2}}{2k} \cdot \sqrt{2(k+1)-1} = \sqrt{2(k+1)-1} \quad (\text{以下略}). \end{aligned}$$

证法二 (从证法一的①式开始)

欲使

$$\frac{3 \times \cdots \times (2k-1)(2k+1)}{2 \times \cdots \times (2k-2)2k} < \sqrt{2(k+1)-1} \quad \text{②}$$

成立,由于①和②两个不等式的两端都是正数,于是,只需

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{2k} &\leq \frac{\sqrt{2(k+1)-1}}{\sqrt{2k-1}} \\ \frac{\sqrt{2k+1}}{2k} &\leq \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(2k+1)(2k-1)} \leq 2k$$

$$4k^2 - 1 \leq 4k^2$$

③

成立.

而③式显然成立. (以下略)

## 五、一个思考方法的学习和小结

### 关于形成正确的空间想像

对所论图形产生正确的空间想像,是理解立体几何概念和解好立体几何题目的前提. 许多同学的错误,其实是歪曲了空间中面与线的位置关系. 因而解题思考的伊始,把位置关系弄清,就成了第一位重要的问题. 但怎样才能对题目的图形进行正确的空间想像呢? 是否存在一定的规律和方法呢?

答案是肯定的.

#### (一) 养成在“移动”中进行观察的习惯

用“动”的思想去观察,是形成立体感的关键.

人和动物之所以能分辨远近、层次,是因为两只眼睛对于“对象”拍摄了两张不同角度的“影像”,也就是,随时有两个视线方向(每只眼睛是一个视线方向)在观察.

所以,在“移动”中进行观察,就取得了不同视线方向的认识,形成了立体感,而且,这里所说的移动观察时立足的位置,不仅是移动从左眼到右眼这样一小段距离,而且要从上、下、左、右、前、后几个方向,甚至“钻进、钻出”地去观察(实际是设想),才能得到对图形的准确的空间想像.

**例 34** 选择正确结论(有且仅有一个结论是正确的).

两条异面直线在一个平面上的投影是( )

- (A) 两条相交直线.
- (B) 两条平行直线.
- (C) 两条平行直线、两条相交直线的可能性都有,但无其他情况.
- (D) 两条相交直线或两条平行直线,或这两种可能都有,但无其他情况的

结论,都是不对的.

**分析** 审题后,如果选择了如图 4-22 所示的方向思考,而且只此一个视线方向,便会选择结论(A).

或者,如图 4-23 的方向去思考,便会选择结论(B).

当既能从图 4-22 给出的视线方向,又能从图 4-23 给出的视线方向去思考,便会选择结论(C).

这样,由于把观察时的立足点移动了一次,就得到了比结论(A)或结论(B)要好些的结论(C).

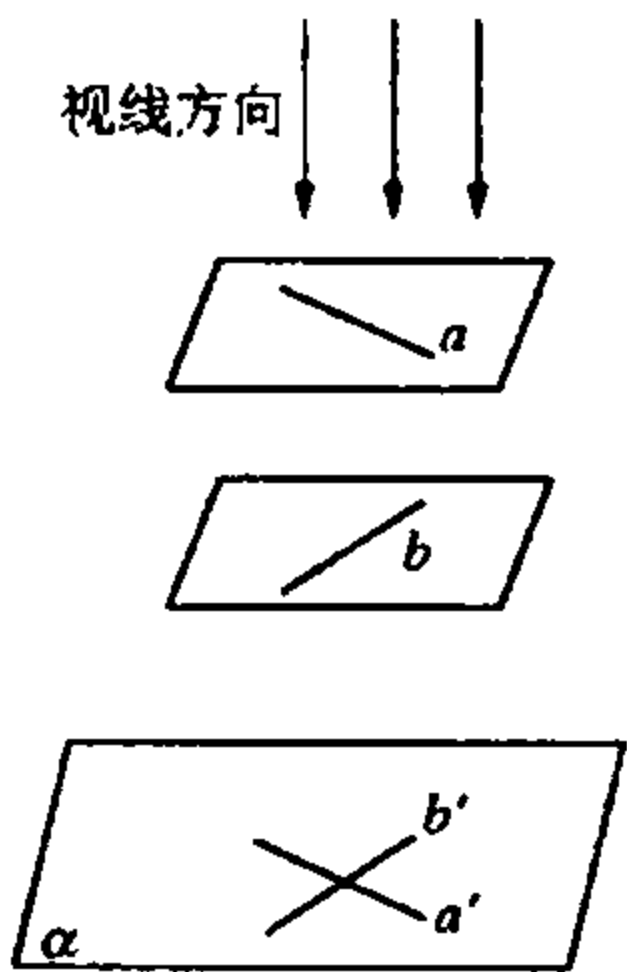


图 4-22

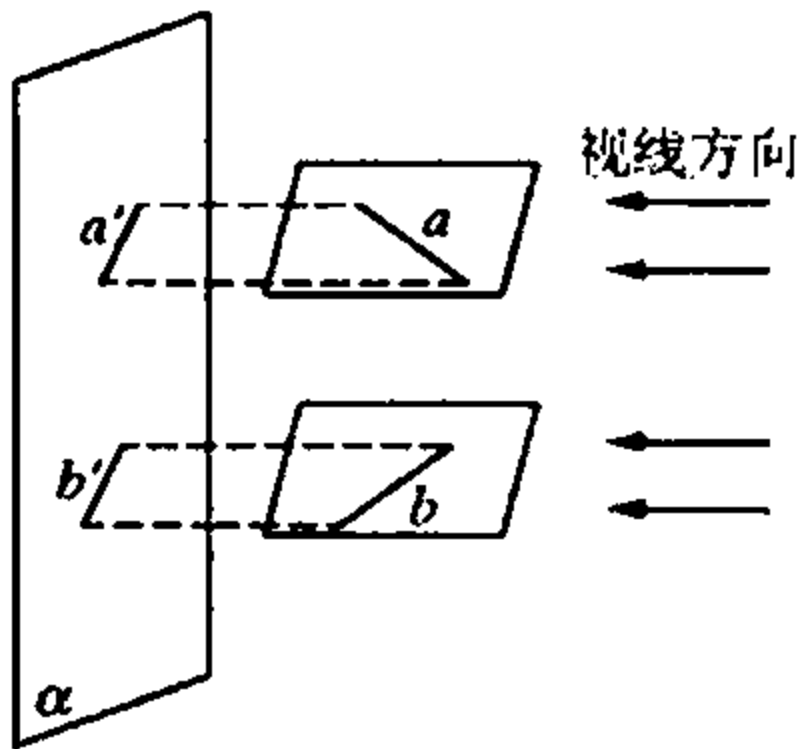


图 4-23

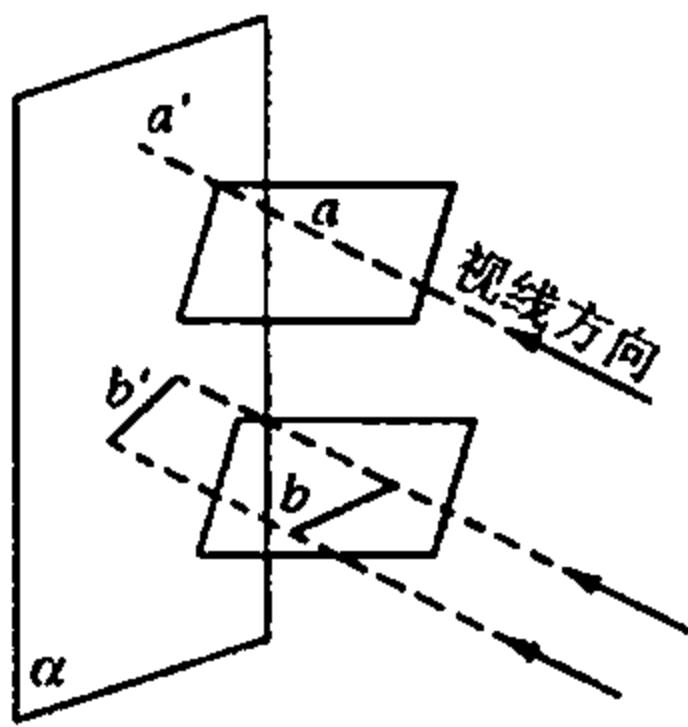


图 4-24

但是,如果更多地移动立足点,把视线方向作全方位的变化,就会发现,当处于图 4-24 的视线方向时,异面直线  $a, b$  在同一平面  $\alpha$  上的投影  $a', b'$  是一个点及一条直线,因而选择了结论(D).

事实上,在选择结论(D)的思考中,才是做到了从前、后、上、下、左、右地去观察(事实是设想),才是“动”的思想的一种表现,使得对图形的空间想像比较充分.

**例 35** 已知 一个三棱锥  $P-ABC$ , 三条侧棱  $PA, PB, PC$  两两垂直, 且各长 6, 如图 4-25 所示. 求 三棱锥的体积  $V_{P-ABC}$ .

**分析** 由棱锥的体积计算公式  $V = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h$ , 很自然地, 联想到应该先计算  $S_{\triangle ABC}$  及作出棱锥的高  $PO$ , 然后证明点  $O$  是底面  $\triangle ABC$  的中心, 再计算  $PO$  的长, 但是, 这个过程比较冗长.

然而, 如果把这个棱锥按图 4-26 的方式放置.

由  $PA \perp PB$  及  $PA \perp PC \Rightarrow PA \perp$  平面  $PBC$ , 即  $PA$  是棱锥  $A-PBC$  的高; 又由于  $PB \perp PC \Rightarrow \triangle PBC$  是直角三角形, 于是

$$V_{A-PBC} = \frac{1}{3} PA \cdot S_{\text{Rt} \triangle PBC} = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 36.$$

**说明** 这个解法十分简捷, 原因是, 想像图形时运用了“动”的思想.

表面上看, 观察者立足的位置似乎没有改变. 但根据运动和静止的相对性原理, 如果观察者不动, 把“对象”进行翻转, 等价于被观察的“对象”不动, 而观察者变换了自己的视线方向, 这就得到了如上的解法.

需要指出, 把  $a \perp b$  同时看成  $b \perp a$ , 也是一种转换视线方向的思考, 养成这个习惯, 对于初学者解题的思考, 常常起积极的作用, 特别是在应用三垂线定理及其逆定理的思考中, 在寻求证明直线与平面垂直的条件时更是如此.

用“动”的思想对图形进行想像, 还有一层意思, 是指在读题时作这样的思考: 随着已知条件的逐步给出, 要逐步地去推敲所论图像的固定性.

这个思考过程, 有助于发现达到结论应循的途径, 并且从原则上去确定正确的解题方向. 这是指如果所论图形最后完全固定, 那么, 它的各部分都是可求值的, 这时, 只要考虑如何选择最简捷的路径; 如果所论图形的某些部分尚不能固定, 那么, 决不要试图通过计算这些部分的值而去达到结论.

**例 36** 已知 在三棱锥  $P-ABC$  中, 如图 4-27 所示, 顶点  $P$  在底面的投影  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心,  $PB = PC, BC = 2$ , 侧面  $PBC$  与底面所成的二面角的度数是  $60^\circ$ . 求 棱锥  $P-ABC$  的体积  $V_{P-ABC}$ .

**分析** 由于  $V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h$ , 许多同学很容易想到先求  $S_{\triangle ABC}$ . 由于已知  $BC = 2$ , 于是只需求出  $\triangle ABC$  中  $BC$  边上的高, 即可计算  $S_{\triangle ABC}$ . 然后求出棱锥的高  $PH$ ,  $V_{P-ABC}$  便可求出了.

但沿此路往下走, 本题永无解出之时. 在 1985 年, 一次有 2000 多名高三学生参加的考试中, 几乎没有人解出这道题目, 其原因都是因为用了这个思路.

为什么这条路走不通呢?

因为, 由本题所给的条件来看, 三棱锥  $P-ABC$  的底面  $\triangle ABC$  (包括它的面积) 和棱锥的高, 都是不固定的.

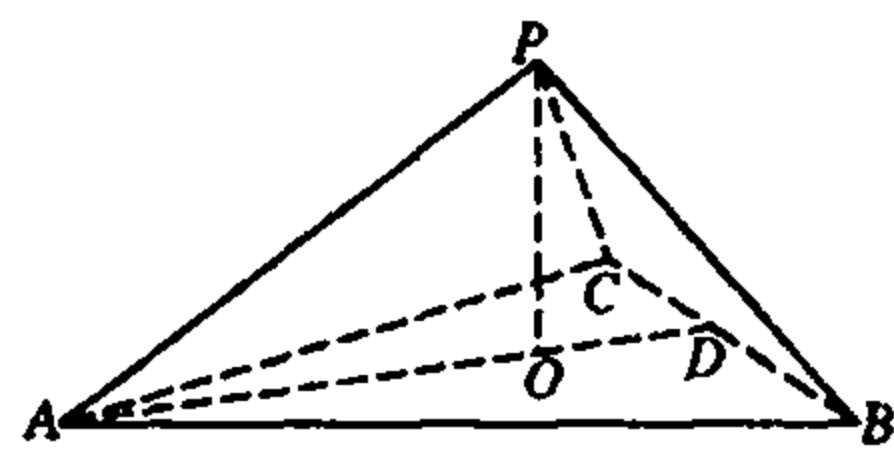


图 4-25

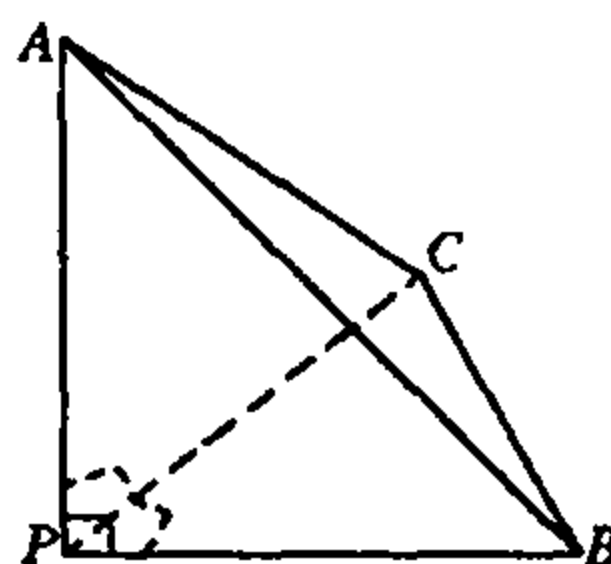


图 4-26

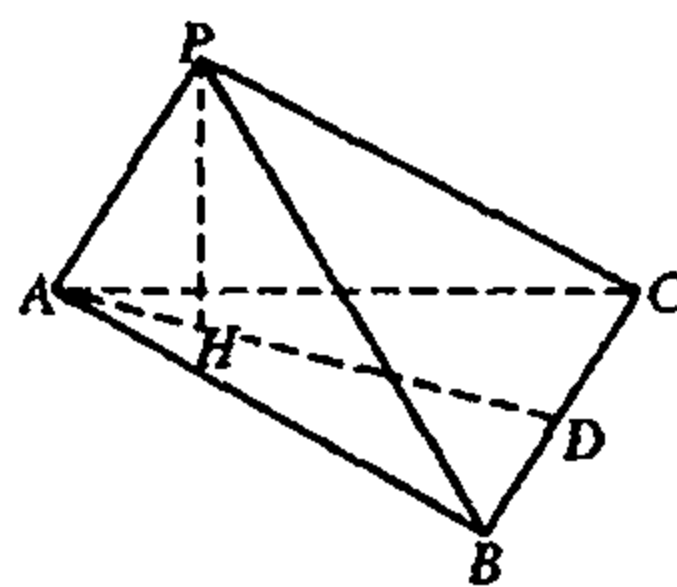


图 4-27

事实上,  $BC$  长为 2 是固定的. 二面角  $P-BC-A$  为  $60^\circ$  是固定的, 再由已知  $PB=PC$ , 可知棱锥的顶点  $P$  在  $BC$  的一条(在平面  $PBC$  上的)垂直平分线  $DM$  上, 但  $P$  点在  $DM$  上的位置可以是  $P_1$  或  $P_2$  或  $P_3$  或…… $P$  点无法确定, 因而棱锥的高不可能固定, 于是, 试图通过求出棱锥的高再去计算体积, 当然永远不会达到目的, 如图 4-28 所示.

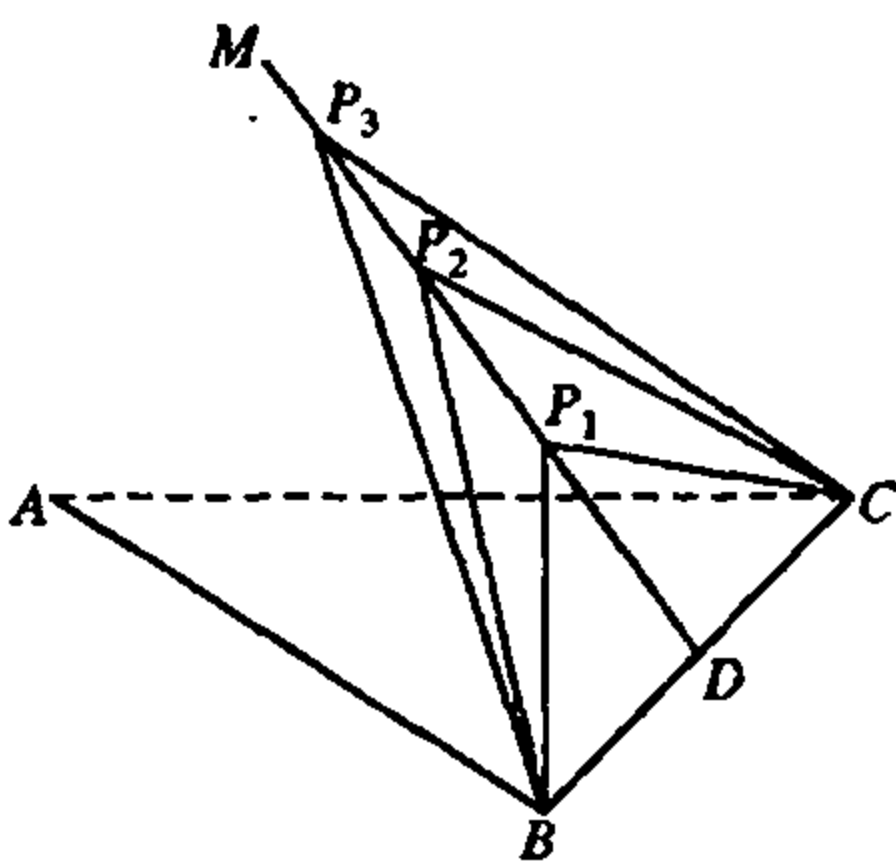


图 4-28

那么, 根据本题的要求, 是否可以达到解题的目的呢? 我们仍用“动”的思想作分析:

在底面  $\triangle ABC$  中,  $BC$  是固定的,  $P$  在底面的投影  $H$  是底面  $\triangle ABC$  的垂心, 并且  $PB=PC$ , 根据定理“平面外一点向这个平面所引的斜线段若相等, 则它们在这个平面上射影的长度相等”, 得到  $BH=CH$ , 设  $AH$  交  $BC$  于  $D$ , 由于  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心  $\Rightarrow AD \perp BC$ , 可证  $\triangle BHD \cong \triangle CHD \Rightarrow D$  是  $BC$  的中心, 于是  $AB=AC$ . 但到此为止, 再不可能对  $\triangle ABC$  的形状及度量作进一步的固定了. 因为二面角  $P-BC-A$  为  $60^\circ$ , 并不限制  $A$  的位置. 事实上,  $A$  将在它所在的底面  $ABC$  上, 沿  $BC$  的垂直平分线滑动, 即  $\triangle ABC$  的高不能确定, 当然,  $S_{\triangle ABC}$  就不能确定, 更无法从它进而去计算棱锥的体积了.

这样, 在  $\triangle ABC$  的高  $AD$  和棱锥的高  $PH$  都不固定的情况下, 棱锥的体积还有可能算出来吗? 答案是肯定的.

这种情况在代数里常常出现.

例如, 由条件  $a_6 a_{15} + a_9 a_{12} = 4$ , 虽然不能确定等比数列  $\{a_n\}$ , 但却可以算出它的某些项的某种组合, 例如可以计算乘积  $a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12}$ , 计算过程如下:

由

$$a_6 a_{15} + a_9 a_{12} = 4 \Rightarrow a_6^2 q^9 = 2,$$

则

$$a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} = a_6^4 q^{18} = (a_6^2 q^9)^2 = 4.$$

本题同样是计算不能确定的量  $PH$  与  $AD$  的一种组合  $PH \cdot AD$ , 它是否能确定呢? 这里的前提是, 这两个量  $PH, AD$ , 不能在同时变化中“水涨船高”, 而应“彼长此消”.

由已知, 前已证出,  $H$  是等腰  $\triangle ABC$  的垂心, 随  $P$  点在  $DM$  上远离  $D$  点而去, 那么, 如图 4-29 所示,  $H$  也要在  $DA$  上远离  $D$  点而去.

即  $P_2 D > P_1 D$  时  $\Rightarrow H_2 D > H_1 D$ . 这时, 粗心的同学会想当然地以为,  $A$  点也将远离  $BC$  而去, 那么棱锥  $P-ABC$  的体积也就无法固定了.

事实上, 如图 4-30 所示, 对于等腰三角形  $ABC$ , 随着垂心  $H$  远离底边  $BC$ , 顶点  $A$  将反而趋近  $BC$ .

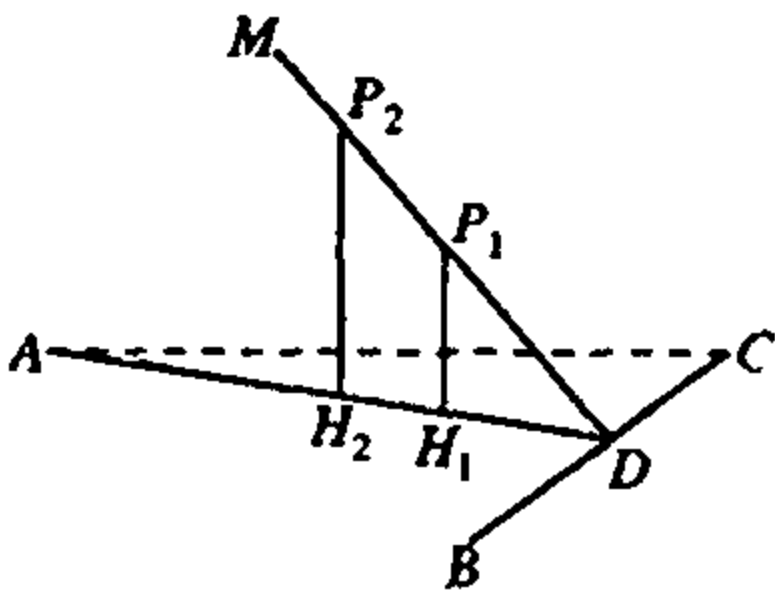


图 4-29

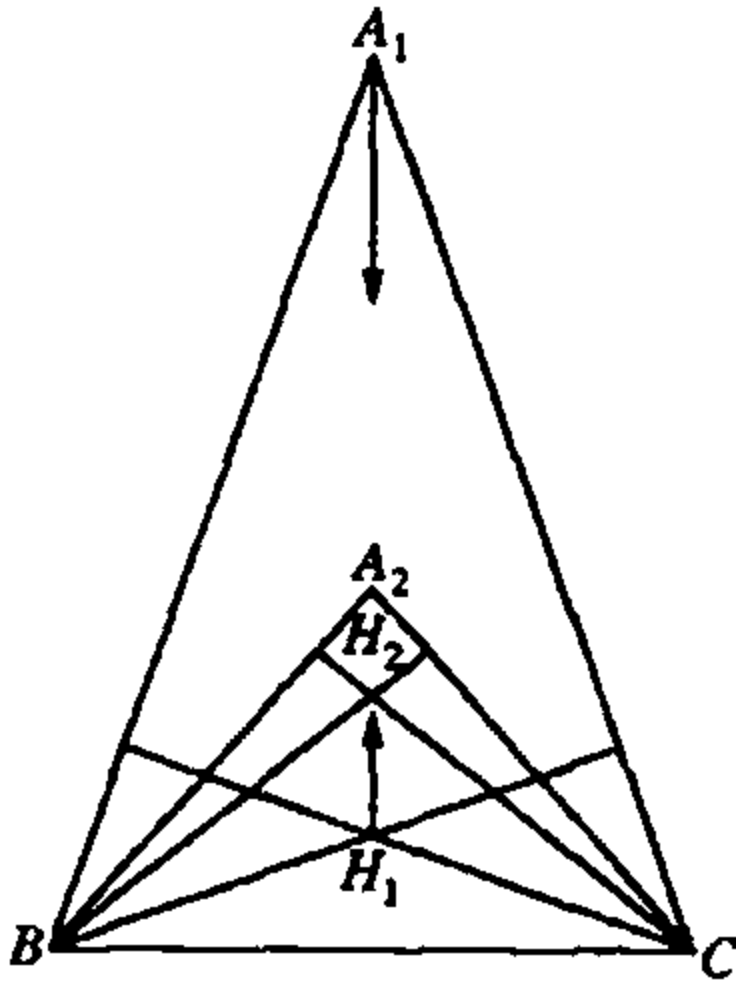


图 4-30

因为,  $H$  远离  $BC$ , 即

$$\begin{aligned} H_1 \rightarrow H_2 &\Rightarrow \angle H_2 BC > \angle H_1 BC \\ &\Rightarrow \angle A_2 CB < \angle A_1 CB \\ &\Rightarrow A_1 \rightarrow A_2, \end{aligned}$$

即点  $A$  移近  $BC$ . 于是,  $PD$  增大的同时,  $PH$  增加,  $DH$  也增大, 这时  $AD$  反而减小, 那么,  $PH \cdot AD$  就有可能保持固定, 而  $V_{P-ABC}$  等于

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} BC \cdot AD \cdot PH$$

就有可能算出了.

以上的分析表明, 用“动”的思想去思考, 不仅有助于形成正确的空间想像, 还有助于寻找合理的解题思路.

进一步分析, 应注意到  $BC, AD, PH$  不在同一平面上, 为了运用平面几何和三角的知识, 设法把不在一个平面上的条件(包括结论中的条件)转化到同一平面上, 是解决立体几何问题的一个常用途径.

转化的方式, 可以通过两个平面的交线, 可以应用三垂线定理及其逆定理, 可以通过直线和平面所成的角, 可以通过两面角的平面角, 可以通过与平面平行的直线在平面上的射影, 可以通过截面……

根据本例的已知条件, 选择通过二面角  $P-BC-A$  的平面角, 把  $PH$  转化到平面  $ABC$  上是比较适宜的.

解 连结  $AH$ , 延长后交  $BC$  于  $D$ , 连结  $PD$ , 如图 4-31 所示.

因为  $PH \perp$  平面  $ABC$  于  $H$ ,  $PB = PC$  (已知), 所以,  $HB = HC$  (平面外一点到平面所引的斜线段相等, 则它们在平面上的射影相等).

又由已知  $H$  是  $\triangle ABC$  垂心  $\Rightarrow AHD \perp BC$  于  $D$ , 则  $AHD$  垂直平分  $BC \Rightarrow AB = AC$ . 并由三垂线定理.

$$\left. \begin{array}{l} PH \perp \text{平面 } ABC \\ AHD \perp BC \\ BC \subset \text{平面 } ABC \end{array} \right\} \Rightarrow PD \perp BC.$$

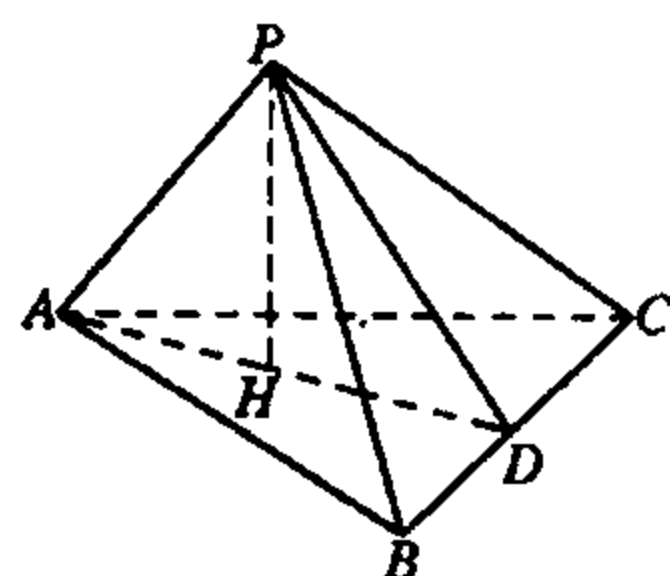


图 4-31

于是,  $\angle PDH$  是二面角  $P-BC-A$  的平面角, 为  $60^\circ$ . 可得  $PH = DH \tan \angle PDH = \sqrt{3}DH$ .

画底面  $\triangle ABC$  的移出图, 如图 4-32 所示.

$H$  为垂心  $\Rightarrow AD \perp BC$  及  $BE \perp AC \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AHE \sim \triangle BHD$ , 及  $BD = \frac{1}{2}BC = 1$ , 又由

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD,$$

于是

$$\triangle BHD \sim \triangle ABD.$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DH}$$

$$\Rightarrow AD \cdot DH = BD^2 = 1.$$

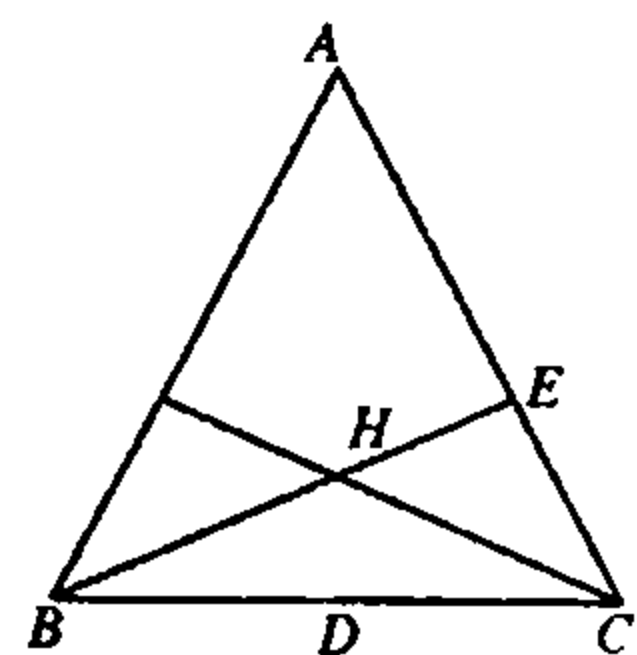


图 4-32

则

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} BC \cdot AD \cdot \sqrt{3} DH = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## (二) 学会在空间中考虑问题

在空间中考虑位置关系,或添加辅助线、辅助平面时,要注意依据.

**例 37** 以分别在一个二面角的两个半平面上(不在棱上)的三个定点为顶点,并且第 4 个顶点也在这个二面角的半平面上的梯形,可作多少个?

**分析** 进行空间想像时不注意依据的同学,会轻易地回答可以做无数多个.

因为,若设  $A, B \in$  平面  $\alpha, C \in$  平面  $\beta, \alpha \cap \beta = PQ$ , 则二面角为  $\alpha - PQ - \beta$ . 那么,在平面  $\beta$  上,过  $C$  作  $CM \parallel AB$ , 在  $CM$  上不是有无数个点可以作为所求作梯形的第 4 顶点  $D$  吗!

这个解答的错误在于,在平面几何中如果  $A, B, C$  在一个平面上(如图 4-33 所示),当三点不在一条直线上时,在它们所在的平面  $\beta$  上,  $CM$  直线一定可作,但  $A, B, C$  分别在两个平面  $\alpha, \beta$  上,过  $C$  虽然可作  $CM \parallel AB$ , 但直线  $CM$  却不一定在平面  $\beta$  上.

事实上,如图 4-34 所示,当  $AB$  不平行于  $PQ$  时,过  $C$  点而与  $AB$  平行的直线  $CM$  上,只有  $C$  点在  $\beta$  上,这样,由“在平面  $\beta$  上作  $CM \parallel AB$ ”的作图出发进行的推理,当然就是完全错误的了.

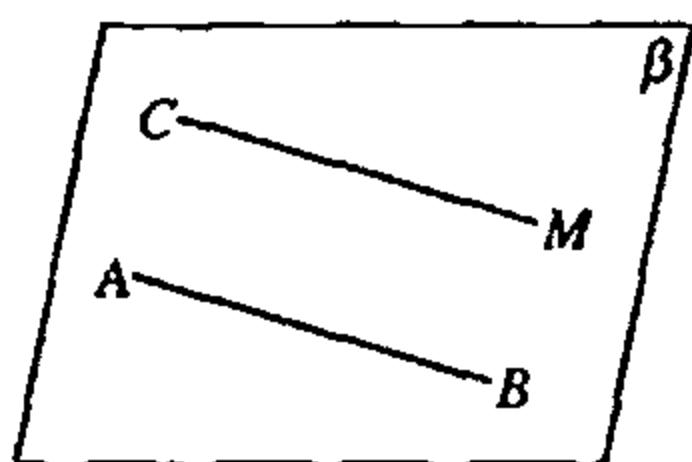


图 4-33

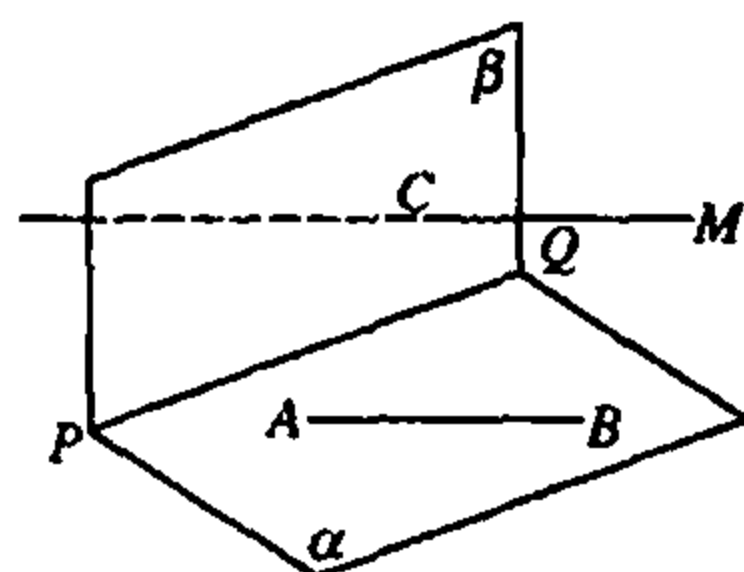


图 4-34

这就是进行空间想像时,必须有依据的意义.

这个问题,在平面几何中就已存在.例如,不能说“过线段  $AB$  外一点  $C$ ,作  $AB$  的垂直平分线”,等等.但在立体几何中,由于视觉效果在认识中的作用减低,这个问题就突出出来了.所以在思考中,一定要时时注意.

就本例而言,如果两条平行线分别在一个二面角的两个半平面内,要且仅要,它们与二面角的棱平行.

因为,如图 4-35 所示;若  $AB \subset \alpha, CM \subset \beta$ ,

$$1^\circ \quad \left. \begin{array}{l} AB \parallel PQ \\ CM \parallel PQ \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel CM.$$

$$2. \quad AB \parallel CM \Rightarrow AB \parallel \text{平面 } \beta \Rightarrow AB \parallel PQ \Rightarrow CM \parallel PQ.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{综合 } 1^\circ, 2^\circ, AB \parallel PQ \\ CM \parallel PQ \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB \parallel CM.$$

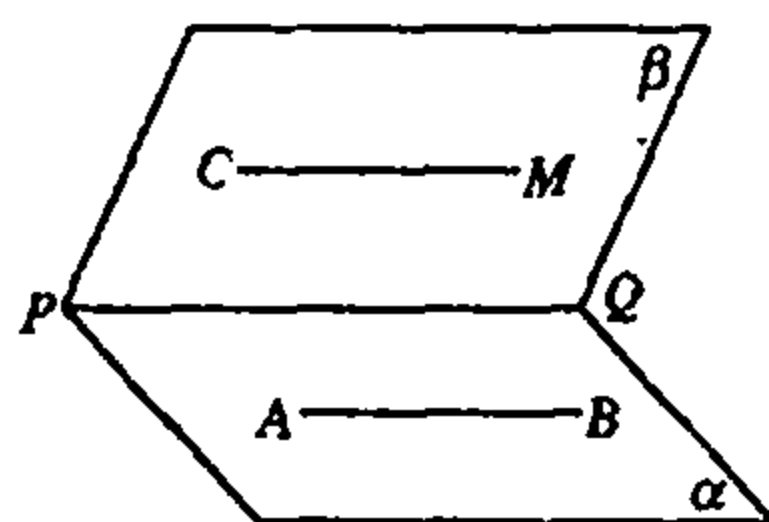


图 4-35

这样,当  $AB \parallel PQ$  时,在平面  $\beta$  上过  $C$  可以作  $CM \parallel PQ$ , 这时,所求作的梯形有无数多个,因为,在  $CM$  上有无数多个点可以作为梯形的第 4 个顶点.

当  $AB$  不与  $PQ$  平行时,由于在  $AB \subset \alpha, CM \subset \beta, \alpha \cap \beta = PQ$  的条件下有



$$\left. \begin{array}{l} AB // PQ \\ CM // PQ \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB // CM.$$

则不可能有平面  $\beta$  上的直线  $CM // AB$ , 于是,  $AB$  不可能作为求作梯形的底.

这时, 似乎应该下结论:  $AB$  不与  $PQ$  平行时, 所要求的梯形做不出来了.

这个回答仍不正确. 因为, 如果把“动”的思想用到思考上, 把想使  $AB$  作为梯形的底的想法, 转移到想使  $AB$  作为梯形的腰, 那么, 由于  $C, A, B$  不在一条直线上<sup>①</sup>, 那么, 它们决定一个平面, 设为  $\gamma$ . 在平面  $\gamma$  上, 连结  $AC$ , 并可过  $B$  作  $AC$  的平行线, 这条平行线必与两平面  $\gamma$  和  $\beta$  的交线交于一点  $D_1$ , 则  $D_1 \in \beta$ . 于是, 梯形  $ACD_1B$  是所求作的一个梯形, 它是以  $AC$  为底边的, 如图 4-36 所示.

考虑到  $A$  和  $B$  对于点  $C$  的平等地位, 自然会想到,  $BC$  也可以作为梯形的底边. 这时, 在平面  $\gamma$  上, 过  $A$  作  $BC$  的平行线, 可证, 点  $D_2$  当然应该在平面  $\beta$  与平面  $\gamma$  的交线上, 这时, 梯形  $AD_2CB$  也是所求作的一个梯形.

这样, 本题的正确解答应该如下:

当  $AB$  平行于二面角的棱  $PQ$  时, 所求作的梯形有无数个;

当  $AB$  不与  $PQ$  平行时, 所求作的梯形有两个.

理由如前所述, 处处注意了依据. 例如, 平面  $\beta$  上是否存在  $AB$  平行线的依据; 过点  $A, B, C$  的平面  $\gamma$  是否可做及是否惟一的依据 (先指出  $C, A, B$  不在同一直线上); 甚至画图时的每一根线条的长短、方向都要注意依据. 例如, 在图 4-36 中, 由于充分注意了使  $D_1CD_2$  和  $BA$  的延长线要交于  $PQ$  上的一点, 才能使图形看起来合理. 因为, 它符合了“三个平面 ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) 两两相交时, 若交线不平行, 三条交线必交于一点”这一依据, 等等.

正是这些步步有依据的想像、分析、画图, 才使思维中的图形是正确的, 从而避免所述及的种种错误.

### (三) 画好立体图

理解立体几何的概念, 解立体几何习题, 开始用想像、摆模型的方式, 辅助自己的思考, 但最后, 一般要从画在纸上的立体图出发, 完成整个的思考. 所以, 这张图画得好坏, 就举足轻重了, 因为它严重地影响着对所论图形的理解是否正确.

举个例子.

曾有几位朋友的孩子拿着一道题来找我, 这是他们的学校参加区统考的一道题目.

**例 38** 已知 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = BC = 10$ ,  $D, E, F$  分别是  $AB, AC, BC$  的中点,  $AF \cap DE = G$ , 将  $\triangle ADE$  所在的平面沿  $DE$  折成与平面  $BCED$  成  $60^\circ$  角的二面角时,  $A$  到了  $A'$  的位置上, 连结  $A'B, A'C$ .

求 (1)  $V_{A'-BDEC}$ ;

(2) 二面角  $B-A'G-C$  的大小.

这道题目并不很难, 为什么他们都做不出来呢?

我让他们先讲讲各自在考试时的思维过程, 才发现问题的症结在他们所画的图上, 这几位同学画的图如图 4-37 所示的各种样子, 当然要把思维引入歧途了.

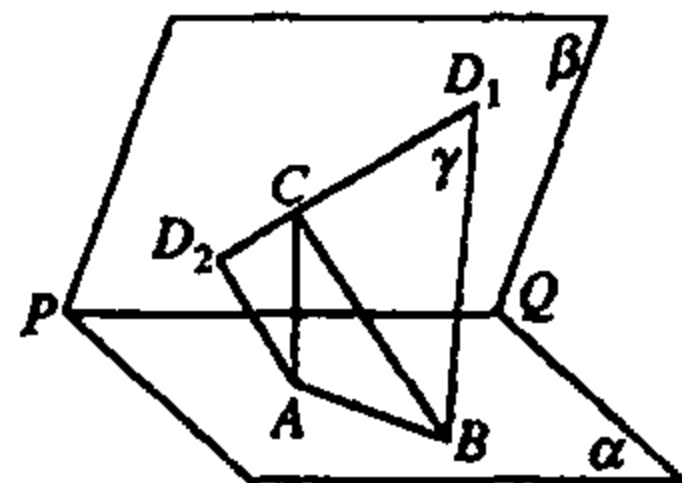


图 4-36

<sup>①</sup> 关于  $C, A, B$  三点不在同一直线上的证明如下 (用反证法):

因为点  $A, B$  在平面  $\alpha$  上, 所以直线  $AB$  上的点都在  $\alpha$  上. 如果  $C, A, B$  在一条直线上, 则点  $C$  在平面  $\alpha$  上.

又因为点  $C$  在平面  $\beta$  上, 所以点  $C$  在平面  $\alpha, \beta$  的交线  $PQ$  上, 与已知  $C$  不在二面角的棱上, 矛盾.



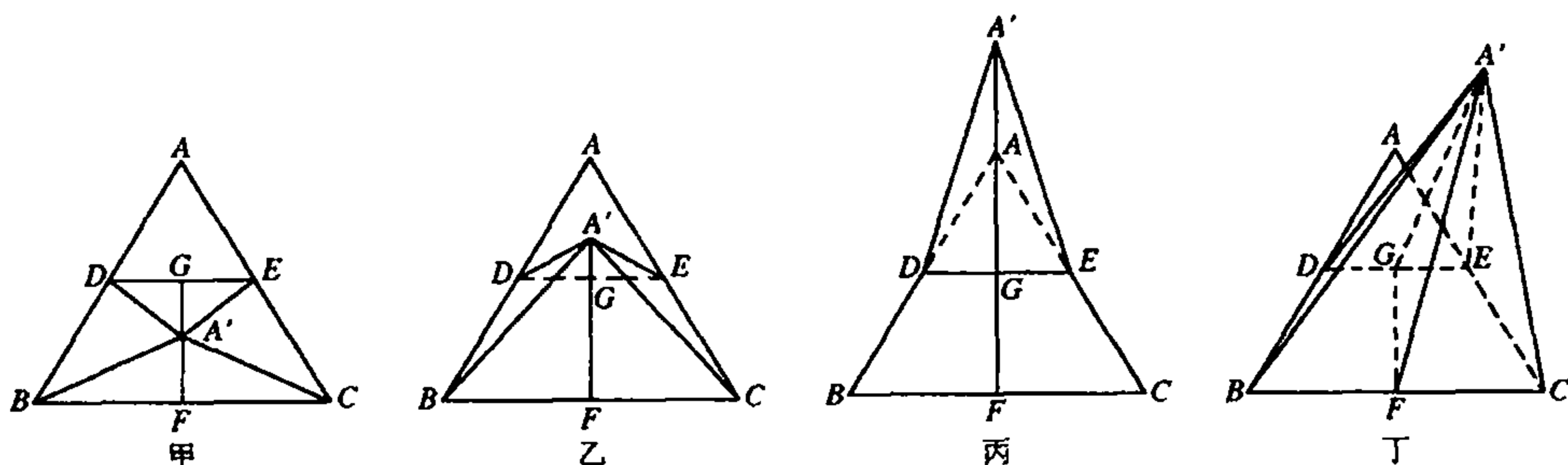


图 4-37

图 4-37 中的甲、乙、丙共同的特点是没有立体感,并且三条线段  $A'G, GF, A'F$  重合在一起,为了求  $V_{A'-BDEC}$  而过  $A'$  所作的高线  $AH$  也将和它们重合在一起,  $\triangle A'GH, \triangle A'FH, \triangle A'GF$  也都表现成了一条线,甚至  $60^\circ$  的二面角  $A'-DE-F$  的平面角也重合了一条直线,当然就难以展开正确的思维了。

画成图 4-37 中丁的样子,虽然有了立体感,但歪曲了图形的本来面目. 照这种画法,过  $A'$  作棱锥  $A'-BDEC$  底面的高时,垂足  $H$  将落在四边形  $GECE$  的内部,而不是落在它的位置  $GF$  上,思考就容易出差错。

这时,我只是给他们画了几幅图,如图 4-38 所示,并没讲解。

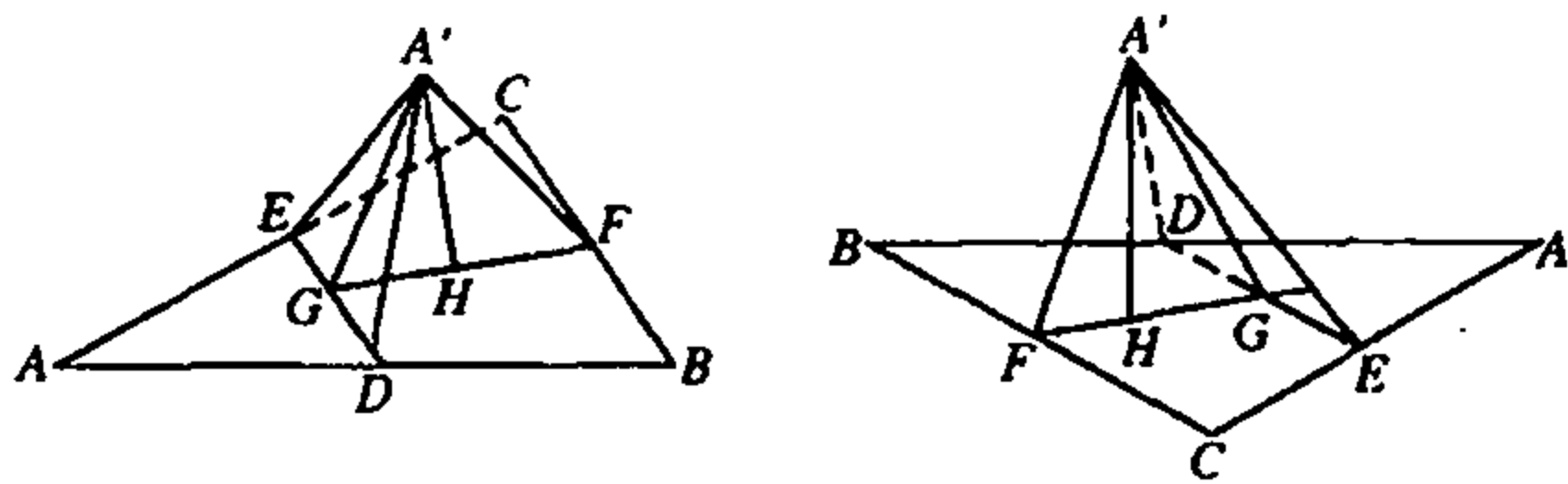


图 4-38

可是,没过多长时间,几个孩子都把题目解答了出来。

因为,从图 4-38 中的两个图中明显地可以看出来,  $\angle A'GH$  是二面角  $A'-DE-F$  的平面角,为  $60^\circ$ ,  $A'G = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ . 那么,在  $\text{Rt}\triangle A'GH$  中,  $A'H = A'G \cdot \sin \angle A'GH = \frac{15}{4}$ ,这是棱锥  $A'-BDEC$  的高. 只要再计算出四边形  $BDEC$  的面积,而它是  $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ . 这时,  $V_{A'-BDEC}$  立即可以算出,为

$$V_{A'-BDEC} = \frac{1}{3}S_{BDEC} \cdot A'H = \frac{375\sqrt{3}}{16}.$$

由此可见,画一张“好图”,对于解题的思路多么重要。

那么,怎样才能画一张好图呢?

我们首先应当分析,像图 4-37 那样的“坏图”,又是怎样画出来的呢? 图 4-39,展示了它的思维过程。

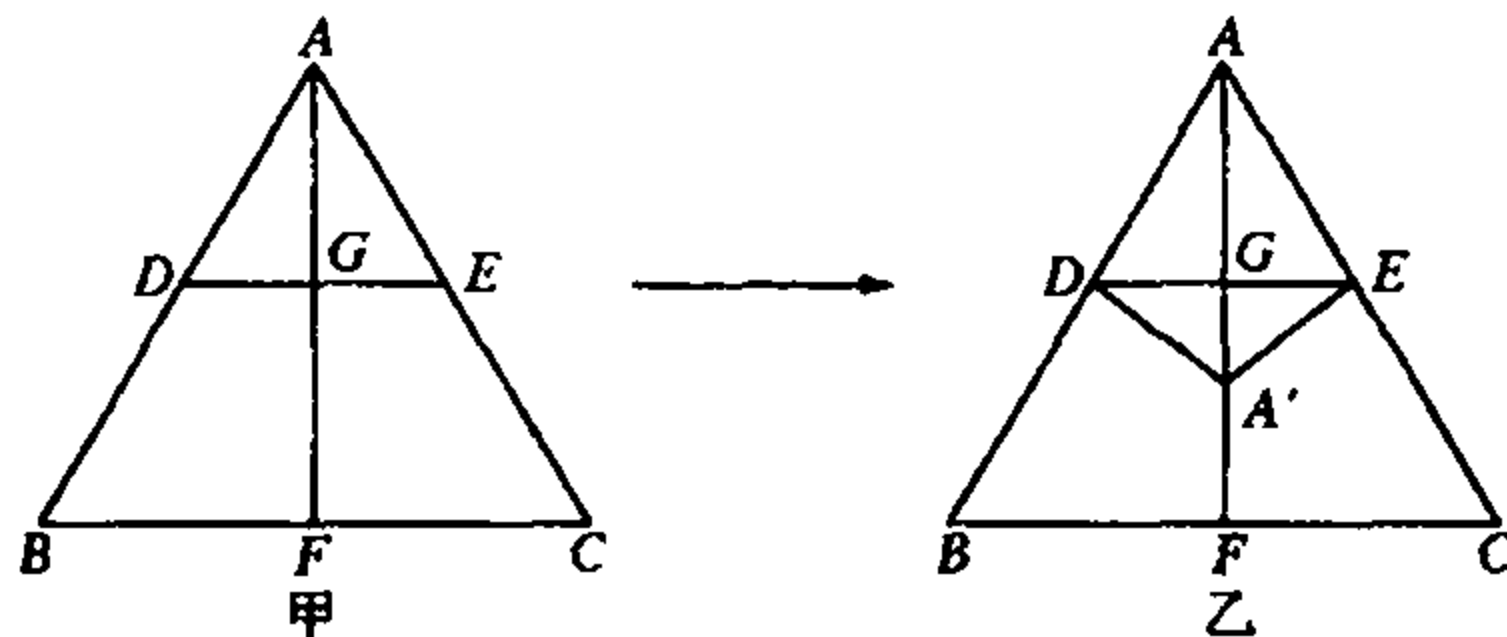


图 4-39

在图 4-39 中,先画了甲,正 $\triangle ABC$ 画得很标准,再折叠,就成了乙这个模样.它与图 4-38 相比.很大的一个不同就在于,画图时选取的视线方向不同.

经过类似的一些对比,可以总结出如下一些把图画好的建议,提供给同学们:

(1) 斜二测画立体图的方法

掌握好课本上所介绍的斜二测画立体图的方法.

(2) 选择一个最能反映所论图形的全貌和特征的视线方向来画图

一般地,宜使主要的线段、角所在的平面尽可能与观察的视线方向垂直(即在直立投影面内).因为在这个平面内时,度量和位置关系所画出来的情景和人的视觉印象是一致的,有利于思考.

(3) 养成随时画移出图的习惯

即使采取(2)的建议,对于较复杂的图形,由于无法兼顾,仍会使一些重要平面上图形的视觉印象严重失真,这时,要随时画它们的移出图.

所谓画“移出图”,是指把这个平面变成直立投影面,也就是成为平面几何中的图形.例如本章的图 4-30 和图 4-32,都是移出图,它们都是图 4-28、4-29、4-31 中的立体图中的底面  $ABC$  平面的移出图.图 4-30 使我们清楚地意识到,随着垂足  $H$  的外移,等腰 $\triangle ABC$ 的顶点  $A$  反而内移,突破了解题思考中的最大一个难关;而图 4-32,则使我们得以计算出  $AD \cdot DH = BD^2 = 1$ ,解决了解题思考中最后一个难关.

(4) “衬托”和“剪枝”

为了使图形在视觉效果上有立体感,有时宜附加一些因素,例如画异面直线  $a, b$ ,在图 4-40 中,无论是甲,还是乙,都难以给人以它们是异面直线的视觉效果,特别是在画乙图时,心里的想法是,希望直线  $a$  从直线  $b$  的下方穿过来,但画完后,读图的人,只能认为  $a, b$  是相交直线.

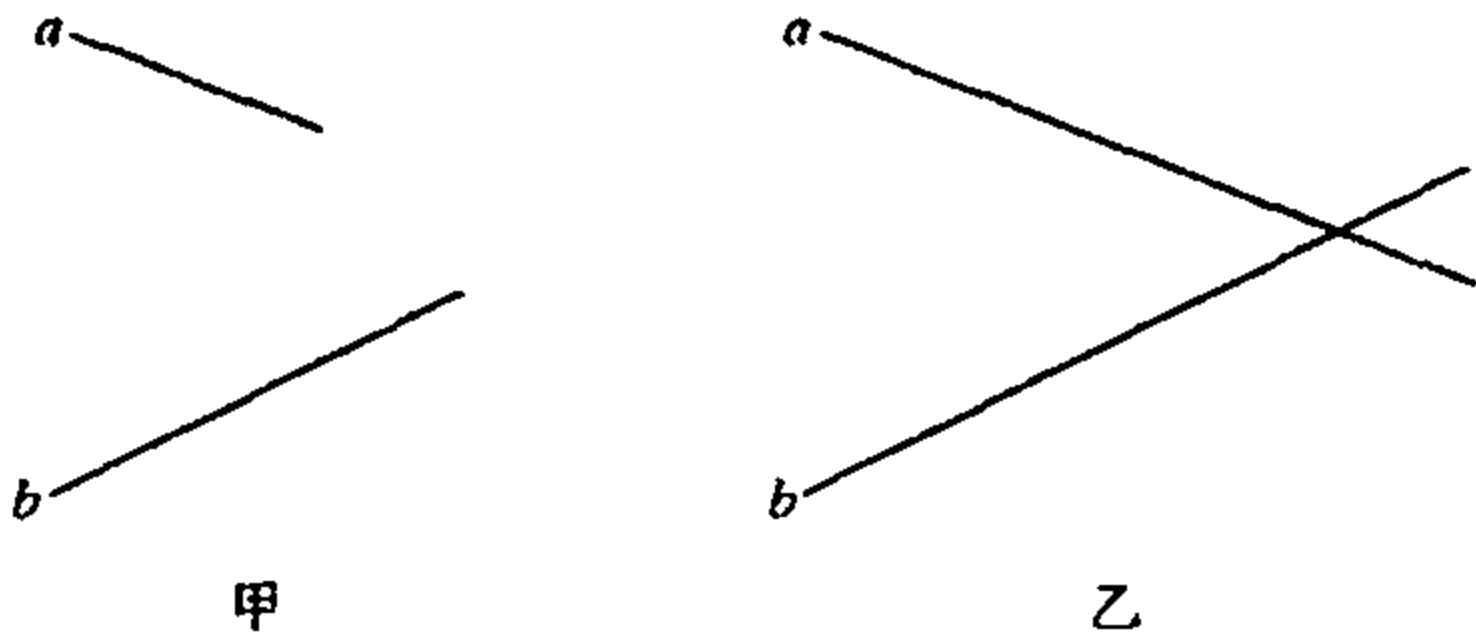


图 4-40

如果把直线  $b$  所在的一个平面画出来,加以衬托,如图 4-41 的甲、乙所示,则给人以  $a, b$  是异面直线的清楚印象.

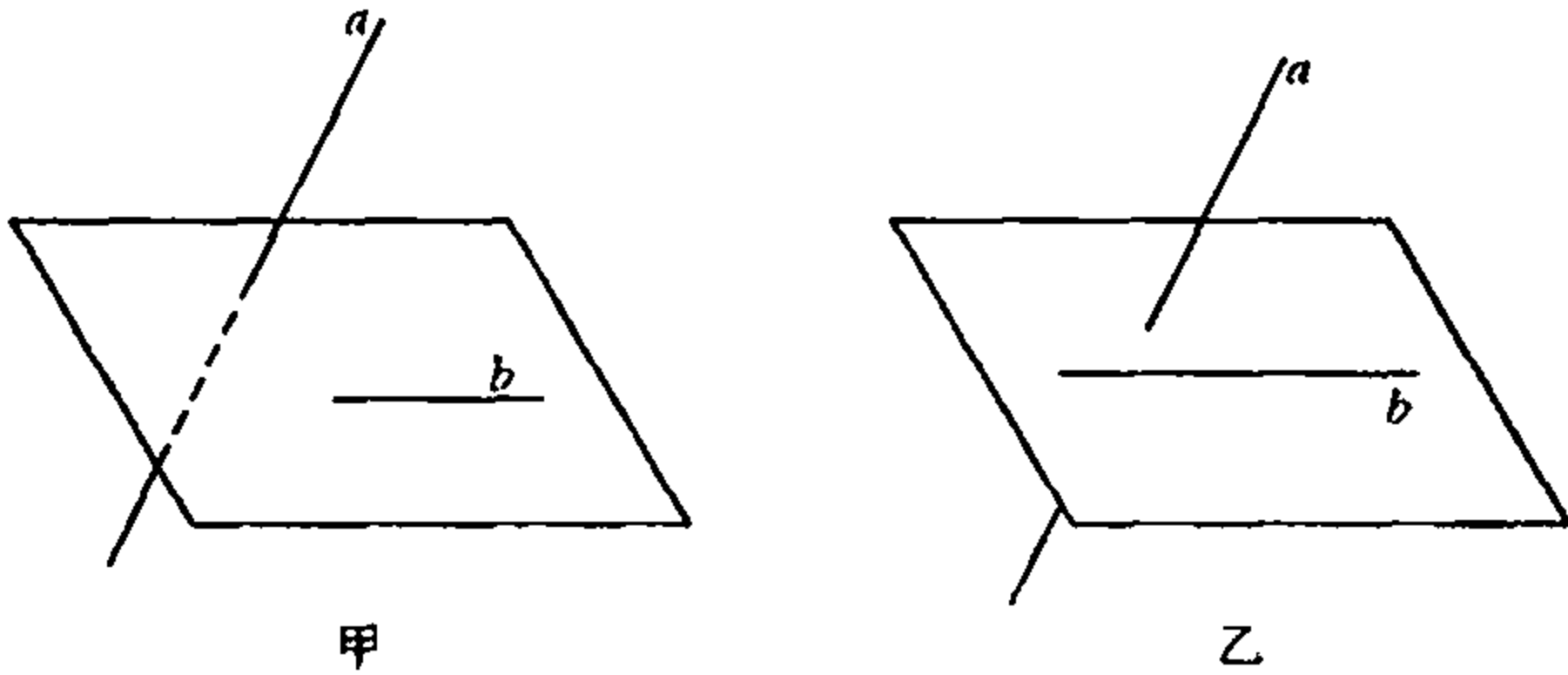


图 4-41

但问题涉及到异面直线的距离时,那么,在图 4-41 这种视线方向下,又难以清楚地表达了.

这时,如果转移一下视线方向,把  $a, b$  分别所在的两个互相垂直的平面  $\alpha, \beta$  都画出来,那么,过  $b$  与两平面交线的交点  $B$ ,所画  $a$  的垂线段  $BA$ ,就是异面直线  $a, b$  间的公垂线段,它的长就是  $a, b$  之

间的距离(请同学们考虑,这里的依据是什么?),如图 4-42 所示.

这就是“衬托”的作用. 它增加了图形的立体感. 但在有些情况下,去掉一些线条甚至平面,倒反而增加立体感,更能减少图形的紊乱性,排除干扰,有利于进行思考.

**例 39** 已知  $l_1, l_2, l_3$  三条直线两两垂直,并交于一点  $O, A \in l_1, B \in l_2, C \in l_3$ , 而且,  $A, B, C$  都不与点  $O$  重合. 求证  $\angle ABC < 90^\circ$ .

**分析** 对于这道题目,有的同学画出了图 4-43 中的图形,有的同学画出了图 4-44 中的图形.

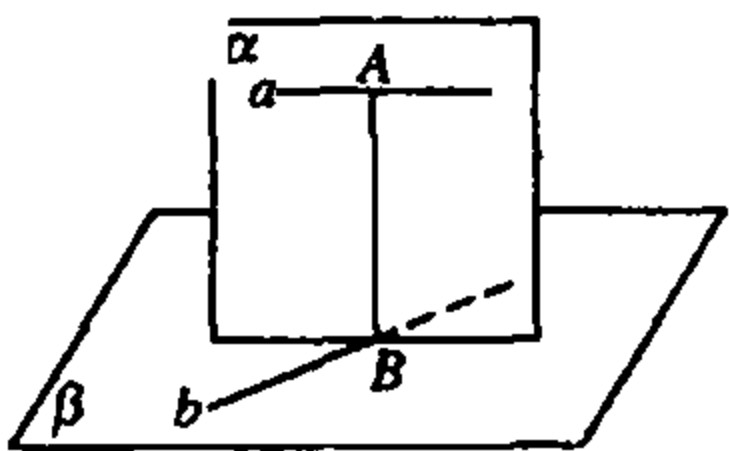


图 4-42

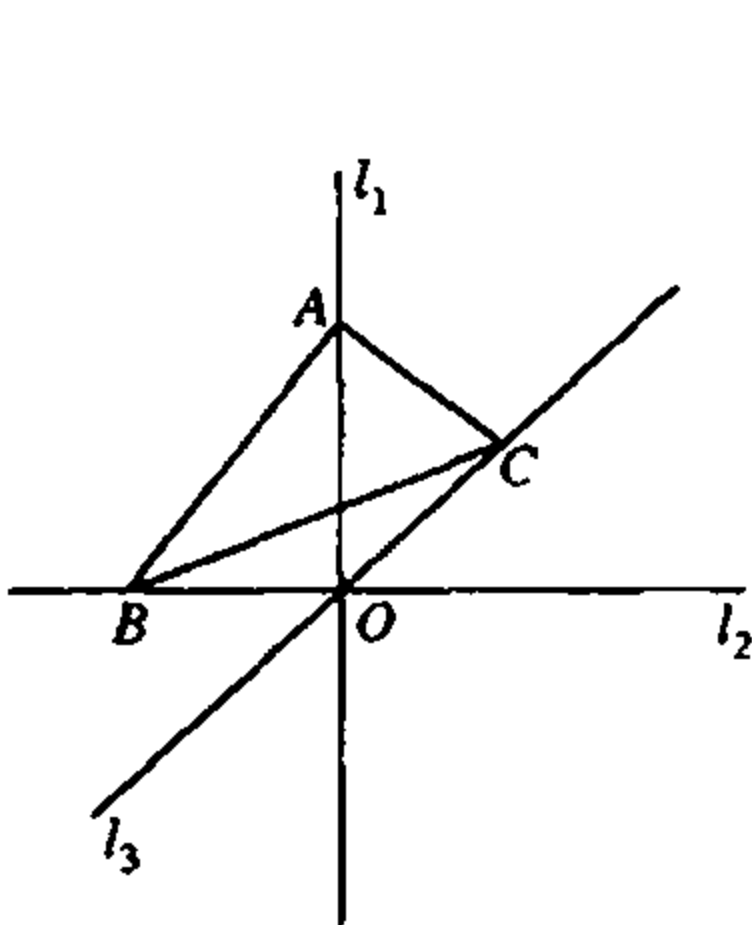


图 4-43

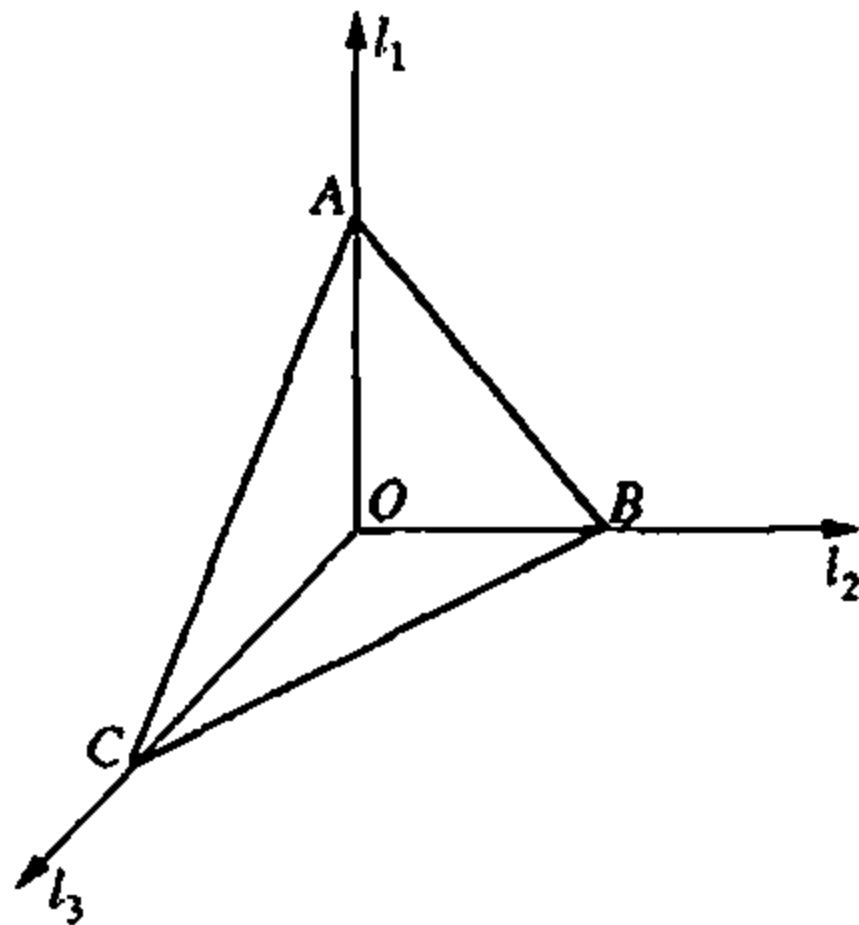


图 4-44

显然,如图 4-44 所示的情形,立体感强,干扰也少. 事实上,由于点  $A, B, C$  分别在直线  $l_1, l_2, l_3$  上,并且都异于三条直线的交点  $O$ ,考虑到对称性,每条直线可都只画一半.

这就是“剪枝”的优点,基于这种考虑,在图 4-42 中,没有把平面  $\beta$  的后边沿画出虚线,而在图 4-41 中,图乙的效果比图甲好,也是因为去掉了一段虚线.

一般地,图形中出现的虚线(遮盖线)少一些好,多数情况下,虚线也不要完全不出现.

当然,证明或计算中要用到的虚线,还是应该画出的. 那么,如何解决虚线太多的矛盾呢?

可以去掉一些不是十分必需的平面,使一些虚线由于暴露出来而成为实线,在本章图 4-38 中,就是采取了这种处理方法,没画出平面  $A'EC$  和平面  $A'BC$ .

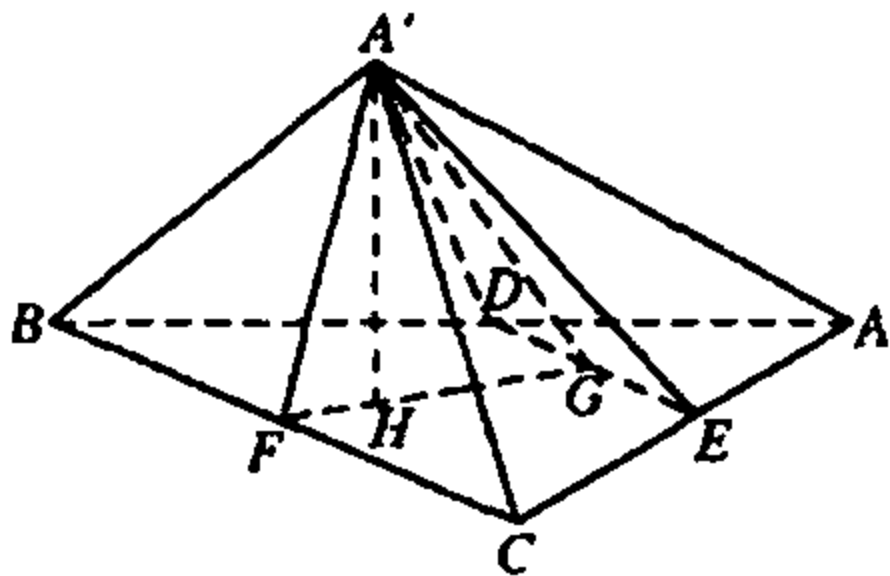


图 4-45

可以想见,如果不去掉位于图形前方的这两个平面,图形就会是图 4-45 的样子,众多的虚线,降低了立体感,增加对于读图的干扰.

顺便说一句,在增加线条(“衬托”)还是减少线条(“剪枝”)有利于增加立体感的问题上,表现了辩证观点. 那就是,“好”与“坏”都不是绝对的. 一方面,“好”与“坏”是相比较而言;另一方面,要看具体的条件. 如果在我们的认识中,这个观点很清楚,就比较容易使我们的思维行驶在正确的轨道上.

事实上,我们在前面所谈到的“动”的思想、对称的观点,都是属于哲理性的观点,它们对于学好数学,都有着很大的指导意义,这个问题,本书的第一篇第 3 章中有详细阐述.

#### (四) 熟知立体图的特点

用斜二测画法画立体图,虽然立体感强,并且比较准确,但费时较长,一般解题时,很少每步都用它. 如果能熟练掌握用斜二测方法画出的立体图的特点,便可不用斜二测画法的步骤,迅速画出比较准确的立体图.

这些特点有:平行的视觉印象总是符合实际情形的;在同一直线或平行直线上的线段的视觉长度比较有真实感,但线段长度的本身只具有示意性;在不同方向上的线段的长度比(指视觉印象),一般地不符合实际情况;两条直线的交角的视觉印象,一般情况下(指角不在直立投影面上)也只具

有示意性,有时,即使是同一平面上的两个角,视觉感觉为大角的角,有可能是小角,等等.

掌握这些特点,对于读图和审题时,不引起误解,也是很有必要的.

以上,对于高中数学中的重点概念和基础知识,数学方法和思考方法,选择了 7 个例题进行了怎样理解和运用、怎样拓展和纵横联系,从而有所发现和总结的示范性分析. 应当说,达到了这种高度,就是达到了对它们的熟练掌握.

## 第5章 学会做题

做习题,是学好数学的必要过程,也是培养能力、发展素质的重要环节.

首先,解答习题要应用数学概念、定理、公式等数学知识.它一方面是重温这些概念、定理、公式的机会,另一方面,也将检查自己对概念、定理、公式的理解是否准确,有无遗漏或曲解,从而加深对它们的理解和掌握.

其次,解答习题的过程,是应用学过的知识,去解决以“新面孔”出现的课题.它一方面将训练应用知识的能力,另一方面,习题的面孔是“陌生”的,需要观察它的特点,进行分析,作出判断.而后,对于选择哪个方向、应用哪些知识去解决它,作出决策.并且,在进入解决的途中,随时根据情况的发展,或作调整,或修正原来的方向.这是一个复杂的思维过程,一个能有效地培养能力的过程,一个能有力地训练思维、完善素质的过程.

但是,许多同学做了不少题目,上述两个方面都收获甚少,甚至适得其反.这是为什么呢?

这里有两个原因:第一,没有从思想上明确如上面所述的做题目的;第二,没有用科学的态度和方法去做题.

本章着重谈谈第二个原因.

### 一、题不求多,但求精彩

实现做习题想达到的目的,需要做一定数量的题目.过少不好,过多也无必要,关键是题目要精彩.

这有点像吃饭,吃不饱不好,但过饱,甚至饱了还要往肚里塞,不但后塞进去的食物不会被吸收,甚至会引起肠胃功能紊乱,连开始吃进去的东西都不能消化吸收.同时,营养价值很低的食物吃很多,不如吃适量的高营养的食物.当然,这里所说的是真正对人体健康全面有利的高营养食物,营养的多样化又较单调为好.

从这个意义上,对于题目的选择,提出如下的建议:

第一,题目本身应无错误.

这像食物应对身体无副作用一样.但拿来的题目,如何才能知道它是否有错误呢?是不是拿到题目,一定要先判断它是否有错误呢?

实际上,这项工作和正确的解题思考过程完全是融合于一体的.

在第一篇的第2章、第3章的许多例题分析中,介绍了要用“动”的思想,从已知条件出发,对未来的前景作出估计、判断,这是对题目结论的第一次检验.后来,随着过程的进行,如果出现了与原题结论相悖的结果,这是对题目的第二次检验.如果过程出现“久攻不下”的局面,或者本身出现了矛盾,既要检查自己的解题过程是否有错误,也要对题目的结论和已知条件进行推敲.

对已知条件进行推敲,常常可通过列举实验,把条件代入具体数值,看看已知条件之间是否出现矛盾,如果出现矛盾,题目肯定有误,不出现矛盾,未必无误.

对结论进行推敲,常常可以试试能否选出反例,即按照已知条件的要求,构成一个在结论范围之外的特例.

**例1** 已知  $\triangle ABC$  中,  $\sin A = \cos B$ . 求证  $\triangle ABC$  是直角三角形.

**分析** 构造反例. 设  $A = 120^\circ, B = 30^\circ$ , 这时  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos B, C = 180^\circ - A - B = 30^\circ, \triangle ABC$  不是直角三角形.

所以原结论不成立.

**说明** 用一个特例, 即否定了原结论, 而不必从已知条件的整体出发, 去证明原结论为什么不成立. 因为, 有时那样做很困难.

**例2** 已知 直线  $l_1, l_2, l_3$  相交于一点  $O$ , 点  $A, B, C$  分别在  $l_1, l_2, l_3$  上, 但异于  $O$  点.

求证  $\angle ABC$  是锐角.

**说明** 这是1990年我在北京数学奥林匹克学校给高一学生讲课时出的一道例题, 匆忙间, 我把  $l_1, l_2, l_3$  两两垂直的条件漏写了, 没有发觉.

而听课的学生们, 也都埋头在做, 只有少数同学后来对结论提出了疑问. 这件事表明, 养成解题思考的正确方法多么不易.

后来, 我把问题改为, 在这种已知条件下, 证明原结论错误. 但答好的同学更少. 因为, 许多人想从正面推导  $\angle ABC$  可能不是锐角. 另有一些同学, 虽然想到构造反例, 但构造时不能运用“动”的思想换个思考角度, 一味地从已知出发, 先画  $l_1, l_2, l_3$  再点上  $A, B, C$ , 难以构造出所需要的反例来.

如果构造反例时换个思考方向, 先在平面  $\alpha$  上画一个钝角  $\triangle ABC$ , 其中  $\angle ABC > 90^\circ$ , 再从平面外一点  $O$  引三条直线  $OA, OB, OC$ , 分别称之为  $l_1, l_2, l_3$ . 反例即构造成功了(见图5-1).

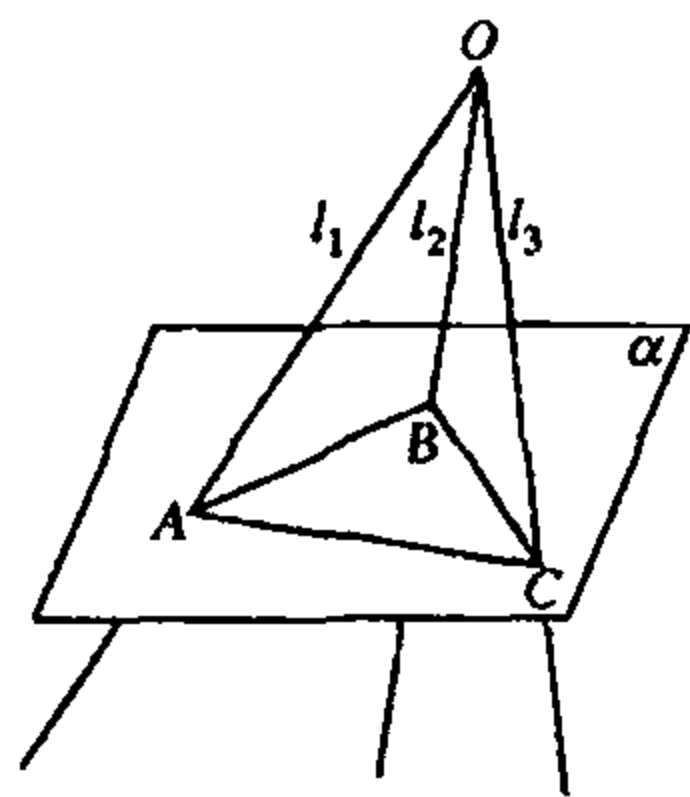


图5-1

当然, 题目还是尽量无误好, 宜尽量从课本和比较严肃的读物中选题.

第二, 不要选复述性的题目.

不要选只是对概念、定理、方法进行复述的题目. 因为这种题目, 对于理解知识、培养能力几乎无作用.

第三, 要选综合性强、充满活力的题目.

从解法上看, 题目宜是思路充满活力, 综合性强. 不要选死气沉沉、只是烦琐地堆砌公式或冗长无味的习题.

第四, 有代表性的题目也要精选.

同一类型问题, 解一两个有代表性的即可, 不必大量重复.

第五, 不要选偏题、怪题.

不选对于概念无理解价值、在思考方法上远离一般规律的题目, 即偏题、怪题.

选题精彩了, 更重要的是练习的方法要对头, 只有这样才能达到预期的目的.

下面谈谈这个问题.

## 二、讲究做题的方法

### (一) 一题多解, 多解归一, 有所总结

十几年前, 一题多解曾风行一时, 有的书名就是《一题多解习题集》. 过了几年, 这股势头又风平浪静了.

那么, 一题多解究竟好不好?

回答这个问题, 从辩证法的角度说, 应该一分为二. 也就是说, 要看具体条件, 进行具体分析, 不

能一概而论.

如果只是追求多解的数量,每个解法不作深入的探讨,有些本质相同只是形式略有区别的解法也算多解,这样的一题多解,从收效和它所花费的时间相比,是不太值得的.

如果不同角度的解法,在思路拉开的距离较大,应用的知识改换较多,这将加深对题目本质的理解、加深对每个解法本质的理解、加深对所用概念和公式及相互间联系的理解.如果再把这些解法相互比较,进行抽象,还会在方法上有所创造,提高解题的能力,这样的题多解就很有价值了.

**例3** (1) 把8本书排在上、下两格的书架上,每格4本,求有多少种排列法;

(2) 把8本书排在书架上,上格1本,中格3本,下格4本,求有多少种排列法.

**解** (1) **解法一** 第一步,从8本书中取4本在上格做排列,有  $P_8^4$  种排法.第二步,把剩下的4本在下格做排列,有  $P_4^4$  种排法.整个过程是分步完成的,所以应该用乘法原理,排法共有

$$P_8^4 P_4^4 = 40320(\text{种}).$$

**解法二** 第一步,把8本书分成4本一组,共两组,那么有分组方法

$$\frac{C_8^4 \cdot C_4^4}{P_2^2} = 35(\text{种}).$$

第二步,把第一组、第二组书向上、下格分组,有分组方法

$$P_2^2 = 2(\text{种}).$$

第三步,把上格的书做全排列,有排法

$$P_4^4 = 24(\text{种}).$$

第四步,把下格的书做全排列,有排法

$$P_4^4 = 24(\text{种}).$$

应用乘法原理,排法共有

$$\frac{C_8^4 \cdot C_4^4}{P_2^2} \cdot P_2^2 \cdot P_4^4 \cdot P_4^4 = 40320(\text{种}).$$

**解法三** 第一步,把8本书分给上、下格各4本,有分组方法

$$C_8^4 \cdot C_4^4 = 70(\text{种}).$$

第二步,对上格的4本书做全排列,第三步对下格的4本做全排列,再应用乘法原理,共有排法

$$C_8^4 \cdot C_4^4 \cdot P_4^4 \cdot P_4^4 = 40320(\text{种}).$$

**解法四** 对8本书做全排列,共有排法

$$P_8^8 = 40320(\text{种})$$

(2)与(1)类似,有

**解法一**  $P_8^1 \cdot P_7^3 \cdot P_4^4 = 40320(\text{种});$

**解法二**  $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 \cdot P_1^1 \cdot P_3^3 \cdot P_4^4 = 40320(\text{种});$

**解法三**  $P_8^8 = 40320(\text{种}).$

**说明** [1] 不同解法的构思,使我们对于排列与组合种数计算公式的联系,有了进一步的体会.对于如何分析应用问题,适当选择公式,得到了训练.

[2] 在本题的(1)与(2)的各种解法里,道理最不明显的方法为计算全排列种数  $P_8^8$ ,但它却对(1)与(2)都适用,这是为什么呢?

以(2)为例来分析,把书摆为



$$\begin{array}{ll}\triangle & (\text{上格}) \\ \triangle \triangle \triangle & (\text{中格}) \\ \triangle \triangle \triangle \triangle & (\text{下格})\end{array}$$

时的排法种数,与摆为

$$\begin{array}{lll}\triangle & & (\text{上格}) \\ & \triangle \triangle \triangle & (\text{中格}) \\ & & \triangle \triangle \triangle \triangle (\text{下格})\end{array}$$

时的排法种数,以及摆为

$$\begin{array}{lll}\triangle & \triangle \triangle \triangle & \triangle \triangle \triangle \triangle \\ (\text{上格}) & (\text{中格}) & (\text{下格})\end{array}$$

后,再向左靠拢一下,即为

$$\triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle$$

时的排法种数是相同的,而最后一种形式的排法种数是全排列  $P_8^8$ .

这样,便从多解的比较中,总结出了关于分段排列问题的一个统一的简捷解法——转化为求对所有元素全排列的种数.

**例4** 已知  $a, b, c \in R^+$ , 求证  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$ .

**证法一** 根据不等式  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$  ( $a, b \in R$ ), 那么,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b) + \frac{\sqrt{2}}{2}(b + c) + \frac{\sqrt{2}}{2}(c + a) \\ &= \sqrt{2}(a + b + c).\end{aligned}$$

**证法二** 设  $z_1 = a + bi, z_2 = b + ci, z_3 = c + ai$ . 根据

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|,$$

得

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} &= |z_1| + |z_2| + |z_3| \\ &\geq |z_1 + z_2 + z_3| = |(a + b + c) + (a + b + c)i| \\ &= \sqrt{(a + b + c)^2 + (a + b + c)^2}.\end{aligned}$$

因为  $a, b, c \in R^+$ , 所以

$$\sqrt{(a + b + c)^2 + (a + b + c)^2} = \sqrt{2}(a + b + c).$$

于是

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c).$$

**证法三** 思路: 见到  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , 想起勾股定理; 见到  $\sqrt{2}(a + b + c)$ , 想起正方形的对角线. 构造正方形  $ABCD$ , 边长为  $a + b + c$ , 如图 5-2 所示.

则对角线  $AC$  的长小于或等于线段  $AE, EF, FC$  长度的和. 即

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c).$$

当  $a = b = c$  时, 折线  $AEFC$  和对角线  $AC$  重合, “=”号成立.

**说明** 这三个解法跨度很大, 一个解法利用了不等式  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$ ; 一个解法利用了复

数模的性质  $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$ ; 第三个解法, 则完全用的是初中平面几何的知识. 从表面看, 三种解法“相去千里”. 正因为如此, 使我们产生了去寻找它们之间的联系的愿望, 促使我们找到了不等式  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b) (a, b \in R^+)$  的一种几何解释.

由于

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b) &\Leftrightarrow \\ 2\sqrt{a^2 + b^2} &\geq \sqrt{2}(a + b), \end{aligned}$$

于是这个不等式表示了, 当  $a \neq b$  时, 以  $a, b$  为直角边的直角三角形的斜边的 2 倍, 不小于以  $a + b$  为直角边的等腰直角三角形的斜边; 当  $a = b$  时, 它们相等 (如图 5-3 所示).

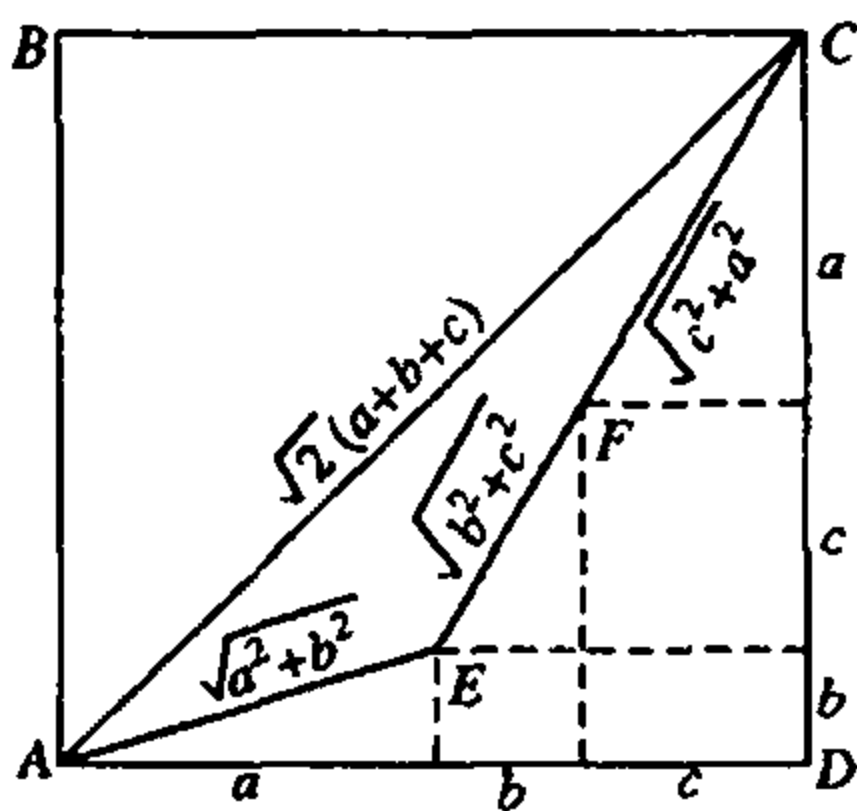


图 5-2

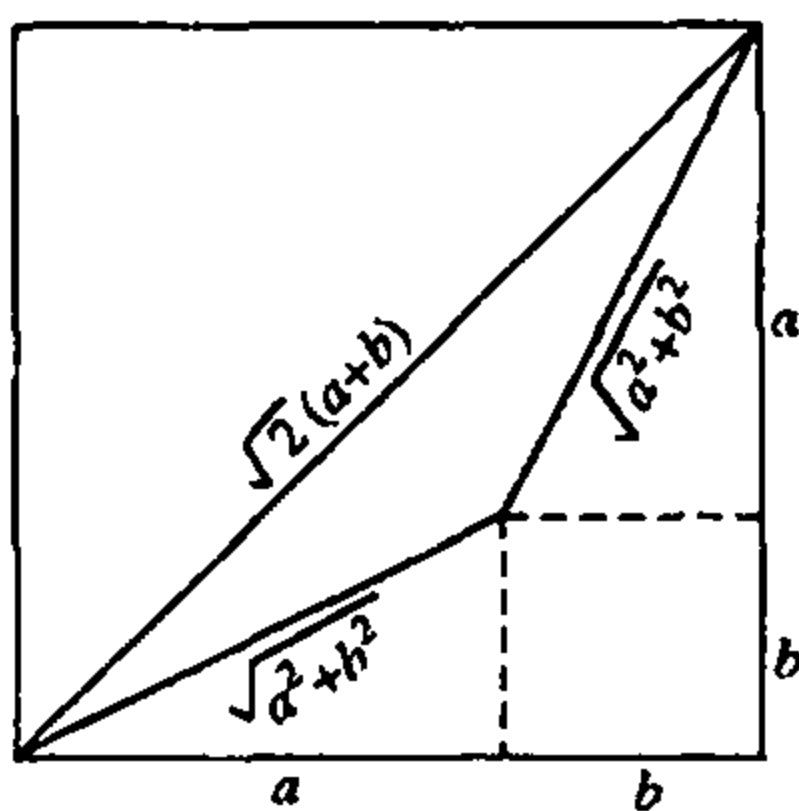


图 5-3

当然, 解释可以不惟一. 例如还可以这样解释:

当  $a \neq b$  时, 以  $2a, 2b$  为直角边的直角三角形  $ABD$  的斜边, 大于以  $a + b$  为直角边的等腰直角三角形  $AEC$  的斜边; 当  $a = b$  时, 这两个直角三角形全等, 当然, 斜边也就相等了 (见图 5-4).

至于  $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$  的几何意义, 原已清楚. 它是指, 连结两点的折线长, 不小于连结这两点的线段长, 当且仅当,  $z_1, z_2, z_3$  的矢量方向完全相同时, “=”号才成立, 而如果还要让如本例所示的  $\sqrt{2}$  倍的 “=” 号关系成立, 又必须  $a = b = c$ .

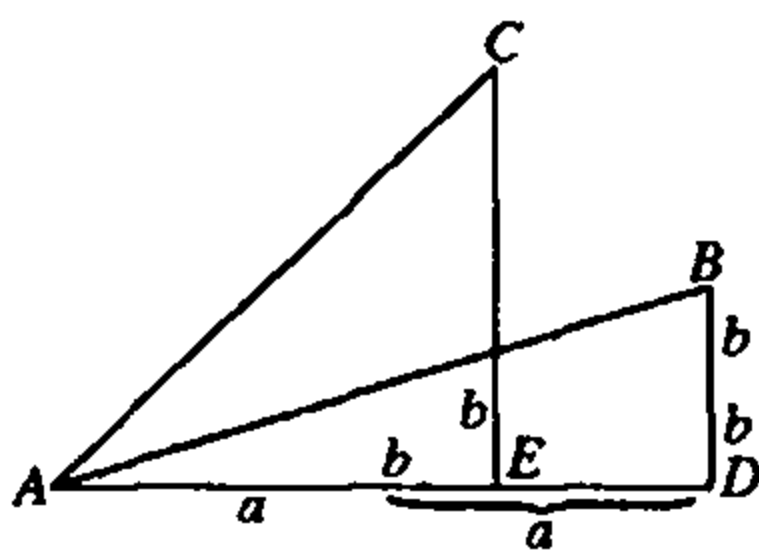


图 5-4

这就是前面所述, 如果不同解法在思路拉开距离较大, 应用的知识改换较多, 将加深对所用概念、公式及其之间联系的理解. 当然, 这需要在一题多解之后, 把它们互相比, 沟通它们之间的联系, 挖掘彼此的共同点, 这样思考的结果, 还将使我们对这道题目本身有更深刻的了解.

### (二)、对待失误, 善于反思, “吃一堑, 长一智”

题做错了, 是纠正自己对概念的片面理解或不正确的思想方法的反面教材. 如果, 只是重做一遍, 而不去分析发生错误的第一层原因, 第二层原因……那么, 即使这次做对了, 再做类似的题目, 还会出错, 更重要的是, 认识上得不到提高.

正确的态度和做法是, 回忆当时做题的思考过程, 找出在概念理解上产生错误的原因是什么, 在知识掌握上有什么不足, 以及在思想方法上有什么问题. 找出避免这种失误的切实可行的办法, 不就是“吃一堑, 长一智”了吗?

而且, 找出的失误原因, 应当是深一层的原因, 即本质上的原因. 避免这种失误的办法, 也应该科学. 这样才能真正起到“吃一堑、长一智”的作用.

举例来说, 有的同学为了记住二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

什么时候有最大(小)值,编了这样简单的口诀:“正小负大”.

意思是说,当  $a$  是正数时,  $f(x)$  有最小值;反之,有最大值.

这就不是—种科学的记忆方法,它只会有短期的记忆效果.

因为,在人们脑子中,“正数大负数小”的概念是根深蒂固的,也是科学的.

解决这个问题的好办法,还是要有“数形结合”的习惯.  $a > 0$ , 抛物线开口向上,有最低点,于是有最小值;反之,有最大值.

这个“数形结合”的办法,不但是科学的,而且,不增加负担,还提高了能力.

**例 5** 已知  $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ , 求证  $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq 1$ .

**分析** 一些同学是这样证的:

根据平均数不等式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+),$$

那么

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq n\sqrt[n]{a_1x_1 \cdot a_2x_2 \cdot \cdots \cdot a_nx_n} = n\sqrt[n]{(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)}.$$

至此,再也证不下去了. 正确的证法是:

因为

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= 1, \end{aligned}$$

所以

$$(a_1^2 + x_1^2) + (a_2^2 + x_2^2) + \cdots + (a_n^2 + x_n^2) = 2.$$

根据不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in R^+)$ , 于是

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \cdots + 2a_nx_n \leq 2.$$

所以

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq 1.$$

证毕.

那么,这些同学失误的原因是什么呢?

原因一:解题时,没有先用已知条件.

原因二:应该用不等式

$$a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in R^+),$$

而不该应用不等式

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &\geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \\ &\quad (a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+). \end{aligned}$$

其实,这些都不是产生失误的根本原因:

根本原因是,没有“审时度势”,在战略方向上犯了选择错误. 因为,欲证的是

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq 1,$$

而解题一开始却向着

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq M_1$$

的方向迈出了脚步. 设想,如果以后

$$M_1 \geq M_2 \geq \cdots \geq 1,$$

那么,原结论就不成立了.

即使以后

$$M_1 = \cdots \leq 1,$$

也得不出  $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq 1$  的结论.

这才是找到了产生失误的根本原因:

一见欲证不等式左端是和,就盲目地把它看成平均数不等式的“和式”的那一端.

这样,避免这种错误的方法也就找到了:

对于欲证不等式的“大端”,应当把它看成“和式”;“小端”,应当看成“积式”,去选用适当的不等式.

如果题目给出的形式,与上述要求相悖.那么,就应通过变形手段,使它符合上述要求.

例如,本题欲证的不等式的小端

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

是“和式”的形式,我们就把它的每一项看成“积式”,去应用不等式

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} (a, b \in R).$$

这样,即使仍然先不利用已知条件,同样可以证出本题.证法如下:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &\leq \frac{a_1^2 + x_1^2}{2} + \frac{a_2^2 + x_2^2}{2} + \cdots + \frac{a_n^2 + x_n^2}{2} \\ &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{2} = 1. \end{aligned}$$

**例 6** 已知  $a, b, c \in R^+$ , 求证  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$ .

**分析** 例 6 与本章的例 4 相同.本章例 4 中已介绍了对它的 3 种证法.现在分析许多同学证不出这个结论的原因.这些同学的思考过程如下:

根据  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  ( $a, b \in R$ ), 有

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \\ &\geq \sqrt{2ab} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ca} = \sqrt{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq \sqrt{2}(3\sqrt[3]{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca}}) = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

往下,欲证

$$3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc} \geq \sqrt{2}(a + b + c),$$

却证不下去了.

因为,  $3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$  并不成立,事实上,在它之前,就已经有了

$$\sqrt{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \leq \sqrt{2}(a + b + c).$$

这就找到了产生失误的原因:不是形式上的公式选择不当(指应该用公式  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$  ( $a, b \in R^+$ )),而是在把“大端”“缩小”的过程中,“火候”掌握欠准,一下子“缩小过头”了.

因此,解决的办法便有了:

证明不等式的过程中,无论是把“大端”“缩小”,还是把“小端”“放大”,尺度的把握都要适当.

例7 已知  $n > 0, n \in R$ , 求证  $n + \frac{4}{n^2} \geq 3$ .

分析 在本书第一篇第3章中讲到高中《代数》不等式这一章的习题时,已分析了一些同学证不出它的原因,和对它的正确证法:

$$n + \frac{4}{n^2} = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{4}{n^2} \geq 3 \sqrt{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{4}{n^2}} = 3.$$

现在,再分析一种错误的证明方法.

在不等式

$$a + b \geq 2 \sqrt{ab} (a, b \in R^+)$$

中,当且仅当  $a = b$  时取“=”号.

那么,在

$$n + \frac{4}{n^2} \geq \frac{4}{\sqrt{n}}$$

中,最小值是  $\frac{4}{\sqrt{n}}$  \*. 此时  $n = \frac{4}{n^2} \Leftrightarrow n = \sqrt[3]{4}$ , 把它代入

$$\frac{4}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = 2 \sqrt[3]{4} \approx 3.17 (\text{误差不大于 } 0.01),$$

即

$$n + \frac{4}{n^2} \geq \frac{4}{\sqrt{n}} \geq 3.$$

这个证明,是通过求出

$$n + \frac{4}{n^2}$$

的最小值  $2 \sqrt[3]{4} \geq 3$ , 而达到证明

$$n + \frac{4}{n^2}$$

也大于或等于3的目的.

这个证明是错误的. 因为  $n + \frac{4}{n^2}$  的最小值不是  $2 \sqrt[3]{4}$ . 当  $n = 2$  时,  $n + \frac{4}{n^2} = 3 < 2 \sqrt[3]{4}$ .

那么,错误发生在何处呢? 发生在标有“\*”号的那句话上! 即不能说  $n + \frac{4}{n^2}$  的最小值是  $\frac{4}{\sqrt{n}}$ .

诚然,当  $n = \frac{4}{n^2}$  时,  $n + \frac{4}{n^2} = \frac{4}{\sqrt{n}}$ ; 当  $n \neq \frac{4}{n^2}$  时,  $n + \frac{4}{n^2} > \frac{4}{\sqrt{n}}$ . 但  $n$  是变量,如果  $n \neq \frac{4}{n^2}$  时所得到的  $\frac{4}{\sqrt{n}}$ ,

小于  $n = \frac{4}{n^2}$  时的  $\frac{4}{\sqrt{n}}$  的值  $k$ , 那么,这个  $k$  值就不一定是  $n + \frac{4}{n^2}$  的最小值了.

对错误分析到这一层,会使我们对于一条原则加深了理解:

用平均数不等式求最小值,“和式”各项的积必须是常数;

用平均数不等式求最大值,“积式”各因子的和必须是常数.

如果所给的式子达不到这个要求,就要对它进行变形,使之符合上述原则的要求. 有如本例的正确解法那样,把  $n$  变成  $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ .

这样,又从失误的分析中,自然地积累了解题技巧.

### (三) 举一反三,善于发现,有所前进

这个标题已经很清楚,解一道题后,应越出它的范围,进行设想,由此及彼,进行总结,占领一个“领域”.

例8 求数列的一个通项公式:

(1)  $1, 3, 5, \dots$ ;

(2)  $1, -3, 5, -7, 9, \dots$ ;

(3)  $1, 0, 5, 0, 9, \dots$ .

分析 解答(1)很容易.  $a_n = 2n - 1 (n \in N)$ .

解答(2),也不难想到,利用 $(-1)^n$ ,造成间隔“-1”的出现,  $a_n = (2n - 1)(-1)^{n+1} (n \in N)$ .

解答(3),就有些困难了,但如果运用“转化归结”的思想,从(2)的解答出发,使出现“-1”时,有“+1”和它相加,便得到了

$$a_n = (2n - 1)[1 + (-1)^{n+1}].$$

但这时, $n$ 取奇数时, $1 + (-1)^{n+1} = 2$ ,破坏了要保留的项.

为了解决这个问题,只需再除以2,便得到正确解答:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}(2n - 1).$$

问题到此,圆满解决了.

“问题的解决,真正圆满了吗?”在课堂上,我向我的学生提出了这个问题.

张夏一同学站起来是这样回答的:“老师,问题的思考,不应该到此结束.我设想,这道题目如果还有更多的小题目:

(4)  $1, 0, 0, 7, 0, 0, 13, \dots$ ;

(5)  $1, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 17, \dots$

.....

问题的答案又应该是什么呢?”

接着,张夏一同学为自己的设想,提出了正确的解答,对于(4),

$$a_n = \frac{1 + \omega^{n+2}(\omega^2)^{n+2}}{3}(2n - 1).$$

这里, $1, \omega, \omega^2$ 是方程 $x^3 = 1$ 在复数范围内的三个根.

这个答案,显然是正确的.因为

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

那么,当 $n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\omega^{n+2} = \omega^{3(k+1)} = 1, \quad (\omega^2)^{n+2} = 1.$$

所以

$$\frac{1 + \omega^{n+2} + (\omega^2)^{n+2}}{3} = \frac{1 + 1 + 1}{3} = 1.$$

当 $n = 3k + 2 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\begin{aligned} \omega^{n+2} &= \omega^{3(k+1)} \cdot \omega = \omega, \\ (\omega^2)^{n+2} &= (\omega^2)^{3(k+1)} \cdot \omega^2 = \omega^2. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1 + \omega^{n+2} + (\omega^2)^{n+2}}{3} = \frac{1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}}{3} = 0.$$

当  $n = 3k$  时, 类似地可得

$$\frac{1 + \omega^{n+2} + (\omega^2)^{n+2}}{3} = 0.$$

于是

$$a_n = \frac{1 + \omega^{n+2} + (\omega^2)^{n+2}}{3}(2n - 1).$$

张夏一同学是怎样想到用  $x^3 = 1$  的三个根来制造“间隔 0”的出现呢? 又怎样想到给  $\omega$  和  $\omega^2$  以指数  $n + 2$  的呢?

关键是习惯了正确的思考方法, 对于(3)的解答做了“换个角度”的思考, 同时, 又运用“转化归结”思想, 把(4)归结到(3)上了.

在(3)里

$$\frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

中的“-1”是哪里来的? 原来的构思, 是为了与“1”抵消来得到“0”. 但换个角度看, “1”、“-1”却是二次方程  $x^2 = 1$  的两个根, 分母“2”与二次方程的“2”不谋而合, 指数“ $n + 1$ ”中的“1”是“2 - 1”.

那么, 在(4)里, “0”的个数增加了 1 个, 是不是二次方程就应升高一步, 变成了 3 次方程, 分母的“2”相应地要变成“3”, 指数也要由“ $n + 1$ ”变成“ $n + 2$ ”了? 这样张夏一同学便得出了合理的猜想, 并继而给出了严格的证明.

往下, 对于(5), 它的一个通项公式可以是

$$a_n = \frac{1 + a_2^{n+3} + a_3^{n+3} + a_4^{n+3}}{4}(2n - 1).$$

其中,  $1, a_2, a_3, a_4$  分别是方程  $x^4 = 1$  在复数范围内的 4 个根.

请读者动手, 完成它的证明.

那么, “0”的个数再增加, 又该如何构造一个通项公式呢?

这时, 李毅同学、彭壮壮同学经过思考, 注意前面的规律性, 提出了公式(不妨设第一项之后有连续  $k$  个“0”):

$$a_n = \frac{1 + a_2^{n+k-1} + a_3^{n+k-1} + \cdots + a_k^{n+k-1}}{k}(2n - 1).$$

其中,  $1, a_2, a_3, \cdots, a_k$  分别是方程  $x^k = 1$  在复数范围内的  $k$  个根, 并且给出了证明.

以上, 对做题的方法提出了 3 条建议, 尽管, 使做题训练有益于水平提高的方法很多, 但如果认真、切实地贯彻了这 3 条建议的精神, 必有较大收益.

## 第6章 学会复习

华罗庚先生在谈到学习方法时,曾有过一段著名的比喻,大意是,读书(指学习)的过程,应该是一个“由薄到厚”,又“由厚到薄”的过程.

所说“由薄到厚”,是指第一遍学习时,要广为联想,深入思考,加进去许多理解,好像把书给读“厚”了.事实上,做了眉批,写了不少心得,书也确实厚了;第二遍读时,寻找联系和规律,进行概括,将全书(知识)归纳在一个或几个系统内,统率在一个或几个想法之下,从而达到对全书了如指掌的程度,这不就是把书读“薄”了吗?

这里所说的第二遍读、第三遍读……就是指的复习.由此可见,复习不是单纯的多念几遍书,复习的目的也不仅在于将所学的知识记住,复习的过程是对知识加深理解的过程,也是提高学习能力的过程.

复习恐怕不是一蹴而就的,需要经常地进行.

为了叙述的便利,我们把局部的复习称为小结,范围较大的称为总复习.

### 一、培养做小结的习惯和能力

小结式的复习,应该把一个单元的内容进行条理、归纳,分出概念、定理公式、基础知识、方法几个类别,找出每个类别里主次排列、相互间的联系及与本单元有关的题目的解题思考方法.

本篇第4章中的一、三、四、五,事实上分别是对“命题”、“充要条件”、“函数”、“数学归纳法”、“培养空间想像能力”的小结.

本章,只就在小结中如何归纳解题思考方法,分别在代数和几何中各举一个例子以作示范.

#### (一) 排列组合应用问题中解题思考方法小结

##### 1. 总的原则

##### (1) 深入弄清问题的情景

要深入弄清所要解的问题的情景,切实把握住各因素之间的相互关系,不可分析不透,就用  $P_n^m$  或  $C_n^m$  乱套一气. 具体地说:

首先要弄清有无“顺序”的要求,如果有“顺序”的要求,用  $P_n^m$ ;反之,用  $C_n^m$ .

其次,要弄清目标的实现,是分步达到的,还是分类完成的,前者用乘法原理,后者用加法原理.

事实上,一个复杂的问题,往往是分类和分步交织在一起的,这就要准确分清,哪一步用乘法原理,哪一步用加法原理.

##### (2) 两个方向的解题途径

对于较复杂的问题,一般都有两个方向的列式途径,一个是“正面凑”,一个是“反过来剔”.

前者是指,按照要求,一点一点选出符合要求的方案;后者是指,先按照全局性的要求,选出方案,再把不符合其他要求的方案剔出去.

由于这两种途径的优劣因题而异,一般地,一道题目,“正面凑”很烦琐时,“反过来剔”往往简单,反之亦然. 所以,平常做题时,这两种训练都要进行.

##### (3) 要特别强调一题多解



原因有二. 第一,一题多解几乎是解排列组合应用问题最主要的检验方法;第二,一题多解,可以从不同角度对题目进行解剖,是训练对这类问题的分析能力的有效手段.

## 2. 对常见问题分类总结

排列组合应用问题几乎一题一个面孔,于是一些同学只好靠多做题来取胜了.

实际上,排列组合应用问题也是有共性的,除了上述“总的原则”可以认为是“大的共性”之外,下一个层次仍有“共性”.认真去做小结,是可以逐渐地在这个领域内取得“自由”的.

例如,本书第一篇第5章二(一)中的例3曾对分段排列问题的思考方法的小结做了示范.

下面,再选3类问题,进行小结的示范.

### (1) 有相邻要求的排列问题

**例1** 7人站成一排照相,其中王、张、李三个朋友要挨在一起,求有多少种站位的方法.

**分析** 解决这个问题,当然有许多办法.

可以让其余的人排好,把王、张、李逐次放入.

也可以7人全排列后,把王、张、李不全相邻的情况去掉.

但最简单的方法是,第一步,把王、张、李看成一个人,去和其他的4人做5人的全排列;第二步,在上面的每种站位里,让王、张、李再做3人的全排列.

这好像先把有相邻要求的人捆起,以后再放开.

我们不妨称之为“捆绳儿”思想.

### (2) 分配问题

把一些元素分给另一些元素来接受,这是排列组合应用问题中难度较大的一类问题.因为这涉及到两类元素:被分配元素和接受单位.而我们所学的排列组合是对一类元素做排列或进行组合的,于是遇到这类问题便不会手足无措了.

事实上,任何排列问题,都可以看做面对两类元素.

例如把10个人做全排列,可以理解为在10个人旁边,有序号为 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 的10把椅子,每把椅子坐1个人,那么有多少种坐法.这样就出现了两类元素,一类是人,一类是椅子.

于是,对眼花缭乱的常见的分配问题,不难归结为以下小的“方法结构”:

#### ① 每个“接受单位”至多接受一个被分配元素的问题

方法是用 $P_n^m$ .

这里 $n \geq m$ ,其中的 $m$ 是“接受单位”的个数.至于谁是“接受单位”,不要管它在生活中原来的意义,只要 $n \geq m$ ,个数为 $m$ 的一类元素就是“接受单位”.于是,方法还可以简化为 $P_{\text{多}}^{\text{少}}$ .这里的“多”只需 $\geq$ “少”.

**例2** 8名大学生分配给9个工厂,每个工厂至多要1名大学生,问有多少分配方案?

**例3** 把9名大学生分配到8个工厂,每个工厂至多接受1名大学生,有多少分配方案?

以上两例的解答相同,都有

$$P_9^8 = 362880$$

种方案.

#### ② 分组问题

$n$ 个元素分成 $P$ 组,各组内元素数目为 $m_1, m_2, \dots, m_p$ ,其中组内元素数相等的组数为 $k$ ,那么,分组的方案为

$$\frac{C_n^{m_1} \cdot C_{n-m_1}^{m_2} \cdot C_{n-m_1-m_2}^{m_3} \cdot \dots \cdot C_{m_p}^{m_p}}{P_k^k}$$

### ③ 分配问题

“被分配元素”和“接受单位”的每个成员都有“归宿”并且不限制一对一的分配问题.

方法是分组问题的计算公式乘以  $P_k^k$ .

因为,在分组问题里,如果第 3 组内是  $a, b, c$ ,第 5 组内是  $e, f, q$ ,和第 3 组内是  $e, f, q$ ,并且第 5 组内是  $a, b, c$ ,算同一个方案,所以,要把总方案数除以  $P_2^2$ .

但在分配问题里,电机厂内是  $a, b, c$ ,化工厂内是  $e, f, q$ ,和电机厂内是  $e, f, q$ ,化工厂内是  $a, b, c$ ,却算两个方案,因而不除以  $P_2^2$  了.

例 4 把 6 棵不同的蔬菜,分别捆成 3 捆,在下列情况下,分别有多少分捆的方法?

(1) 每捆 2 棵;

(2) 一捆 3 棵,一捆 2 棵,一捆 1 棵.

解 (1) 方法有

$$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{P_3^3} = 15$$

种.

(2) 方法有

$$C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 60$$

种.

例 5 把 6 棵不同的菜,分别种植在 3 块不同的土地上,在下列情况下,分别有多少种植方案?

(1) 每块地上种 2 棵;

(2) 甲地 3 棵,乙地 2 棵,丙地 1 棵;

(3) 一块地上 3 棵,一块地上 2 棵,一块地上 1 棵.

解 (1) 方案有

$$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$$

种.

(2) 方案有

$$C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 60$$

种.

(3) 方案有

$$C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 \cdot P_3^3 = 360$$

种.

说明 如果是 7 棵不同的菜,种植到三块土地上,只要一块地上种 3 棵,一块地上种 2 棵,还有一块地上也种 2 棵,共有多少种植方案呢?

请同学们参照②分组问题的构思,进行思考.

答案为 
$$\frac{C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot P_3^3}{P_2^2}.$$

④ 各“接受单位”的接受数目不限(包括可以不接受),并且全部元素要分完的问题

**例6** 有5名高中毕业生报考大学,有3所大学可供选择,每人只能填一个志愿,有多少种报名方案?

**分析** 记这5名学生分别为A、B、C、D、E.

先考虑A,他有3种选择;对于他的每一种选择,B又有3种选择可与之搭配,此时,共有 $3 \times 3$ 种方案;以此类推,共有

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

种方案.

**说明** 这类问题,由于对被分配元素没有固定数目的分组的要求,所以不宜用排列或组合种数的公式去计算(解法烦琐).上述的推理过程,可以归纳为一个公式.

若“被分配元素”数为 $n$ ,”接受单位”数为 $m$ .则分配方案的种数为 $m^n$ .

在这个基础上,一些表面上并不谈分配的题目,实质上可以归结为分配问题,如其中某些元素有不相邻要求的排列问题.

### (3) 有不相邻要求的排列问题

方法可以是,第一步先把没有不相邻要求的元素排列好;第二步把有不相邻要求的元素,向已排列好的“队伍”中元素间的“空档”(包括两端)作分配.我们不妨称之为“插空儿”思想.

**例7** 要排一张有6个歌唱节目和4个舞蹈节目的演出节目单,任何两个舞蹈节目不得相邻,问有多少种不同的排法?

**解法一**  $P_6^6 \cdot P_7^4 = 604800$ .

**解法二**  $P_7^7 \cdot P_6^3 = 604800$ .

**解法三**  $\frac{P_7^4}{P_{10}^4} \cdot P_{10}^{10} = 604800$ .

**说明** 解法一的思路是,先把歌唱节目排列好( $P_6^6$ );再把4个舞蹈节目向歌唱节目之间的7块“空地”(包括两端)作分配( $P_7^4$ ).

解法二的思路是,第一步,把1个舞蹈节目和6个歌唱节目一起作全排列( $P_7^7$ );第二步,把所余3个舞蹈节目去“插空儿”时,由于“队伍”中已有的1个舞蹈节目的两侧不能再插舞蹈节目,“空地儿”由8个减为6个,于是有 $P_6^3$ .这个解法,灵活运用了“插空儿”的思想.

至于解法三,更大大开扩了我们的眼界,提高了我们思维的灵活程度.

它的思路如下:

把6个歌唱节目的一个指定顺序(例如李、王、张、赵、丁、刘)取定.

如果把4个舞蹈节目拿来“插空儿”,得 $P_7^4$ .都是符合要求的节目单;

如果先把4个舞蹈节目拿来,在10个节目位置上任选4个坐定,共有 $P_{10}^4$ 种方案,然后再把6个歌唱节目按照上述指定的顺序(李、王、张、赵、丁、刘)坐在所余6个位置上,这时将得到所有在歌唱节目的这个顺序下的符合要求和不符合要求的节目单 $P_{10}^4$ .那么,在歌唱节目这个指定顺序下,符合要求的节目单所占的比例是

$$\frac{P_7^4}{P_{10}^4}.$$

由于在6个歌唱节目和4个舞蹈节目全部 $P_{10}^{10}$ 种排列中,符合要求的节目单的种数所占的比例

不变,于是产生了解法三,即只要把  $P_{10}^{10}$  乘以  $\frac{P_7^4}{P_{10}^4}$ .

通过对解法三原理的剖析,将使我们更深刻地理解这道题目所展示的内部结构情形.

这个问题,还可以有不少解法:

$$\begin{aligned} & C_7^4 P_6^6 P_4^4; \quad C_6^4 P_6^6 P_4^4 + C_6^3 P_6^6 P_4^4; \\ & C_6^3 P_7^7 P_3^3; \\ & P_{10}^{10} - P_6^6 (P_7^3 P_4^2 + P_7^2 P_4^3 + P_7^2 P_4^2 + P_7^1 P_4^4). \end{aligned}$$

请同学们尝试,对其他类型的排列组合应用问题,做分类小结.

## (二) 涉及二面角的度数或相等的题目

与二面角有关的题目,从大的方面,可以分为两类.一类是只在图形中出现二面角,计算或推理过程与二面角的度量无关,例如本书第一篇第4章四中的例28.

本小节标题所说“涉及”二面角度数或相等的题目,是指另外一类,它的特征是,在已知或求证中,出现二面角的“度数”或二面角的“相等”、“不等”这些字眼.

### 1. 解题思考方法

#### (1) 解题时应“先找后作”

对于这种“涉及”二面角度数或相等的题目,一般要用到它的平面角,因而,应先去考虑它的平面角,考虑它的平面角的程序,应当是“先找后作”.因为,“作”比“找”麻烦,图上没给出所需二面角的平面角时,才考虑作出它.

“找”的方法是从二面角的平面角的定义出发.

“作”的方法,要根据图形的情况.

#### (2) “作”的方法

① 在棱上选择“适宜”的点,分别在两个半平面内作棱的垂线,所谓“适宜”的点,一般是指与已知条件或结论有牵连的点.

② 在一个半平面内选择“适宜”的点,向另一个半平面及棱分别作垂线,连接两个垂足,证明作出了二面角的平面角.

③ 如果分别在两个半平面内,存在着关于二面角的平分面的两个对称点,那么,分别从这两个点作棱的垂线,可证垂足重合,因而作得了二面角的平面角.

④ 如果二面角的棱在已知图形中尚未出现,宜先合理地把棱作出来,再归结为以上的①或②或③.

作棱的方法一般有:

i. 当已知图形中已画出了棱上的一个点,并且,存在分别在两个半平面内的两条直线互相平行时,那么,过上述点作一条与这两条直线平行的直线,就是这个二面角的棱,此命题请同学们自证;

ii. 当已知图形上画出了棱上的一个点,并且,分别在两个半平面上存在一组共面直线时,可以画出这两条直线的交点,它必是棱上的又一个点,于是,棱可作出,也请同学们给予证明;

iii. 当棱上的任何点在已知图形中都没有出现,但上述的共面直线有两组时,可以得到棱上的两个点,从而把棱画出.

⑤ 无论上述哪种情况,在合适的条件下,运用“面积射影定理”,常常是求二面角度数的一种简便方法.

这里所说“合适的条件”,是指存在于二面角的一个半平面上的多边形,它在另一个半平面上的

射影易于作出. 当已知图形中存在直棱柱, 特别是长方体(当然包括正方体)时, 应用这个方法, 相当方便.

面积射影定理是

$$|\cos\theta| = \frac{S_{\text{射影}}}{S_{\text{多边形}}}.$$

这里,  $\theta$  是二面角的度数,  $S_{\text{多边形}}$  是指存在于一个半平面内的多边形面积,  $S_{\text{射影}}$  是指上述多边形在另一半平面所在平面内射影的面积.

### 2. 解题示例

**例 8** 一副三角板如图 6-1 所示放置,  $\angle D = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ , 把  $\triangle BCD$  所在平面沿  $BC$  折起, 使它和  $\triangle ABC$  所在的平面垂直. 求二面角  $A - BD - C$  的度数.

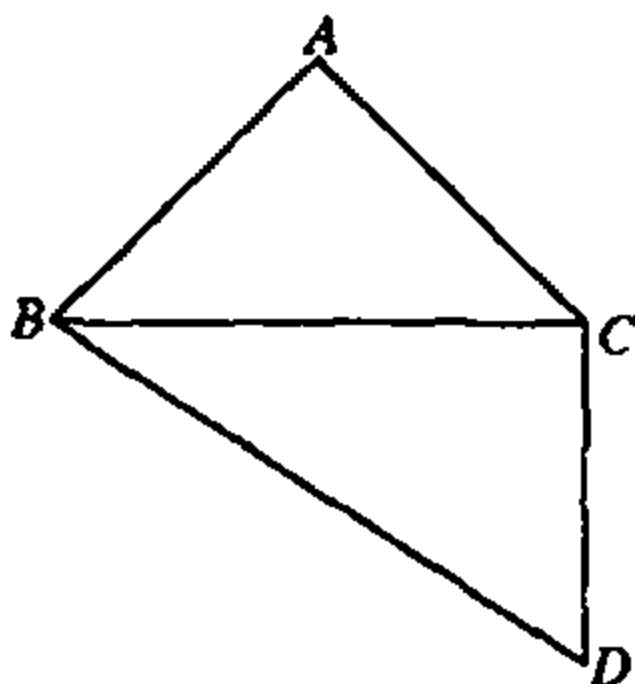


图 6-1

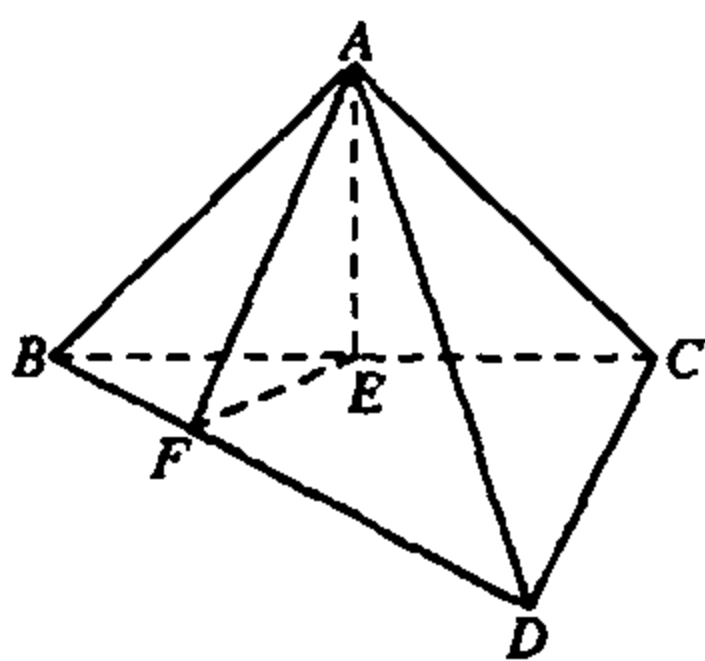


图 6-2

**分析** 本题属于“涉及”二面角的度数或相等的题目.

那么, 按“先找后作”, 先从图形上找二面角  $A - BD - C$  的平面角, 图形上没有, 则需作出它.

如果过  $A$  作平面  $BCD$  的垂线, 由于平面  $ABC \perp$  平面  $BCD$ , 只需作  $AE \perp BC$  于  $E \Rightarrow AE \perp$  平面  $BCD$ . 再作  $AF \perp BD$  于  $F$ . 那么,  $\angle AFE$  即二面角  $A - BD - C$  的平面角(需写出证明), 见图 6-2.

这就是上面小结中“1(2)”的方法,  $A$  点是“适宜”的点, 因为从它作平面  $BCD$  的垂线时, 有利于应用已知两平面垂直的条件.

顺便说一句, 平面  $BCD$  上的视觉失真, 进行  $\triangle BCD$  内的计算时, 宜画它的移出图.

**例 9** 已知 正三棱锥  $P - ABC$  的侧面间所成二面角的度数是  $2\alpha$ , 底面中心  $O$  到一条侧棱的距离  $OE = 1\text{ cm}$ , 见图 6-3. 求 三棱锥的体积  $V_{P-ABC}$ .

**分析** 根据正三棱锥的对称性, 点  $A, C$  是符合前述“1(2)③”中要求的两个对称点. 这样, 分别过  $A, C$  作棱  $PB$  的垂线, 可证两个垂足重合于  $E'$ , 于是,  $\angle AE'C$  就是两个侧面所成二面角的平面角, 其度数为  $2\alpha$ .

然而, 可取  $AC$  中点  $F$ , 于是条件  $OE = 1\text{ cm}$  和  $\angle AE'C = 2\alpha$  都可转化到平面  $AE'C$  上且有  $E'F = \frac{3}{2}OE$ . 这里体现了了解立体几何题目要把空间的条件转化到同一平面的思想.

当然, 也可以过  $O$  作  $GH \parallel AC$ ,  $G \in AB$ ,  $H \in BC$ , 那么,  $G, H$  也是符合“1(2)③”要求的对称点. 根据本题的已知条件, 只要连结  $GE, HE$ , 即可证明  $\angle GEH = 2\alpha$ . 于是, 已知条件都集中到平面  $GEH$  上, 为进行计算奠定了基础.

$$\text{最后答案为 } V_{P-ABC} = \frac{9\text{tg}^3\alpha}{4\sqrt{3\text{tg}2\alpha - 1}}(\text{cm}^3).$$

**例 10** 已知 如图 6-4 所示, 直三棱柱  $A_1B_1C_1 - ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $\angle ABC = \theta$ , 过  $C$  与  $AB$  平行的截面  $DEC$  与底面  $ABC$  所成的二面角的度

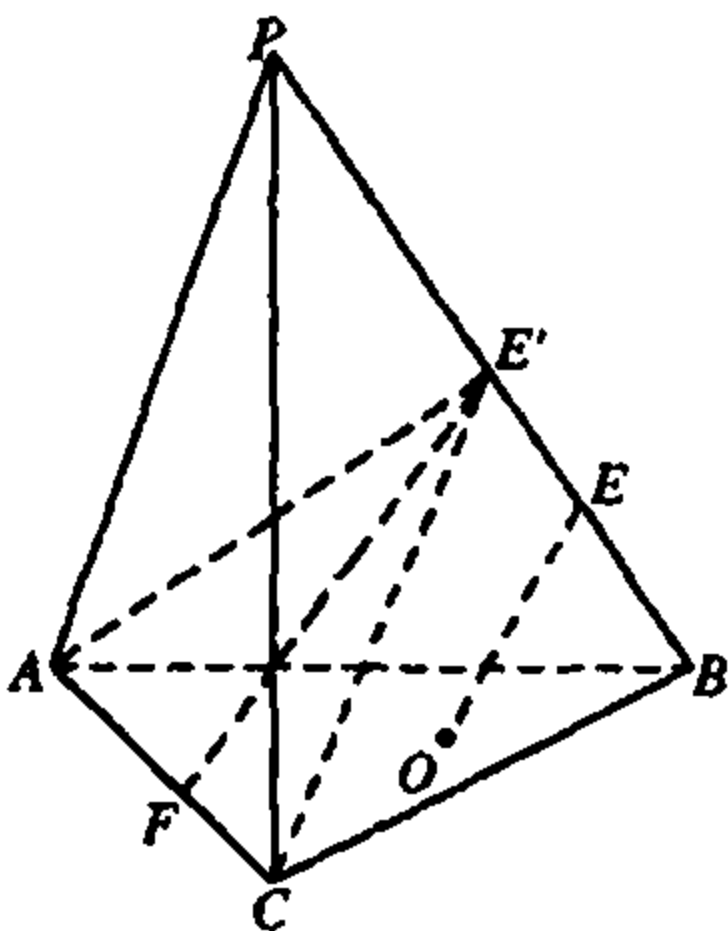


图 6-3

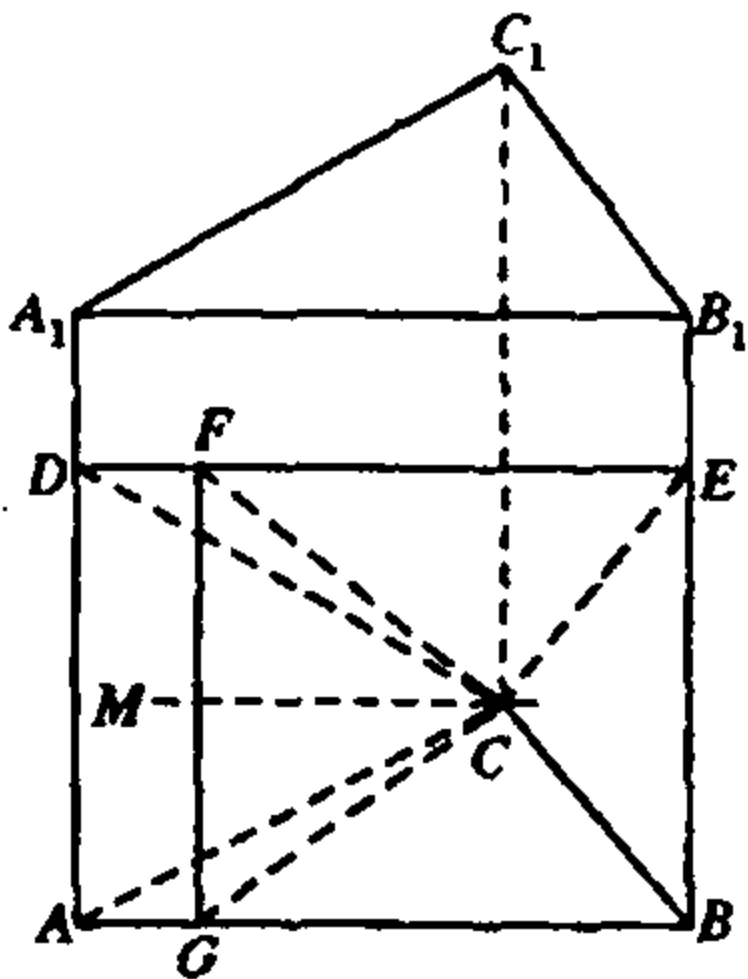


图 6-4

数也是  $\theta$ . 求  $V_{C-ABED}$ .

**分析** 本题需要求出截面  $DEC$  与底面  $ABC$  所成的二面角的平面角,但这个二面角的棱在已知图形上没有. 点  $C$  是棱上的一点,互相平行的直线  $DE$  和  $AB$  分别在二面角的两个半平面内.

这时,由于适合前述“1(2)④i”的条件,只要过  $C$  作  $CM \parallel AB$ ,  $CM$  就是这个二面角的棱,再作  $CG \perp AB$  于  $G$ ,作  $CF \perp DE$  于  $F$ ,那么,  $\angle FCG$  就是这个二面角的平面角,度数为  $\theta$  (请同学们给予证明).

最后答案为

$$V_{C-ABED} = \frac{1}{3}a^3 \sin^3 \theta \cdot \cos \theta.$$

**例 11** 已知 如图 6-5 所示,正三棱柱  $A'B'C'-ABC$  中,  $D, E$  分别是侧棱  $BB', CC'$  上的点,并且  $EC = BC = 2DB$ . 求 截面  $ADE$  与底面  $ABC$  所成的二面角的大小.

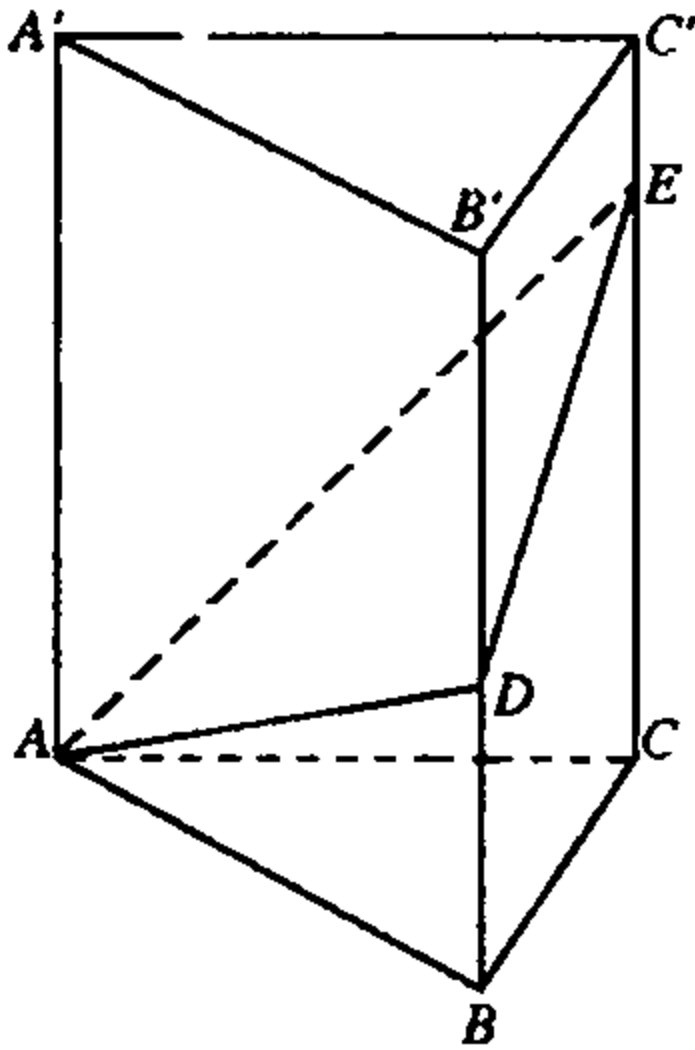


图 6-5

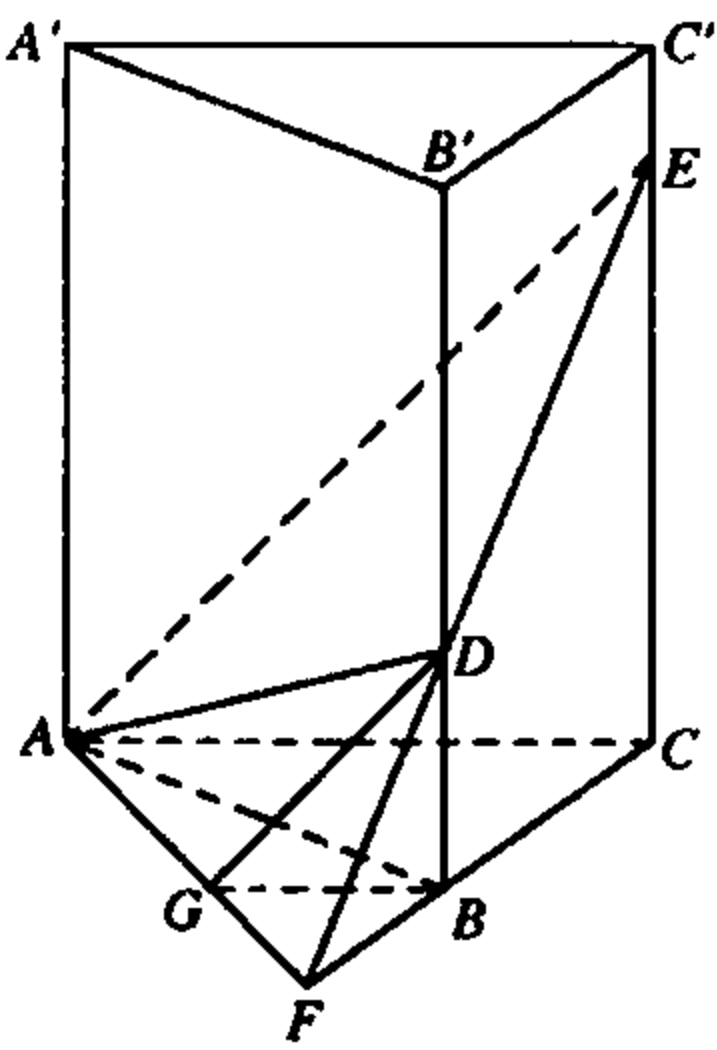


图 6-6

**分析** 本题所欲求的二面角的棱,在已知图形上也只给出了一个点  $A$ ,由于在二面角的两个半平面上存在一组共面直线  $ED, CB$ ,于是,宜用前述“1(2)④ii”的方法,分别延长  $CB$  和  $ED$ ,交于平面  $ABC$  上一点  $F$ ,连结  $AF$ ,即得二面角的棱  $AF$ ,如图 6-6 所示.

**解法一** 延长  $ED, CB$ ,设交于  $F$ . 连结  $AF$ ,作  $BG \perp AF$  于  $G$ ,连结  $GD$ ,由三垂线定理知,  $\angle DGB$  为所求二面角的平面角.

由条件,设正  $\triangle ABC$  边  $BC = 2 \Rightarrow DB = 1$ ,又由

$$\left. \begin{aligned} DB &= \frac{1}{2}EC, \\ DB &\parallel EC, \end{aligned} \right\} \Rightarrow FB = BC.$$

画底面的移出图,如图 6-7 所示,由

$$\left. \begin{aligned} &\text{正 } \triangle ABC, \\ &FB = BC = 2, \\ &BG \perp AF, \end{aligned} \right\} \Rightarrow BG = 1.$$

于是  $\angle DGB = \arctg \frac{DB}{BG} = 45^\circ$ .

**解法二** 设正  $\triangle ABC$  的边  $BC = 2 \Rightarrow DB = 1$ ,又由

$$\left. \begin{aligned} DB &= \frac{1}{2}EC, \\ DB &\parallel EC, \end{aligned} \right\} \Rightarrow FB = BC,$$

那么,

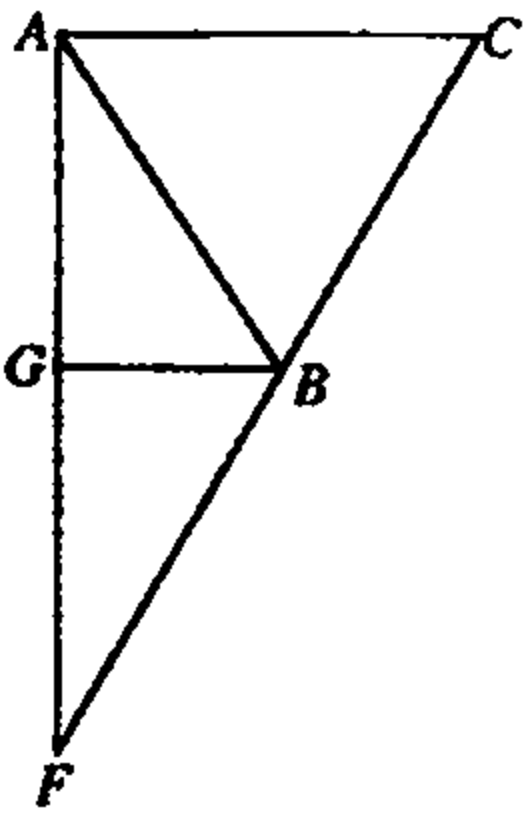


图 6-7

$$\left. \begin{array}{l} FB = BC = AB \Rightarrow FA \perp AC, \\ EC \perp \text{平面 } ABC, \end{array} \right\} \Rightarrow FA \perp EA \text{ (三垂线定理).}$$

那么,  $\angle EAC$  也就是所求二面角的平面角.

$$\angle EAC = \operatorname{arctg} \frac{EC}{AC} = 45^\circ.$$

**解法三** 如图 6-8 所示. 作  $DM \perp A'A$  于  $M$ , 作  $DN \perp C'C$  于  $N$ , 则

$$\left. \begin{array}{l} DM \parallel AB, \\ DN \parallel BC, \end{array} \right\} \Rightarrow \text{平面 } DMN \parallel \text{底面 } ABC \Rightarrow$$

平面  $DMN$  与截面  $ADE$  所成的二面角, 与所求的二面角相等, 并且,  $C'N \perp$  平面  $DMN$ .

因为

$$\left. \begin{array}{l} BD \parallel CN, \\ DN \parallel BC, \\ DB = \frac{1}{2}EC, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EN \parallel DB, \\ DN = BC. \end{array} \right.$$

又因为

$$\left. \begin{array}{l} DB \parallel AM, \\ DM \parallel AB, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AM \parallel DB, \\ DM = BC. \end{array} \right.$$

$\triangle ABC$  是正三角形. 所以  $DN = DM$ , 并且  $EN \parallel AM \Rightarrow$  四边形  $ANEM$  为平行四边形.

那么, 若  $MN, AE$  交于  $D'$ , 则  $D'$  是  $MN$  中点, 则在等腰  $\triangle DMN$  中,  $DD' \perp MN$ . 又

$$CC' \perp \text{平面 } DMN \Rightarrow CC' \perp DD',$$

所以

$$DD' \perp \text{平面 } AA'C'C \Rightarrow DD' \perp D'E.$$

于是  $\angle ED'N$  为平面  $DMN$  与截面  $ADE$  所成二面角的平面角.

$$\left. \begin{array}{l} AM = EN = NC, \\ AM \parallel NC, \end{array} \right\} \Rightarrow MN = AC = BC, \quad \left. \begin{array}{l} D' \text{ 是 } MN \text{ 中点,} \\ DB = \frac{1}{2}BC, \end{array} \right\} \Rightarrow D'N = \frac{1}{2}BC,$$

在  $\text{Rt} \triangle ED'N$  中,

$$\angle ED'N = \operatorname{arctg} \frac{EN}{D'N} = 45^\circ.$$

**解法四** 设  $BC = 2$ , 记截面  $ADE$  与底面  $ABC$  所成的二面角的度数为  $\theta$ , 由面积射影定理可知

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} \cdot \cos \theta.$$

又因为  $\theta$  是锐角, 所以

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}AD^2 \cdot \sin \angle ADE} \\ &= \arccos \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{AB^2 + DB^2})^2 \sin \left( \arccos \frac{2AD^2 - AE^2}{2AD^2} \right)} = 45^\circ. \end{aligned}$$

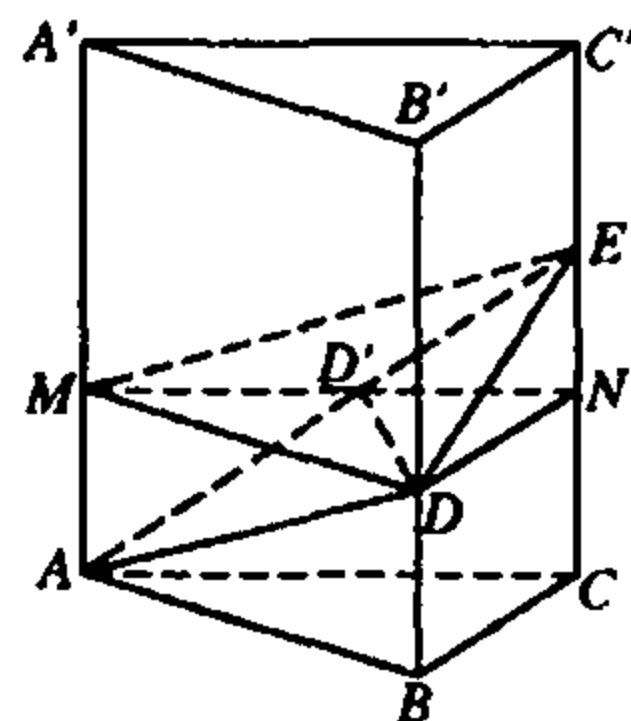


图 6-8

**说明** 解法二较解法一为简捷,表明在前述“1(1)”中所说明的道理是正确的,即在考虑二面角的平面角时,宜先“找”后“作”.

就本题而言,应用面积射影定理的解法四要较前三种解法简单得多.

## 二、有效地进行高中数学总复习

高中数学总复习的任务,一是加强对高中数学各部分知识的理解、掌握和应用能力;二是培养自己综合运用知识解决问题的能力.

### (一) 加强对高中数学各部分知识的理解,提高应用能力

完成这项任务的基础是做好对各个单元的小结. 怎样做好小结,本章已做阐述,这里要补充说明的是,随着所学知识和水平的提高,学完全部高中数学后再返视高一、高二的课程,会有新的认识.

所以,高中总复习的第一个做法,是再对各单元做小结. 这还可以解决当初没学好或遗忘的知识.

第二个做法,是对每个单元在小结的基础上,用典型的题目进行练习,以提高对各重点知识的应用能力,掌握各专题的解题思考方法. 进行解题练习的方法,已在本篇第5章中详细介绍,此处不再赘述.

第三个做法,对于高中全部数学知识,在小结的基础上,比较它们之间的联系和区别,自然地编织结构,使之系统化.

必须注意的是,以上无论哪个做法,都不要就事论事,仅就知识论知识,要力求一次比一次站得更高,从中抽出数学方法,抽象数学思想,用高的观点统率全局.

第四个做法,每个较大的单元复习告一段落时,选用质量较高的单元练习题,对自己进行检查,并作好答卷的分析和小结.

分析和小结做得好坏,对于发现和弥补缺陷漏洞,作用很大,怎样进行有效地分析,请参阅本篇第5章的“二(二)”.

### (二) 培养综合运用知识解决问题的能力

完成这个任务的手段,主要是解综合练习题,能否达到目的,要看题目是否精彩,更要看训练的方法是否合理.

综合练习有两个含义:一是指,在一张练习卷子上,代数的、立体几何的、解析几何的题目都有;另一是指,解出一道题目,需要代数、几何几个方面的知识.

#### 1. 几条建议

下面主要对上述第二个含义的综合训练,提供一些建议.

##### (1) 养成良好的心理状态

由于这种题目难度较大,多数同学对它“谈虎色变”,形成了解综合题的心理障碍,一想到它就头痛,一见它就发怵,哪里还谈得上综合运用知识去解决它呢? 所以,克服对综合题的畏惧心理,就摆在了第一位.

##### (2) 把题做透

综合运用多种知识,把一道有相当难度的综合题解出来,是一种享受,本应令人神往,为何多数同学却视其为畏途呢?

形成前述心理障碍的原因大多是,开始做综合题训练时,很突然,过渡不够,自己想不出来,听老师讲解或看答案时,只有解法,或至多有解法思路,没有想法来由,听到后来的步骤时,似懂非懂,囫圇吞枣,以至听完了以后,留下了一个深深的“怕”字.



问题找到了,解决问题的方法就有了.

一是,综合练习题的选择,要由易到难.

二是,每练一道题,都要做透、吃透.这是最主要的.

### (3) 弄通情景

养成先把题目的情景弄清的习惯,看书或听别人讲时,要养成对解法和思考的每一个步骤推敲“动机”的习惯.

前面谈到,最重要的是把题做透,怎样才算并且才能把题做透、吃透呢?首要的就是要弄通情景.

### 2. 解题示例

**例 12** 已知 一个圆锥和一个圆柱,下底面在同一平面上,它们有公共的内切球,记圆锥的体积为  $V_1$ ,圆柱的体积为  $V_2$ . 求证  $V_1$  和  $V_2$  不可能相等.

**证法一** 1° 取它们的一个公共轴截面,如图 6-9 所示.

(动机:是为了把圆锥底面半径  $r_1$ ,高  $h$ ,圆柱底面半径  $r_2$ ,高  $2r_2$ ,球半径  $r_2$ ,通过这个截面,转化到同一平面上)

2° 用“动”的思想进行思考.显然

$$r_1 \rightarrow +\infty \text{ 时, } V_1 \rightarrow +\infty;$$

$$r_1 \rightarrow r_2 \text{ 时, } V_1 \rightarrow +\infty.$$

因而,当  $r_1$  在  $(r_2, +\infty)$  上连续取值时,如果  $V_1$  也连续取值(这很显然),那么,  $V_1$  必存在最小值. 求出它,它一定应该大于  $V_2$ .

(动机:是为了细致弄清和感受题目所描绘的情景)

3° 由  $\triangle AOD \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{OD}$ , 即

$$\begin{aligned} \frac{h}{r_1} &= \frac{\sqrt{(h-r_2)^2 - r_2^2}}{r_2^2} \Rightarrow \frac{h^2}{r_1^2} = \frac{h^2 - 2r_2h}{r_2^2} \\ &\Rightarrow r_1^2 = \frac{hr_2^2}{h - 2r_2}. \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

(动机:考虑到  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h$ ,  $V_2 = 2\pi r_2^3$ , 为了求  $V_1$  的最小值,一般要通过判别式,宜寻找  $r_1, r_2, h$  之间的一个关系式,向  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h$  中代入,又考虑到式中  $r_1^2$  的形式,于是对“\*”式的两端平方)

4° 把①式代入  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h$ , 得

$$\pi r_2^2 h^2 - 3V_1 h + 6r_2 V_1 = 0. \quad \textcircled{2}$$

在关于  $h$  的一元二次方程中

$$h \in R \Leftrightarrow (-3V_1)^2 - 4(\pi r_2^2)(6r_2 V_1) \geq 0,$$

得  $V_1 \leq 0$  (舍) 或  $V_1 \geq \frac{8}{3}\pi r_2^3$ .

(动机:是为了求  $V_1$  的最小值)

5° 当  $V_1 = \frac{8}{3}\pi r_2^3$  时,代入②式,得  $h = 4r_2$ ,符合题意. 代入①式,得  $r_1 = -\sqrt{2}r_2$  (舍) 或  $r_1 = \sqrt{2}r_2$ , 也符合题意.

(动机:在应用问题中求最大或最小值,一定要检验是否符合实际的物理、几何意义)

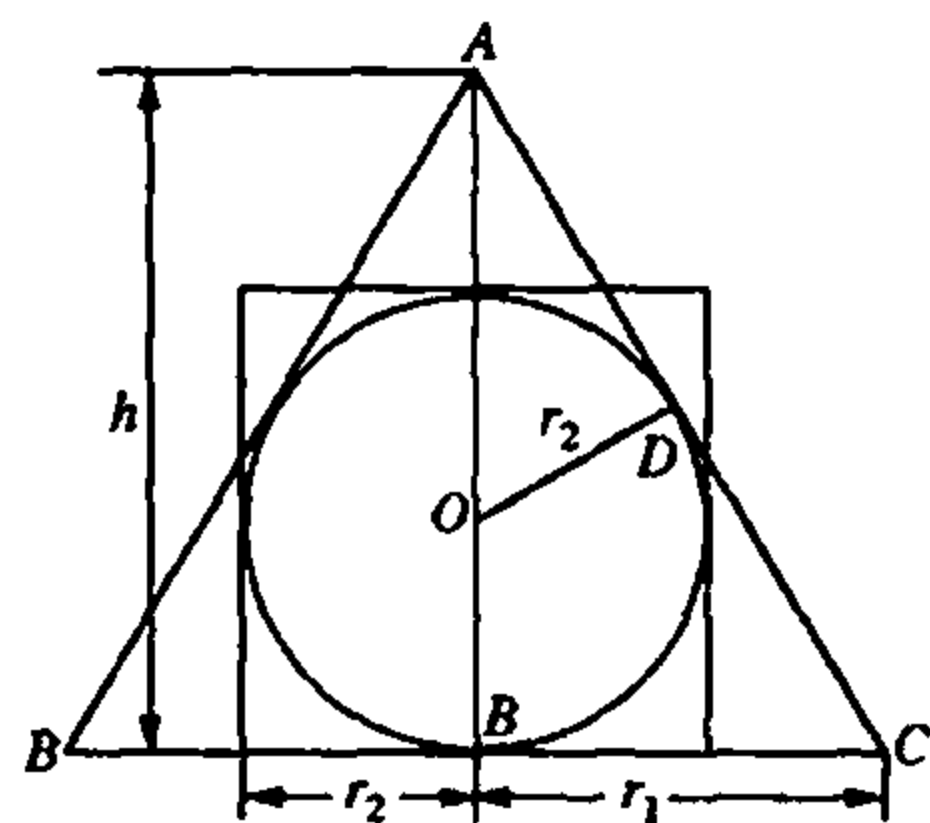


图 6-9

6° 故  $(V_1)_{\min} = \frac{8}{3}\pi r_2^3 > 2\pi r_2^3 = V_2$  故  $V_1$  和  $V_2$  不可能相等.

证法二 1°, 2°, 3°, 4° 同证法一.

5° 欲使  $V_1 = kV_2$  成立, 要且仅要

$$kV_2 \geq \frac{8}{3}\pi r_2^3,$$

即

$$k \cdot 2\pi r_2^3 \geq \frac{8}{3}\pi r_2^3 \Rightarrow k \geq \frac{4}{3}.$$

于是  $V_1$  和  $V_2$  不可能相等.

(动机: 欲证两个量  $A, B$  不相等, 设  $A = kB$  后, 求出  $k$  不可能等于 1. 是一种常用方法)

证法三 用反证法. 假设  $V_1 = V_2$ , 即

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 h = 2\pi r_2^3. \tag{3}$$

(动机: 由于结论涉及否定, 宜于考虑反证法)

1°, 2°, 3°, 同证法一的 1°, 2°, 3°.

4° 把证法一中的①式, 代入这里的③式, 得

$$h^2 - 6r_2 h + 12r_2^2 = 0.$$

由  $\Delta = (-6r_2)^2 - 4(12r_2^2) = -12r_2^2 < 0$ , 得  $h, r_2$  不同时为实数, 与题意矛盾. 证毕.

(动机: 如果  $V_1 = V_2$  不成立, 那么, 在算式③中应当出现矛盾)

证法四 如图 6-10 所示, 设圆锥母线与底面所成角为  $2\theta$ .

(动机: 在几何图形中求最大或最小值, 寻找一个变量角, 是常用的方法, 又由于预见到往后的计算要用到它的一半, 所以记它为  $2\theta$ )

则  $r_2 = r_1 \tan \theta, h = r_1 \tan 2\theta$ .

1°, 2°, 3°, 同证法一里的 1°, 2°, 3°.

4° 把证法一中的①式代入  $V_1 = kV_2$ , 得

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 h = k \cdot 2\pi r_2^3,$$

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot r_1 \cdot \tan 2\theta = 2\pi r_1^3 k \tan^3 \theta.$$

化简为

$$3k \tan^4 \theta - 3k \tan^2 \theta + 1 = 0.$$

当  $\Delta = 9k^2 - 12k \geq 0$  时  $\Rightarrow$  时  $k \leq 0$  (舍) 或  $k \geq \frac{4}{3}$ , 此时,  $\tan^2 \theta > 0$ , 符合题意.

故  $k$  的最小值为  $\frac{4}{3}$ , 当然  $V_1 \neq V_2$ .

(动机: 与证法二的 5° 相同)

说明 综观 4 种解法, 本质是一个, 即通过判别式解决问题. 当然, 为了应用判别式, 都是利用“方程组的方法”, 减少变量, 做好准备工作.

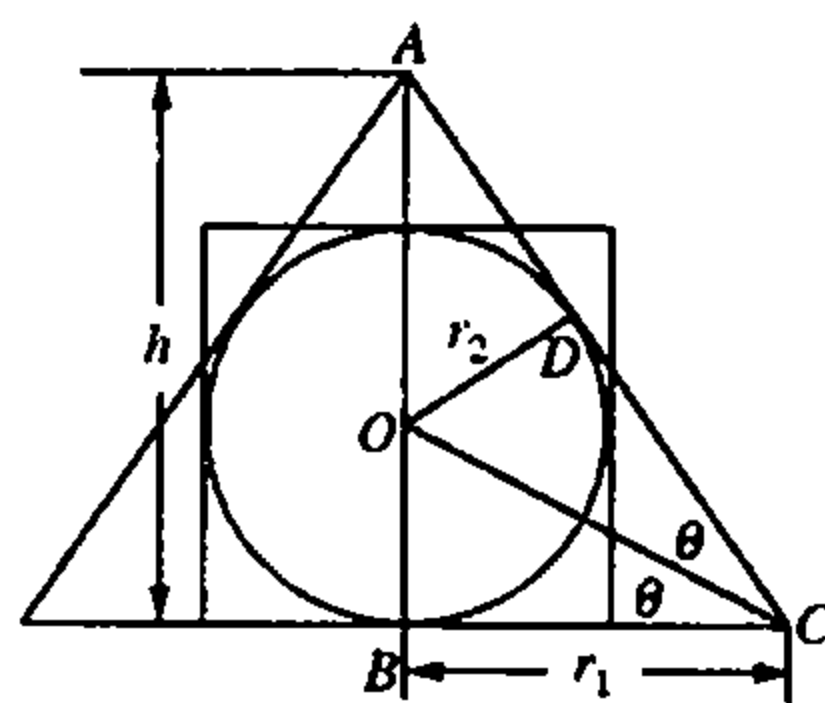


图 6-10

## 第二篇 高中数学各章学习指要

### I 重要概念、基础知识、方法、思想

在本书的第一篇第4章中,我曾详尽地介绍了一些重要的数学方法和数学思想,它们对于整个中学数学的学习,都能起到有全局性的关键作用.为使这些数学思想能在本篇集中体现,所以对前面介绍过的只列出题目,没介绍过的则详细展开.

#### 一、有关命题的知识

#### 二、充分条件和必要条件

#### 三、数学归纳法

以上几条请详见第一篇的第4章的“一、概念与基础知识的学习”和“四、一个数学方法(数学归纳法)的学习和小结”.

#### 四、反证法

##### (一) 反证法

否定欲证结论,假定它的反面(原结论的矛盾判断)成立,进行推理,引出矛盾,于是认可该反面不能成立,则原结论当然正确.这种方法称为反证法.

由于没有从正面论证原结论的合理性,所以,反证法称为间接证明方法,是间接证法之一.

##### (二) 适宜应用反证法的题目特点

第一,应用直接证法困难,再考虑反证法.

第二,当欲证命题的结论涉及“不是”、“无限”、“至少……”、“至多……”、“……是惟一的……”时,由于结论的反面较为简单明确,而应用直接证法时,缺少表达为上述字样的定理依据,所以,常常宜于用反证法.

##### (三) 反证法的优点

对原结论否定的假定的提出,相当于增加了一个已知条件.

##### (四) 掌握好反证法

###### 1. 正确否定原结论

第一,否定原结论,写出它的反面情况时,不要有遗漏,例如,原结论  $AB > CD$ ,那么,它的否定是

$AB \leq CD$ , 而不是  $AB < CD$ .

第二, 当原结论是复合命题时, 要依据狄莫根公式(或译作摩根法则, 摩根律等), 详见本书第一篇第4章“一(一)3”一节.

例如, 结论“ $x \in [1, 2], f(x) > 0$ ”的否定, 是“存在  $x_0 \in [1, 2]$ , 使得  $f(x_0) \leq 0$ ”. 而不是“ $x \in [1, 2], f(x) \leq 0$ ”.

这是因为, 原结论是复合命题, 它的思想是, 在区间  $[1, 2]$  上的一切  $x$  取值, 都使  $f(x) > 0$  成立. 那么, 对它正确的否定是,  $x$  在  $[1, 2]$  上的取值, 不能使  $f(x) > 0$  成立, 即只要在  $[1, 2]$  上存在不使  $f(x) > 0$  成立的  $x_0$  (即存在使  $f(x) \leq 0$  成立的  $x_0$ ), 并不要求在  $[1, 2]$  上的一切值, 都不使  $f(x) > 0$  成立, 所以, 前者是正确的; 后者则是错误的.

由于上述“后者”构造的结论的题设(一切  $x$  都使  $f(x) \leq 0$ )要求强于正确结论的题设(只要有一个  $x_0$  使  $f(x_0) \leq 0$ ), 当然使证明变得容易了, 但却是无效的.

所以说, 正确否定原结论, 是正确完成反证法的前提.

## 2. 矛盾焦点的选择

矛盾焦点, 是指在何处产生矛盾.

由于开始学习反证法的题目, 多数是推理的发展和原已知条件发生矛盾. 故而一些同学在应用反证法证题时, 总是先定个目标, 千方百计地去论证和“已知”矛盾. 这不但常常造成烦琐冗长, 而且束缚思维的开展.

事实上, 究竟应该和“谁”发生矛盾? 答案是, 和谁都可以!

因为, 在证明过程中, 如果先后应用了“反面假定”、“定理1”、“已知条件1”、“定理2”、“定义1”, 最后和“已知条件2”发生了矛盾. 那么, 过程中, 若把“定理1”暂不用, 而用上“已知条件2”, 则最后将与“定理1”矛盾.

甚至可以, 先利用“已知条件1”、“定理2”、“定义”进行推理, 得到一个“结论1”, 再利用“已知条件2”、“反面假定”、“定理1”进行推理, 得到“结论2”, 而“结论1”和“结论2”是矛盾的.

所以说, 反证法矛盾的焦点, 可以是和“已知条件”或“定义”、“公理”、“定理”、“反面假定”矛盾, 也可以自相矛盾(即两部分推理的结果). 其本质是, 先利用的和剩余者之间的矛盾. 究竟先利用哪些好, 应根据题目的具体情况, 顺其自然, 因势利导, 不必拘泥于一格.

## 3. 部分过程中的反证法

有些题目, 只是直接证法的推理过程中的某个环节需要应用反证法, 因此要灵活掌握.

许多立体几何题目中有这种需要, 一般是, 推理过程中, 有个显见的事实的证明缺乏依据, 试试反证法, 往往会一举成功.

## 4. 选择适宜的推理方向

这是用好反证法的核心和难点所在, 也就是否定原结论之后, 从哪里下手?

一般原则是, 从题目所涉及的概念和知识的含义上入手, 或从与本题条件相似的命题的结论开始, 展开推理.

**例1** 求证  $a, b, c$  为正实数的充要条件是  $a + b + c > 0$ , 且  $ab + bc + ca > 0$  和  $abc > 0$ .

**分析** 由  $a, b, c > 0$ , 显然易得  $a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0, abc > 0$ . 即“必要性”的证明用直接证法易于完成, 并不需要用反证法.

证明“充分性”时, 要综合三个不等式, 推出  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , 有些难度, 于是, 试试反证法.

**证明** (1) 证必要性(略)

(2) 证充分性 若  $a, b, c$  不全为正实数(原结论是  $a, b, c$  都是正实数), 由于  $abc > 0$ , 则它们只

能是二负一正.

不妨设  $a < 0$  且  $b < 0$  且  $c > 0$ , 又由于

$$ab + bc + ac > 0 \Rightarrow a(b + c) + bc > 0.$$

$$\because bc < 0, \therefore a(b + c) > 0^*,$$

$$\text{又} \because a < 0, \therefore b + c < 0^{**},$$

$$\text{而 } a + b + c > 0 \Rightarrow a + (b + c) > 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

与  $a < 0$  的假设矛盾.

说明 如果从 \* 号处开始, 如下进行推理,

$$\because a + b + c > 0 \Rightarrow a + (b + c) > 0 \text{ 及 } a < 0,$$

$$\therefore b + c > 0.$$

$$\text{又由 } a < 0 \Rightarrow a(b + c) < 0,$$

与 \* 号式矛盾.

这样, 矛盾的焦点, 就发生在两部分推理的结论上了, 即自相矛盾.

还可以让矛盾的焦点发生在已知条件上.

从 \*\* 处开始,

$$\text{于是 } a + b + c < 0,$$

与已知  $a + b + c > 0$  矛盾.

这个途径最简捷.

以上充分说明, 矛盾发生在何处, 要因势利导.

例 2 求证 顺次连结抛物线上任何 4 点, 都不会围成平行四边形.

分析 本题实质上是求证所构成的四边形中“必有一组对边不平行”(“两组对边都平行”的正确否定是“至少有一组对边不平行”, 即“两组对边不都平行”).

由于取点的任意性, 正面去证明有一组对边不平行比较困难, 考虑到结论涉及否定的形式(一组对边不平行), 常常宜于用反证法.

证明 适当选取坐标系, 使抛物线由二次函数  $y = ax^2 (a \neq 0)$  表示.

在抛物线上任取  $A(x_1, ax_1^2), B(x_2, ax_2^2), C(x_3, ax_3^2), D(x_4, ax_4^2)$  四点(如图 I-1 所示), 由 A、B、C、D 的相异性, 根据函数定义, 显然  $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$ , 并且 AB、BC、CD、DA, 都不平行于 y 轴, 因而斜率都存在.

(用反证法, 对“必有一组对边不平行”进行正确否定, 或者说, 对“不会围成平行四边形”进行正确否定)若  $AB \parallel CD$ , 并且  $BC \parallel DA$ , 则

$$k_{AB} = k_{CD}, \tag{1}$$

$$k_{BC} = k_{DA}.$$

由①, 得

$$\frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{ax_4^2 - ax_3^2}{x_4 - x_3},$$

$$\because a \neq 0, \quad x_1 \neq x_2, \quad x_3 \neq x_4,$$

$$\therefore x_2 + x_1 = x_4 + x_3.$$

同理,

$$x_4 + x_1 = x_2 + x_3,$$

③ - ④, 得

$$x_2 = x_4.$$

②

③

④

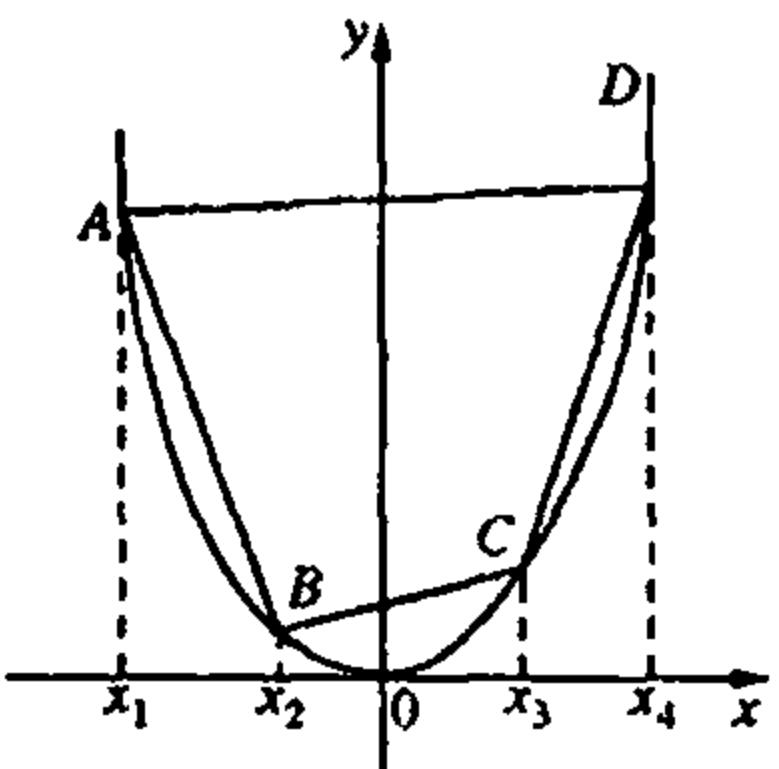


图 I-1

与  $x_2 \neq x_4$  矛盾.

**说明** 本证明选择  $k_{AB} = k_{CD}$  和  $k_{BC} = k_{DA}$  作为推理入手方向,是考虑到平行四边形概念的一个本质含义:两组对边分别平行,显然,“两组对边分别相等”等,也是平行四边形概念的本质含义,从它入手,同样可以完成证明.

**例3** 试判断并证明函数  $y = \sin|x| (x \in R)$  是否有周期性.

**分析** 由函数图像(见图 I-2)易见,  $y = \sin|x| (x \in R)$  不是周期函数,但我们没有“不是周期函数的函数”的定义,为了利用周期函数的定义,故考虑用反证法.

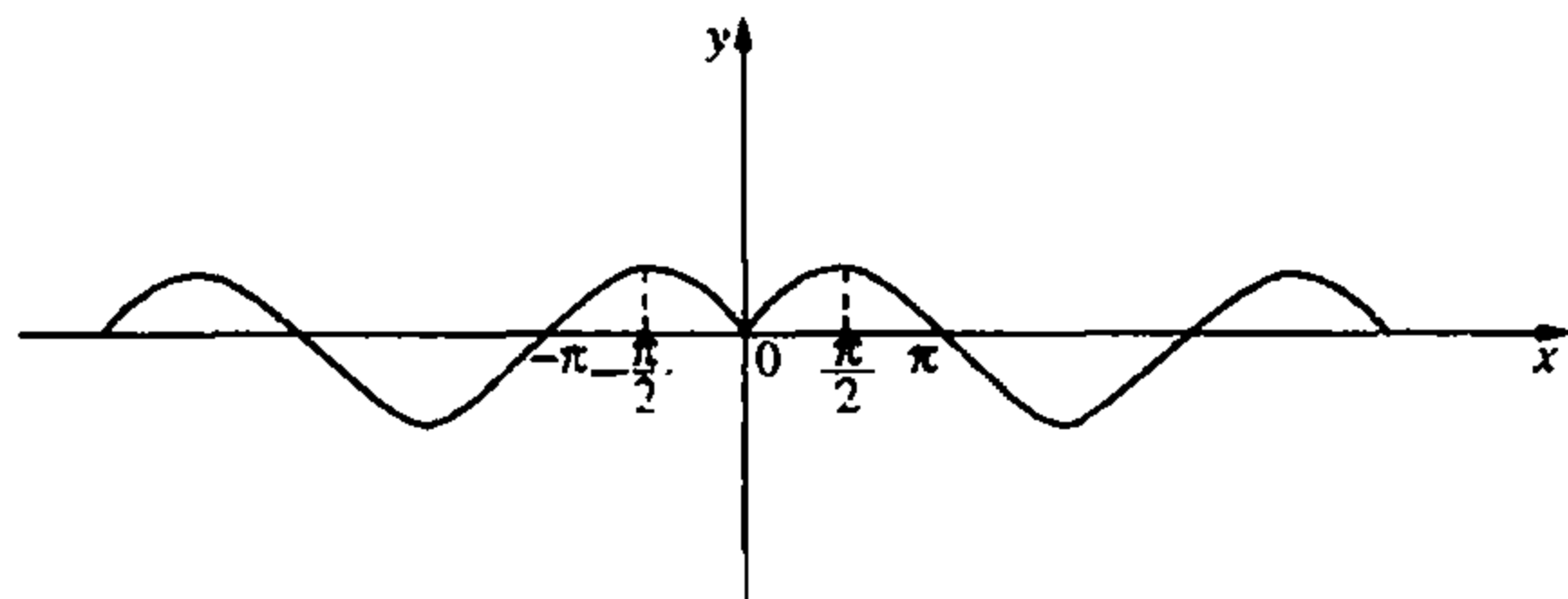


图 I-2

从哪里入手呢? 我们知道,要推翻一个结论,只需举出一个反例. 从图像上注意到,当  $x$  由  $0 \rightarrow +\infty$  时,函数值重复出现的最小“间隔”( $2\pi$ ),不适用于  $(-2\pi, 0)$  这个区间. 于是可取  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ .

**证明** 若  $y = \sin|x| (x \in R)$  是周期函数,则存在  $T > 0$ ,使得

$$\sin\left|\frac{\pi}{2} + T\right| = \sin\left|\frac{\pi}{2}\right|, \quad (1)$$

$$\sin\left|-\frac{\pi}{2} + T\right| = \sin\left|-\frac{\pi}{2}\right|. \quad (2)$$

由①,有

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 2k\pi \quad (k \in N).$$

代入②,有

$$\text{左} = \sin\left|-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right| = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad (k \in N),$$

$$\text{右} = \sin\left|-\frac{\pi}{2}\right| = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

两式矛盾. 故假设  $y = \sin|x| (x \in R)$  是周期函数不能成立.

## 五、同一法

同一法是另一种间接证明方法.

### (一) 同一法的原理

按照欲证命题结论的要求(有时还要连同欲证命题的部分题设条件)构造一个模型,然后,证明这个模型必符合欲证命题的题设条件(若构造模型时已用去了部分题设条件,这时证明模型必符合的,是所余的题设条件),又由于这些条件具有惟一性,于是表明,模型所符合的要求(就是欲证命题

的结论),在欲证命题的题设条件下,必能得到.从而,证明完成.

## (二) 同一法适用的范围

上面的叙述表明,如果一个命题能用同一法完成它的证明,那么,这个命题的逆命题必须成立.因为,在同一法的原理中所述“证明这个模型必符合欲证命题的题设条件”,就是证明“欲证命题的逆命题”.

这便是,同一法证明的适用范围.

因而,在欲证命题的逆命题是已知真命题的情况下,直接证明又遇到困难时,不妨试试同一法.

例4 已知 如图 I-3所示,平面 $\alpha \perp$ 平面 $\gamma$ ,平面 $\beta \perp$ 平面 $\gamma$ , $\alpha \cap \beta = l$ .

求证  $l \perp \gamma$ .

分析 直接证明不太顺利.考虑到本命题的逆命题:若 $\alpha \perp \gamma$ ,且过 $\alpha$ 上一点的 $l \perp \gamma \Rightarrow l \subset \alpha$ ;若 $\beta \perp \gamma$ ,且过 $\beta$ 上一点的 $l \perp \gamma \Rightarrow l \subset \beta$ ,是真命题;并且,两个平面的交线有惟一性,故考虑用同一法.

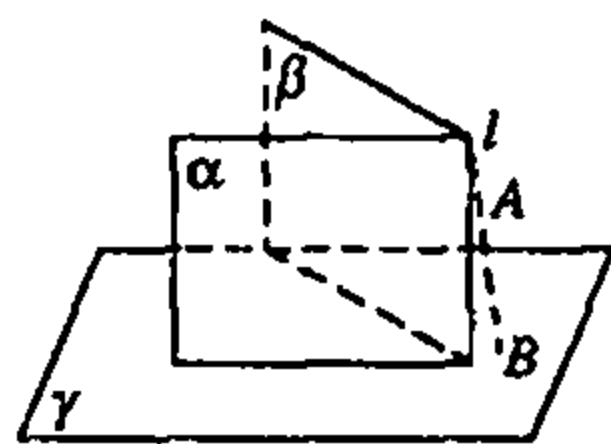


图 I-3

证明 在 $l$ 上任取不在平面 $\gamma$ 上的一点 $A$ ,作 $AB \perp \gamma$ 于 $B$ .

由已知,平面 $\alpha \perp$ 平面 $\gamma$ , $A$ 在平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 的交线 $l$ 上,因而 $A$ 在平面 $\alpha$ 上.

根据,如果两个平面互相垂直,那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线,在第一个平面内.

$\therefore AB \subset$ 平面 $\alpha$ .

同理 $AB \subset$ 平面 $\beta$ .

由于已知 $\alpha \cap \beta = l$ ,根据,如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

$\therefore l$ 与 $AB$ 重合,是平面 $\gamma$ 的垂线.

说明 [1] 构造模型的另一方法是,取点 $A$ 后,作 $AB \perp$ 平面 $\alpha$ 与平面 $\gamma$ 的交线 $l'$ ,再证出 $AB \subset$ 平面 $\beta$ ,又由两平面交线的惟一性, $AB$ 即 $l$ ,于是, $l \perp$ 平面 $\gamma$ 等.

[2] 模型并不仅限于图形,所以,同一法并不只是应用于证几何题,请看下例.

例5 已知  $a, b \in R, a^2 + b^2 = 1$ .

求证  $a = \sin \alpha, b = \cos \alpha$  ( $\alpha$  是某些实数).

分析 由于熟知,当 $a = \sin \alpha, b = \cos \alpha$ 时,有 $a^2 + b^2 = 1$ ,即欲证命题的逆命题成立.故考虑应用同一法.

证明 由 $a^2 + b^2 = 1$ ,有 $b = \pm \sqrt{1 - a^2}$ .\*

$\because b \in R,$

$\therefore 1 - a^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$ .

于是,可设 $a = \sin \alpha$  ( $\alpha$  是某些实数).

此时, $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - a^2}$ .

代入\*号式, $b = \cos \alpha$ .证毕.

说明 本例同一法的最后完成,是利用了两个确定数的差 $(1 - a^2)$ 的惟一性,和一个确定的实数的平方根 $(\pm \sqrt{1 - a^2})$ 的确定性.

## 六、换元法

对数学式子进行变形,用一个字母来代替某个表达式,使问题的解决化繁为简,这种方法叫做

换元法.

事实上,换元法更重要的意义,在于“换元”是一种重要的思考方式.在需要的时候,把某些部分甚至全局,当作一个单位来考虑,常常令人有别开生面、豁然开朗之感.

运用换元法处理问题时,要针对问题的具体特点,注意选元的技巧.对于较复杂的问题,则宜先做变形以适于换元.有些题目代入后,还应当用新的字母把原来的字母表达出来(请见本书第一篇第4章三中的例15),有时代入的元是另外某个字母的表达式……这些,都要在做题中反复思考,不断总结规律,才能熟练掌握,灵活运用.而欲利用换元法解决问题,第一位重要的是做到思维灵活、敏锐.

**例6** 求函数  $y = x + \sqrt{1-2x}$  的值域.

**分析** 由于  $f(x) = x$  和  $f(x) = \sqrt{1-2x}$  的增减性不一致,所以,以  $x$  为自变量,难于确定函数  $y$  的值域.注意到根号内外都是  $x$  的一次式,那么,一定可以用换元法,使根号从函数解析式中消失.

**解** 先做变形,得

$$y = -\frac{1}{2}(1-2x) + \sqrt{1-2x} + \frac{1}{2}.$$

设  $u = \sqrt{1-2x}$ , 则

$$y = -\frac{1}{2}(u-1)^2 + 1 \quad (u \geq 0).$$

当  $u=1$  时,  $y_{\max} = 1$ ,

于是,函数  $y = x + \sqrt{1-2x}$  的值域为

$$\{y \mid -\infty < y \leq 1, y \in R\}.$$

**说明** 当根号内外的多项式同次(字母当然要相同),并且“非常数项”的各同次项系数对应成比例时,一般都可以用换元法简化运算.

**例7** 请见书第一篇第4章三中的例15.

**例8** 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $5a_n = 2a_{n-1} + 3$  ( $n \in N$ , 且  $n \geq 2$ ),  $a_1 = 3$ .

求  $a_n; S_n$ .

**分析** 数列  $\{a_n\}$  显见不是等差或等比数列,观察时,注意到它的递推表达式中,  $a_n$  是  $a_{n-1}$  的一次函数,引导我们去探索把  $\{a_n\}$  的各项都减去同一常数后,转化为公比为  $\frac{2}{5}$  的等比数列. 这里的关键是,求出上述这“同一常数” $x$ .

**解** 设  $5(a_n - x) = 2(a_{n-1} - x)$ , 得

$$5a_n = 2a_{n-1} + 3x.$$

由已知  $5a_n = 2a_{n-1} + 3$ , 故  $x = 1$ , 即

$$5a_n = 2a_{n-1} + 3$$

可变形为

$$5(a_n - 1) = 2(a_{n-1} - 1).$$

又  $\because a_n$  与  $a_{n-1}$  都不为 1,

$\therefore a_n - 1$  与  $a_{n-1} - 1$  都不为零.

$$\therefore \frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1} = \frac{2}{5}.$$

设  $b_n = a_n - 1$  ( $n \in N$ ),

则数列  $\{b_n\}$  为等比数列, 有



$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

即

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1},$$

$$a_n = 2 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1} + 1;$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + n$$

$$= \frac{10 \left[ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^n \right] + 3n}{3}.$$

说明 换元法起了开拓思路帮助思考的作用.

## 七、列方程组的方法

根据对问题的分析,列出若干等式,把欲确定的量包含其中,组成一个方程组.通过解方程组,求出欲确定的量.这个以方程为工具的方法,是解决许多数学和物理问题的基本思想.

为了把欲定的量(以下称它们为未知数)求出来,需要列出多少方程呢?

在中学数学范围内,一般说来有三种情况.

### (一) 几个未知数列出几个方程

对于  $n$  个未知数,如果列出了  $n$  个方程,那么,从理论上,这  $n$  个未知数,都可以求出来.

这里所说的理论上,是因为受计算技术的局限,实际上未必一定实现.

但所说的  $n$  个方程,必须满足以下几点:

#### 1. 几个方程都必须独立

其中的任何一个方程,都不能由其他的方程推导出来.我们不妨称这样的  $n$  个方程为彼此独立的.例如,方程  $x + y = 1$  和  $x - y = 1$  是彼此独立的.而方程  $x + y = 1$  ①、 $2x + 2y = 2$  ②,就不是彼此独立的.因为,对①式进行同解变形(把它的两边都乘以2),就得到了②式.方程  $x + y = 1$  ①、方程  $2x - y = 3$  ②、方程  $4x + y = 5$  ③,也不是彼此独立的,因为① $\times$ 2+②,就得到了③.

#### 2. $n$ 个方程中不能有相互矛盾的方程

其中的任何一个方程,都不能和其他的方程矛盾.即它们解集的交集不能是空集.例如,方程  $x + y = 1$  和方程  $x + y = 2$  是矛盾的.方程  $x + y = 1$ 、方程  $x - 2y = 2$ 、方程  $4x + y = 15$  也是矛盾的.

### (二) $n$ 个未知数,少于 $n$ 个的方程

对于  $n$  个未知数,如果只存在少于  $n$  个的彼此独立又互不矛盾的方程,那么,  $n$  个未知数不可能全部确定.

这时,又有以下两种可能:

#### 1. $n$ 个未知数都不能确定

(1) 方程个数为  $n - 1$  时,从理论上,可以求出任意两个未知数之间的关系,换言之,可以用任意一个未知数,表达其余每个未知数;

(2) 方程个数为  $n - 2$  时,从理论上,可以求出任意3个未知数之间的关系,换言之,可以由任意两个未知数联合表达其余每个未知数;

(3) 如上可以类推.

#### 2. $n$ 个未知数中能确定几个

$n$  个未知数中,可以确定其中的1个,或2个,或3个, ..., 或  $n - 1$  个.例如,由方程组

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6, & \text{①} \\ 3x + 4y - 2z = 1. & \text{②} \end{cases}$$

可以求出  $x = -11$  (② - ①  $\times 2$ ). 但  $y, z$  都不能确定.

(三) 对于  $n$  个未知数, 不可能存在多于  $n$  个的彼此独立又互不矛盾的方程

事实上, 如果存在多于  $n$  个的彼此独立又互不矛盾的方程, 任取其中的  $n$  个, 那么, 从理论上, 便可求出这  $n$  个未知数. 把它们代入其余方程中的一个, 若满足, 则此方程与所取  $n$  个方程不独立; 若不满足, 则此方程与所取  $n$  个方程矛盾, 皆与“多于  $n$  个彼此独立又互不矛盾的方程”的前提矛盾.

## 八、待定系数法

解题中, 先判断和写出所求结果的某种确定形式; 再通过给定的已知条件, 求出其中待定的字母系数, 使问题得到解决. 这种数学方法, 称做待定系数法.

这里, 通过给定的已知条件来求出待定的字母系数, 一般地, 都是通过列出与待定的字母系数个数相同的方程 (它们须彼此独立并互不矛盾), 加以解决.

显然, 这后半部分过程, 实质是列方程组的方法. 因此, 掌握好待定系数法的关键, 是对于欲求结果, 选择写出一种确定的形式, 而这种形式, 宜于依据多项式理论, 或根式理论, 或复数理论等, 利用已知条件, 列出足够个数的方程.

待定系数法, 在因式分解、解方程、确定未知函数等方面, 常有应用. 在解析几何中, 更是一种主要的解题方法, 例如求点坐标, 求曲线方程, 判断曲线间位置关系等.

**例 9** 分解因式  $x^4 - 2x^2y - 3y^2 + 8y - 4$ .

**分析** 由于多项式各项只含  $x^4, x^2, y^2, y$ , 因子有常数项, 可推断, 若此式能分解, 必为

$$(x^2 + ay + c)(x^2 + by + d). \quad \text{①}$$

又由

$$x^4 - 2x^2y - 3y^2 = (x^2 - 3y)(x^2 + y),$$

则①式可进一步为

$$(x^2 - 3y + c)(x^2 + y + d).$$

乘开后, 与  $x^4 - 2x^2y - 3y^2 + 8y - 4$  比较系数, 得 (根据多项式恒等理论)

$$\begin{cases} c + d = 0, & \text{②} \\ c - 3d = 8, & \text{③} \\ cd = -4. & \text{④} \end{cases}$$

解得  $c = 2, d = -2$ . 故

$$x^4 - 2x^2y - 3y^2 + 8y - 4 = (x^2 - 3y + 2)(x^2 + y - 2).$$

**说明** [1] 利用待定系数法分解因式, 关键是对所能分解出的因式的形式判断准确, 并针对具体问题的特点, 尽可能减少待定系数的个数.

[2] 本例方程④, 对于方程②和③是不独立的. 解题时, 若不利于迅速弄清各方程之间的关系, 可以一并列到方程组里, 不影响得到正确答案.

**例 10** 解方程

(1)  $x^3 - i = 0$ ;

(2)  $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$ , 并知此方程有互为相反数的两个根.

**解** (1) 设方程的一个根为  $a + bi$  ( $a, b \in R$ ), 则

$$(a + bi)^3 - i = 0,$$

$$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3 - 1)i = 0.$$

根据复数相等定义比较系数,得

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0, \\ 3a^2b - b^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ b_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b_2 = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

则方程的解为

$$-i; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

(2) 设方程有两根为  $a, -a$ , 则

$$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x^2 - a^2)\left(2x - \frac{12}{a^2}\right).$$

乘开后比较系数,得  $a^2 = 4$ , 则原方程可为

$$(x^2 - 4)(2x - 3) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \frac{3}{2}.$$

**说明** 通过两个多项式恒等,确定多项式的待定系数时,既可以用比较系数法,也可以给出  $x$  的一些数值(其个数等于待定的系数的个数)分别代入恒等式,得到方程组,解出各待定系数.

**例 11**  $m$  取何值时,方程  $x^2 + xy + 3x + (m+1)y + 2 = 0$ , 表示两条直线?

**解** 方程  $x^2 + xy + 3x + (m+1)y + 2 = 0$  表示两条直线的充要条件是,它的左端可分解为两个实系数的一次因式的积.

注意到左端无  $y^2$  项,故可设

$$x^2 + xy + 3x + (m+1)y + 2 = (x+p)(x+y+q).$$

变形后,得

$$x^2 + xy + 3x + (m+1)y + 2 = x^2 + xy + (p+q)x + py + pq.$$

比较两端系数,解方程组,得到

$$\begin{cases} m = 1, \\ p = 2, \\ q = 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m = 0, \\ p = 1, \\ q = 2. \end{cases}$$

即  $m = 1$  时,原方程表示直线

$$x + 2 = 0 \quad \text{和} \quad x + y + 1 = 0.$$

$m = 0$  时,原方程表示直线

$$x + 1 = 0 \quad \text{和} \quad x + y + 2 = 0.$$

**例 12** 已知 曲线  $l_1: 5x - 2y - 4 = 0, l_2: 2x - 3y + 5 = 0$ , 直线  $l$  夹在  $l_1, l_2$  间的部分被点  $A(3, 2)$  平分.

求  $l$  的方程.

**分析** 由已知,  $l$  过点  $A(3, 2)$ , 那么, 为了写出  $l$  的方程, 只需确定一个待定系数  $k$  ( $l$  的斜率), 但为了利用  $A$  是中点的条件, 又须涉及  $l$  分别和  $l_1, l_2$  的交点  $P(x_1, y_1)$  及  $Q(x_2, y_2)$ . 这样, 共出现了 5 个未知数.

根据方程组的方法,只需找出 5 个关系式.

利用  $A$  在  $l$  上,  $P$ 、 $Q$  分别在  $l_1$ 、 $l_2$  上,  $A$  是线段  $PQ$  的中点, 一共 5 个条件( $A$  是  $PQ$  中点的这个条件, 可以写出两个等式), 当然可以列出 5 个方程.

但为了简化计算过程, 应针对题目特点, 讲究列方程的技巧, 尽量减少所列方程的个数. 就本题而言, 目标只是求  $k$  这一个系数, 要选择尽快得到  $k$  值的途径, 而不必一一求出  $x_1, y_1, x_2, y_2$  等待定系数.

解 由已知, 可设  $l: y - 2 = k(x - 3)$ , 它与  $l_1$ 、 $l_2$  分别交于  $P\left(x_1, \frac{5x_1 - 4}{2}\right), Q\left(x_2, \frac{2x_2 + 5}{3}\right)$  (以上是  $x_1, x_2$  分别代入  $5x - 2y - 4 = 0$  和  $2x - 3y + 5 = 0$  得到的), 由  $A$  是  $PQ$  中点, 有

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 3, \\ \frac{\frac{5x_1 - 4}{2} + \frac{2x_2 + 5}{3}}{2} = 2. \end{cases}$$

解得  $x_1 = \frac{2}{11}$ , 代入前述  $P$  点坐标表达式, 得  $P\left(\frac{2}{11}, -\frac{17}{11}\right)$ , 又由于  $P$  点在直线  $l$  上, 代入

$$y - 2 = k(x - 3),$$

得到

$$-\frac{17}{11} - 2 = k\left(\frac{2}{11} - 3\right),$$

解得  $k = \frac{39}{31}$ . 于是, 直线  $l$  的方程为

$$y - 2 = \frac{39}{31}(x - 3),$$

即

$$39x - 31y - 55 = 0.$$

## 九、配方法

配方法是把一个式子, 变形为某个二项式的完全平方(它的前面还可以带不为零的系数)和另一个式子的和的形式. 它的步骤大致为:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

(分离常数项  $c$  后, 提出二次项系数  $a$ )

$$= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

(在提取  $a$  之后的括号内, 加上并减去, 一次项系数  $\left(\frac{b}{a}\right)$  的一半  $\left(\frac{b}{2a}\right)$  的平方  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ )

$$= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2}{4a} + c$$

(把括号内的  $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$  与  $a$  相乘后移到括号外, 准备与常数项  $c$  相加)

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

(完成配方过程)

应用换元的思想,上述过程中的  $x$ , 可以是一个代数式或超越式, 常数项  $c$  也可以是另外的字母或超越式, 当然, 在这种情况下, 早期判断和准备工作的变形是关键.

解析几何中, 化简二次曲线的方程, 配方法是必须熟练掌握的工具; 配方法还是为了应用换元法, 对表达式进行变形的手段之一; 同时, 通过配方, 利用非负数的性质  $((x-m)^2 \geq 0)$ , 还是讨论、判断一些式子的最大(小)值及增减性的重要思路. 对于何时应用配方法, 宜在做题中, 悉心归纳总结.

## 十、转化归结思想

请见本书第一篇第 3 章二的(一).

## 十一、动的思想方法——换个角度看问题

请见本书第一篇第 3 章二(二).

## 十二、对称的观点和思想

请见本书第一篇第 3 章二(三).

## 十三、数形结合的方法

请见本书第一篇第 3 章二(四).

## II 高中代数

### 第7章 幂函数、指数函数和对数函数

#### 一、学习指导

(一) 把集合知识的学习和有关命题的学习结合起来

##### 1. 重视“集合”概念的学习

集合,是一个崭新的概念,对于今后的学习,十分重要. 因此,一开始就要准确地掌握它.

这里包括,集合概念的理解,列举法和描述法,“集合”本身是不定义名词;集合元素的确定性和无序性,集合相等定义;空集;子集和真子集;交集、并集、补集.

要注意,子集(包括真子集)和交、并、补集是两类性质不同的概念. 子集(包括真子集),是描述两个集合的关系  $A \subseteq B$ , 只此而已,没有结果;但交、并、补集,则是表示两个集合的运算关系,有结果. 例如,若  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ , 则  $A \cap B = \{1, 3\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\bar{A} = \{5\}$ ,  $\bar{B} = \{2, 4\}$ ,  $\overline{A \cap B} = \{2, 4, 5\}$ ……

要明确:空集( $\emptyset$ )是任意集合的子集.

无论对以上哪个概念的理解,都要能够用韦恩(Venn, 有的书称文氏)图熟练表达和解释. 它是学好集合知识的重要工具.

关于子集个数,有如下的计算公式.

对于含有  $n$  个元素的集合,它有子集  $2^n$  个;真子集  $(2^n - 1)$  个;非空子集  $(2^n - 1)$  个,非空真子集  $(2^n - 2)$  个.

##### 2. 集合知识和命题知识学习的结合

联系有关命题的知识,深入学好交集、并集、补集概念;并反过来,加深对有关命题知识的理解.

例如,由所有属于集合  $A$  且属于集合  $B$  的元素所组成的集合,叫做  $A, B$  的交集,记做  $A \cap B$ .

这就是说,任意  $x \in A$  且  $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ ;反之,任意  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$  且  $x \in B$ .

于是,从命题的角度来理解,交集可以看作用“且”字连结的复合命题.

类似地,并集  $A \cup B$  可以看做是用“或”字连结的复合命题.

补集则可以看做是命题的否定.

又如  $\overline{A \cap B}$  表示先进行  $A \cap B$ , 再进行补的运算,  $\bar{A} \cup \bar{B}$  表示先分别进行  $\bar{A}$  和  $\bar{B}$ , 再进行“并”的运算,等等.

于是,根据“有关命题的知识”(见第一篇第4章—(一)3(3))所述狄莫根公式,自然有

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

这是两个重要的关系式.

由于这两个公式可以直接从“集合”的有关定义出发,进行严格的证明.于是,反过来,又加深了对从命题角度刻画的理解.

## (二) 准确把握映射有关概念

一个映射,由原象集(常常用  $A$  表示)、对应法则(常常记做  $f$ )、象集(常常用  $B$  表示)三部分构成.记做  $f: A \rightarrow B$ .

要特别注意映射定义(“……在集合  $B$  中都有惟一的元素和它对应……”)中的“惟一”二字.它影响着对于后来的函数概念的准确理解(参见第一篇第4章三的例11).

把握“映射”、“到……上的映射”、“到……上的一一映射”的联系与区别.

按照某种对应法则  $f$ ,对于集合  $A$  中的任何一个元素,在集合  $B$  中都有惟一的元素和它对应,这样的对应(包括集合  $A$ 、 $B$  及从  $A$  到  $B$  的对应法则  $f$ )叫做从集合  $A$  到集合  $B$  的映射.

按照某种对应法则  $f$ ,对于集合  $A$  中的任何一个元素,在集合  $B$  中都有惟一的元素和它对应,且  $B$  的每一个元素都在  $A$  中有原象时,这样的映射  $f: A \rightarrow B$ ,称做从集合  $A$  到集合  $B$  上的映射.

一个“上”字之差,却表达了两个完全不同的概念.

显然,在“从集合  $A$  到集合  $B$  的映射”范畴内的对应里,集合  $A$  中的元素不能有“剩余”,集合  $B$  中的元素可以有“剩余”,当然,并不必须有剩余.

但在“从集合  $A$  到集合  $B$  上的映射”范畴内的对应里,不仅集合  $A$  中的元素不能有剩余,而且,集合  $B$  中的元素也不能有剩余.

因而,“到……上的映射”比“映射”的要求更强.如果将“映射”整体作为一个集合  $M$ ,那么,“到……上的映射”的全体是  $M$  的一个真子集.

函数则是从非空数集  $A$  到非空数集  $B$ “上”的映射.

在“到集合  $B$  的映射”里,集合  $B$  的元素不一定是象,象集是集合  $B$  的一个子集(允许等于  $B$ );但在“到集合  $B$  上的映射”里,象集和集合  $B$  一定相等.所以,函数的值域是象集(请对照阅读第一篇第4章三的1中关于概念的理解的开头语).

按照某种对应法则  $f$ ,对于集合  $A$  中的任何一个元素,在集合  $B$  中都有惟一的元素与它对应, $B$  中的每一个元素都在  $A$  中有原象,并且,对于集合  $A$  中的不同元素,在集合  $B$  中有不同的象,那么,这个映射  $f: A \rightarrow B$ ,称做从集合  $A$  到集合  $B$  上的一一映射.

因而,“从集合  $A$  到集合  $B$  上的一一映射”,比“从集合  $A$  到集合  $B$  上的映射”要求更强.前者是后者整体作为集合的一个真子集.

从对应的角度看,“到……上的映射”,允许“多对一”;但是“到……上的一一映射”,只能“一对一”,这样,对于有限集来说,“到……上的映射”的原象集的元素个数,大于或等于象集的元素数;但“到……上的一一映射”的原象集的元素数,只能等于象集的元素数.

从这个角度也可以看到,“到……上的映射”不一定有“逆映射”;“到……上的一一映射”存在逆映射.

## (三) 逆映射和反函数

当一个“到……上的映射”的原象集是一个非空的数集,象集也是一个数集时,称这个“到……上的映射”是一个函数.

如果这个映射存在逆映射,称这个逆映射所代表的函数,是前面函数的反函数.

显然,只有“到……上的一一映射”所代表的函数,才有反函数.

不难证明,一个函数和它的反函数的增(或减)性相同.偶函数没有反函数.

从图像上易于看出,一个奇函数若有反函数,也必是一个奇函数,但并非每个奇函数都有反函数.如图 7-1 中曲线所表示的函数  $y=f(x)$  是奇函数,但  $f(x)$  没有反函数.

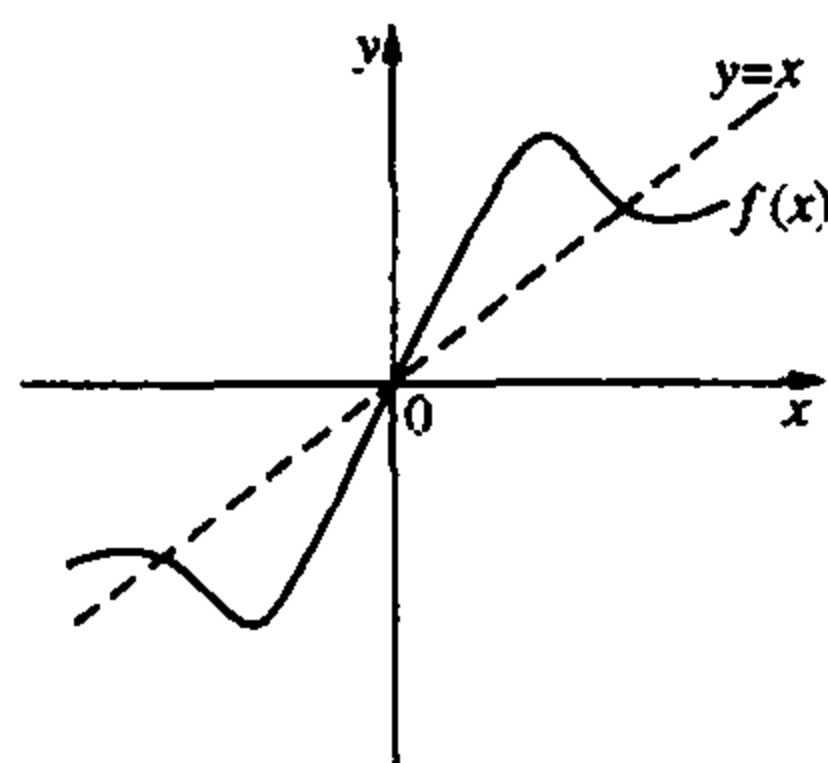


图 7-1

不难证明,一个函数的图像和它的反函数的图像,关于直线  $y=x$  对称;任意一个奇函数的图像,都是关于原点对称的,任意一个偶函数的图像,都是关于  $y$  轴对称的.

#### (四) 函数概念及其性质

这是高中代数中的核心内容,怎样深入学习和掌握好它,请读者细读本书第一篇第 4 章之三.

#### (五) 学好函数及其图像,培养数形结合能力

学习函数的伊始,就养成随时联想它的图像、运用它的图像辅助思考的习惯,培养数形结合的能力.

#### (六) 学好幂函数

在分析  $a$  与幂函数  $y=x^a (a \in Q)$  图像在第一象限内部分的位置和形状的联系中,学好幂函数.

1. 一切幂函数的图像,都通过  $(0,0)$  点和  $(1,1)$  点

2. 在第一象限内

(1) 当  $a > 0$  时

当  $a > 0$  时,幂函数都是递增的.但  $0 < a < 1$  时,它是上凸的;当  $a > 1$  时,它是下凸的.当  $a_1 \cdot a_2 = 1$  时,  $y=x^{a_1}$  和  $y=x^{a_2}$  的图像,关于  $y=x$  对称,事实上,这两个函数互为反函数.

(2) 当  $a < 0$  时

当  $a < 0$  时,幂函数都是递减的,都以  $x$  轴和  $y$  轴为自己的渐近线.当  $-1 < a < 0$  时,它向  $y$  轴趋近的速度,大于它向  $x$  轴趋近的速度;当  $a < -1$  时,情况则相反.

与  $a > 0$  时的情况类似.当  $a_1 \cdot a_2 = 1$  时,  $y=x^{a_1}$  和  $y=x^{a_2}$  的图像,也关于  $y=x$  对称,这两个函数也互为反函数.

3. 当  $a$  是整数时

当  $a$  是整数时,  $a$  的奇、偶性,就是幂函数的奇偶性.

4. 当  $a = \frac{p}{q} (p, q \in N)$  时

当  $a = \frac{p}{q} (p, q \in N)$  时,由于  $y=x^a = \sqrt[q]{x^p}$ , 所以

$p$  为偶数时,幂函数为偶函数,定义域为  $R$ ;

$p$  为奇数,  $q$  也为奇数时,幂函数为奇函数,定义域为  $R$ ;

$p$  为奇数,  $q$  为偶数时,幂函数的定义域为正数和 0,当然非奇非偶.

需要指出的是,  $\frac{p}{q}$  若有公因数 2,不可约去,例如  $y=x^{\frac{2}{4}}$  的定义域是  $R$ ,但  $y=x^{\frac{1}{2}}$  的定义域则仅是非负实数.

5. 当  $a = -\frac{p}{q} (p, q \in N)$  时



当  $a = -\frac{p}{q} (p, q \in N)$  时,  $y = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$ , 请读者试作类似上面的分析(注意:这时的各种分类讨论中,

幂函数的定义域中都没有零).

### (七) 多方位地观察、认识和分析, 掌握好指数函数与对数函数

第一, 类似于  $a$  对于幂函数  $y = x^a (a \in Q)$  的作用, 在指数函数  $y = a^x (a > 0$  且  $a \neq 1$ , 定义域为  $R$ ) 和对数函数  $y = \log_a x (a > 0$  且  $a \neq 1$ , 定义域为  $R^+$ ) 中, 当  $a > 1$  时, 它们都是增函数, 当  $0 < a < 1$  时, 它们都是减函数.

第二, 画出  $a > 1$  和  $0 < a < 1$  时它们的图像曲线, 从图上掌握,  $x < 0$  或  $x = 0$  或  $x > 0$  时指数函数的值域;  $0 < x < 1$  或  $x = 1$  或  $x > 1$  时的对数函数的值域. 这比单纯死记“表”, 效果要好得多.

第三, 由于指数函数和对数函数互为反函数, 在学习对数函数时, 常常从反函数的角度, 讨论它的性质, 因此, 掌握好指数函数, 可收到事半功倍的效果.

## 二、解题思考方法小结

关于求函数的定义域、解析表达式、判断函数的增减性、复合函数  $y = \varphi[g(x)]$  的增减性, 以及函数周期性等问题的思考方法, 已在第一篇第 4 章之三中给出. 这里再补充以下几点.

### (一) 关于求一个式子(或一个函数)的最大值、最小值问题的思考方法

第一, 如果式子中只含一个字母, 设  $y$  等于这个式子, 构造为一个函数, 判断它的增减性, 则有下列几点.

第一, 函数在整个定义域上单调, 若定义域为闭区间(或半开半闭区间), 则最大(小)值在端点处(或半开半闭区间的闭端)取得; 定义域为开区间时, 无最大(小)值.

第二, 函数在定义域上分为几个单调区间时, 则最大(小)值在定义域的闭端或各单调区间的端点处取得. 在分别计算出对应的函数值后, 比较出最大、最小值. 这里, 常用的是二次函数工具.

第三, 如果式子中含有一个以上字母, 或含有某些超越表达式的组合, 则可试试先进行换元, 转化为一元函数, 再进行前述处理看是否可行.

请见本书第一篇第 4 章三的例 25 的解法与说明.

### (二) 比较两幂大小问题的思考方法

第一, 两幂底数相同, 或可化为底数相同时, (例如,  $4^{-\sqrt{3}}$  和  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2\sqrt{10}}$ , 可化为  $2^{-2\sqrt{3}}$  和  $2^{-\sqrt{10}}$ ) 构造适宜的指数函数( $y = 2^x$ ), 由其单调性, 比较出大小(由  $-2\sqrt{3} < -\sqrt{10} \Rightarrow 2^{-2\sqrt{3}} < 2^{-\sqrt{10}}$ ).

第二, 两幂指数相同, 或可化为指数相同时(例如,  $5^{-\sqrt{3}}$  和  $\sqrt{3}^{-\sqrt{12}}$ , 可化为  $5^{-\sqrt{3}}$  和  $3^{-\sqrt{3}}$ ) 构造适宜的幂函数( $y = x^{-\sqrt{3}}$ ), 由其单调性, 比较出大小(由  $5 > 3 \Rightarrow 5^{-\sqrt{3}} < 3^{-\sqrt{3}}$ ).

第三, 两幂的底数和指数都不相同, 要观察它们的底数、指数的特点, 灵活处理. 一般地, 有如下的方法可以试试.

方法一, 分别和“1”比大小, 或分别和各自的底数比大小, 等等.

方法二, 间值法. 构造一个幂, 它的底和指数分别和欲比大小两幂的底数之一和指数之一相同. 分别构造一个适宜的指数函数和幂函数, 比出它与原来两个幂的大小关系, 或者可以得到原来两幂的大小关系.

例如, 对于  $a^b$  和  $c^d$ , 构造  $a^d$ . 情况 1: 若  $a^b > a^d$ , 且  $c^d < a^d$ , 则  $a^b > c^d$ ; 或  $a^b < a^d$ , 且  $c^d > a^d$ , 则  $a^b < c^d$ .

但若出现情况 2:  $a^b > a^d < c^d$  或  $a^b < a^d > c^d$ . 则再构造  $c^b$ , 重复以上过程.

若又出现无法下结论的情况, 那么, 间值法对本题无效.

### (三) 证明两个集合相等问题的思考方法

第一, 利用集合相等定义, 进行两面证.

1° 先证任意  $x \in A$  时, 有  $x \in B$ ;

2° 再证任意  $x \in B$  时, 有  $x \in A$ .

则集合  $A =$  集合  $B$ .

在 1° 或 2° 的证明中, 都可以用证明它的逆否命题替代.

第二, 利用交、并、补等集合的运算达到目的. 例如, 本书第一篇第 3 章二(一)中的第三个例子.

### (四) 求函数的值域

利用初等数学的方法, 并不是任何一个初等函数的值域都易于求出的. 针对具体函数解析式的特点, 一般说来, 可以试试下面的方法:

第一, 当能确定已知函数是单调函数时, 求出它的反函数的定义域, 作为已知函数的值域;

第二, 利用算术根性质, 对数性质, 等等;

第三, 利用换元法, 特别是当解析式各项中, 只有一项是二次根式, 根号外含  $x$  各项与根号内含  $x$  对应同次项系数成比例时, 一定可以通过换元, 转化为求一个新的二次函数的值域(这时, 往往要注意它的自变量的取值范围);

第四, 先用配方法, 再利用非负数性质;

第五, 判别式法, 对函数表达式的整个等式进行变形, 使等号右边为零后, 如果等号左边可以整理为关于  $x$  的二次三项式( $y$  则包含在这个关于  $x$  的二次三项式的系数里), 那么, 让判别式  $\Delta \geq 0$ , 可以解得  $y$  的范围(因为这时的  $\Delta$  是关于  $y$  的表达式).

### (五) 比较两个对数值大小问题的思考方法

第一, 底相同, 或可化为同底时, 构造相应的对数函数, 利用它的增减性, 比出大小.

第二, 底不同但真数相同, 利用换底公式化为同底后, 再利用上面第一种方法.

为了应用的方便, 下面表现形式的换底公式, 都宜熟练掌握:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a, b, c > 0, a, c \neq 1),$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a, b > 0, a, b \neq 1),$$

$$\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (a, b > 0, a, b \neq 1, m \neq 0).$$

第三, 分别与“0”, 或与“1”, 或与“-1”比大小.

### (六) 解指数方程的思考方法

进行适当变形化简后:

若方程只含两项, 则把它们分置于等号两边, 化同底(一般把底往小化)后, 用比较指数法(即取指数相等式), 转化为整式方程或其他已知解法的方程.

若方程含有三项, 一般可以用换元法, 转化为关于新元的一元二次方程.

### (七) 解有关对数问题(包括对数方程)的思考方法

当进程受阻时, 如果对数式呈“合”的形式, 那么, 把它变为“分”的形式试试; 如果此时对数式呈“分”的形式, 不妨把它变为“合”的形式试试. 这里所说“合”或“分”的形式是指, 在对数性质的表达

式

$$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N \quad (M, N, a > 0, a \neq 1),$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (M, N, a > 0, a \neq 1),$$

$$\log_a M^b = b \log_a M \quad (M, a > 0, a \neq 1)$$

中,称左端为“合”的形式,右端为“分”的形式.

例如,计算  $\frac{\lg 14 - \lg 6}{\lg 7 - \lg 3}$ .

解法一 把  $\lg 14$  和  $\lg 6$  都看成“合”的形式,“分开之”. 于是

$$\text{原式} = \frac{\lg 7 + \lg 2 - \lg 3 - \lg 2}{\lg 7 - \lg 3} = 1.$$

解法二 把  $\lg 14 - \lg 6$  和  $\lg 7 - \lg 3$  都看成“分”的形式,“合起来”. 于是

$$\text{原式} = \frac{\lg \frac{14}{6}}{\lg \frac{7}{3}} = \frac{\lg \frac{7}{3}}{\lg \frac{7}{3}} = 1.$$

当进程受阻时,如果式子是对数形式,则变为指数形式试试;如果式子是指数形式,则变为对数形式试试.

当进程受阻时,如果式中的对数的底不都相同,则宜用换底公式,统一底数.

方法一,都换成以 10 或 e 为底;

方法二,若只有两种“底数”,也可以换为其中出现次数较多的那一种.

解对数方程,一定要检验,因为,过程中若利用了“对数性质”,常常改变了真数式的允许值范围.

(八) 再次强调,随时“数形结合”

解一道有一定难度的题目,审题、弄通题目设定的情景,是向正确方向迈步的前提. 而“数形结合”,恰恰能为此提供最好的服务(请见本书第三篇综合练习中的第 24 题中的分析过程). 而且,数形结合本身,也是解出一些题目的具体方法,请见本书第一篇第 4 章三的例 19、例 20、例 26 的分析,和第一篇第 3 章二(四).

# 第 8 章 三角函数、三角变换、反三角函数与三角方程

## 一、学习指导

在初等数学分析时,常常将这些内容归为一科:三角学. 因为,它最初产生于航海中的测量需要,其目标是通过解三角形实现测量计算的目的. 后来,三角函数作为工具,在更广的领域有所应用. 现行课本把它归在高中代数里.

### (一) 如何记忆好众多的公式

作为工具,自然有许多公式. 在高中课本上就列出了 80 多个. 要想使它们在解题时发挥工具的作用,必须熟记它们. 如何解决这个问题呢? 有人说,熟能生巧,多练多用,自然而然就熟了,但事半功半了. 能不能事半功倍呢? 能!

#### 1. 编组

第一组 任意角,用在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内和它终边相同角表达的计算公式;角度制与弧度制互化公式,2 个.

第二组 三角函数定义式,6 个.

第三组 同角的三角函数间关系式,8 个.

第四组 诱导公式,36 个.

第五组 正、余弦函数最小正周期计算公式,2 个.

第六组 和、差、倍、半角公式,21 个.

第七组 万能公式,3 个.

第八组 和差化积、积化和差公式,8 个.

第九组 涉及反三角函数的公式,8 个.

第十组 最简单三角方程的解,4 个.

其中公式数目较多的组,再按函数名称记忆. 数目最多的第四组,还可以先按角的终边与  $y$  轴、 $x$  轴的关系,分为两大类.

#### 2. 理解了的东西,才能更好地记忆它

这里说理解,有两层意思:

(1) 熟知它的推导过程;

(2) 着眼于联系与区别,发现特点,总结规律,简化记忆.

对三角函数的理解和记忆,离不开直角坐标系. 例如,“正”字打头的三角函数是一族,它们和“ $y$ ”患难与共,“余”字族则和“ $x$ ”共命运. 这样,前述第二组、第三组共 14 个公式,就易于轻松地分清了.

比如,  $\operatorname{ctg} \alpha$  当然等于  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , 因为,  $\operatorname{ctg} \alpha$  和  $\cos \alpha$  都是“余”族,那么,  $\operatorname{csc} \alpha$  为什么是  $\frac{1}{\sin \alpha}$  呢? 乃是因为,“割”是某个“弦”的倒数,把倒数喻为互相排斥,当然不是本“族”内的弦了. 而“割”方等于“切”

方加1时,又是平等关系,自然,又  $\csc^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$  了.

基于对“正”- $y$ 、“余”- $x$ 关系的认识,不难对于第四组36个诱导公式(若把正割、余割算上,共54个公式)归纳为:

(1)  $\alpha = 180^\circ \pm \alpha', 360^\circ \pm \alpha'$ 时的三角函数,取 $\alpha'$ 的同名函数,符号看象限;

(2)  $\alpha = 90^\circ \pm \alpha', 270^\circ \pm \alpha'$ 时的三角函数,取 $\alpha'$ “余名”(指正弦、余弦、正切、余切、正割、余割互为“余名”函数),符号看象限.

这是因为,如果不考虑旋转方向,在“归纳(1)”中, $\alpha'$ 与 $\alpha$ 终边重合,始边都在 $x$ 轴上,如果撇开符号不谈, $\alpha'$ 与 $\alpha$ 有共同的 $y$ 及 $x$ ,当然,构造的各三角函数是同名的;但在“归纳(2)”中, $\alpha'$ 与 $\alpha$ 终边重合,始边却相差 $90^\circ$ , $y$ 与 $x$ 恰好互换了位置.于是,正弦变为了余弦,余弦变为了正弦……

再如,统观第六组中和、差、倍角正、余弦展开式及第八组共16个公式,会发现,当两个角的弦相乘时,与余弦有关时,总是清一色的正弦,或清一色的余弦,而与正弦有关时,则总是正、余弦搭配;并且,在符号和顺序上,也有规律……悉心总结的规律,只要不背离原理,尽可能揭示原理,总会有益于记忆.

(二) 多熟知一些常用关系式,有益于变形时灵活思路

例如  $1 \pm \sin \alpha = \left( \sin \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2$ ,

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \pm \alpha \right) = \frac{1 \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha \pm \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left( \alpha \mp \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

(三) 初学弧度制,一定要“糊涂一阵子”吗

“弧度制是糊涂制”,这是北京地区部分高一同学的诙谐.

“糊涂了”的原因,大概是从小学起就没有深入弄懂度量过程的步骤,没仔细弄清记录度量结果的方式是“量数+(度量)单位”.

量一根绳长,用1尺长的木棍去截,整2个棍长,记绳长2尺;用1米长的铝杆去量,绳长只及铝杆的三分之二,则记绳长为 $\frac{2}{3}$ 米.

采取角度制,是用单位角来度量,把一个周角分成360等份,以其1份为度量单位“度”,记做“°”,如果被度量的角内部可以放入 $n$ 个“1°角”(顶点重合),那么记这个角是 $n^\circ$ .

弧度制,是用单位弧来度量.这样做的根据是,在同圆中,相等的弧所对的圆心角相等,把被度量的角放在圆心角的位置后,以怎样的弧作单位呢?以弧长等于半径长的弧作为度量单位“弧度”.用它去“截”被度量的圆心角所对的弧,量数是多少,就记这段弧,也是这个被度量的角是多少弧度.

圆周角所对的弧长是 $2\pi R$ ,那么,用弧度制的“单位弧”去截,量数便是 $2\pi$ ,于是,1周角是 $2\pi$ 弧度.这样就得到了角度制和弧度制的换算关系  $360^\circ = 2\pi \text{ 弧度} \Leftrightarrow 1^\circ = \frac{\pi \text{ 弧度}}{180} \approx 0.01745 \text{ 弧度} \Leftrightarrow 1 \text{ 弧度}$

$$= \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

为简便计,省略弧度两字,由于度量角只有两种量制,省略不会引起误会.从而使角的集合和实

数集合  $R$ , 建立了“到上”的一一映射.

如同把 21 尺换算为米时, 是乘以 1 米/3 尺, 和把 5 米换算为尺时, 是乘以 3 尺/1 米一样. 把度化为弧度时, 只要乘以  $\frac{\pi}{180^\circ}$ , 把弧度化为角度时, 只要乘以  $\frac{180^\circ}{\pi}$ .

如是, 学弧度制, 一刻也不会“糊涂”.

(四) 从函数  $y = \sin x$  的图像, 得到函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, x \in R$ ) 的图像

课本上给出了一种分析(略).

还可以这样分析: 先把  $y = \sin x$  ( $x \in R$ ) 的图像上所有点的横坐标缩短 ( $\omega > 1$ ) 或伸长 ( $0 < \omega < 1$ ) 到原来的  $\frac{1}{\omega}$  倍(纵坐标不变), 再把所得各点向左 ( $\varphi > 0$ ) 或向右 ( $\varphi < 0$ ) 平行移动  $\frac{|\varphi|}{\omega}$  个单位, 再把所得各点的纵坐标伸长 ( $A > 1$ ) 或缩短 ( $0 < A < 1$ ) 到原来的  $A$  倍, 就得到了函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $a > 0, \omega > 0, x \in R$ ) 的图像.

两种分析都熟悉, 有利于解决各种条件下的题目.

(五) 数形结合

三角函数的数形结合, 应能达到对于一个三角函数的问题, 在三种图(定义三角函数的坐标平面, 定义三角函数的单位圆, 三角函数图像及反三角函数图像)上作出解释. 并选出其中最简捷明了者.

(六) 关于三角方程解集的表达形式

同一个三角方程的解集, 由于解法不同, 表达形式可能差异很大, 不必强求统一. 但探求统一的尝试, 是一种很好的变形训练.

## 二、解题思考方法小结

(一) 证明恒等式的一般方法

方法一: 从复杂端入手, 化向简单端

这当然表明, 时刻瞄着简单端这个目标去变形复杂端, 例如, 改造角度, 变换三角函数名称, 等等.

方法二: “中途相遇”

如果等式两端式子的繁简状况相近, 或从一端入手变形的中途受阻, 那么可以暂时搁置, 再从另一端入手变形, 向它靠拢.

方法三: 整体变形, 寻求使欲证等式成立的充分条件

这是在高中代数第二册才学习的称做分析法的证明方法.

对于高一同学, 可以把这个方法改造成“整体变形到一个显然成立的等式时, 反写回去”.

一般情况下, 用方法一和方法二困难时, 再考虑方法三.

例 1 求证  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

证法一 对于掌握了前述补充公式  $1 \pm \sin \alpha = \left( \cos \frac{\alpha}{2} \pm \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2$  的同学, 本题可以用上述第 2 种方法证出. 因为

$$\begin{aligned}\text{左} &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}, \\ \text{右} &= \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

所以, 左 = 右.

**证法二** 对于不熟悉上述补充公式的同学, 用“分析法”, 即逆推分析, 易于思考.

欲使  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$  成立,

只需  $\cos \alpha (1 + \sin \alpha) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \alpha (1 + \sin \alpha)$  成立 (因为本章约定, 给出的分式的分母

都不为零).

即只需  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  \* 成立.

但 \* 式显然成立, 故欲证等式成立.

**证法三** 对于尚未学习分析法证明方法的高一同学, 把上面的分析过程反写回去, 即完成证明.

由  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ , 当  $\cos \alpha$  及  $1 + \sin \alpha$  都不为零时,

有 
$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)},$$

得 
$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

**证明** 反写回去时, 原来等式两边加(减)某式, 现在则两边减(加)该式; 原来等式两边乘(除)某式, 现在两边除(乘)该式.

## (二) 证明“在一定条件下成立的恒等式”的一般方法

例如  $\alpha, \beta, \gamma$  均为锐角, 并有

$$\sin \alpha + \sin \gamma = \sin \beta,$$

$$\cos \beta + \cos \gamma = \cos \alpha,$$

求证  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$ .

一些人把这种问题, 称为证明“条件等式”.

### 1. 掌握一般思考规律

(1) 对已知条件顺推分析, 进行加工, 导向结论等式;

(2) 对结论逆推分析, 归结到已知条件上;

(3) 同时进行上述两个方面的分析, 使之在中途相遇.

对于有一定难度的题目, 宜采用(3)的思考. 无论采取哪种方法, 都须避免盲目性, 而要向着欲达目标的大方向变形和采取步骤.

例如上面所举的例子, 由于注意到欲证结论中没有  $\gamma$ , 于是, 对已知条件加工变形时, 宜围绕如何消去  $\gamma$  进行.

## 2. 积累特定情况下的具体规律

例如,已知条件是三角函数间的关系,而结论却是角之间的关系.如上面所举例.

这时,宜对结论中的角取适当的三角函数,把问题转化为从函数的关系式去证明函数的关系

式.上面所举例,宜把结论变形为  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$  后,去证明  $\cos(\beta - \alpha) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .

类似的规律很多,请读者注意积累.

### (三) 解“所涉及角度是三角形内角”的有关三角函数的问题

#### 1. 熟悉常用工具

(1)  $A + B + C = \pi$ , 即  $A = \pi - (B + C)$ ,  $B + C = \pi - A, \dots$ .

(2)  $2A + 2B + 2C = 2\pi$ , 及类似(1)的变形关系式.

(3)  $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ , 及类似(1)的变形关系式.

(4) 正弦定理的各种形式,特别是

$$a = 2R \cdot \sin A, \quad b = 2R \cdot \sin B, \quad c = 2R \cdot \sin C$$

(5) 余弦定理的各种形式.

(6) 7个常用的三角形面积公式.

#### 2. 对于“角”的处理方法

(1) 当三角形的三个内角,例如  $A, B, C$  在已知式及欲证式中的地位对称时,一般地,先利用上述“1”的(1)、(2)、(3)中适宜的关系,换掉  $A, B, C$  中的任何一个,变形到适当时机,再代换回来.

(2) 当它们的地位不对称时,一般地,把居于特殊位置的角利用“常用工具”的(1)、(2)、(3)换掉.

#### 3. 对于边的处理方法

(1) 涉及边的二次幂的和、差时,优先试试余弦定理.

(2) 当涉及等式的各项关于  $a, b, c$  同次时,或涉及分式的分子、分母关于  $a, b, c$  同次时,一般地,试试用正弦定理  $a = 2R \cdot \sin A, \dots$ ,把边都换掉,以便于充分发挥三角函数公式的作用.

当然,根据具体问题的特点,也有相反的少数题目.

**例2** 已知 在  $\triangle ABC$  中,  $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3\sin A \cdot \sin B$ .

求证  $A + B = 120^\circ$ .

**分析** 应用本章二(二)中的2所示具体规律及本章二(三)2(2)所述方法,宜把结论中的角之

间关系转化为  $\cos(A + B) = -\frac{1}{2}$  或  $\sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  和  $\cos C = \frac{1}{2}$  或  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**证明** 由正弦定理,已知等式可为

$$\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right)\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right) = 3 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R},$$

即  $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$ , 整理得

$$a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

由余弦定理,得

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}. \quad (\text{以下略})$$

### (四) 解好化简问题

解好涉及三角函数的化简问题的核心,是善于观察式子中三角函数名称和角的结构、关系特



点,灵活选用公式进行变形.

归纳局部规律,例如:

“久攻不下”时,试试把式中的“切”、“割”都化为“弦”;

不要忽视了式中的“1”,它可以是  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ ,还可以是  $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ ;  $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$ ;  $\csc^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha$ ;  $\sin\alpha \cdot \csc\alpha$ ;  $\cos\alpha \cdot \sec\alpha$ ;  $\sin\frac{\pi}{2}$ ;  $\cos 0$ ;  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$  等.

#### (五) 积累解“求含有三角函数式子的最大(小)值”问题的思考规律

例如,把式子变形为  $A\sin(f(x)) + B$  或  $A\cos(f(x)) + B$  的形式,其中的  $f(x)$  既可以是一元变量的表达式,也可以是二元或多元变量的表达式,例如变形为  $-3\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + 2$ . 然后,利用正(余)弦函数的有界性( $[-1, 1]$ ),求出式子的最大、最小值. 当然,还要结合考虑  $f(x)$  的取值范围. 当  $f(x)$  是在一定闭区间或半闭区间内取值时,变形为  $\operatorname{tg}(f(x))$  或  $\operatorname{ctg}(f(x))$  的形式亦可.

以上,事实上是把式子变形为  $\sin(f(x))$  或  $\cos(f(x))$  的一次函数. 那么,式子变形为一个分式,分子是常量,分母是  $\sin(f(x))$  或  $\cos(f(x))$  的一次函数,亦可达到目的.

把式子中的三角函数名称和角度统一后,换元为二次函数,求二次函数的最大(小)值,这时,务必注意解出“元”的取值区间.

#### (六) 安排好求“ $2\arcsin\frac{3}{5}$ 和 $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{2}{3}$ 及 $\arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{4}{5}$ 的值”类型题目的步骤

解这类题目,思考上难度不大,关键是步骤上要有条有理,避免差错.

以求  $2\arcsin\frac{3}{5}$  的值为例.

第一步:设  $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$ .

第二步:把  $\alpha$  确定在尽可能小的范围内,  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ .

第三步:写出  $\alpha$  的最容易算出的三角函数值,  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ .

第四步:根据  $\alpha$  的范围,求出  $\alpha$  的其他三角函数值,本题需要的是  $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ .

第五步:确定题目所求角的范围,  $\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ .

第六步:用相应的和、差、倍、半角公式(本题是  $2\alpha$ ,故选倍角公式),求出所求角( $2\alpha$ )的一个适宜的三角函数值.

第七步:返回得到“所求角”的值.

这里所说一个“适宜的”三角函数值,是指对于所求角的已确定的范围,它的这个三角函数值只能确定一个角.

例如,若由上述“第五步”所确定的“所求角”的范围是  $[0, \pi]$ ,则不宜求它的正弦值. 而“所求角”的范围是  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  时,则不宜求它的余弦值.

而对于本例,由于确定了  $\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$  这个较小的范围,无论求它的哪个三角函数值,都将惟一确定一个  $2\alpha$  值(当求出的三角函数值不是常用特殊值时,可以用反三角函数的形式,表示“所求

角”).由此可见,在“第二步”中把 $\alpha$ 确定在一个“尽可能小的范围内”,是十分必要的.

下面以求  $\arccos \frac{1}{4} - \arcsin \frac{4}{5}$  的值为例,写一次解题的全过程.

例3 求  $\arccos \frac{1}{4} - \arcsin \frac{4}{5}$  的值.

解 设  $\alpha = \arccos \frac{1}{4}$ ,

$$\because 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \therefore \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{且 } \cos \alpha = \frac{1}{4}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

设  $\beta = \arcsin \frac{4}{5}$ ,

$$\because \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{3}. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{且 } \sin \beta = \frac{4}{5}, \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{由 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 可得 } 0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}.$$

(此时,选 $\alpha - \beta$ 的任意一个三角函数,都可达到目的)

$$\because \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{15} - 4}{20},$$

$$\therefore \arccos \frac{1}{4} - \arcsin \frac{4}{5} = \alpha - \beta = \arcsin \frac{3\sqrt{15} - 4}{20}.$$

(七) 关于求“ $\operatorname{tg}\left(2\arcsin \frac{3}{5}\right)$ 的值、 $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{2}{3}\right)$ 的值、 $\sin\left(\arccos \frac{1}{4} - \arcsin \frac{4}{5}\right)$ 的值”类型题目的方法

显然,解这类题目的前五个步骤,和上述(六)中的前五步完全相同,然后再求所要求的那个三角函数值即可.

例如,对于求  $\sin\left(\arccos \frac{1}{4} - \arcsin \frac{4}{5}\right)$  的值,只要到上面解法过程的\*号式,即告完成.

### (八) 解“简单三角方程”的一些思路

第一,准备必要的基础.

能熟练地解出各类最基本的三角方程.例如,  $\sin f(x) = a$ ,  $\cos f(x) = a$ ,  $\operatorname{tg} f(x) = a$ ,  $\operatorname{ctg} f(x) = a$  型;  
 $\sin f(x) \pm \sin \varphi(x) = 0$ ,  $\sin f(x) \pm \cos \varphi(x) = 0$ ,  $\cos f(x) \pm \cos \varphi(x) = 0$  型;  $a \sin f(x) \pm b \cos \varphi(x) = 0$  型;  
 $\sin f(x) \pm \cos f(x) + c = 0$  型……

第二,移项使方程右端为零后,在左端通过因式分解,归结为本章一(一)1中的各型最基本的三角方程.

第三,当方程中三角函数的次数较高时,逆用倍角公式降次.

第四,把方程中各三角函数的角统一,再把各三角函数名称统一,换元为一元代数方程.

## 第9章 数列与数学归纳法

### 一、学习指导

#### (一) 准确理解概念

本章概念不多,易于掌握.

##### 1. 数列的定义

数列是按一定顺序排列的一列数. 不要定义为:按一定规律排列的一列数. 因为,规律是什么? 写定了,就是规律. 并不一定必须像等差或等比数列那样,事先有个看得见摸得着的规律.

##### 2. 数列是一种函数

数列是一种函数(离散型),项的序号是它的自变量,“项”是它的函数值.

##### 3. 通项公式

通项公式就是数列这个函数的解析式. 如同不是每个函数的解析式都能写出一样,也不是每个数列的通项公式都易于写出.

##### 4. 定义式和通项式

一个具体数列的定义表达式和它的通项表达式,是既有联系,又互相区别的两个概念.

通项表达式是由定义表达式推导出来的,即通项表达式是定义的必要条件,但不一定是充分条件,通项公式不一定能推导出定义表达式. 所以,判定一个数列是否属于某种类别的数列时,应从定义出发.

等差数列的通项公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , 与它的定义表达式  $a_n - a_{n-1} = d$  (或  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ ) 是等价的,即互为充分必要条件. 它的前  $n$  项和的表达式  $S_n = an^2 + bn$  和它们也是等价的,其中  $a = \frac{d}{2}, b = a_1 - \frac{d}{2}$ .

但等比数列的通项表达式  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  ①, 和它的定义表达式  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$  (或  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ) ②,

则不是等价的. 表达式  $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$  ③和定义表达式也不是等价的.

所以,当证明了一个数列满足了①和③时,并不能下这个数列是等比数列的结论. 因为这时,并不排斥  $a_1 = 0$  或  $q = 0$ . 而  $a_1 = 0$  或  $q = 0$  的数列,不符合等比数列定义.

#### (二) 注意几个细节

第一,前  $n$  项和公式  $S_n = an^2 + bn + c$  所代表的数列  $\{a_n\}$ , 当  $c = 0$  时,  $\{a_n\}$  是等差数列;当  $c \neq 0$  时,  $\{a_n\}$  从第2项起,才是等差数列.

这是什么道理? 本书将在本章的二(四)中进行解释.

第二,写等比数列前  $n$  项和公式  $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}$  时,一定不要遗漏“其中,  $q \neq 1$ ”,并且附上,  $q = 1$  时,  $S_n = na_1$ .

特别对于一些证明,两种情况都考虑到,才不失严谨.

第三,等差数列的前  $n$  项和公式,有两种表达形式:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ 和 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

这两种表达式都要熟练掌握,才利于应用时的分析.

### (三) 掌握好数学归纳法

数学归纳法是高中数学的重点,把它掌握好,又是难点.为了学好这个知识,请读者详见本书在第一篇第4章四中所做的示范.

## 二、解题思考方法小结

### (一) 求数列的通项公式时两个细节的处理

第一,数列各项的符号“正负相间”.

先按各项都不是负项求出表达式后,乘以 $(-1)^n$ (首项为“-”)或乘以 $(-1)^{n+1}$ (首项为“+”).

第二,数列各项,有按一定间隔出现的“零”.

请见本书第一篇第5章二(三).

### (二) 解有关等差、等比数列题目的一般思考过程

在等差数列中,有 $a_1, a_n, d, n, S_n$ 共5个量,它们之间已经具有形式上是3个而事实上是2个的关系式: $a_n = a_1 + (n-1)d, S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$ (其中任意两个可以导出另一个).

这样,如果要把5个量都求出来,只要再由题意分析出3个条件,列出3个方程即可.由第二篇I七“列方程组的方法”还可知,如果题目只求5个量中的某几个,需再列出的方程的个数可以少于3个.

解等比数列的问题,情况类似.

### (三) 对于一些具体问题,要考虑途径如何更简捷

#### 1. 弄透具体问题的情景

在对等差或等比数列的理解形象化、生动化的基础上,把具体问题的情景弄透彻,以选择简捷途径.

**例1** 已知 一个等差数列的前5个偶数项之和比前5个奇数项之和小 $\frac{5}{3}$ .并且最后一项是-100,

求 这个数列的后200项的和.

**分析** 如果不做深入的透析,只要遵循上面“二(二)”所述的列方程组的方法,本题是可以想出具体解法的.

从前200项的和减去前100项的和即达目的.为了分别求这两个和,需求出 $a_1$ 和 $d$ ,为此,利用 $a_{200} = -100$ 和 $\frac{5}{3}$ 这个条件,列出方程组,可以解出 $d = -\frac{1}{3}$ 和 $a_1 = -33\frac{2}{3}$ ,从而解出本题,但过程比较烦琐.

如果分析得深入一些,注意到前5个偶数项之和比前5个奇数项之和小 $\frac{5}{3}$ ,应立即想像出如图9-1所示的情景.

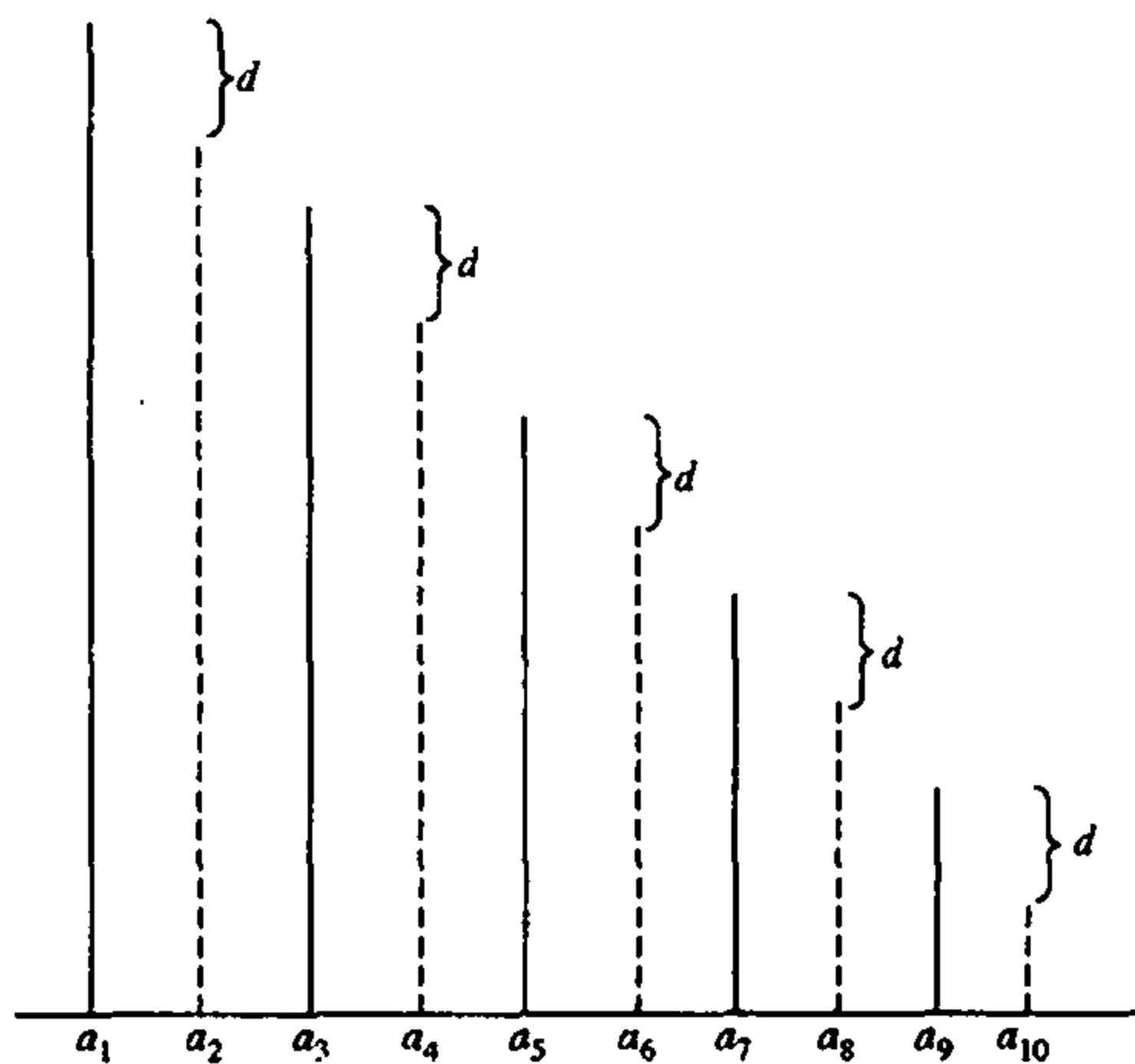


图 9-1

这样立即可知  $5d = -\frac{5}{3} \Rightarrow d = -\frac{1}{3}$  .

若再灵活一点,由于等差数列逆序后仍为等差数列、公差变为原公差的相反数.那么,求原数列的后 200 项时,由于已知末项(即  $a_{200}$ )是  $-100$ ,则可以把  $-100$  作为  $a_1$ ,以  $-d = \frac{1}{3}$  为它的公差,构造一个等差数列,它的前 200 项之和

$$S_{200} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 200 \times (-100) + \frac{200(200-1)}{2} \times \frac{1}{3} = -13366 \frac{2}{3}$$

即为所求.

**例 2** 已知 等比数列中,  $a_6 \cdot a_{15} + a_9 \cdot a_{12} = 30$ , 这个数列共有 20 项. 求 首项和末项之积.

**分析** 如果想先分别求出首项和末项,再把它们相乘,当然很好,但是,此路不通.

因为,根据上面“二(二)”所介绍的方法,如果要把  $a_1, a_n, q, n, S_n$  这 5 个量都求出,需要有 3 个条件,再列 3 个方程,假如  $a_1, a_{20}$  都求出,则 5 个量都可求出.但本题只能列出 2 个方程.

这时,如果把数列构造形象化,不难发现,道路就在眼前,如图 9-2 所示.

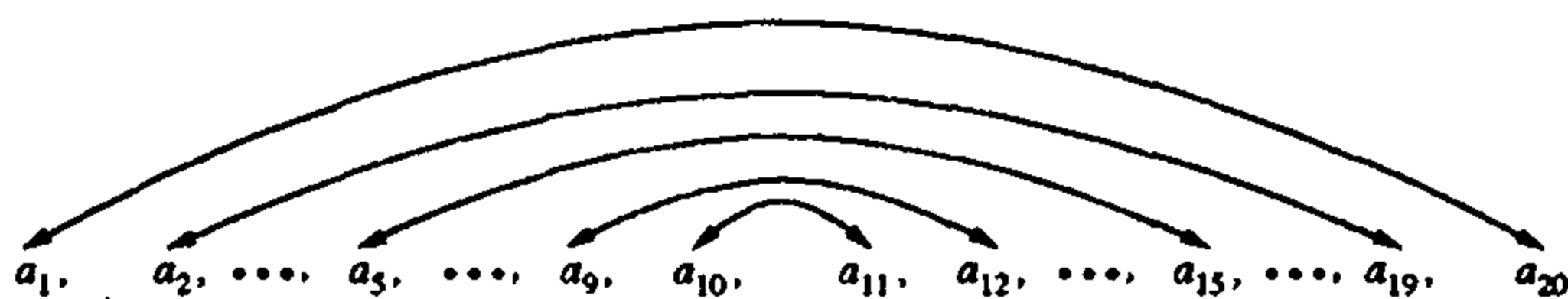


图 9-2

每一对内,都是两个  $a_1$  和 19 个  $q$ ,于是,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_{20} &= a_1^2 \cdot q^{19} = a_1 \cdot q^5 \cdot a_1 \cdot q^{14} = a_1 q^8 \cdot a_1 q^{11} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 q^5 \cdot a_1 q^{14} + a_1 q^8 \cdot a_1 q^{11}) = \frac{1}{2}(a_6 \cdot a_{15} + a_9 \cdot a_{12}) = 15. \end{aligned}$$

## 2. 善用规律

运用“等差数列中,和首末两项距离相等的项之和相等,在等比数列中,则是积相等”这个规律.

上面的例 2,事实上是利用了这个规律中最简单的情况(和首末两端距离相等的项只是两项: $a_1$

和  $a_{20}, a_6$  和  $a_{15}, a_9$  和  $a_{12}$ ).

### 3. 巧设各项

3 个数成等差数列时, 宜对称地设为  $a-d, a, a+d$ . 4 个数成等差数列时, 宜对称地设为  $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ . 以此类推, 这样在各项相加时, 便可消去  $d$ .

类似地, 对于 3 个数成等比数列, 则宜设为  $\frac{a}{q}, a, aq$ ; 4 个数成等比数列, 则宜设为  $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3$ ; 等等.

### 4. 学会转化

有些数列求和问题不能直接利用等差、等比数列求和公式去求和时, 要学会转化的方法. 我们从对下面例题的分析中, 可以体会到如何学会转化的方法.

**例 3** 求下列各数列的前  $n$  项和:

(1)  $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{8}, \dots$ ;

(2)  $5, 55, 555, \dots$ ;

(3)  $1, 3x, 5x^2, 7x^3, \dots$ ;

(4)  $\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5}, \frac{1}{5 \times 7}, \frac{1}{7 \times 9}, \dots$ ;

(5)  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ ;

(6)  $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots$ .

**解** (1) 转化为等差或等比数列的求和:

$$S_n = (1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1) + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right).$$

(2) 各项分别含有因子  $1, 11, 111, \dots$  时, 分别乘以  $\frac{9}{9}$  后, 再利用  $\underbrace{99 \dots 9}_{n \uparrow} = 10^n - 1$  进行转化.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5}{9}(10 - 1) + \frac{5}{9}(10^2 - 1) + \dots + \frac{5}{9}(10^n - 1) \\ &= \frac{5}{9}(10 + 10^2 + \dots + 10^n) - \frac{5}{9}n. \end{aligned}$$

(3) 各项乘以适当辅助因子后, 与原式相减, 进行转化.

设  $S_n = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots + (2n - 1)x^{n-1}$ , 两边同乘以  $x$  得

$$xS_n = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots + (2n - 3)x^{n-1} + (2n - 1)x^n,$$

两式相减, 得

$$(1 - x)S_n = 1 + 2(x + x^2 + \dots + x^{n-1}) - (2n - 1)x^n,$$

然后, 分  $x \neq 1$  及  $x = 1$  两种情况, 分别求出  $S_n$ .

(4) 把各项变为异号两项之和, 在求各项和的过程中, 先两两消去(裂项相消法).

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

(5) 利用已知恒等式.

设  $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ,

由  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ .

设  $x=1,2,3,\cdots,n$ , 得

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1,$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1,$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1,$$

.....

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

迭加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n,$$

即

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n,$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(6) 善于抓住项的构造特点, 适当分解后, 转化为等差数列或等比数列的求和, 或已掌握其求和方法的其他数列(如本题(5)中类型的数列)的求和.

$$S_n = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \cdots + n(n+1)$$

$$= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \cdots + (n^2 + n)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

答案略.

#### 5. 几种特殊情况

(1) 一个等差(等比)数列的奇数项, 仍组成一个等差(等比)数列, 首项不变, 新公差为原公差的 2 倍(新公比为原公比的二次幂); 一个等差(等比)数列的偶数项, 也组成一个等差(等比)数列, 新首项为“原首项 + 原公差”(原首项  $\times$  原公比), 新公差为原公差的 2 倍(新公比为原公比的二次幂).

(2) 一个等差(等比)数列逆序后, 仍为等差(等比)数列, 新、原公差互为相反数(新、原公比互为倒数).

(3) 一个等差数列各项的  $k$  倍, 组成一个等差数列, 新公差是原公差的  $k$  倍; 一个等比数列各项的  $k$  次幂, 组成一个等比数列, 新公比是原公比的  $k$  次幂.

(4) 一个等差数列, 由始至尾, 截成项数相同的若干段后, 各段内诸项之和, 组成新的等差数列, 若每段含有  $k$  项, 则新公差为原公差的  $k$  倍.

(5) 一个等比数列, 由始至尾, 截成项数相同的若干段后, 各段内诸项之积, 组成新的等比数列. 若每段内含有  $k$  项, 则新公比为原公比的  $k$  次幂.

#### (四) 掌握一个关系: $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

第一, 利用这个关系, 可以在已知  $S_n$  (前  $n$  项和的表达式) 的情况下, 求出这个数列的自第 2 项开始的通项公式  $a_n$ , 第 1 项则为  $a_1 = S_1$ , 把  $n=1$  代入  $S_n$  即得.

第二, 证明本章一(二)第一细节的结论.

对于前  $n$  项和为  $S_n = an^2 + bn + c$  的数列  $\{a_n\}$ , 它从第 2 项起,  $a_n = S_n - S_{n-1} = 2an - a + b \Rightarrow a_n - a_{n-1} = (2an - a + b) - [2a(n-1) - a + b] = 2a$ , 符合等差数列定义.

当  $c=0$  时,  $a_1 = S_1 = a + b$ , 此时  $a_2 - a_1 = (2a \times 2 - a + b) - (a + b) = 2a$ , 则  $a_1$  可以作为这个等差数列的第 1 项, 因而, 整个数列是等差数列.

当  $c \neq 0$  时,  $a_1 = S_1 = a + b + c$ , 此时,  $a_2 - a_1 = 2a - c$ , 不等于从第 2 项开始的等差数列的公差  $2a$ .

因而,这个数列仅从第 2 项开始为等差数列.

(五) 避免一个“疏忽”

计算出  $q^2 = m$  ( $m$  为非负常数) 后,  $q = \pm \sqrt{m}$ , 不要遗漏了  $-\sqrt{m}$ .

(六) 由递推公式求通项公式的一些方法

下面介绍一下由数列  $\{x_n\}$  的递推公式  $ax_n + bx_{n-1} + c = 0$  ( $n \geq 2$ ), 或  $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0$  ( $n \geq 3$ ), 求数列  $\{x_n\}$  的通项公式的一些方法.

1. 对于一阶递推公式  $ax_n + bx_{n-1} + c = 0$  ( $n \geq 2$ )

方法一 换元法.

把已知的递推公式适当变形, 转化为一个关于新“元”的等差或等比数列的通项表达式, 然后返回为原数列的通项表达式.

具体过程, 请见本篇 I 六中的例 8.

换元法的核心, 是寻求适宜的“元”, I 六中的例 8 的解法是一种寻找方式; 还可以(以这个例 8 为例)先假定

$$a_n = b_n + x (\{b_n\} \text{ 为等比数列}), \tag{①}$$

又由已知, 有

$$a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}, \tag{②}$$

把①代入②, 得

$$\begin{aligned} b_n + x &= \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}, \\ b_n &= \frac{2}{5}a_{n-1} - x + \frac{3}{5} = \frac{2}{5}a_{n-1} - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x - x + \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5}(a_{n-1} - x) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}x\right) = \frac{2}{5}b_{n-1} + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}x\right). \end{aligned}$$

而  $\{b_n\}$  为等比数列, 于是有

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

此时

$$b_n = \frac{2}{5}b_{n-1} \Leftrightarrow a_n - 1 = \frac{2}{5}(a_{n-1} - 1).$$

于是

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

以下同例 8 解法的过程.

方法二 迭代法.

把递推公式变形为  $a_n = pa_{n-1} + q$  ( $p, q$  为常数) 的形式后, 累次(指利用前次得到的结果)代入  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ , 得到  $a_n = f(n)$ .

仍以“换元法”中的例 8 为例.

把  $a_1 = 3$ , 及  $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}$ , 累次代入

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}, \\ \text{得 } a_2 &= \frac{2}{5} \times 3 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 3, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{2}{5} \left( \frac{3}{5} \times 3 \right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \left( \frac{2}{5} \times 3 + 1 \right), \\
a_4 &= \frac{2}{5} \left[ \frac{3}{5} \left( \frac{2}{5} \times 3 + 1 \right) \right] + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{2}{5} + 1 \right], \\
a_5 &= \frac{2}{5} \left\{ \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{2}{5} + 1 \right] \right\} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^3 + \left( \frac{2}{5} \right)^2 + \left( \frac{2}{5} \right) + 1 \right], \\
&\dots\dots \\
a_{n-1} &= \frac{2}{5} \left\{ \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-4} + \left( \frac{2}{5} \right)^{n-5} + \dots + \frac{2}{5} + 1 \right] \right\} + \frac{3}{5} \\
&= \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-3} + \left( \frac{2}{5} \right)^{n-4} + \dots + \frac{2}{5} + 1 \right], \\
a_n &= \frac{2}{5} \left\{ \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-3} + \left( \frac{2}{5} \right)^{n-4} + \dots + \frac{2}{5} + 1 \right] \right\} + \frac{3}{5} \\
&= \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2} + \left( \frac{2}{5} \right)^{n-3} + \left( \frac{2}{5} \right)^{n-4} + \dots + \frac{2}{5} + 1 \right] \\
&= \frac{3}{5} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2} + \frac{1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2}}{1 - \frac{2}{5}} \right] \\
&= \frac{9}{5} \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2} + 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2} = \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2} \left( \frac{9}{5} - 1 \right) + 1 \\
&= \left( \frac{2}{5} \right)^{n-2} \frac{2}{5} \times 2 + 1 = 2 \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1} + 1.
\end{aligned}$$

**方法三 迭加法.**

把递推公式变形为  $a_n = pa_{n-1} + q$  ( $p, q$  为常数) 的形式, 把  $a_{n-1}, a_n$  分别换写为  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$  后, 得到  $n-1$  个等式, 从最后的第二个等式起, 为了消去中间项, 乘以适当的常数, 然后, 把这些等式相加, 消去所有从  $a_2, a_3, \dots$  到  $a_{n-1}$  这些中间项, 从而得到  $a_n = f(n)$  ( $a_1$  为已知).

仍以“换元法”中的例 8 为例, 由已知得

$$a_2 = \frac{2}{5}a_1 + \frac{3}{5}, \quad (1)$$

$$a_3 = \frac{2}{5}a_2 + \frac{3}{5}, \quad (2)$$

$\dots\dots$

$$a_{n-1} = \frac{2}{5}a_{n-2} + \frac{3}{5}, \quad (n-2)$$

$$a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}. \quad (n-1)$$

为了由  $(n-1)$  式和  $(n-2)$  式中消去  $a_{n-1}$ , 应当有  $(n-2)$  式  $\times \frac{2}{5} + (n-1)$  式; 之后, 为由所得新等式和  $(n-3)$  式中消去  $a_{n-2}$ , 又应把  $(n-3)$  式乘以  $\left(\frac{2}{5}\right)^2$  后和新等式相加, 以此类推, 得下列一组  $n-1$  个等式.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} a_2 = \left(\frac{2}{5} a_1\right) \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} + \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}, \quad (1)'$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} a_3 = \left(\frac{2}{5} a_2\right) \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} + \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3}, \quad (2)'$$

.....

$$\left(\frac{2}{5}\right) a_{n-1} = \left(\frac{2}{5} a_{n-2}\right) \left(\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right), \quad (n-2)'$$

$$a_n = \frac{2}{5} a_{n-1} + \frac{3}{5}. \quad (n-1)$$

$(1)' + (2)' + \cdots + (n-2)' + (n-1)$ , 得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right) + \cdots + \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} + \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} + \left(\frac{2}{5} \times 3\right) \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} \\ &= \frac{3}{5} \left[1 + \frac{2}{5} + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}\right] + 3 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} \\ &= \frac{3}{5} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{5}}\right] + 3 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 1. \end{aligned}$$

有人认为,以上用“迭代法”、“迭加法”求通项公式的过程不严谨,对于得到的结论,还需用数学归纳法给予严格证明. 另一种看法认为,以上“迭代法”、“迭加法”的推导过程是严格的.

2. 对于二阶递归公式  $ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} = 0 \ (n \geq 3)$

方法一 换元法—迭加法.

例4 已知 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a, a_2 = b, 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0 \ (n \geq 1, n \in N)$ .

求 数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

解 由  $3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$ , 得

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n),$$

且

$$a_2 - a_1 = b - a.$$

则数列  $\{a_{n+1} - a_n\}$  是以  $b - a$  为首项,  $\frac{2}{3}$  为公比的等比数列, 于是

$$a_{n+1} - a_n = (b - a) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

把  $n = 1, 2, 3, \cdots, n$  代入, 得

$$a_2 - a_1 = b - a,$$

$$a_3 - a_2 = (b - a) \cdot \frac{2}{3},$$

$$a_4 - a_3 = (b - a) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = (b - a) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

把以上各式相加, 得

$$\begin{aligned}
 a_n - a_1 &= (b - a) \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \right] \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} (b - a).
 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \left[ 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] (b - a) + a = 3(a - b) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3b - 2a.$$

**方法二 特征根法.**

对于由递归公式  $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, a_1 = \alpha, a_2 = \beta$  给出的数列  $\{a_n\}$ , 方程  $x^2 - px - q = 0$ , 叫做数列  $\{a_n\}$  的特征方程.

若  $x_1, x_2$  是特征方程的两个根, 当  $x_1 \neq x_2$  时, 数列的通项为  $a_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1}$ , 其中  $A, B$  由  $a_1 = \alpha, a_2 = \beta$  决定 (即把  $a_1, a_2, x_1, x_2$  和  $n = 1, 2$ , 代入  $a_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1}$ , 得到关于  $A, B$  的方程组); 当  $x_1 = x_2$  时, 数列  $\{a_n\}$  的通项为  $a_n = (A + B)x_1^{n-1}$ , 其中  $A, B$  由  $a_1 = \alpha, a_2 = \beta$  决定 (即把  $a_1, a_2, x_1, x_2$  和  $n = 1, 2$ , 代入  $a_n = (A + B)x_1^{n-1}$ , 得到关于  $A, B$  的方程组).

仍以上例为例.

**解** 数列  $\{a_n\}$ :  $3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0, a_1 = a, a_2 = b$  的特征方程是

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore a_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1} = A + B \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

又由  $a_1 = a, a_2 = b$ , 于是

$$\begin{cases} a = A + B, \\ b = A + \frac{2}{3}B. \end{cases}$$

解得  $A = 3b - 2a, B = 3(a - b)$ .

$$\text{故 } a_n = 3b - 2a + 3(a - b) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

### (七) 解应用问题时, 注意两个细节

等比(等差)数列的应用问题, 主要是涉及“增长”或“减少”的实际问题. 其中, 增长或减少的是具体量时, 应用等差数列的有关公式; 增长或减少的是百分数(或其他形式的分数表达的倍数)时, 应用等比数列的有关公式. 因而思考上难度不大. 容易出的错, 主要在两个细节的处理上.

第一, 应用等差数列公式时, 公差  $d$ , 就是增长量或减少量; 应用等比数列公式时,  $(1 + \text{增长百分数})$  或  $(1 - \text{减少百分数})$  才是公比  $q$ .

第二, 要把项数  $n$  弄准. 例如, “第 5 年”对于“第 1 年”,  $n = 5$ ; “5 年后的产量”, 对于“今年的产量  $a_1$ ”来说, 则是  $a_5$ ; 若“1983 年产量是  $a_1$ ”, 那么, “1987 年产量是  $a_5$ ”, 而不能  $x = 1987 - 1983 = 4$ .

### (八) 下大功夫掌握好“应用数学归纳法进行证明”的解题思考方法

请见本书第一篇第 4 章四中对于这个课题的全面总结(包括它对 7 道例题的分析和说明).

# 第 10 章 不 等 式

## 一、学习指导

### (一) “工欲善其事,必先利其器”

有人说,不等式是高中代数中最难的内容,不仅证明不等式的题目思考难度大,而且,其他的知识,只要和不等式编在一起出题,例如“数学归纳法证不等式”、“复数结合不等式”、“三角函数不等式”、“解析几何中的不等式”,等等,难度就急剧上升.

要掌握好这部分知识,必须一步一个脚印、扎扎实实地学好有关基础知识.

俗话说,“工欲善其事,必先利其器”.本章的“器”,是“不等式性质”、“平均数不等式”、“和、差、积、商绝对值性质”三组公式,怎样达到“锋利”,将在下面的(二)、(三)、(四)中分别讲解.这是第一步.

第二步,准确、熟练地掌握“综合法”和“分析法”两种证明方法.

第三步,积累有关解题思考方法.

### (二) 学好“不等式性质”一组公式

第一,熟知这里的 3 条性质( $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$ ,  $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ ,  $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$ ), 5 个定理、3 个推论的推导和严格证明过程.

这里强调严格证明过程是因为,这些公式从感性上一般易懂,因而不重视其证明.事实上,课本上对它们的证明,为代数证明的严谨做了很好的示范,熟知其每一步,将为自己今后证题严谨,打下良好基础.

第二,分清这些公式哪些是充要的,哪些只是单向的.

#### (1) 充要的

i  $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$ ,  $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ ,  $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$ ;

ii  $a>b \Leftrightarrow b<a$ ;

iii  $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$ ;

iv  $a+x>b \Leftrightarrow a>b-x$ .

#### (2) 只是单方向的

i  $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$ ,  $a>b, c>d \Rightarrow a-d>b-c$ ;

ii  $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$ ,  $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$ ;

iii  $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$ ;

iv  $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in N)$ ;

v  $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n \in N, \text{且 } n>1)$

(3) 在(1)、(2)的基础上,构造几个在解题中常常用到的充要条件.

请详见本书第一篇第 4 章一(二)中例 9 的说明[2]所构造的 4 个充要条件.

### (三) 掌握好“平均数不等式”(又称平均不等式、均值不等式)

第一,从系统的角度,熟知其推导(请详见本书第一篇第 3 章二(三)中例 5 的分析中所列的关系图及随后的分析).

第二,深入理解它的含义.

以“ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  ( $a, b \in R^+$ ), 当且仅当  $a=b$  时, 其中“ $=$ ”号成立为例.

(1) “当且仅当  $a=b$  时, 其中“ $=$ ”号成立”这句话, 并不意味着  $a+b$  的最小值是  $2\sqrt{ab}$  (等价地, 也并不意味着  $\sqrt{ab}$  的最大值是  $\frac{a+b}{2}$ ). 它的道理, 请见本书第一篇第5章二(二)例7的分析. 许多同学解题中的错误根源, 是不了解分析中的这层意思.

(2) 当正数  $a, b$  的和为定值  $R$  (当然  $R > 0$  时),  $\sqrt{ab}$  的值布满了  $(0, \frac{R}{2})$  整个区间, 即  $ab$  的值布满了  $(0, \frac{R^2}{4})$  整个区间;

这个结论的等价命题是, 当  $a, b$  的积为定值  $p$  ( $p > 0$ ) 时,  $a+b$  的值布满了  $(2\sqrt{p}, +\infty)$  整个区间, 即  $(a+b)^2$  的值布满了  $(4p, +\infty)$  整个区间.

对上述结论证明如下:

任取  $k \in (0, \frac{R^2}{4})$ , 则有  $k = \frac{R^2}{4} - d$  ( $d > 0$ ), 即  $k = (\frac{R}{2} + \sqrt{d})(\frac{R}{2} - \sqrt{d})$ , 由于  $k > 0$ , 及  $\frac{R}{2} + \sqrt{d} > 0$ , 所以  $\frac{R}{2} - \sqrt{d} > 0$ .

那么, 当正数  $a = \frac{R}{2} + \sqrt{d}, b = \frac{R}{2} - \sqrt{d}$  时, 满足  $a+b=R$ , 同时,  $ab=k$ .

这样, 利用这个平均数不等式工具, 可以求函数的值域.

以上所有的分析, 同样适用于其他几个平均数不等式.

#### (四) 掌握好“和、差、积、商绝对值性质”公式

积、商绝对值性质

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0),$$

以及不等式绝对值性质  $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$  都易于掌握.

我们应注意以下两点.

##### 1. 全面了解公式

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|, \quad \text{①}$$

事实上是  $||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$  ②

的一种情况, 它还包含着

$$|b| - |a| \leq |a+b| \leq |a| + |b|. \quad \text{③}$$

当约定  $|a| \geq |b|$  时, ①式与②式等价, 才可以不写③式.

公式  $|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$

也有完全类似的情况.

##### 2. 熟知各个“ $=$ ”号何时成立

对于①、②、③式右边的“ $\leq$ ”号, 当且仅当  $a, b$  同号, 或  $a=0$ , 或  $b=0$  时, “ $=$ ”号成立;

对于①式, 左边的“ $\leq$ ”号, 当且仅当  $b=0$ , 或  $a, b$  异号且  $|a| > |b|$  时, “ $=$ ”号成立;

对于②式, 左边的“ $\leq$ ”号, 当且仅当  $b=0$ , 或  $a=0$ , 或  $a, b$  异号时“ $=$ ”号成立.

对于③式, 左边的“ $\leq$ ”号, 当且仅当  $a=0$ , 或  $a, b$  异号且  $|a| < |b|$  时, “ $=$ ”号成立;

对于  $|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$  一组也有3个公式, 类似的分类分析, 请读者进行.

## (五) 掌握运用好“分析法”和“综合法”两种证明方法

### 1. 概念上理解清楚

#### (1) 综合法

从已知条件(可以是已证明过的不等式、等式或以其他命题)出发,运用有关的定理、公式(包括不等式性质)推导出欲证结论的证明方法.

综合法过程的本质,是从已知条件出发,一步步地得出一个个必要条件,直至欲证结论.

#### (2) 分析法

从欲证结论出发,分析使它成立的条件,把问题转化为判定这些条件是否具备,如果能够肯定它们都已具备,那么,可以断言欲证结论成立.

分析法过程的本质,是从欲证结论入手,一步步地寻找一个个的充分条件,直至已知条件或已经证明过的定理、公式、定义、命题或恒等式(包括恒成立的不等式).

### 2. 使用上时机得当

一般地,宜从形式较复杂的一方出发.

对较难的证明,宜从两个方向入手,把“综合法”和“分析法”结合起来.

## (六) 分清“解不等式”和“证明不等式”这两个不同的概念

第一,解不等式是一步步寻求与原不等式有等价关系的不等式(或组),即同解不等式(或组).

第二,证明不等式,利用综合法时,是一步步寻求原不等式的必要条件(不一定必须同时“充分”);利用分析法时,是一步步寻求欲证不等式的一个充分条件(不一定必须同时“必要”).

这就是说,在证明不等式时,每一步推理前后的两个不等式(或组),不要求必须是同解的.

显然,解不等式每个步骤的要求,强于证明不等式.

## 二、解题思考方法小结

### (一) 解不等式

#### 1. 解“不等式一端为零,另一端为乘积或分子、分母都是乘积型”的不等式

**方法一** 由实数乘法的符号法则,得到与原不等式等价的若干不等式组,分别解之.

**方法二** 当积的因子太多时,因方法一得到的不等式组太多,且易遗漏,可采用令每个因式等于零,得到若干方程,用它们的根把整个实数轴划分为若干区间,一一代入原不等式,用检验的方式,得到解集.

#### 2. 可以转化变形为符合上述“1”型的不等式

一些不符合上述“1”型要求的不等式,试试能否通过变形,转化为符合上述“1”型要求的不等式.

#### 3. 含有绝对值符号“ $||$ ”的不等式

**方法一** 类似上述“1”中的方法一,分情况去掉“ $||$ ”号,转化为不等式组.

**方法二** 类似上述“1”中的方法二,令每个“ $||$ ”号内的式子为零,以下同“1”中的方法二.

#### 4. 含有“ $\sqrt{\quad}$ ”的不等式(“ $\sqrt{\quad}$ ”内有未知数)

大纲只要求到含有一个“ $\sqrt{\quad}$ ”号.

最常用的为换元法.当根号外的各未知项与根号内同次未知项的系数对应成比例时,可以用换元法使“ $+\sqrt{\quad}$ ”消失.

无法利用换元法时;让不等式左端只留下“ $+\sqrt{\quad}$ ”,其余项都到右端,记为 $\varphi(x)$ ,记“ $+\sqrt{\quad}$ ”内的式子为 $f(x)$ .此时有下述两种情况:

第一,当  $\varphi(x)$  为常数  $a$  时.

(1) 如果  $a < 0$  且不等式为“ $<$ 或 $\leq$ ”号连结时,或  $a = 0$  且不等式为“ $<$ ”号连结时,不等式无解;

(2) 如果  $a = 0$  且不等式为“ $\leq$ ”号连结时,原不等式等价于相应的无理方程( $\sqrt{f(x)} = 0$ );

(3) 如果  $a = 0$  且不等式为“ $>$ ”号连结,原不等式等价于  $f(x) > 0$ ,如果  $a = 0$  且不等式为“ $\geq$ ”号连结,原不等式等价于  $f(x) \geq 0$ ;

注意: 以上都不需要对结果检验.

(4) 其余情况下,都把原不等式两端平方、保留原不等号,然后与  $f(x) \geq 0$  联立,解所组成的不等式组,并对结果进行检验.

第二,当  $\varphi(x)$  不是常数时.

$$(1) \sqrt{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \text{或} \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \text{或} \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) > [\varphi(x)]^2. \end{cases}$$

$$(2) \sqrt{f(x)} \geq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \text{或} \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geq [\varphi(x)]^2. \end{cases}$$

$$(3) \sqrt{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < [\varphi(x)]^2. \end{cases}$$

$$(4) \sqrt{f(x)} \leq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) = 0. \end{cases} \text{或} \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \leq [\varphi(x)]^2. \end{cases}$$

最后,对结果进行检验.

## (二) 利用“不等式性质”一组公式解题

第一,审查是否符合所利用公式的所有条件.

第二,注意所用公式是否可逆(即它的结论对于前提来说,是充要的,还是只“必要”).

## (三) 掌握好利用“平均数不等式”一组公式解题

第一,注意被选用公式所要求的条件是  $R$  还是  $R^+$ .

第二,“大方向”不要错了.

这里所说的“大方向”,指证明不等式时,要“大端看成和,小端看成积”.请详见本书第一篇第5章二(二)例5的证法与分析.

第三,“尺度”把握要“适度”.

证明不等式的过程中,无论是把“大端”“缩小”,还是把“小端”“放大”,尺度的把握都要“适度”,请见本书第一篇第5章二(二)例6的分析.

第四,利用“平均数”一组公式求最大(小)值必须具备的前提是:

(1) 求最小值时,相应各项之积须是常数;

(2) 求最大值时,相应各因子之和须是常数.

第五,利用平均数不等式可以求值域.

其理论依据,请见本章一中(三)(2)的证明.

第六,悉心探索,大量积累,熟练运用,利用平均数不等式解题的各种变形技巧.

无论利用平均数不等式进行“证明不等式”,还是求“最大(小)值”,等等,先对面临的式子进行必须的变形,是应用“平均数不等式”解题的难点.

对此,必须在做一定数量题目的过程中,悉心探索,认真总结各种技巧(本书第三篇综合练习中最后一道题的第二种解法的第一问,有一个简单的变形例子),这里仅举一例.

例 求 函数  $y = \frac{-4x^2 + 8x - 7}{3\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}}$  的最大值.

分析 考虑到去掉根号后,得到关于  $x$  的 4 次式,利用“判别式”工具很困难,但注意到根号内外  $x$  的同次项系数成比例,启发了利用“换元法”的思考,得到

$$y = \frac{-\left[4\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right) + 9\right]}{3\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}} = -\left(\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}}\right)$$

由于括号前为“-”号,则括号内最小时,便得到  $y$  的最大值. 注意到括号为两项和,并且,  $\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}$  在函数  $y$  的定义域内为正值. 两项之积  $\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}} = 4$  为定值,符号

应用平均数不等式求最小值的条件. 于是

$$\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}} \geq 2\sqrt{4} = 4,$$

当且仅当 
$$\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}},$$

即 
$$\left(\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{15}}{2}, \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{15}}{2}$$

时, 
$$\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x - \frac{1}{2}}}$$

得到最小值 4.

由于函数  $y$  的定义域是

$$x^2 - 2x - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \left(-\infty, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}, +\infty\right),$$

而  $1 \pm \sqrt{6} \in \left(-\infty, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}, +\infty\right),$

$\therefore$  当  $x = \frac{2 \pm \sqrt{15}}{2}$  时, 函数  $y$  取得最大值 -4.



# 第 11 章 复 数

## 一、学习指导

### (一) 准确掌握有关概念

第一,把复数记为  $a+bi$  时,不要遗漏  $a, b \in R$ , 否则,  $a, b$  不一定分别表示这个复数的实部和虚部(例如,若  $a = -3, b = 1+i$ , 那么,复数  $z = a+bi$  的实部是  $-4$ , 而不是  $-3$ ), 在这种情况下,复数相等定义等一系列定理、公式便不能应用.

第二,一个数是实数,就不是虚数,但一个数是复数,不意味着它一定是虚数. 因为,  $z = a+bi$  ( $a, b \in R$ ) 中的  $b$  可以取零,这是初学者最易模糊之处,因而,在复平面上,原点不是虚轴( $y$  轴)上的点.

重视对于“数系表”学习的必要性,由此可见一斑.

第三,虚数不能参加比较大小.

第四,对于辐角主值的规定是  $[0, 2\pi)$ , 保证了一个复数和它辐角主值间的一一对应.

### (二) 要熟知必要的规律 and 知识

第一,熟知  $i^m$  ( $m \in Z^+$ ) 的规律.

第二,复数的代数形式和三角形式的互化;代数形式的图形解释,三角形式的图形解释,即复数的矢量形式与代数形式、三角形式的互化. 其中的要点是,在三角形式  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  中,必须有  $r \geq 0$ , 括号内第一项是“ $+\cos\theta$ ”,第二项是“ $+i\sin\theta$ ”,而且两个“ $\theta$ ”,必须相同. 任一个复数乘以  $\cos\theta + i\sin\theta$ , 是把这个复数表示的矢量逆时针旋转  $\theta$ .

第三,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  的多种证明和解释,包括代数的和几何的.

第四,一些常用的运算结果.

例如  $(1 \pm i)^2 = \pm 2i, \pm \frac{1}{i} = \mp i \cdots \cdots$

第五,单位向量  $\cos\theta + i\sin\theta$  表示复平面上以原点为圆心、1 为半径的圆(单位圆)上的点.

### (三) 抓好对于“模”的理解和运用

第一,在代数形式中,“模”是  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ;在三角形式中,“模”是  $r$ ;在矢量形式中,“模”是“箭杆长”. 因而,  $\sqrt{a^2 + b^2}$  就是  $r$ , 就是箭杆长. 从这个意义上,当然易于理解下面的几点.

第二,  $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ .

此式表明,两点( $z_1$  的“箭尾”和  $z_n$  的“箭头”)之间线段长(箭杆长),不大于这两点之间折线长(折线的每一段是一根小箭杆).

联想:第 3 章不等式的学习,不难理解为,本式是本篇第 9 章一(一)4 中公式①、②、③的推广,而它们则是本式的特例.

进一步,

$$|z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|;$$

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_n|;$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|; |z^n| = |z|^n (n \in Z^+).$$

第三,  $|z_1 - z_2|$  表示复平面上代表  $z_1$  和  $z_2$  两个复数的两个点间的距离.

第四, 满足  $|z - z_0| = a$ 、 $|z - z_0| < a$ 、 $|z - z_0| > a$  的  $z$ , 分别表示复平面上以  $Z_0$  为圆心、 $a$  为半径的圆、圆内部、圆外部. 点  $Z_0$  是复数  $z_0$  表示的定点.

满足  $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$  ( $a > 0$ )、 $|z - z_1| + |z - z_2| < 2a$  ( $a > 0$ )、 $|z - z_1| + |z - z_2| > 2a$  ( $a > 0$ ) 的  $z$ , 分别表示以点  $Z_1$  和  $Z_2$  为焦点、以  $2a$  为实轴长的椭圆、椭圆内部、椭圆外部. 点  $Z_1$ 、 $Z_2$  是复数  $z_1$ 、 $z_2$  分别表示的定点.

.....

#### (四) 全面理解共轭复数的概念

第一, 从代数形式的角度,  $z$  和  $\bar{z}$  的虚部互为相反数,  $z = a + bi$  ( $a, b \in R$ ) 时,  $\bar{z} = a - bi$  ( $a, b \in R$ ), 它们的和  $2a \in R$ ; 它们的积  $a^2 + b^2 \in R$ . 从矢量形式的角度,  $z$  和  $\bar{z}$  表示从原点出发的关于  $x$  轴对称的两个矢量, 它们的和矢量是菱形的对角线, 当然在  $x$  轴上, 代表实数; 用  $\theta, \bar{\theta}$  分别表示它们的辐角, 那么, 以  $\theta$  的终边为始边旋转  $\bar{\theta}$  时, 必落在  $x$  轴上, 于是, 把  $z$  乘以  $\bar{z}$  后, 积为实数 (根据矢量乘法定义), 如图 11-1 所示.

在理解上述概念的基础上, 不难理解“和、差、积、商、幂”共轭的性质, 倒数与共轭的联系与区别.

第二, 复数的“和、差、积、商、幂”的共轭性质.

$$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0),$$

$$(\bar{z}^n) = (\bar{z})^n.$$

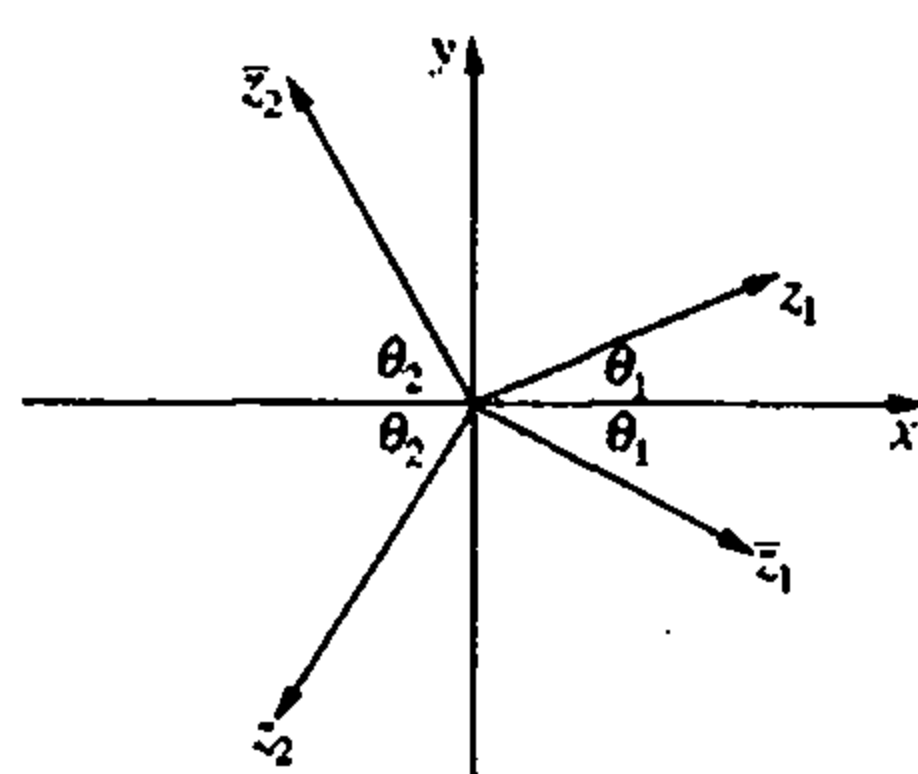


图 11-1

第三,  $z$  的倒数  $\frac{1}{z}$  ( $z \neq 0$ ) 和  $\bar{z}$  的辐角相同, 模互为倒数; 当且仅当  $|z| = 1$  时,  $\frac{1}{z}$  和  $\bar{z}$  相等.

#### (五) 要能熟练地进行各种几何解释

除了以上已经提到的和课本上写出的之外, 还应理解和掌握以下内容.

复数相加, 既可以根据平行四边形法则, 也可以看做是两个矢量“首、尾相接”, “和矢量”是从第一个的“尾”指向第二个的“首” (其实质仍是平行四边形法则).

两个复数相减, 既可以看做是加上作为减数的矢量的相反矢量, 又可以看做是“首、首相结”, “差矢量”是从减数矢量的“首”指向被减矢量的“首”.

以上都是把矢量的出发点称做“尾”.

乘上一个单位矢量  $\cos\theta + i\sin\theta$ , 是把被乘矢量旋转  $\theta$ ; 除以一个单位矢量时, 则旋转  $-\theta$ . 特别是, 乘以  $i$ , 为逆时针旋转  $90^\circ$ ; 乘以  $-i$ , 为顺时针旋转  $90^\circ$ , 除以  $i$ 、 $-i$ , 则与此相反. 乘以  $i^2 = -1$ , 为旋转  $180^\circ$ .

“1”的  $n$  次方根, 为单位圆上的  $n$  等分点, 并且有一个分点须是  $z = 1$ ; “一个”的  $n$  次方根, 则须有一个分点是  $z = -1$ .

.....

## 二、解题思考方法小结

### (一) 利用复数相等定义

$z_1 = z_2 (z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, \text{其中 } a_1, b_1, a_2, b_2 \in R) \Leftrightarrow a_1 = a_2, \text{并且 } b_1 = b_2.$

列出方程组, 求出需要的参数.

### (二) 把“貌似实非”的复数三角形形式, 化为正确的三角形形式的思考规律

$$(1) r(-\cos\theta + i\sin\theta) = r[\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)];$$

$$(2) r(-\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)];$$

$$(3) r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$$

以上并不必硬记, 思考方法是, 由符号判断辐角所在象限(假定  $\theta$  为锐角), 选用相应象限(第二、第三、第四)的  $\pi \pm \theta$ 、 $(-\theta)$  的诱导公式.

$$(4) r(\sin\theta + i\cos\theta) = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right];$$

$$(5) r(-\sin\theta + i\cos\theta) = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right];$$

$$(6) r(-\sin\theta - i\cos\theta) = r\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\right];$$

$$(7) r(\sin\theta - i\cos\theta) = r\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)\right].$$

以上(4)~(7)的思考同(1)~(3), 但选用的却是  $\frac{\pi}{2} \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \mp \theta$ .

以上(1)~(7)的  $r$  都是正数, 若在  $r$  位置上给出的是负数, 则把“-”号(准确地说是“-1”)乘入括号内, 转化为(1)~(7)中的某一个.

### (三) 灵活选用工具

复数有三种形式, 解题时, 利用谁为工具, 要具体问题具体分析. 多数情况, 数形结合的思考比较简单.

例 已知复数  $z$  的模为 2, 则  $|z - i|$  的最大值为 ( )

(A) 1; (B) 2; (C)  $\sqrt{5}$ ; (D) 3.

(1992 年全国高考(理工类)数学第(15)题)

解 如果用代数形式思考:

设  $z = a + bi$ , 则

$$|z - i| = |a + bi - i| = |a + (b - 1)i| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1}, \quad ①$$

$$\text{又由已知} \quad |z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4, \quad ②$$

$$\text{并有} \quad b^2 = 4 - a^2 \Leftrightarrow 0 \leq b^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq b \leq 2. \quad ③$$

把②、③式代入①式, 得

$$|z - i| = \sqrt{4 - 2b + 1} = \sqrt{5 - 2b} \leq 3.$$

故答案为(D).

如果用数形结合思考: 由  $|z| = 2$  知,  $z$  表示以原点为圆心、2 为半径的圆.  $|z - i|$  表示圆上点到点

(0,1)的距离,其最大者,显然是过此点的直径的远端(0,-2)到该点的距离为3(如图 11-2 所示).  
故答案为(D).

比较之下,无论从思考难度上还是书写过程上,数形结合的思考,都要优越得多.

数形结合的思考对于解复数题目更大的价值是,对于条件多、复杂的难题,先从几何角度进行分析,有助于弄通情景.

(四) 求复数  $z$  在复平面上表示的图形

根据已知条件,把复数  $z$  作为一个整体单位,参加到变形过程中,得到类似本章的一(三)“第四点”中的等式或不等式,由各种曲线或区域的定义,得到图形.

设  $z = x + yi$  ( $x, y \in R$ ),利用已知条件,使  $x, y$  共存于一个等式(或不等式)中,把  $x, y$  看做平面上点  $Z$  的坐标,分析所得方程(即这个等式或不等式)类型,得出曲线或区域.

使  $x, y$  同存于一个等式(或不等式)的变形过程,常常是先利用已知条件,让  $x, y$  分别和另外的变量(参数)组成等式(或不等式),由它们消去另外的变量(消去参数),得到所需的方程或不等式.并且特别注意把由于消去参数而使  $x$  或  $y$  取值范围扩大的部分去掉.

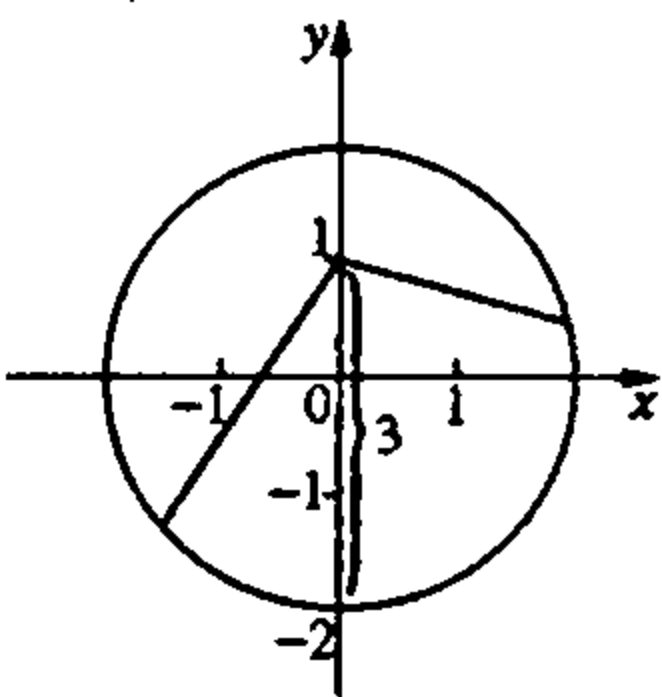


图 11-2

# 第 12 章 排列、组合、二项式定理

## 一、学习指导

本章分两大部分:排列和组合,二项式定理.

第一部分又分为式子变形和应用问题两部分.

整章的重点和难点是上述“应用问题”,对于如何学习它,本书在第一篇第 6 章一(一)“排列组合应用问题,解题思考方法小结”中,进行了示范性的讲述,请读者详阅.下面仅就排列、组合的有关式子变形和二项式定理两个问题提供学习要点建议.

### (一) 排列、组合的有关式子变形

#### 1. 重视加法原理和乘法原理的学习

许多学生以为,它们只是推导排列和组合种数公式的预备知识,所以一旦导出公式,便把它们置之脑后.事实上,它们是解应用问题时决定每两个步骤间的连接关系(是“加”还是“乘”?)的依据,因此要十分重视.

#### 2. 多掌握一些关系式

除了课本上已经给出的公式之外,再熟知一些规律,有利于变形推理.例如

$$(1) P_n^m = nP_{n-1}^{m-1} = n(n-1)P_{n-2}^{m-2} = n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k}^{m-k} \quad (m \leq n, k < m).$$

$$(2) P_n^m = \frac{1}{n-m} P_n^{m+1} = \frac{n}{n-m} P_{n-1}^m.$$

$$(3) C_{n-1}^m + C_{n-2}^m + \cdots + C_{m+1}^m + C_m^m = C_n^{m+1}.$$

$$(4) kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

.....

#### 3. 熟悉公式的推导过程

无论课本上给出的公式,还是上述补充的关系式,都要熟悉它们的推导过程,才能在解题中灵活运用它们.

### (二) 二项式定理

#### 1. 熟记并会推导公式

课本上给出的二项式定理、二项式展开式的通项公式、二项式展开式系数两条性质,都必须熟记并会推导.

课本上的两个结论,也应作为二项式展开式系数的性质熟记:

第一个结论  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = 2^n.$

第二个结论 在  $(a+b)^n$  的展开式中,奇数项的二项式系数的和,等于偶数项的二项式系数之和.”

对此要会证明并能熟练推导,因为它们的证明方法,即“根据证明的需要,把  $a, b$  设为特殊数值”,在有关二项式的变形中,具有普遍意义.

应熟记杨辉三角的前 6 层数值.

## 2. 注意几个细节

(1) 在  $(a+b)^n$  的展开式的通项

$$T_{r+1} = C'_n a^{n-r} b^r$$

中,  $r$  不是该项的序号,  $r+1$  才是.

(2) 二项式展开式中某项的“二项式系数”, 是上述“ $C'_n$ ”, 当然是正数. 而二项式展开式中某项的“系数”, 是指把“ $C'_n a^{n-r} b^r$ ”化简后, 最后所得的数字因数, 当然可正也可负.

例如,  $(2-x)^5$  展开式的第 4 项是

$$T_4 = C'_5 (2)^2 (-x)^3 = -40x^3,$$

第 4 项的二项式系数是  $C'_5 = 10$ , 第 4 项的系数是  $-40$ .

## 二、解题思考方法小结

### (一) 有关排列和组合的数、式变形问题

#### 1. 要灵活选择公式解题

例 1 化简  $\frac{C^m_{n+1}}{C^m_n} - \frac{C^{n-m+1}_n}{C^{n-m}_n}$ .

分析 计算组合种数, 有两个公式

$$C^m_n = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}, \quad \textcircled{1}$$

$$C^m_n = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad \textcircled{2}$$

如果利用①式, 第二个分式变形烦琐; 而利用②式时, 第一个分式变形烦琐. 所以, 宜第一个分式利用公式①, 第二个分式利用公式②.

但若选择组合数性质

$$C^m_n = C^{n-m}_n, \quad \textcircled{3}$$

$$C^m_{n+1} = C^m_n + C^{m-1}_n, \quad \textcircled{4}$$

作为工具, 则简捷得几乎难以置信,

$$\text{原式} = \frac{C^m_n + C^{m-1}_n}{C^m_n} - \frac{C^{n-(n-m+1)}_n}{C^{n-m}_n} = 1 + \frac{C^{m-1}_n}{C^m_n} - \frac{C^{m-1}_n}{C^m_n} = 1.$$

#### 2. 适时应用公式

特别注意适时应用本章例 1 中提到的公式④及本章一(一)2 中的关系式(1)和(4).

这里所说“适时”, 是指式中的各组合数符号的上标间及下标间有差为“1”的情况.

例 2 证明本章一(一)2 中的关系式(2)、(3).

对于(2)  $P^m_n = \frac{1}{n-m} P^{m+1}_n = \frac{n}{n-m} P^m_{n-1}$ .

证明 由本章一(一)2 中的关系式(1), 有

$$P^{m+1}_n = n P^m_{n-1}.$$

又  $m+1 \leq n \Rightarrow n-m > 0$ ,

两边除以  $n-m$ , 得

$$\frac{1}{n-m}P_n^{m+1} = \frac{n}{n-m}P_{n-1}^m.$$

又有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-m}P_n^{m+1} &= \frac{1}{n-m} \cdot n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m) \\ &= n(n-1)\cdots(n-m+1) = P_n^m,\end{aligned}$$

$$\therefore P_n^m = \frac{1}{n-m}P_n^{m+1} = \frac{n}{n-m}P_{n-1}^m.$$

说明 以上证明过程还表明,从复杂端入手化向简单端,易于下手.

对于(3)  $C_{n-1}^m + C_{n-2}^m + \cdots + C_{m+1}^m + C_m^m = C_n^{m+1}$ .

证明 由公式本章例1中提到的公式④,有

$$\begin{aligned}C_n^{m+1} &= C_{n-1}^{m+1} + C_{n-1}^m, \\ C_{n-1}^{m+1} &= C_{n-2}^{m+1} + C_{n-2}^m, \\ C_{n-2}^{m+1} &= C_{n-3}^{m+1} + C_{n-3}^m, \\ &\dots\dots\dots \\ C_{m+3}^{m+1} &= C_{m+2}^{m+1} + C_{m+2}^m, \\ C_{m+2}^{m+1} &= C_{m+1}^{m+1} + C_{m+1}^m,\end{aligned}$$

把以上  $n-m-1$  个等式相加,并以  $C_m^m$  代替  $C_{m+1}^{m+1}$ ,得

$$C_{n-1}^m + C_{n-2}^m + C_{n-3}^m + \cdots + C_{m+1}^m + C_m^m = C_n^{m+1}.$$

### 3. 解决求和问题

观察特点,有意识地利用排列、组合的有关公式,解决一些求和问题.

例3 求和 (1)  $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$ ;

(2)  $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3)$ .

分析 注意到

$$1 \times 2 = \frac{1 \times 2}{2} \times 2 = 2C_2^2,$$

$$2 \times 3 = \frac{2 \times 3}{2} \times 2 = 2C_3^2,$$

.....

$$n(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} \times 2 = 2C_{n+1}^2,$$

于是,可运用本章例2中已经证明过的--(一)2中的关系式(3).

解 (1) 利用  $C_m^m + C_{m+1}^m + \cdots + C_{n-2}^m + C_{n-1}^m = C_n^{m+1}$ ,有

$$\begin{aligned}1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) &= 2(C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{n+1}^2) = 2C_{n+2}^3 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

(2) 与解小题(1)的过程同理,有

$$\begin{aligned}1 \times 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) \\ = 4!(C_4^4 + C_5^4 + \cdots + C_{n+3}^4) = 4!C_{n+4}^5 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).\end{aligned}$$

#### 4. 倒序求和

对于一个数列的和式,把它按与原来相反的顺序排列后,再与原来的数列和式相加,是一种解有相应特点题目的思路.

##### 例4 求证

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

证明 设  $S = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$ , 把各项位置倒写, 并利用  $C_n^m = C_n^{n-m}$ , 有

$$S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \cdots + 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1}.$$

两式相加,得

$$2S = n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n),$$

$$\therefore C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n,$$

$$\therefore S = n \cdot 2^{n-1}$$

#### (二) 排列、组合应用问题

请先详阅本书第一篇第6章一(一).

一些常见类型题目的思考规律:

第一,从  $n$  个不同元素里,每次取出  $m(m \leq n)$  个做排列,其中又有  $k(k < m)$  个必须在指定的位置上,这时,共有  $P_{n-k}^{m-k}$  种方法.

第二,从  $n$  个不同元素里,每次取出  $n$  个做排列,其中  $m(m < n)$  个必须在一起,另外  $n-m$  个必须在一起,此时共有  $P_m^m \cdot P_{n-m}^{n-m} \cdot P_2^2$  种方法.

第三,利用间接的方法时,注意“否定”的正确性.

例5 全班 31 名男生,挑选 6 人组成的排球队,在以下条件限制下,各有多少种挑选方法:

(1) 王毅、李军都参加;

(2) 王毅、李军都不参加.

分析 对于(1),王毅、李军一定要入选,问题转化为求由  $31-2=29$  人中挑选 4 人的组合数,共有方法

$$C_{29}^4 = 23751$$

种.

由于这两人一定入选的否定情况比较复杂(王毅入选且李军不入选,或李军入选且王毅不入选,或二人都不入选),因而选用间接方法列式,比较麻烦.

对于(2),仍考虑直接方法,问题的实质是由 29 人中挑选一个 6 人排球队,共有方法

$$C_{29}^6 = 475020$$

种.

与(1)同理,若用间接方法列式,也比较麻烦.如果用间接方法思考,千万不可借助于第(1)问的结论,从  $C_{31}^6$  减去  $C_{29}^4$ . 因为去掉王毅、李军两人都参加的组合数,并不是两人都不参加的组合数. 要注意,对“都是”的正确否定,是“不都是”.

第四,列表或画图,辅助思考.

对于较复杂的题目,列表或画图,有益于防止遗漏或重复.

例6 集合  $A$  有 10 个元素,集合  $B$  有 4 个元素,从  $A, B$  中共取出 5 个元素组成集合  $D$ ,当满足下列条件:

(1)  $B \subset D$ ; (2)  $B \not\subset D$ ; (3)  $B \cap D = \emptyset$ ; (4)  $B \cap D \neq \emptyset$  且  $B \not\subset D$ ;



- (5)  $B \cap D$  含有不多于 2 个元素, 且  $B \cap D \neq \emptyset$ ;  
 (6)  $B \cap D$  含有不少于 2 个元素, 求集合  $D$  的个数.

分析 列表如下:

编号	从 A 中取出元素数		从 B 中取出元素数		D 中元素数	共有取法
①	5	+	0	=	5	} $C_{10+4}^5$
②	4	+	1	=	5	
③	3	+	2	=	5	
④	2	+	3	=	5	
⑤	1	+	4	=	5	

解 (1) 属于⑤号取法, 即集合  $D$  的个数是

$$C_{10}^1 C_4^4 = 10.$$

(2) 属于①或②或③或④号取法, 用间接求法较简单, 共有取法数即集合  $D$  的个数是

$$C_{14}^5 - C_{10}^1 C_4^4 = 1992.$$

(3) 属于①号取法, 集合  $D$  的个数是  $C_{10}^5 C_4^0 = 252$ .

(4) 属于②或③或④号取法, 可用直接求法

$$C_{10}^4 C_4^1 + C_{10}^3 C_4^2 + C_{10}^2 C_4^3 = 1740,$$

或间接求法

$$C_{14}^5 - C_{10}^1 C_4^4 - C_{10}^5 C_4^0 = 1740.$$

(5) 属于②或③号取法, 集合  $D$  的个数是

$$C_{10}^4 C_4^1 + C_{10}^3 C_4^2 = 1560.$$

(6) 属于③或④或⑤号取法, 集合  $D$  的个数是

$$C_{10}^3 C_4^2 + C_{10}^2 C_4^3 + C_{10}^1 C_4^4 = 910.$$

第五, 化抽象为具体, 化繁杂为简单.

当题目给出的数是用字母表示的, 或数字较大时, 可以采取尽可能小的数字代替字母或题中给的较大数字做实验, 寻找规律, 形成思路.

### (三) 利用二项式定理解题

1. 设  $(a+b)^n$  中的  $a, b$  为特定数值

例如, 证明本章一(二)1 中的“第一个结论”时, 设  $a=1, b=1$ . 证明其后“第二个结论”时, 则设  $a=1, b=-1$ .

例 7 求证  $3^n + 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + \cdots + 3 C_n^{n-1} + C_n^n = 4^n$ .

分析 易见, 宜设  $a=3, b=1$ , 然后展开  $(a+b)^n$ .

证明 略.

说明 本关系具有一般性:

$$m^n + m^{n-1} C_n^1 + m^{n-2} C_n^2 + \cdots + m C_n^{n-1} + C_n^n = (m+1)^n.$$

2. 利用  $i$ , 处理“出现正负相间的和式”

例 8 求证 对于自然数  $n$ ,

$$(1) C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4};$$

$$(2) C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

**例9** 化简  $1 - C_{200}^2 + C_{200}^4 - C_{200}^6 + C_{200}^8 + \cdots + C_{200}^{200}$ .

**分析** 以上两例,都利用设  $a=1, b=i$ , 展开  $(a+b)^n$ , 再利用复数相等定义即可完成.

### 3. 求形如 $[f(x) + \varphi(x)]^n$ 展开式中的某项

这是课本中一种主要类型题目,解这种题目的第一步,是先根据题中给的条件列出相应关于  $n$  的方程,求出  $n$ ;再列出关于  $r$  的方程求出  $r$ ,从而求出欲求的项.

而上述两步的关键,都是应用

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r.$$

### 4. 适时综合运用有关知识

**例10** 已知  $n \in N$  且  $n > 1$ .

求证  $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$ .

**证明**  $\because C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ,

$\therefore C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$ .

由计算等比数列  $\{a_n\}$   $a_n = 2^{n-1}$  的前  $n$  项和,得

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

利用“ $n$  个不全相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数”,得

$$1 + 2 + 2^n + \cdots + 2^{n-1} > n \sqrt[n]{1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-1}}.$$

根据等差数列求和公式,有

$$n \sqrt[n]{1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-1}} = n \sqrt[n]{2^{0+1+2+3+\cdots+(n-1)}} = n \cdot 2^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

$\therefore C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$ .

# III 微积分初步

## 第 13 章 极 限

### 一、学习指导

#### (一) 内容要求

大纲规定的《微积分初步》的必学内容,仅限于本章的第一节“数列的极限”和第二节“数列极限的四则运算”。

#### (二) 力争比较深入、准确地理解数列极限的定义

极限概念,在整个数学中,占居举足轻重的位置.有人说,它对近代数学发展所做的功绩,怎么评论都不为过,而刻画极限概念的两个定义(数列极限定义和函数极限定义),并能深入、准确地理解它,决非易事。

如果开始学习时,半生不熟,或误入“歧途”,将严重影响进入高等学校后的学习.所以,要力争学好数列极限定义。

#### 1. 数列极限定义

对于一个无穷数列 $\{a_n\}$ ,如果存在一个常数 $A$ ,无论预先指定多么小的正数 $\varepsilon$ ,总能找到一个自然数 $N$ ,使当 $n \geq N$ 时,总有 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立.称 $A$ 是数列 $\{a_n\}$ 的极限,记做

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

或当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow A$ .

#### 2. 在推敲中,逐步加深理解

(1) 它是无限过程中的概念,运动的概念。

数列 $\{5, 5, 5, \dots, 5\}$ ,尽管每一项与常数 $A = 5$ 的绝对值差都是“0”,小于任意预先指定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,但它没有极限.所以,必须首先肯定 $\{a_n\}$ 是一个无穷数列。

数列 $\{5, 5, 5, \dots\}$ ,数列 $\{3, 5, 10, 5, 5, \dots, 5, \dots\}$ ,极限都是5。

(2) 定义用“定”的语言“ $\varepsilon$ ”、“ $N$ ”、“ $|A - a_n| < \varepsilon$ ”,刻画了这样一个无限的“动”的情景:

在 $n \rightarrow \infty$ 的“长河”中, $a_n$ 与 $A$ 的距离,“要怎么近,就怎么近”,即无限趋近 $A$ (包括可以有不受数目限制的 $a_n = A$ ,但也可以一个等于 $A$ 的 $a_n$ 都没有)。

但是,“无限趋近”的说法,不能用“越来越接近”代替.因为后者不排斥 $a_n$ 和 $A$ 之间有一个“路障”,如果 $a_n$ 从外侧无限接近这个路障 $A'$ ( $a_n < A' < A$ ,且 $A - A' = d$ 为常数),它对于 $A$ 是越来越接近,但不是无限接近。

(3) 无限接近,并不要求从一开始或某一项后总是越来越接近.例如,到 $n = 100$ 时,已经有 $|a_{100} - A| < 0.013$ ,但 $|a_{101} - A|$ 却是10,可不可以呢?那就把 $n$ 往后推移,如果 $n = 2000$ 之后,再也没有 $|a_n - A| \geq 0.01$ 了;并且,把正数 $\varepsilon$ 再往小变,上述局面仍可实现(指又有一个 $n = n_0$ ,在它之

后,再也没 $|a_n - A| \geq \text{新的 } \varepsilon$ 了);特别是,正数 $\varepsilon$ 往小变是无休止的,不受任何下界限制的.这时的 $\{a_n\}$ 便是以 $A$ 为极限的.

这就是定义中“总存在一个自然数 $N$ ,使当 $n \geq N$ 时,总有……”的含义.它的意思是:存在一个较晚的时刻.

如果对于正数 $\varepsilon$ (哪怕它非常小)“圈定”的范围,随着 $n \rightarrow \infty$ ,总是有个别的 $a_n$ 往外跳,尽管跳的次数越来越少,却不能做到在某个 $n$ 之后不再跳出了,这个 $\{a_n\}$ 就不是以 $A$ 为极限的.因为不存在“依赖”于 $\varepsilon$ 的“较晚”时刻.

(4) 为什么要给 $(a_n - A)$ 带上“ $||$ ”号?

$|a_n - A| = |A - a_n|$ ,表示数轴上 $A, a_n$ 两点间的距离.  $|a_n - A| < \varepsilon$ ,表示 $a_n$ 进入了 $\varepsilon$ 在点 $A$ 两侧“圈定”的范围.如果不带“ $||$ ”号, $a_n - A < \varepsilon$ ,允许 $a_n$ 在 $A$ 的左侧远去, $A - a_n < \varepsilon$ 则允许 $a_n$ 在 $A$ 右侧远去.

(5) 极限定义字字千金,但却并非一字都不能变动.

例如 $|a_n - A| < \varepsilon$ 和 $|A - a_n| < \varepsilon$ 意义相同;“无论预先指定多么小的正数 $\varepsilon$ ”,可以用“对于任意 $\varepsilon > 0$ ”;“当 $n \geq N$ 时”,还可改成“使当 $n > N$ 时”等.关键是深入理解,抓住本质.

(三) 理解公比小于1的无穷等比数列各项和公式

从极限的角度,理解公比小于1的无穷等比数列各项和公式,并从而掌握循环小数化分数的方法(课本已讲解,不赘述).

## 二、解题思考方法小结

(一) 利用“数列极限的四则运算法则”求极限

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\varphi(n)}$  (其中 $f(n), \varphi(n)$ 都是关于 $n$ 的多项式)型

解法 用 $f(n)$ 和 $\varphi(n)$ 所有各项的最高次幂去除分子、分母;再应用“数列极限四则运算法则”.这时,要熟知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n^a} = 0 \quad (A \text{ 为常数}, a \in N);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \infty \quad (a \in N).$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{c^n + d^n}$  ( $|a|, |b|, |c|, |d|$ 为不全小于1的常数)型(分子、分母的各项都是 $n$ 次幂的形式,项数不限,但不是无穷多)

解法 先用分子和分母各项中,底的绝对值最大的项去除分子、分母;然后应用“数列极限四则运算法则”.这时,要熟知:

$$\text{当 } 0 < \left| \frac{b}{a} \right| < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{a} \right)^n = 0.$$

3. 上述“2”型的分子、分母上含有常数项

解法 用上述“2”的方法处理.这时,要熟知:

$$\text{当 } |a| > 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left( \frac{1}{a} \right)^n = 0.$$

但 $|a|, |b|, |c|, |d|$ 都不大于1时,直接利用“数列极限四则运算法则”.

例1 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{3^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$  的值.

解 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3 \times 4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \times 4}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{0-0}{1+0+0} = 0.$

例2 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$  的值.

解 原式  $= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}.$

4. 欲求极限的式中,含有其项数与  $n$  有关的“和式”

解法 先求和,表达为关于  $n$  的多项式,从而归结为“1”型或“2”型或“3”型.

(二) 利用数列极限定义证明给定的常数是已知数列的极限

关键是证明,对于每个给定的正数  $\varepsilon$ ,都能找到所需要的  $N$ .

例3 求证 公比  $q$  的绝对值小于1的等比数列  $\{a_n\}$  的所有项的和  $S = \frac{a_1}{1-q}$  ( $a_1$  是数列首项).

证明 等比数列前  $n$  项和为  $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}.$

任给正数  $\varepsilon$ ,

欲使  $\left| \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \right| < \varepsilon$  成立,\*

只需  $\left| \frac{-a_1 q^n}{1-q} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \frac{|1-q|\varepsilon}{|a_1|}$  成立,

(因为  $a_1 \neq 0, |q| < 1 \Leftrightarrow |a_1|, |1-q| > 0$ )

又  $q \neq 0 \Leftrightarrow |q| > 0$ ,

则只需  $n \ln |q| < \ln \frac{|1-q|\varepsilon}{|a_1|}$  成立.

而  $|q| < 1 \Rightarrow \ln |q| < 0$ ,

故只需  $n > \frac{\ln[|1-q| \cdot \varepsilon] - \ln |a_1|}{\ln |q|}$  成立.

于是,若令  $N$  为不大于  $\frac{\ln[|1-q| \cdot \varepsilon] - \ln |a_1|}{\ln |q|}$  的最大整数,那么,当  $n > N$  时,\*号式总成立,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

(三) 利用数列极限定义,求数列极限

先用不完全归纳法,实验、猜想“极限值”;然后用上述“(二)”的方法证明.

# IV 立体几何

## 第 14 章 直线和平面

### 一、学习指导

#### (一) 准确、深入地理解概念

##### 1. 掌握好三个公理

**公理一** 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么,这条直线上所有的点都在这个平面内.

**公理二** 如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

**公理三** 经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

这是学习立体几何伊始的平面性质的三个公理.为什么称之为平面性质的公理呢?

(1) 它们描述了在平面上的一些具体关系的规律.

但不止于此,应再深入一步.

(2) 它们分别从不同的角度,都刻画了平面的无凹凸性、向四面八方无限伸展性、连续性.

以公理一为例,“直线上所有的点都在这个平面上”,但直线是“直”的,便不允许平面有凹凸处;直线向两方无限延伸,选不同的两点,又可在平面上画出任意左右方向的直线,于是,平面必须能向四面八方伸展;可以作为实数轴的直线都是连续的,平面也必须是连续的了.

(3) 表达要准确.

以公理二为例,若叙述为“……那么它们所有的公共点都在一条直线上”,含义便有了出入,因为这种叙述,不排斥“公共点”不占据这条直线的全部,等等.

##### 2. 切实把握空间中不在同一平面上的三种角的概念

这三种角是异面直线所成角、直线和平面所成角、二面角.

(1) 前两者,有必须是锐角或钝角的要求,而二面角没有.

(2) 探讨为什么要这样定义.

i 把空间中的角,转化为平面上的角去度量.

ii 保证了转化的惟一性.否则,例如若把“从棱上一点分别在两个半平面内各引一条射线组成的角称做二面角的平面角”,由于在任何一个二面角上,都可以作出从  $0^\circ \sim 180^\circ$  的任意一个角.那么,没有惟一性的标准,不能成为度量的标准,因而,也不能刻画被描述的量的本质特征.

##### 3. 切实把握空间中不在同一平面上的 4 种距离的概念

这 4 种距离是指,平面外一点到平面、直线和与它平行的平面、两平行平面间、球面上两点间的距离.

与上述2中讨论三种角相仿,请读者自行探讨.

#### 4. 慎编顺口溜

常常听到用“线线平行,线面平行”,代替记忆“如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行”.

用“线面平行,线线平行”,代替记忆“如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行”.

这样记,省事了,但却容易产生误会.例如,以为线面平行时,直线便和平面内随便一条直线平行.

若编成“线、面内线平行,则线面平行”、“线、面平行,则线、交线平行”,情况还好一些.

#### 5. 区分“所有”和“无数”

平行于平面的直线,平行于平面内的无数条直线,但却不能说它平行于平面内“所有”的直线.在这里,“无数条”不能改成“所有各条”,即“任意一条”.

直线和平面垂直定义中的“所有”,则不能改成“无数”.

这两个概念的区分很重要,因为在立体几何中,它们出现的机会较多.

#### 6. 吃透“异面直线”概念

顾名思义,异面直线很容易理解为:分别在两个平面内的直线.事实上,在文革时期的课本上就这样写过,而这却是错误的.例如,在墙和地面上各画一条直线,它们既可相交,也可平行.事实上,两条平行直线,在绝大多数情况下是分别在两个平面内的,只有惟一的一次,在同一平面内.两条相交直线也是如此.而异面直线则是不可能<sub>不</sub>在同一平面内的两条直线,因而,异面直线定义“不同在任何一个平面内”中的“任何”二字是关键.

通过异面直线的每一条,都存在惟一一个与另一条异面直线平行的平面.当然,这两个平面互相平行.请读者想一想为什么.这个规律对于解题分析的思考很有帮助.

#### 7. 记住“三垂线定理”及其逆定理的一个条件

不要遗漏“三垂线定理”和它的逆定理的一个条件——所论的直线,必须和所论的射影在同一平面内.当然,作为推广,这条直线也可以在平面外,但必须与平面平行.

#### (二) 培养空间想像能力,使能对所论图形进行准确、充分地空间想像

这是学好全部立体几何和解好立体几何题目的最重要最关键的一项课题.

本书第一篇第4章五中,做了全面总结,请读者详阅.

#### (三) 在寻求联系与区别的过程中,占领一块重要阵地

在平面几何中,对于三条直线  $a, b, c$ ,存在着三个重要命题:

$$\left. \begin{array}{l} a // c \\ b // c \end{array} \right\} \Rightarrow a // b; \quad \left. \begin{array}{l} a // b \\ c \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow c \perp b; \quad \left. \begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$$

它们都是真命题.

学习立体几何了,把  $a, b, c$  换成

- i 不同在一个平面内的三条直线;
- ii 三个平面  $\alpha, \beta, \gamma$ ;
- iii (i)  $a, b$  仍是直线,  $c$  换成平面  $\gamma$ ,  
(ii)  $b, c$  仍是直线,  $a$  换成平面  $\alpha$ ,  
(iii)  $c, a$  仍是直线,  $b$  换成平面  $\beta$ ;
- iv (i)  $a$  仍是直线,  $b, c$  换成平面  $\beta, \gamma$ ,

- (ii)  $b$  仍是直线,  $c, a$  换成平面  $\gamma, \alpha$ ,
- (iii)  $c$  仍是直线,  $a, b$  换成平面  $\alpha, \beta$ .

一共得到 16 个不重复的命题.

其中相当多仍然成立, 也有相当多是假命题, 例如, “平面  $\alpha \perp$  平面  $\gamma$ , 并且平面  $\beta \perp$  平面  $\gamma$ , 则平面  $\alpha \parallel$  平面  $\beta$ ” 是假命题, 这时, 能得到的结论是, 平面  $\alpha$  与  $\beta$  的交线  $\perp$  平面  $\gamma$  (请见本篇 I 五“同一法”的例 1).

请读者一一写出这 16 个互不重复的命题(共可写出 24 个命题, 其中的 18 个只有 10 个独立), 并一一给予证明.

一方面, 把其中正确的命题作为规律, 于解题的思路甚有益处; 更重要的是对命题的证明过程, 它能培养我们的能力.

**(四) 定义、定理重新编组, 有利于记忆**

定义、定理在课本上是随讲课内容的顺序先后出现的, 全章学完后, 若重新编排如下, 则有利于记忆.

位置关系分类及定义	平行的性质与判定	垂直的性质与判定
直线与直线	直线与直线	直线与直线
直线与平面	直线与平面	直线与平面
平面与平面	平面与平面	平面与平面

另外还有, 平面性质中的 3 公理三推论, 异面直线第二个判定方法, 异面直线上两点距离公式, 三垂线定理及其逆定理(从一个平面到另一个平面上的), 面积射影定理.

## 二、解题思考方法小结

### (一) 养成合理的解题思考程序

解平面几何题, 都是边读题、边画图, 图画完了, 就一头扎入图里去想了. 这套程序拿来用到立体几何上, 十之七八要深受其害.

因为, 初学立体几何的同学, 画立体图的水平很差(开始学的那点儿斜二测规则, 几乎不起什么作用), 一旦画走了样, 思维也就陷入歧途了. 即使画对了, 由于只是一个角度的观察, 因此也限制思维的开展, 特别是“动的思想”的施展.

那么, 好的思考程序是什么呢?  
应当是, 在解题的同时, 让以下三个方面同时配合进行.

- i 想像(特别要运用“动的思想”).
- ii 摆模型(手中的三角板、笔杆等)辅助思考.
- iii 画草图(这里“草”的意思不是潦草, 而是不做最后定稿, 可以随时换角度再画, 和随时画移出图)思考.

### (二) 对题中给的图形形成正确的空间想像后, 再展开推理分析

怎样才能对题中给的图形形成正确的空间想像呢? 请读者再阅本书第一篇第 4 章的五.

### (三) 涉及“二面角”的题目思考方法

请详见本书第一篇第 6 章—(二).

### (四) 涉及“异面直线所成角”的题目

第一, 从已知条件出发, 根据“异面直线所成角”的定义, 在图形中寻找“异面直线所成角”.



第二,若图形中尚没有,则需把它作出.作的方法,一般地是在其中一条直线上选择与已知条件密切相关的点,作另一条直线的平行线.

这里所说的“密切相关”,还包含这样一层意思:作另一条直线的平行线时,图上已经有所需平面而不需先作新平面了.

### (五) 涉及“异面直线间距离”的题目

第一,寻找图形中是否已存在两条异面直线间的公垂线段,寻找的过程中,注意把  $a \perp b$  这样的条件,从  $a \perp b$  和  $b \perp a$  两个方向都试用一下.

第二,若图形中尚没有,则去作出它.

(1) 若过其中一条存在着与另一条垂直的平面,则过它们的垂足所作第一条直线的垂线段即是.

例 已知 如图 14-1 所示,正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, $D$  是  $AC$  中点.

求作 直线  $BD$  和  $AC_1$  间的公垂线段.

分析 由于正三棱柱的底面  $ABC$  与侧面  $ACC_1A_1$  垂直, $BD$  又垂直于它们的交线  $AC \Rightarrow BD \perp$  平面  $ACC_1A_1$ . 于是,过其中一条( $AC_1$ )存在着与另一条( $BD$ )垂直的平面( $ACC_1A_1$ ). 那么,运用本规律,过它们的垂足( $D$ )作第一条直线( $AC_1$ )的垂线段( $DE$ )即是.(请读者自行证明).

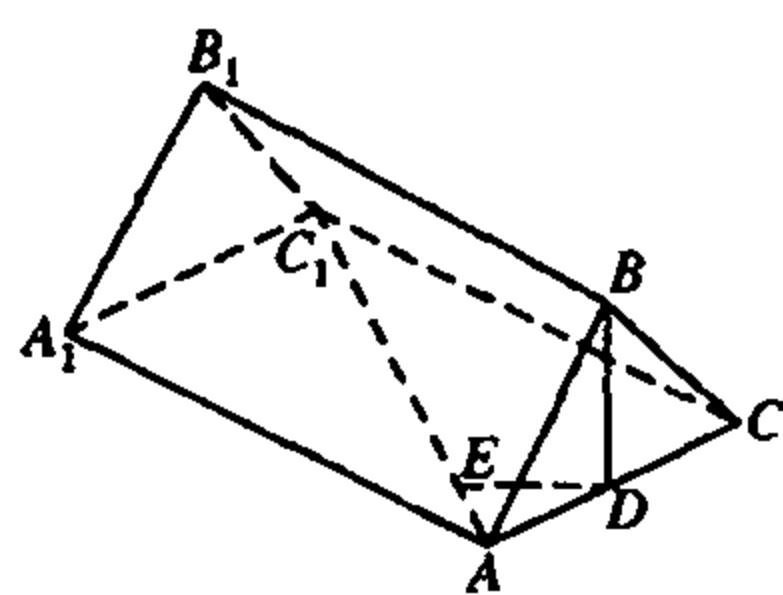


图 14-1

(2) 若(1)的条件也不存在,则设法把所求“异面直线间”距离,转化为“平面的平行直线与平面的距离”进行计算.

方法是,选择其中一条上与已知条件密切相关的点,作另一条的平行线(作之前,以不需构造新平面为宜).这时,所作平行线与这第一条直线就决定了一个新平面,这个新平面当然与另一条平行;再在另一条上选择与已知条件密切相关的点,作新平面的垂线段.这个垂线段的长等于所求“异面直线的距离”(请读者自行证明它的道理).

这里“第二个”与已知条件密切相关的点,最好通过它有与新平面垂直的平面.这样,只要过该点作两平面的交线的垂线段即可.

### (六) 涉及“两个平面互相垂直条件”的题目

存在两个平面互相垂直的条件,思路受阻时,试试应用下面两个定理,也许会成功.

定理一 如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一平面.

定理二 如果两个平面互相垂直,那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线,在第一个平面内.

### (七) 重视直线和平面垂直定义的逆命题

这个定义的逆命题(一切定义的逆命题都真),在解题中的应用

### (八) 善于把空间条件转化到同一平面上

善于把已知和结论中分布在空间中的条件,转化到同一平面上数中所学的本领.这是解立体几何计算题的一条主要思路.

为了完成这个转化,

第一,要注意确定平面的条件.

第二,熟悉常用转化方式.

(1) 通过两个平面的交线进行转化;

(2) 应用三垂线定理或其逆定理进行转化;

(3) 通过投影进行转化.

通过投影转化有四种常用途径：

- 借助直线和平面所成角,使斜线段和它在平面上的射影长建立度量关系.

$$l' = l\cos\theta.$$

- 其中, $l$  是斜线段长度, $l'$ 为斜线段在平面  $\alpha$  上的射影长, $\theta$  为斜线  $l$  与平面  $\alpha$  所成角.
- 借助二面角的平面角,把一个半平面上的条件,通过它们在另一个半平面上的投影,转化到另一个半平面上.
- 借助平行于平面的直线在平面上的投影进行转化.
- 通过截面进行转化.

# 第 15 章 多面体和旋转体

## 一、学习指导

### (一) 准确掌握各柱、锥、台概念

以下两个做法,有利于深入一步理解本章有关概念.

#### 1. 探讨一些概念之间的演变关系和从属关系

例如,棱柱、棱锥、棱台三种图形,可以从其中任意一种出发,运用“动的思想”,演变出其他的两种.

以从“棱台”出发为例.

对于一个棱台,固定它的下底面,使其上底在原来的平面上逐渐缩小为一点,便成为了一个棱锥.反之,把上底面多边形放大为某个与它位似(指上下两底面没有旋转的关系)且与下底面多边形全等的多边形时,便成为了一个棱柱.

上述这种演变看法,在棱台、棱锥、棱柱的各种性质上都不难统一起来.以体积计算公式为例,

$$V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}} \cdot S_{\text{下}}})h.$$

对于棱锥,仍用棱台公式.由于此时  $S_{\text{上}} = 0$ ,

$$\therefore V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}} \cdot S_{\text{下}}})h = \frac{1}{3}S_{\text{下}} \cdot h.$$

对于棱柱,仍用棱台公式.这时  $S_{\text{上}} = S_{\text{下}}$ ,

$$\therefore V_{\text{棱柱}} = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}} \cdot S_{\text{下}}})h = \frac{1}{3} \cdot 3S_{\text{下}} \cdot h = S_{\text{下}} \cdot h.$$

多么和谐的一致性!

再如,可以认为,当棱数  $\rightarrow \infty$  时,

棱柱  $\longrightarrow$  圆柱,

棱锥  $\longrightarrow$  圆锥,

棱台  $\longrightarrow$  圆台.

而事实上,棱(柱、锥、台)体的一切性质和计算公式,的确可以“对口平移”到圆(柱、锥、台)体上.

又如,可以从“棱柱  $\supset$  直棱柱  $\supset$  直四棱柱  $\supset$  直平行六面体  $\supset$  长方体  $\supset$  正方体”的从属关系的角度,又把它们性质、公式做相应的统一或发展.

这些,都有助于对概念深入一步的理解.

以上仅举 3 个例子,对于其他概念,请同学们自己去整理.

#### 2. 探讨各个定义的等价说法

课本上,对于众多的多面体和旋转体图形,都给出了一个定义.作为学生,试着写出它们的各种等价说法(对同一个概念,换一个甚至几个角度,写出另一种或几种方式的定义),是一种有益的学习方法.对于准确理解原定义、培养想像能力和数学表达能力,都有帮助.

举两个例子.  
第一个例子,正棱锥定义(课本上):底面是正多边形,并且顶点在底面的射影是底面中心的棱锥.

可不可以这样定义呢:

- (1)侧面都是等腰三角形的棱锥.
- (2)侧面都是全等的等腰三角形的棱锥.
- (3)侧面都是全等的等腰三角形、并且它们的顶角的顶点重合的棱锥.
- (4)侧棱相等的棱锥.
- (5)底面是正多边形、侧棱相等的棱锥.
- (6)侧棱相等、侧面与底面所成的二面角也相等的棱锥.
- (7)底面是正多边形、侧面与底面所成二面角相等的棱锥.

.....

“(1)”显然不行,因为这些等腰三角形的底边可以不相等,则棱锥底面不是正多边形.

“(2)”似乎可以,但运用“动的思想”可以构造出反例,如图 15-1 所示. 若

$$\left. \begin{matrix} AB=AC=PB=PC \\ BC=PA \\ AB\neq BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{等腰}\triangle PAB \cong \text{等腰}\triangle PAC \cong \text{等腰}\triangle PBC.$$

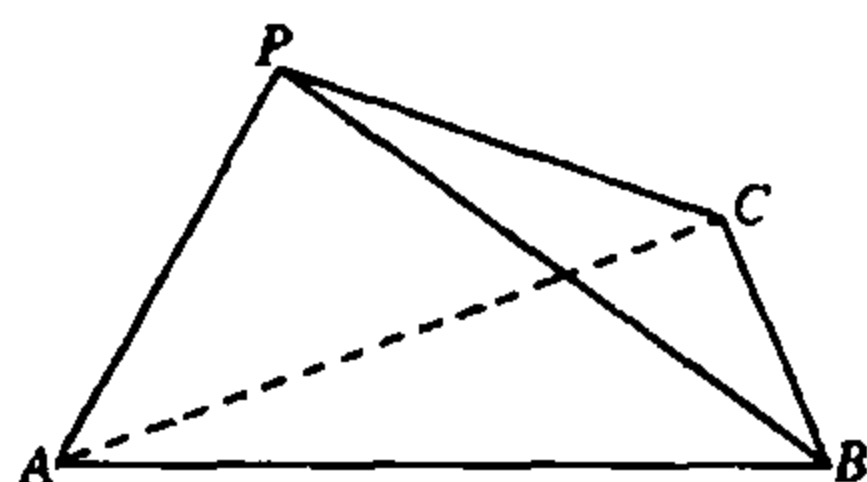


图 15-1

但底面 $\triangle ABC$ 不等边,棱锥 $P-ABC$ 便不是正棱锥.

“(3)”则是原定义的等价说法.

因为,侧面是有公共顶角顶点的全等的等腰三角形,那么,各侧棱相等,各底棱相等.

由各侧棱相等 $\Rightarrow$ 各侧棱在底面上的射影相等 $\Rightarrow$ 底面多边形各顶点,都在以顶点在底面的投影为圆心的圆上,又由于底面多边形各边(棱锥的底棱)相等,则底面多边形是正多边形,它的中心又恰是棱锥顶点的投影. 于是,这个棱锥是正棱锥.

“(4)”不可以,因为不能保证“底棱”相等.

而“(5)”“(6)”“(7)”都可以. 因为,“底面是正多边形”、“侧棱相等”、“侧面与底面所成二面角相等”这三个条件中,任意两个都可以推出第三个.

事实上,“侧棱相等”也可以换成“侧棱与底面所成角相等”,“侧面与底面所成二面角相等”也可以换成“棱锥的斜高相等”.

以上对于“(5)”“(6)”“(7)”的分析,都请同学们自己动手完成证明.

第二个例子.

棱柱定义(课本上):有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的几何体叫做棱柱.

显然,上面的叙述,表明了除去那一组互相平行的面之外,其他的面都是平行四边形.

于是,有人嫌上面的表述太啰嗦,便编造了这样一种简单的说法:有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形,由这些面所围成的几何体叫做棱柱.

这是不是等价说法呢? 不是!

可以构造反例,如图 15-2 所示,它事实上是把两个斜三棱柱接了起来. 对方可能辩解:“我约定大前提须是凸多面体”,即便如此,仍可构造如图 15-3 的反例.

在图 15-2 中,平面 $A_1B_1C_1 \parallel$ 平面 $A_2B_2C_2$ ,其余 6 个面都是平行四边形;在图 15-3 中,平面 $ABCD$

//平面  $A_1B_1C_1D_1$ , 其余 10 个面都是平行四边形. 但它们都不是棱柱.

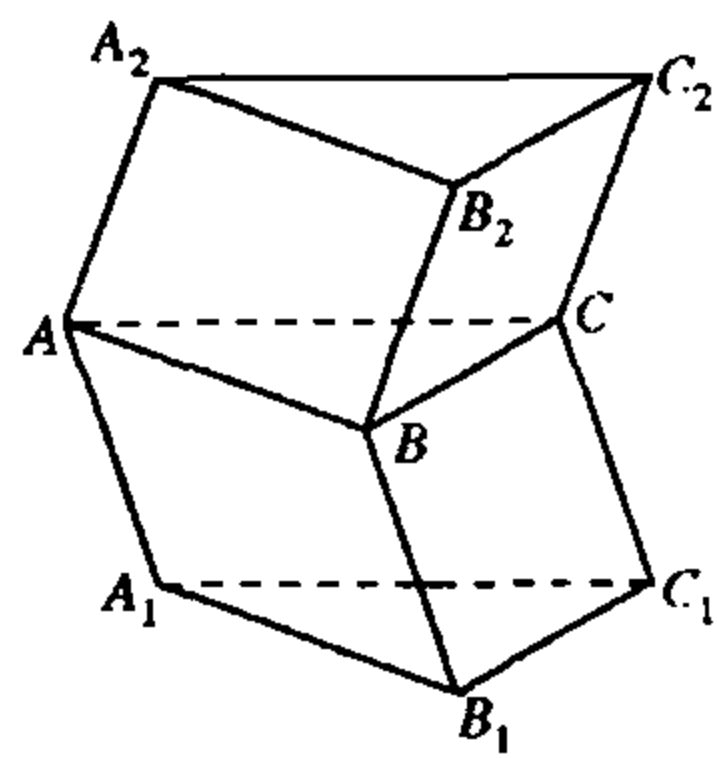


图 15-2

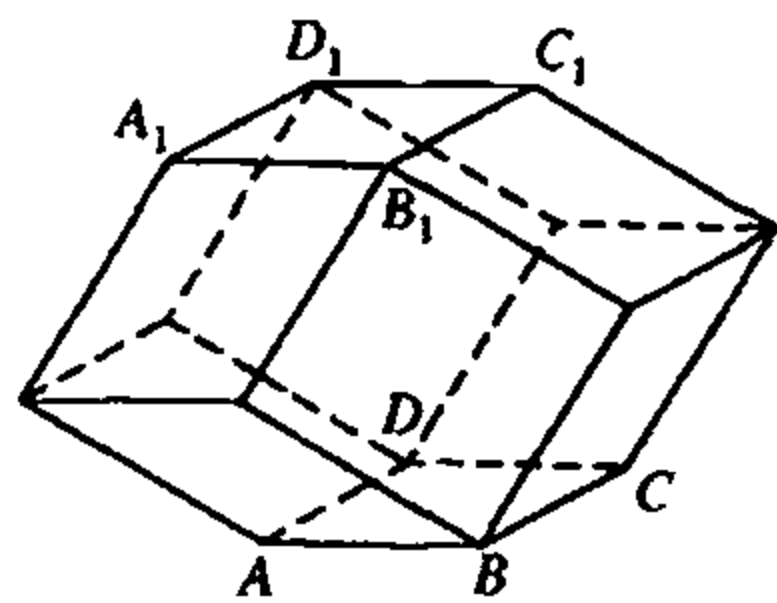


图 15-3

(二) 学习各种多面体、旋转体(球除外) 要注意类比、联系、系统化

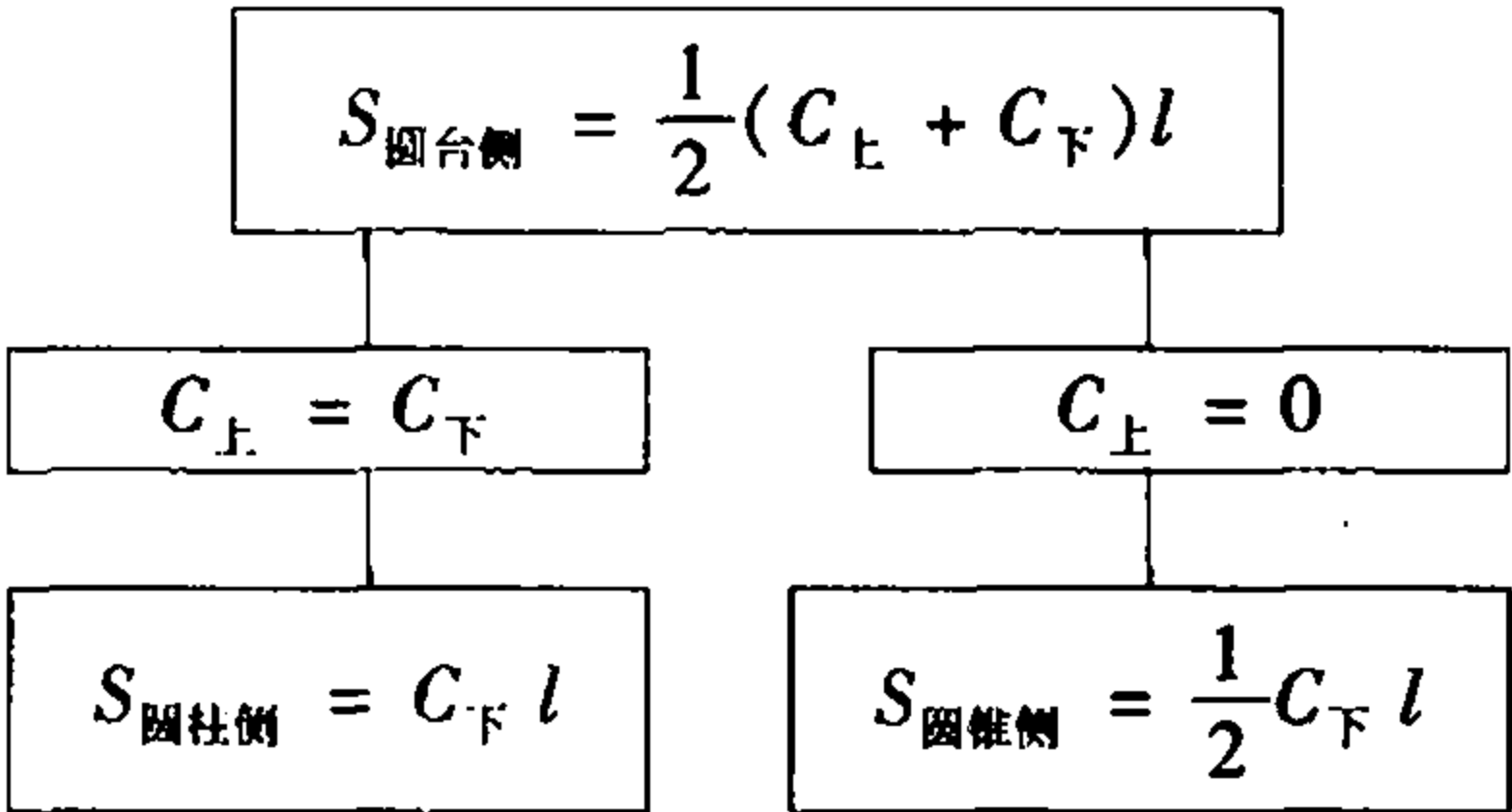
1. 纵向

对每一种图形的学习, 都分为: 定义, 归类, 分类, 底面性质, 侧面(包括侧棱、斜高)性质. 横截面(包括中截面)性质, 纵截面(包括轴截面)性质, 表面展开和表面积计算, 体积计算, 特殊性质或计算.

2. 横向

对于不同种的图形, 就以上各个方面, 跨类比较分析, 寻求联系与区别, 发现规律, 简化记忆, 深入本质.

本章一(一)1 中, 举了把棱台、棱柱、棱锥的体积计算进行类比的例子. 事实上, 其中的棱台、棱柱、棱锥, 完全可以改为“台体、柱体、锥体”. 再以侧面积的情况举例.



其中  $C$  是底面周长,  $l$  是母线长. 这个表也完全适用于正棱台、正棱柱、正棱锥. 因为如前所述, 圆“台、柱、锥”就是正棱“台、柱、锥”边的数量 $\rightarrow\infty$ 时的极限, 这时,  $C$  仍是周长,  $l$  则是正棱“台、柱、锥”的斜高  $h_{\text{斜}}$ .

(三) 球的特殊性

作为旋转体的圆“台、柱、锥”的各种性质, 和多面体的棱“台、柱、锥”如此相近, 却与同是旋转体的球相去甚远. 这是因为, 圆“台、柱、锥”和棱“台、柱、锥”都属于表面可以展开为平面的多面体. 而球则不是. 要重视球的特殊性.

二、解题思考方法小结

(一) 掌握计算题的常用转化途径

有关正棱“柱、锥、台”的计算题, 多数是在下列一组直角三角形(或直角梯形)内完成计算的.

正棱柱 底面半径、底面边心距、底面正多边形边长一半围成的直角三角形; 底面半径及侧棱为一组邻边的矩形; 底面边心距及侧棱长为一组邻边的矩形.

**正棱锥** 第一个直角三角形同正棱柱;高、底面半径、侧棱围成的直角三角形;高、底面边心距、斜高围成的直角三角形.

**正棱台** 直角三角形同棱锥,但上下底面上各有一个;高、上下底半径、侧棱围成的直角梯形;高、上下底面边心距、斜高围成的直角梯形.

对于圆“柱、锥、台”,仍是如此,不过由于“底面半径”和“底面边心距”合二为一,侧棱和斜高也合为母线.所以,分别简化为在它们轴截面的一半上进行计算.

解题时,一般是设法通过转化,把已知数据输到这些直角三角形或梯形中,利用解直角三角形或梯形,算得另外的量再输出到需要的式中,从而完成全题.

**(二) 有关截面的问题**

**1. 常用截面**

熟悉常用截面(横、纵两个方向的,包括中截面和轴截面)的结构及其与其他元素的联系.

**2. 特殊截面**

(1) 题目给出特殊截面时,要准确画出.其一般思路是,从已知条件出发,依据相应定理,先定出它与多面体(或旋转体)各表面的交线.请见本书第一篇第3章二(三)中的例6.

(2) 选取适当截面,把题目已知和结论中所涉及的空间中的条件,转化到这个截面上,以便运用平面几何、三角函数、代数的工具.

从题目的特点出发,有时选取特殊截面的目的,是为了使问题得到简化.

(3) 选取截面辅助思考,寻找达到结论的途径.

**(三) 关于旋转体积和多面体的表面展开**

把多面体和圆柱、圆锥、圆台的表面展到一个平面上,是一种手段或者说是一条途径.课本上,用它达到了推导侧面积公式及圆锥(台)侧面展开扇形(环)圆心角公式的目的.应该准确掌握上述过程和途径,作为解有关柱面或锥面上最短距离问题的工具.

但球面不能展开到一个平面上.

# V 平面解析几何

## 第 16 章 直 线

### 一、学习指导

#### (一) 深入理解概念,学好定理公式

本章的公式,仅课本上用“方框”强调了的就有十多个.而实际需要掌握的公式和概念,约有三十多个.因而,深入本质,抓住本质,准确掌握它们,就成为第一位重要的任务.

对此,本书第一篇第 4 章二(二)中,就本章这个公式的学习方法做了示范.请读者详阅.

下面再谈两个方面.

#### 1. 抓住本质,不拘泥于一字一词,不为小节所累

课本上,从直线的点斜式方程出发,推导出了直线的两点式方程

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2).$$

应当看透,它不过是  $P(x, y), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  三个点在一条直线上(如图 16-1 所示),因而两个斜率相等的变形形式:

$$k_{PP_1} = k_{P_2P_1} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

它当然还可以写成

$$\frac{x_1 - x_2}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y - y_1}$$

等许多形式.而若利用  $k_{PP_2} = k_{P_1P_2}$ ,或利用  $k_{PP_1} = k_{PP_2}$ ,又可以写出

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

等更多的形式.而它们构造上的共同规律是,从对称观点上的认识是“合情合理”, $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2$  都处于它们应该处在的位置上,俗话来说,就是“一顺儿”.

这样一来,不但把陌生的它(直线两点式方程)“一碗清水看到了底”(两点连线斜率公式),而且完全摆脱了“记忆之苦”和“记错之‘祸’”.

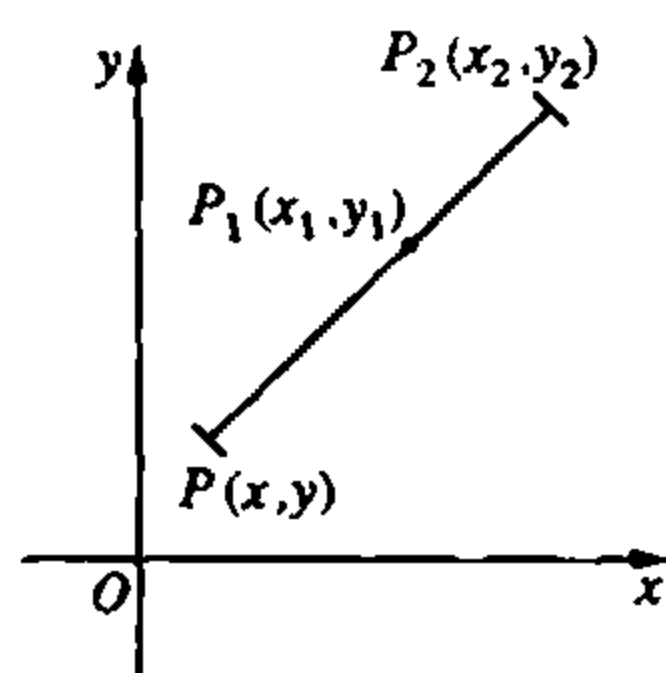


图 16-1

2. 站在系统的高度,认识它的位置

线段 $\overline{P_1P_2}$  ( $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ) 的定比分点  $P(x, y)$ , 当  $P_1P : PP_2 = \lambda$  时的坐标计算, 即线段的定比分点公式为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (\lambda \neq -1).$$

如果把  $P$  看做一个动点, 将发现一个有趣的现象, 当  $P$  点跑遍除  $P_2$  点以外的整个直线  $P_1P_2$  时,  $\lambda$  值跑遍除“ $-1$ ”以外的整个实数.  $P$  点的位置和它所代表的  $\lambda$  值的对应关系, 如图 16-2 所示 (详见本书第一篇第 2 章一(二)).

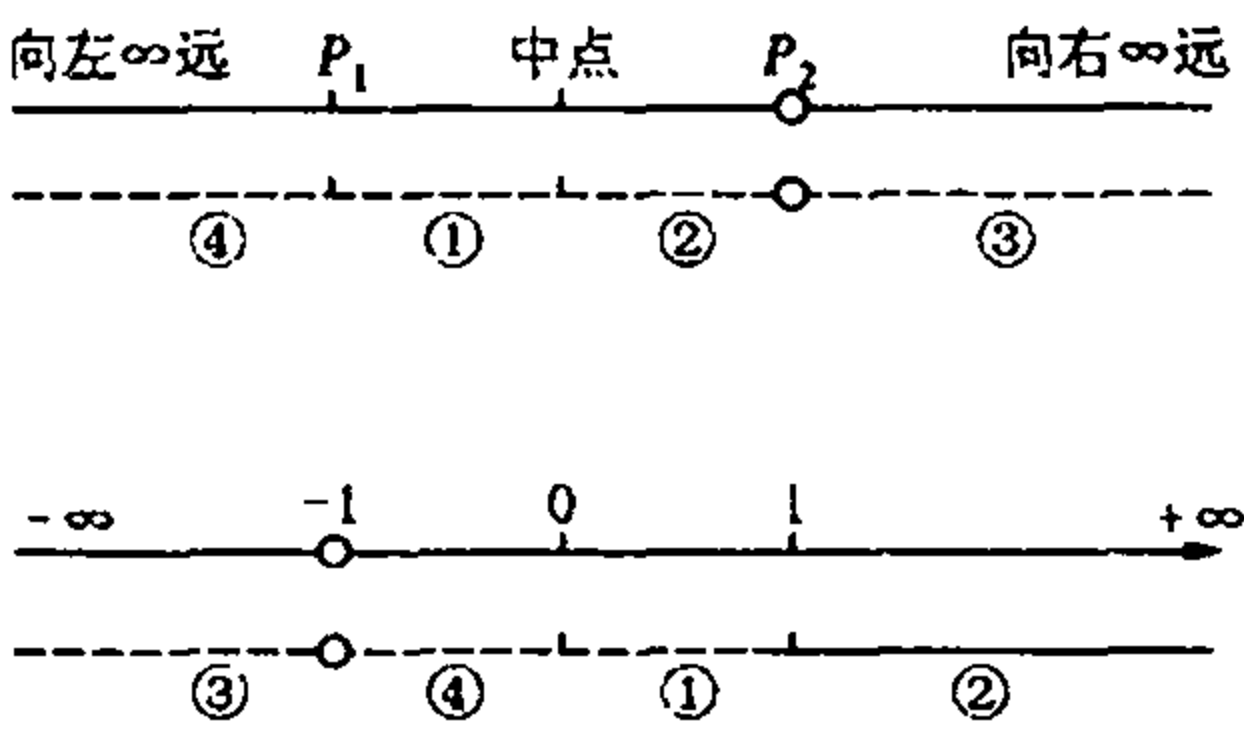


图 16-2

请读者以上面 3 个例子为范例, 对本章各公式、概念, 进行再学习.

(二) 进一步掌握平面上两条直线位置关系

课本上给出的两条直线位置关系的判断方法, 限制在两条直线  $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$  的“斜率  $k_1, k_2$  都存在且不为零”这个很窄的范围内. 写成一般式, 则是  $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  中,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  全不为零.

这种限制, 在开始学习时, 符合由简到繁、从特殊到一般的认识规律. 但之后, 宜进一步总结出一般规律, 才便于解题时应用.

例如, 课本上给出,  $l_1, l_2$  都有斜率时,

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2},$$

但解题中, 常常并不知道  $l_1, l_2$  是否都有斜率, 这时, 适合应用的关系是

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}, \text{ 或 } k_1 \text{ 与 } k_2 \text{ 一个为 } 0, \text{ 另一个不存在.} \tag{①}$$

若写为一般式方程, 则是

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{②}$$

①、②两式, 特别是②式, 应用时多么优越!

作为练习, 对于两直线相交、平行、重合的情况, 请读者务必仿照上述①、②两种表达方式, 一一总结.

(三) 补充一个解较难问题时有用的公式

如果直线  $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$  和  $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  相交, 那么方程

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

表示过  $l_1$  和  $l_2$  的交点的一切直线 ( $l_2$  除外), 称做由  $l_1, l_2$  组成的直线系方程.

请读者想想“为什么  $l_2$  除外”?



## 二、解题思考方法小结

### (一) 4 点基本思考常规

第一, 已知曲线上某点的横坐标, 把它代入曲线的方程, 即得该点的纵坐标, 反之亦然.

第二, 已知某点  $P_0(x_0, y_0)$  在曲线  $\varphi(x, y) = 0$  上, 要养成立即把  $P_0$  代入曲线方程得到  $\varphi(x_0, y_0) = 0$  的习惯, 这个新等式, 在解题过程中, 起着重要的作用.

第三, 欲判断某点  $P_0(x_0, y_0)$  是否在曲线上, 只要把  $(x_0, y_0)$  代入该曲线方程, 看其左右两端是否相等.

第四, 欲求两曲线交点的坐标, 只要解由它们的方程所组成的方程组.

### (二) 求符合一定条件的直线方程的一般方法

#### 1. 解题基础

对直线方程的 5 种形式, 及每种形式里各参数的意义要了如指掌.

#### 2. 解题思路

##### (1) 几何方法

从已知出发, 运用平面几何的知识, 一步一步、一个一个求出欲求方程中所需要的参数值.

##### (2) 代数方法

先写出含有字母系数的适宜形式的直线方程, 再根据字母参数的个数, 利用已知条件, 列出足够的方程, 解出这些字母参数. 代数方法实质是待定系数法. 请注意: 代数方法的思考过程, 也要数形结合!

对于较复杂的数目, 一般宜几何方法和代数方法相结合.

### (三) 一些局部的思考规律注意事项

#### 1. 推导两条平行直线间距离的公式

求两条平行直线  $l_1: Ax + By + C_1 = 0$  和  $l_2: Ax + By + C_2 = 0$  间的距离  $d$ , 有公式

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

请读者予以推导.

#### 2. 证明 3 条直线交于一点的一些方法

(1) 解其中两条直线组成的方程组, 证明所得到的解适合第 3 条直线的方程.

(2) 当其中一条直线的方程十分简单时, 用它分别和另两条直线的方程组编组, 证明两方程组的解相同.

(3) 分析已知条件, 猜想一个点, 证明它同时在三条直线上.

(4) 写出某两直线构造的直线系方程, 变形为第三条直线的方程.

#### 3. 证明 3 个点在一条直线上的一般方法

(1) 证明其中一点分别与另两点连线的斜率相等.

(2) 求出其中两点所在直线的方程, 证明另一点的坐标满足它.

(3) 证明行列式  $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$  的值为零.

三阶行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  的值可以这样来求:

自左上到右下方方向的三条对角线上的数之积的和( $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2$ ),减去自左下到右上方向的三个积之和( $a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2$ ),所得的差为这个行列式的值.

这个证明方法的根据是,以  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  为顶点的三角形面积公式是

$$S_{\Delta P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

那么,当且仅当  $P_1, P_2, P_3$  在一条直线上时,  $S_{\Delta P_1P_2P_3} = 0$ .

这个面积计算公式的推导过程大致如图 16-3 所示.

$$\begin{aligned} S_{\Delta P_1P_2P_3} &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \left[ (x_2 - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_3}(x_3 - x_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_1 - y_3) [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)]. \end{aligned}$$

算得的结果,与展开行列式算得的结果相同.

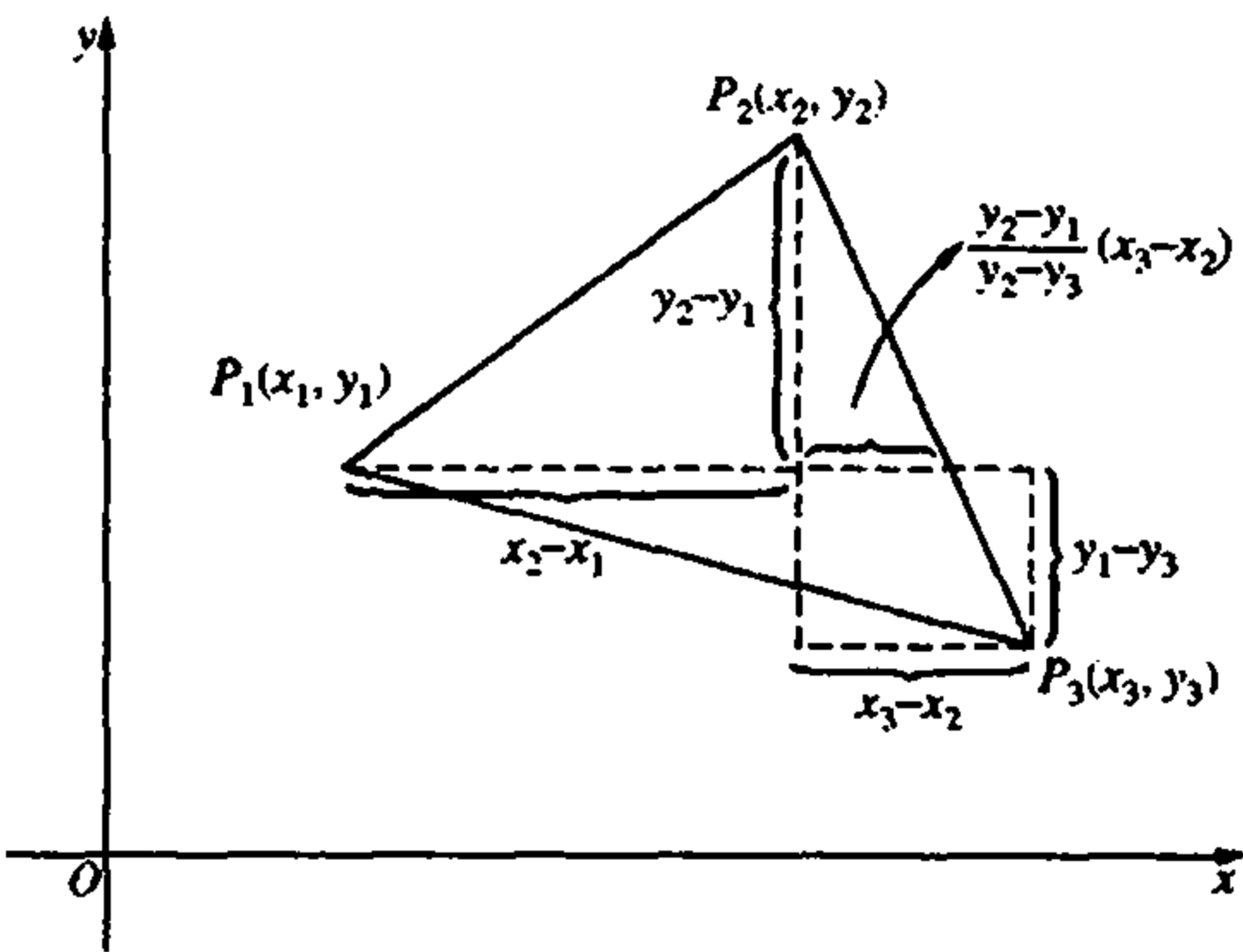


图 16-3

这样,求坐标平面上三角形面积,就增加了这个行列式形式的公式.

同时,也增加了两点  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  式直线方程的又一种形式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

这是因为,当且仅当动点  $P(x, y)$  在  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  所决定的直线上时,上述行列式值才为零.

#### 4. 用反正切表示直线倾角时,注意取值的一致

例如,直线  $l: y = -3x + 4$  的倾角

$$\theta = \pi + \arctg(-3) = \pi - \arctg 3,$$

而不是  $\theta = \arctg(-3).$

这是因为,倾角是直线向上方向与  $x$  轴正向的夹角(直线平行于  $x$  轴时,  $\theta = 0$ ),它大于或等于 0

而小于  $\pi$ ,而反正切的值域是大于  $-\frac{\pi}{2}$ 、小于  $\frac{\pi}{2}$ .

以上仅举数例,其余地方请读者总结.

# 第 17 章 圆锥曲线

## 一、学习指导

### (一) 从充要条件的角度认识“曲线的方程”与“方程的曲线”的关系

切实学好充要条件,从充分必要条件的角度,认识“曲线的方程”与“方程的曲线”的关系.

现行课本在本章开始,先讲解了曲线与方程.随后,由此引出了“充分条件和必要条件”.

笔者认为,这是从全国范围内的学生和教师教学水平的实际出发而确定的程序,有其积极的一面.

但也有其不利的一面:“充分条件和必要条件”,是数学中极其重要的一个概念,或者说,是数学思考中极强有力的一件武器.时至高中二年线半学期后才引入,其一,为时嫌晚,所以,本书在第一篇第 4 章伊始,就讲解了这部分知识(事实上,在我所任教的班级,是在初中一年级第二学期,就讲“充要条件”);其二,引入的视野偏窄,不深入的学生,会误以为它仅仅是“曲线与方程”的一个副产品.而事实上,它是一个广阔不知多少倍的概念.应该先掌握了这个概念,站在它的高度,来认识“曲线的方程”和“方程的曲线”的关系.

所以,读本书的同学们,在学习《平面解析几何》中的“圆锥曲线”时,应先去读本书第一篇第 4 章的一(二),在那里,本书全面地讲解了“充要条件”的本来面目.

认真读过了之后,将易于认识到“曲线的方程”和“方程的曲线”是同一个集合,不过是分别从代数角度和几何角度的等价表达,它们互为充要条件.

这样也不难理解以下结论.

(1) 达到符合二元方程  $F$  的“有序实数对”表示的点都在曲线  $C$  上后,曲线就具备了完备性,但曲线上还可能有瑕点(即不符合方程要求的点);

(2) 达到曲线  $C$  上每个点的一组坐标数都满足方程  $F$  后,曲线就具备了纯粹性,但曲线可能有残缺(即还可能有满足方程  $F$  的点不在曲线  $C$  上).

当且仅当(1)和(2)都满足时,对于方程  $F$  来说,曲线  $C$  既无残缺又无瑕点,方程  $F$  和曲线  $C$  才刻画了同一个集合,是互为充分且必要条件的.

那么,再由本章第一篇第 4 章一(一)中的内容,自然地,上述“(1)”,也可以用“不在曲线  $C$  上的点的坐标数对都不满足二元方程  $F$ ”来代替;上述“(2)”,也可以用“不符合二元方程  $F$  的‘有序实数对’表示的点都不在曲线  $C$  上”来代替.

### (二) 让“事方半,功却倍”

本章是平面解析几何内容的“重头戏”,除了圆(它是一种特殊的椭圆( $e=0$ ))之外,要讲椭圆、双曲线、抛物线三种曲线.每种曲线都是定义、标准方程、几何性质、光学性质、应用、解题思考规律等一大堆繁重的任务.

但如果以“寻找联系与区别”为线索,站在系统的高度,先扎实学好椭圆单元,深入它的定义、标准方程、几何性质、光学性质、应用、解题思考规律的本质;之后,以它们为参照物,去学习双曲线、抛物线,不仅能减轻负担,更能从它们的比较中,进一步深入本质,达到“事方半,功却倍”的效果.

### (三) 不要停留在表面

仅举两个例子,

第一个例子,几乎每个同学都能说出:把  $y$  换成  $-y$  时,若方程不变,那么,方程关于  $x$  轴对称.追问一句:为什么?怕多数人会支支吾吾了.

其实原理并不复杂:

“把  $y$  换成  $-y$  后,方程不变”的意思是,  $(x, y)$  和  $(x, -y)$  都适合同一个方程,即它们都是这方程的曲线上的点.而  $(x, y)$  是曲线上任意点  $P$  的坐标,  $(x, -y)$  是点  $P$  关于  $x$  轴的对称点的坐标.根据轴对称图形的判定:一个图形关于一条直线的对称点若仍在这个图形上,这个图形是以这条直线为对称轴的图形.

第二个例子,椭圆的退缩是一个点或没有轨迹,双曲线则是两条相交直线,两相比较,似乎很不合谐,于是,只好死记硬背.

事实上,可以从好多角度,推敲它的合理性:

(1) 一个有心二元二次方程(椭圆型或双曲线型),经适当旋转、平移变换后将得到形如

$$A'x^2 + C'y^2 = F'$$

的方程.

当  $A', C'$  同号时,是椭圆型方程,那么若  $F'$  是 0,只有  $(0, 0)$  满足它,当然是一个点;  $F'$  若与  $A', C'$  异号,当然无解,没有轨迹.

当  $A', C'$  异号时,是双曲线型方程.当  $F'$  为 0 时,不妨设  $A' > 0, C' < 0$ , 则

$$A'x^2 + C'y^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{A'}x + \sqrt{-C'}y)(\sqrt{A'}x - \sqrt{-C'}y) = 0$$

为两条相交直线.由于  $A', C'$  异号,无论  $F'$  为正或负,都是双曲线,只不过交换了实、虚轴的位置.

(2) 椭圆是到两定点距离和为定值的动点轨迹,当然迫使它成为“笼中鸟”,而且,随这个定长的缩小而益发紧缩,直至一个点,而再小,则为不可想像了.

但双曲线是距离差为定值,动点自可飞向“天际”,只要保持差不变,总不会不可想像,也不致局囿于一点.

这个“(2)”的分析,虽未严谨,却使人顿悟:原来一切都是定义(“和”还是“差”)所左右的.

## 二、解题思考方法小结

### (一) 两类主要题型和它们的解法

第一,已知圆锥曲线的方程,求它们各种参数(如  $a, b, c, e, p$ , 渐近线,准线……)或有关量、有关方程.

解法第一步是弄通情景(这里要数形结合),第二步,准确、灵活选择公式( $a^2 = b^2 + c^2$  还是  $c^2 = a^2 + b^2, e = \frac{c}{a}$  等).

第二,已知某些参数或有关量值或有关的关系,求方程(包括求轨迹方程).

解法多是通过列、解方程组,求出所需要的  $a, b$  或  $p$  值.当然数形结合也是必不可少的.

第三,把上述两点“接合为一”.

### (二) 两大类主要方法

请见本篇 V 部分第 16 章二(二)2. 当然,这里的题目不仅仅是求曲线的方程.但“几何的思考”和“代数的思考”两大原则是一致的.

### (三) 大量总结、积累解题技能、技巧

平面解析几何的主要题型和难题,大多出自本章,在掌握了(二)中所述两大原则的基础上,必须掌握大量局部的规律,才能把题解好.

例 求  $\odot C_1$  和  $\odot C_2$  的公共弦所在直线方程

(1)  $\odot C_1: x^2 + y^2 - 1 = 0, \odot C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0;$

(2)  $\odot C_1: x^2 + y^2 - 1 = 0, \odot C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0.$

解 (1) 方法一 解由  $\odot C_1$  和  $\odot C_2$  的两方程组成的方程组,得两圆交点坐标,再利用两点式直线方程公式,得到公共弦所在直线方程,然后化简,得

$$4x + 4y + 1 = 0.$$

方法二 把两方程相减,得

$$4x + 4y + 1 = 0.$$

这么简捷?真令人难以置信.

但的确如此,因为两个方程相加减(包括乘以不为零的数之后)所得的方程,把原两方程的公共解代入后满足,所以,它所代表的曲线,必过原来两个方程所代表的两曲线的交点.由于两圆相交只有两个交点,过两点又只有一条直线,现在的方程是一次的,代表直线,所以,此即正确答案.

然而,这个方法二,对于第(2)题,却行不通了.

(2) 方法一 无解.

方法二  $x + y - 2 = 0.$

这里,方法一无解的原因是,方程组无实数解.为什么方法二却得到了  $x + y - 2 = 0$ ,这其中的原因的解釋,已超出了高中范围.

但是,对这种类型的题目“求相交两圆公共弦”,却应总结出最佳思路:

解方程组降次后代入,若判别式  $\Delta \leq 0$ ,本题无解;若  $\Delta > 0$ ,刚才方程组相减降次后所得到的一次方程即是.

# 第 18 章 坐 标 变 换

## 一、学习指导

## 二、解题思考方法小结

以上内容都请阅本书第一篇第 4 章二(一)。

仅补充一句,进行坐标轴平移的变形时的数形结合是,把两个坐标系画在同一张图上,随时检验每个步骤是否有误。

# 第 19 章 参数方程、极坐标

## 一、学习指导

### (一) 参数方程的位置和它与普通方程的关系

研究一些物理、几何或其他实际问题的过程中,动点  $P(x,y)$  的  $x$  与  $y$  的直接关系不明显,但分别与另外变量的关系明显;或者是,问题的研究、解决,更需要写出  $x,y$  分别与另外变量的关系式. 这样,便产生了参数方程.

当需要研究  $y$  与  $x$  的相依关系类型时,则要把参数方程化为普通方程.

如何根据题目的条件,适当地选择参数,写出参数方程;如何熟练地进行两种方程的互化,便是本章的参数方程部分的主要学习目的.

### (二) 学好极坐标

#### 1. 注意极坐标系的特点和细节

(1) 平面是二维的,极坐标系下点的坐标和直角坐标系下点的坐标都是二维的. 所以,一组坐标数,都可以惟一地确定一个点的位置. 但是,由于同一终边位置,可以用不同的极角  $\theta$  表达,所以,与直角坐标系情况不同的是,在极坐标系下,点和坐标不是一一对应的. 例如,在直角坐标系下的点  $P(1,1)$ ,在极坐标系(极点在原点上,极轴重合  $x$  轴正向)下的坐标却是无数组

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{9\pi}{4}\right), \dots, \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

若允许  $\rho < 0$ ,又有另一系列无数组.

(2) 关于极坐标和直角坐标的互化,课本上给出的公式是

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

和 
$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

其中  $(x,y)$  是点  $P$  的直角坐标,  $(\rho, \theta)$  是点  $P$  的极坐标.

上面的公式仅仅适用于极点和原点重合,极径和  $x$  轴正向重合的情况. 而建立圆锥曲线的统一极坐标方程时,极坐标系则是以焦点  $F$  为极点,以  $FK$  的反向延长线  $Fx$  为极轴. 其中  $K$  为过点  $F$  向准线  $l$  所做垂线的垂足.

#### 2. 学会使用极坐标这个工具

一些同学在解求曲线极坐标方程的题目时,总是先求出它直角坐标系下的方程,再化为极坐标方程. 在判断所给出的极坐标方程代表何种曲线时,也必先化为直角坐标方程再行判断. 这就完全失去了学习极坐标的价值.

解决好这个问题的关键,是熟悉直线、圆、圆锥曲线、等速螺线在极坐标系下的方程.

##### (1) 直线

i 过极点的直线,如图 19-1 所示,  $l: \rho = \theta_0$ .

ii 与极轴平行或垂直的直线,如图 19-2 所示.

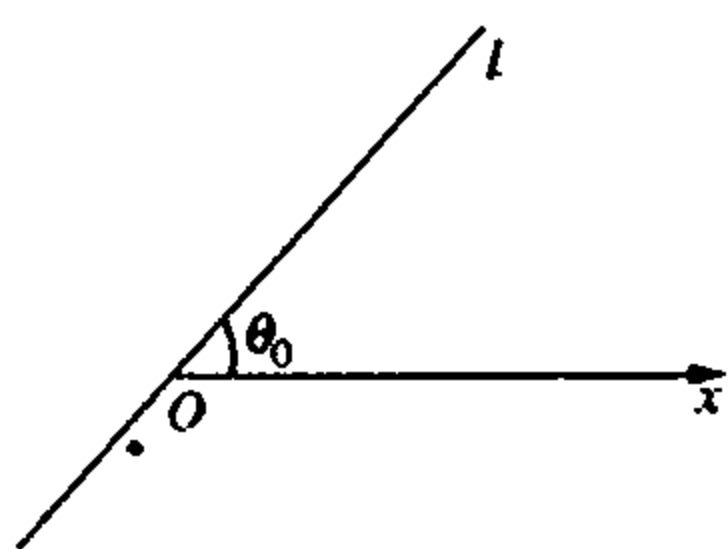


图 19-1

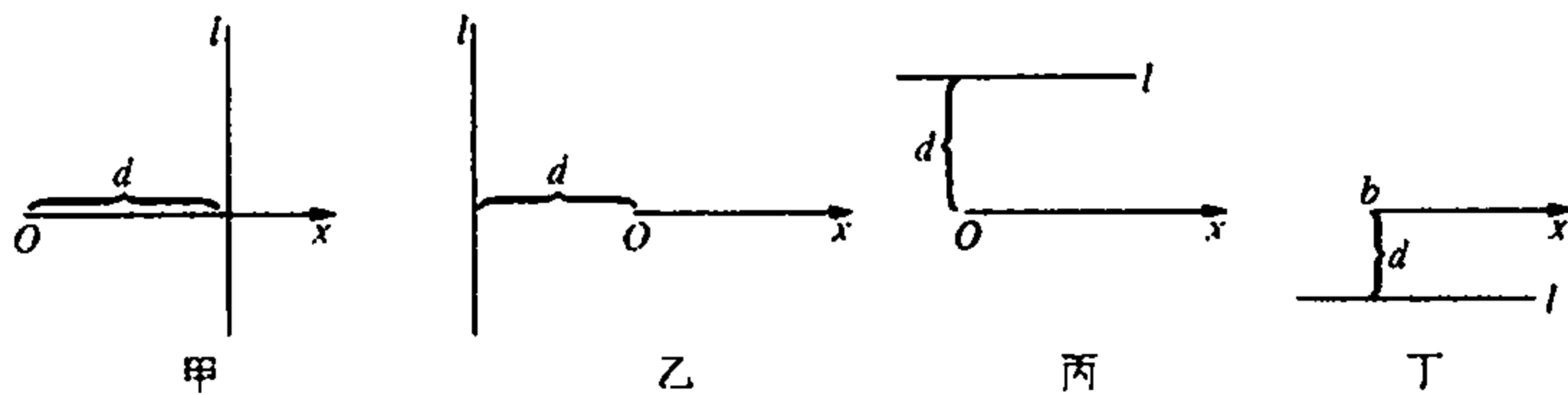


图 19-2

其中,甲表示:  $l \perp Ox$  于  $Ox$  轴上,  $l: \rho \cos \theta = d$ .

乙表示:  $l \perp Ox$  于  $Ox$  的反向延长线上,  $l: -\rho \cos \theta = d$ .

丙表示:  $l \parallel Ox$ ,  $l$  在  $Ox$  上方,  $l: \rho \sin \theta = d$ .

丁表示:  $l \parallel Ox$ ,  $l$  在  $Ox$  下方,  $l: -\rho \sin \theta = d$ .

其中  $d$  为极点到直线  $l$  的距离.

iii 在一般位置的直线,如图 19-3 所示.

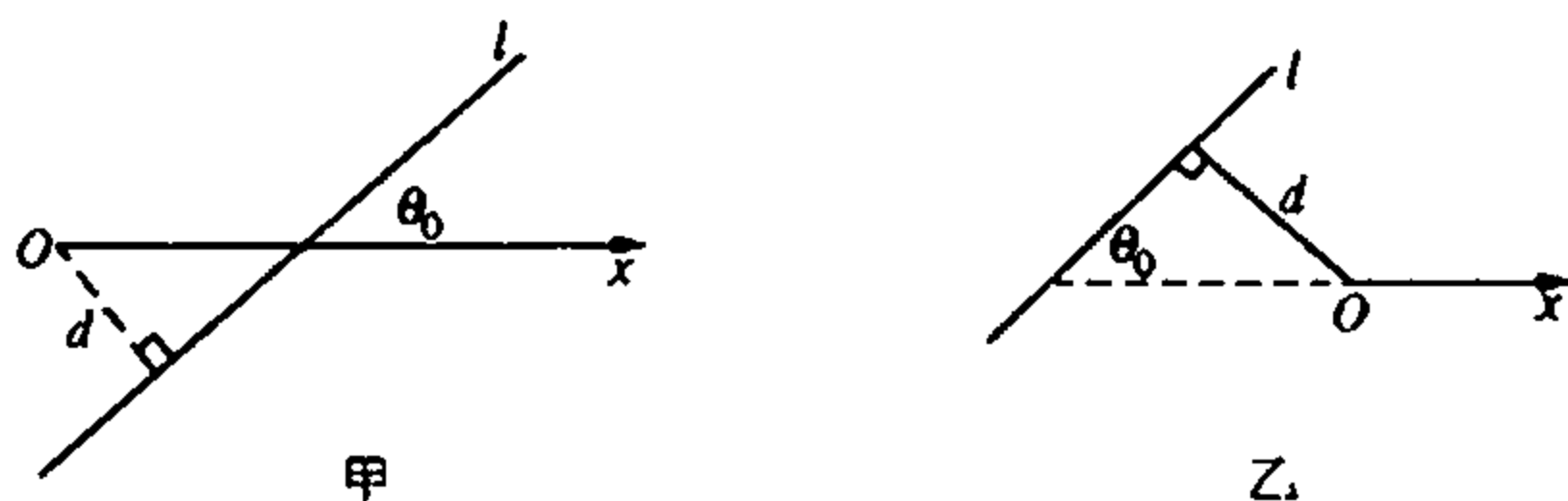


图 19-3

甲表示:直线与极轴交点在极轴上,向上方向与极轴夹角为  $\theta_0$ ,极点到直线距离为  $d$ ,则

$$l: \rho \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta - \theta_0 \right) = d.$$

乙表示:直线与极轴反向延长线相交,向上方向与极轴方向夹角为  $\theta_0$ ,极点到直线距离为  $d$ ,则

$$l: -\rho \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta - \theta_0 \right) = d.$$

(2) 圆(设半径为  $R$ )

i 圆心在极点上,如图 19-4 所示,  $\rho = R$ .

ii 圆过极点  $O$ ,圆心分别如图 19-5 所示.

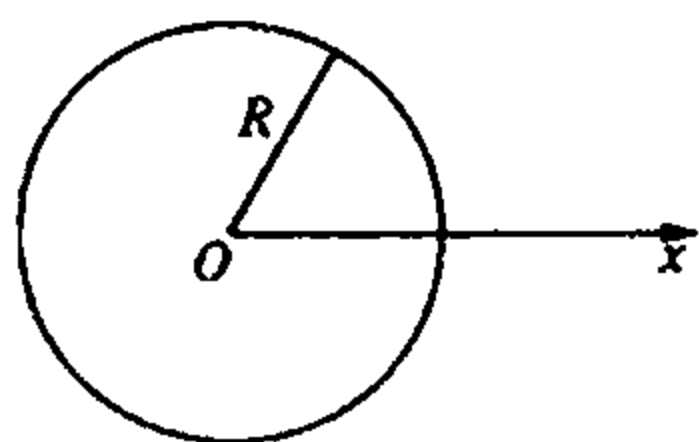


图 19-4

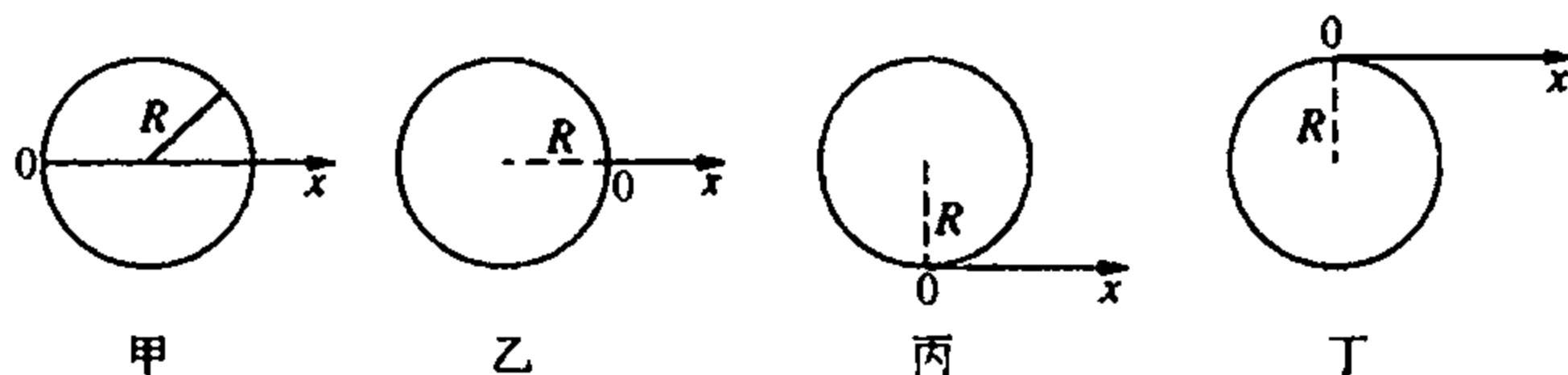


图 19-5

其中,甲表示:在极轴上,  $\rho = 2R \cos \theta$ .

乙表示:在极轴反向延长线上,  $\rho = -2R \cos \theta$ .

丙表示:在极轴上方,且在极轴上投影是极点,

$$\rho = -2R \sin \theta.$$

丁表示:在极轴下方,且在极轴投影是极点,

$$\rho = 2R \sin \theta.$$



iii 圆心在一般位置,如图 19-6 所示. 圆心  $C(\rho_0, \theta_0)$ ,

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

用广义的对称观点,对比以上直线和圆的各一系列极坐标方程,会发现,它们的和谐是多么微妙.

请读者从上面直线和圆的一般位置极坐标方程出发,对位置提出特殊要求,推出相应特殊位置的极坐标方程.

(3) 极坐标系下圆锥曲线统一方程和等速螺线方程,在课本中已讲解,本书不再分析,只补充一点.

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos(\theta - \theta_0)}$$

表示的二次曲线,是把

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

表示的二次曲线,绕极点逆时针旋转  $\theta_0$  而成.

(4) 要认识到,在某些条件下,用极坐标处理问题较直角坐标系更方便.

## 二、解题思考方法小结

### (一) 用好参数方程

#### 1. 养成利用参数方程解题的意识

对一些难度较高的解析几何题目(特别是求一定条件下动点轨迹的题目),要有意识地选取参数,以构造达到目标的桥梁.

#### 2. 培养恰当选取参数的能力

被选作参数的量,应满足:

- (1) 它的变化牵动全局;
- (2) 它与点的横、纵坐标的关系易于表达.

各种具体条件下如何恰当选定参数,有规矩可循,要在做题中勤于积累.

#### 3. 总结积累消去参数的技巧

不断总结积累消去参数化为普通方程的技能、技巧.

例如,对于参数方程  $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$

(1) 代入法:由一个方程导出参数  $t = \varphi(x)$ ,代入另一个方程.

(2) 加减法:把两方程变形使左端都只含  $x, y$ ,利用  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \sec^2 t - \tan^2 t = 1, \csc^2 t - \cot^2 t = 1$ ,两方程相加减,消去右端参数  $t$ (若利用  $\tan t \cdot \cot t = 1$ ,则两方程相乘).

(3) 两方程右端都是较复杂的分式,但分子或分母相同,则可两方程相除,再变形,导出  $t = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ,再代入原方程.

.....

但无论哪种方法,消去参数后,都要把可能扩大了的部分去掉,保持  $x, y$  原来的取值范围.

### (二) 利用好极坐标

第一,熟练掌握本章一(二)2 的全部内容.

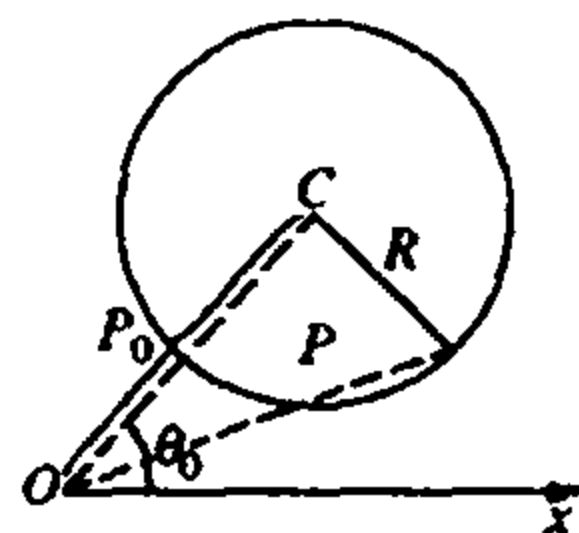


图 19-6

第二,解较复杂的题目,条件适宜时,要有意识地引入极坐标(原题并没规定利用哪种坐标系)解题.

什么情况下适宜于引入极坐标?

例如,题目的主要条件围绕过圆锥曲线焦点的一条或几条直线(包括动直线),就适宜于以这个焦点为极点,建立极坐标系.因为这时,圆锥曲线和直线的方程都很简单.

其他请读者在解题中不断总结和体会.

## 第三篇 学会考试

### 一、做好应考前的准备

#### (一) 明确参加考试的目的,调整好考试时的心理状态

有的同学一考试就紧张,因此不能正常发挥自己的水平.原因之一是,这些同学把考试的后果看得太重,期望太高,结果适得其反.

考试的目的,在考试委员会,是为了检查或选拔;而对于考生,则应当看成是培养自己坚强的意志、顽强的毅力和科学精神的极好机会.抱这样的目的,就会在考场上表现出坚韧不拔的意志,头脑冷静,条理清楚,充分发挥自己的水平.

#### (二) 科学安排生活,做好体力上的准备

准备考试的阶段,一是不要开夜车,要作息规律、有充足的睡眠.

要把自己生物钟的波峰,调整在每天的将来考试规定的时间上.

二是生活要规律,一日三餐定时,营养合理,不<sub>缺</sub>食少餐,也不暴饮暴食,做到各种营养齐全,又不出现中医所说内火上升的现象.

三是坚持适量的锻炼,以保持充沛的精力和体力.

### 二、学会在考场上科学应对

#### (一) 了解答卷思考的基本过程

(1) 读题,想像情景,产生判断,作出决策;

(2) 演算(或者论证);

(3) 检验.

#### (二) 科学处理各个环节

考场上有许多环节,不可能也没有必要一一提出对策,因为情况不尽相同,要具体情况具体处理.

例如,发下卷子,应当一道一道题挨着做呢?还是从头到尾先看一遍,会哪道题,先做哪道题呢?

恐怕这些考虑都绝对化了.

一般地,对于有一定难度的综合练习,如果从头到尾,每道题想一遍,往深里想,想出来又不马上写下来,等于浪费宝贵的考场时间,不深想,往往以为不会做,造成自己的紧张心理.

但是如果一定一道题一道题挨着做,由于自己知识掌握的不均衡,碰上一道自己薄弱的题,死死抠住不放,耽误了自己后面会做的题,岂不可惜.

所以,还是具体情况具体分析和处理为好.基本原则应顺序一道一道往下做,遇到久攻不下或毫无思路的题目时,心情平静地暂时绕过去.

### 三、养成检验习惯,积累检验方法,提高检验能力

在工业上监控手段是技术水平高低的一个标志. 解题时, 检验习惯和能力, 是个人数学水平高低的一个标志. 在考试中, 它对于确保优秀的成绩, 尤为重要.

要从广泛的意义上理解检验的方法, 不要只认为验根才是检验, 而不是解方程的题目就无法检验.

事实上, 换个角度来思考: 一开始就对问题的前景作个大致估计, 随时对每个步骤结果的正确性作出判断, 对于整个题目或各个环节一题多解……都是检验的好方法.

如果这样, 就不会出现, 某校一名高一学生在物理考试的最后一道大题上, 经过繁多的运算过程后, 得到的答数是“地球质量是 0.53 吨”这样的笑话了.

这些考虑, 不仅可判断结果是否正确, 而且可以为选择正确的推理方向提供“咨询”.

以本书第一篇第 5 章例 6 为例:

欲证  $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c)$ , 用缩小法.

$$\begin{aligned}\text{左}&\geq\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}=\sqrt{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\\&\geq\sqrt{2}(3\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}})=3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

如果这时换个角度, 代个数试试, 让  $a=1, b=3, c=9$ , 那么

$$3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}=9\sqrt{2}<12\sqrt{2}<13\sqrt{2}=\sqrt{2}(a+b+c)$$

显然, “缩小”过头了, 所以, 要赶紧改别的办法.

### 四、分析一份综合练习, 看对待难题的态度和方法

为方便读者, 把分析解答写进了每一道题的后面.

#### 综合练习

(一) 选择题(每小题 3 分, 共 36 分, 每题所给 A、B、C、D 四个结论中, 只有一个是正确的)

1. 若  $M=\{12k|k\in Z\}$ ,  $N=\{9k|k\in Z\}$ , 其中  $Z$  代表整数集合, 那么  $M\cap N$  等于( )

A.  $\{9k|k\in Z\}$ ;      B.  $\{108k|k\in Z\}$ ;      C.  $\{36k|k\in Z\}$ ;      D.  $\{3k|k\in Z\}$ .

【思维过程】(以后简称想法)由交集定义  $M\cap N$  应当由既是 12 的倍数又是 9 的倍数的数组成, 于是淘汰 A 和 D, 但 B 中遗漏了一些符合要求的数.

这就是解选择题时, 一种被称做“排除法”的思考方法. 它仅对只有一个正确结论的选择题适用. 它是把不合题意的结论否定后, 对最后剩下的一个结论不再做分析, 就定为正确选择.

这种方法的优点是, 当不正确结论易于被找出时, 使解题速度加快, 在考场上赢得了宝贵的时间.

但错误结论的谬误不易迅速发现时, 这种解法反而拖延了时间, 甚至会不得其解.

另外, 在日常练习中, 如果总是用“排除法”, 不利于对基本概念和基础知识的全面掌握.

所以, 在对待“排除法”这个问题上, 也要一分为二.

【答案】 C.

2. 在复平面上, 若方程  $x^{20}=1$  的根对应的点构成集合  $M$ , 那么, 以  $M$  中任意三个点为顶点的三角形的数目是( )

- A. 380;                      B. 1140;                      C. 2280;                      D. 3420.

【想法】 想复数范围内方根定义,再想它属于组合问题,又注意到其中任意三点不在一条直线上.

【答案】 B.

3. 函数  $f(x) = \lg\left(5 - \frac{1}{x}\right)$  的定义域是(      )

- A.  $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ ;                      B.  $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ ;  
C.  $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ ;                      D.  $\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ .

【想法】 由对数概念  $\Rightarrow 5 - \frac{1}{x} > 0$ . 解这个不等式时不要两端同乘以  $x$ , 得到  $5x - 1 > 0$  的错误答案.

【答案】 A.

4. 如图篇 3-1 所示, 函数  $f(x) = -\sqrt{x^2}$  的图像是(      )

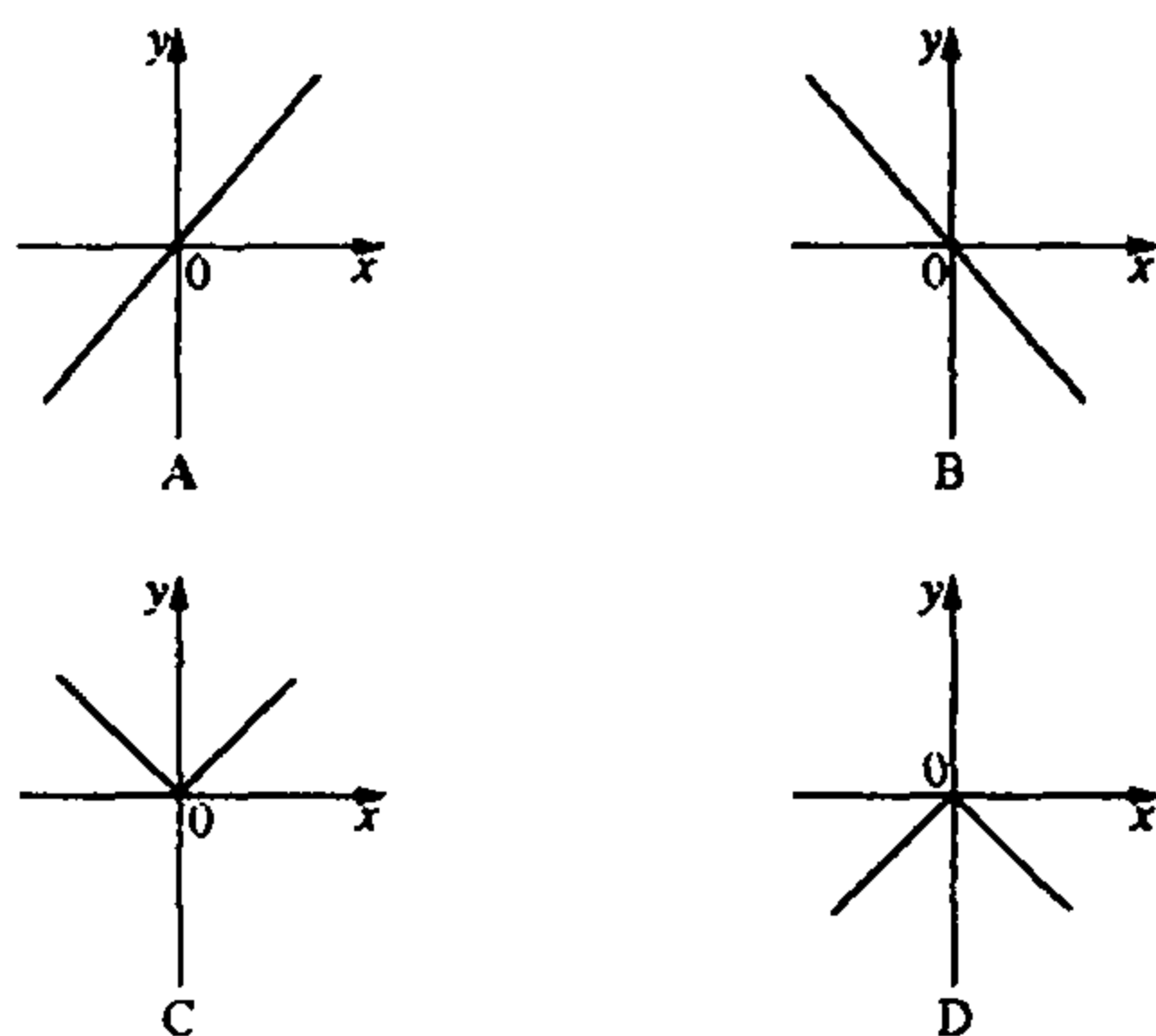


图 篇 3-1

【想法】  $-\sqrt{x^2} = -|x| = \begin{cases} -x (x \geq 0) \\ x (x < 0) \end{cases}$ , 而不能  $-\sqrt{x^2} = -x$ .

【答案】 D.

5.  $a, b$  代表不相等的正数, 下列不等式成立的是(      )

- A.  $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ;                      B.  $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ;  
C.  $\sqrt{ab} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a+b}{2}$ ;                      D.  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ .

【想法】 本书第一篇第 3 章讲“对称”思想时介绍过不等式

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \quad (a, b \in R^+).$$

那么, 立即可以想到选 B.

但若不了解这个不等式, 而应用了不等式

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (a, b \in R),$$

则出现

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \sqrt{ab} \quad (a, b \text{ 为不等正数}),$$

时,无法比较 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的大小.这是因为从知识的掌握上,达不到本题的要求,但在考场上,对待这道只有惟一正确结论的比较两个式值大小的题目,不妨设 $a=1, b=2$ 代入算算看.

【答案】 B.

6. 四个命题

甲:两条异面直线在同一平面的投影是两条平行直线或两条相交直线.

乙:平面 $\alpha$ 内有无数条直线平行于平面 $\beta$ ,那么, $\alpha \parallel \beta$ .

丙:对于两条异面直线,总存在两个平面,它们分别过两条异面直线中的一条,又互相平行.

丁:直线 $a$ 垂直平面 $\alpha$ 中的无数条直线,则 $a \perp \alpha$ .

这四个命题真假情况是( )

A. 甲、乙、丙对,丁错;

B. 甲、乙、丁错,丙对;

C. 甲、乙、丙、丁全错;

D. 甲、乙错,丙、丁对.

【想法】 全方位地运用“动”的思想.

【答案】 B.

7. 当 $\theta \in \left[ \frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi \right]$ ,并且 $\sin \theta = a$ 时,那么, $\theta$ 为( )

A.  $\arcsin a$ ;

B.  $5\pi - \arcsin a$ ;

C.  $\frac{9}{2}\pi - \arcsin a$ ;

D.  $4\pi + \arcsin a$ .

【想法】 一见反正弦函数,立即提醒自己,注意值域所在的区间.

【思路1】 为了选择正确的结论,关键是在 $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 内找到和 $\theta$ 的正弦值相同的角,从而得到 $\arcsin a$ 的另一种表达形式.

由正弦函数的周期性, $\sin(\theta - 4\pi) = a$ ,此时 $\theta - 4\pi \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right]$ .再由诱导公式,得到 $\sin[\pi - (\theta - 4\pi)] = a$ .此时, $[\pi - (\theta - 4\pi)] \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ ,化简为 $(5\pi - \theta) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ .

那么, $5\pi - \theta$ 就是 $\arcsin a$ 的另一种表达形式,于是,

$$\theta = 5\pi - \arcsin a.$$

【思路2】 画 $y = \sin x$ 的图像,分析出答案.

【思路3】 如果知识掌握的程度,达不到完成思路1或2,对于本选择题,也可以用对各选择加以检验的方法得出答案.如下所示:

结论A、D都不在 $\left[ 4\frac{1}{2}\pi, 5\frac{1}{2}\pi \right]$ 上,故排除.

而 $\sin\left(4\frac{1}{2}\pi - \arcsin a\right) = \sqrt{1-a^2}$ ,也排除,于是选B.

【答案】 B.

8. 把复数 $x + yi$ 对应的向量反向延长为原来的3倍,再顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ ,这时新向量所对应的复数是( )

A.  $-3y + 3xi$ ;

B.  $3y - 3xi$ ;

C.  $-2y + 2xi$ ;

D.  $2y - 2xi$ .

【想法】 一步一步把情景设想清楚,结论易于得到:

从  $x + yi \rightarrow -3x - 3yi \rightarrow (-3x - 3yi)(-i) \rightarrow -3y + 3xi$ .

【答案】 A.

9. 一个直角坐标系的  $x$  轴正向和一个极坐标系的极轴重合, 那么, 直线  $y = kx + 1$  ( $k < 0$ ) 和曲线  $\rho \sin \theta = \sin 2\theta$  的交点个数是( )

- A. 1 或 2;                      B. 2;                      C. 2 或 3;                      D. 3.

【想法】 先把情景想清楚,  $\rho \sin \theta = \sin 2\theta \Leftrightarrow \rho = 2 \cos \theta$  或  $\sin \theta = 0$ .

注意, 如果先统一坐标系, 反而会使问题复杂化; 不要漏掉  $\sin \theta = 0$ , 即  $\theta = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). 如图篇 3-2 所示.

【答案】 C.

10. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$  的两条渐近线所夹的锐角是( )

- A.  $\arctg 2\sqrt{2}$ ;                      B.  $\arctg \sqrt{2}$ ;                      C.  $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;                      D.  $\arctg 2$ .

【想法】 先提醒自己,  $a, b$  分别是  $2, 2\sqrt{2}$ , 而不是  $4, 8$ .

有锐角的要求, 怕弄混淆, 最好画个图, 如图篇 3-3 所示. 立即使情况一目了然了.

因为

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{2}{2\sqrt{2}}}{1 - \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

所以

$$2\theta = \arctg 2\sqrt{2}.$$

【答案】 A.

11. 如果满足  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  的任意一组  $x, y$  总能使不等式  $x + y + c \geq 0$  成立, 那么, 不等式中  $c$  的取值范围是( )

- A.  $c \leq 0$ ;                      B.  $c \leq \sqrt{2}$ ;                      C.  $c \geq -1 - \sqrt{2}$ ;                      D.  $c \geq \sqrt{2} - 1$ .

【想法】 求范围要求“充要”, 因而给已知条件代个数值来判断结论是不行的, 而应联想本书第一篇第 4 章—(二)中的例 9, 用动的思想, 换个角度想问题, 采用数形结合的方法, 则一目了然. 先把  $x + y + c \geq 0$  变形为  $y \geq -x - c$ , 那么, 当直线  $y = -x - c$  在  $y$  轴上的截距  $-c$  小于或等于直线与圆  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  相切时较小的一个截距时, 命题便成立.

如图篇 3-4 所示.

$$\begin{cases} x + y + c = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y^2 + 2(c-1)y + c^2 = 0.$$

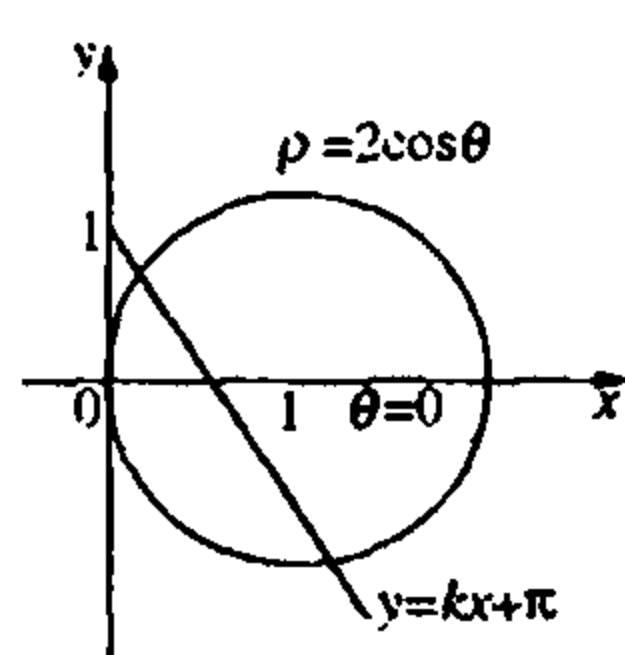
圆与直线相切  $\Leftrightarrow \Delta = [2(c-1)]^2 - 4 \times 2c^2 = 0, c = -1 \pm \sqrt{2}$ .

满足命题结论时,  $-c \leq 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow c \geq \sqrt{2} - 1$ .

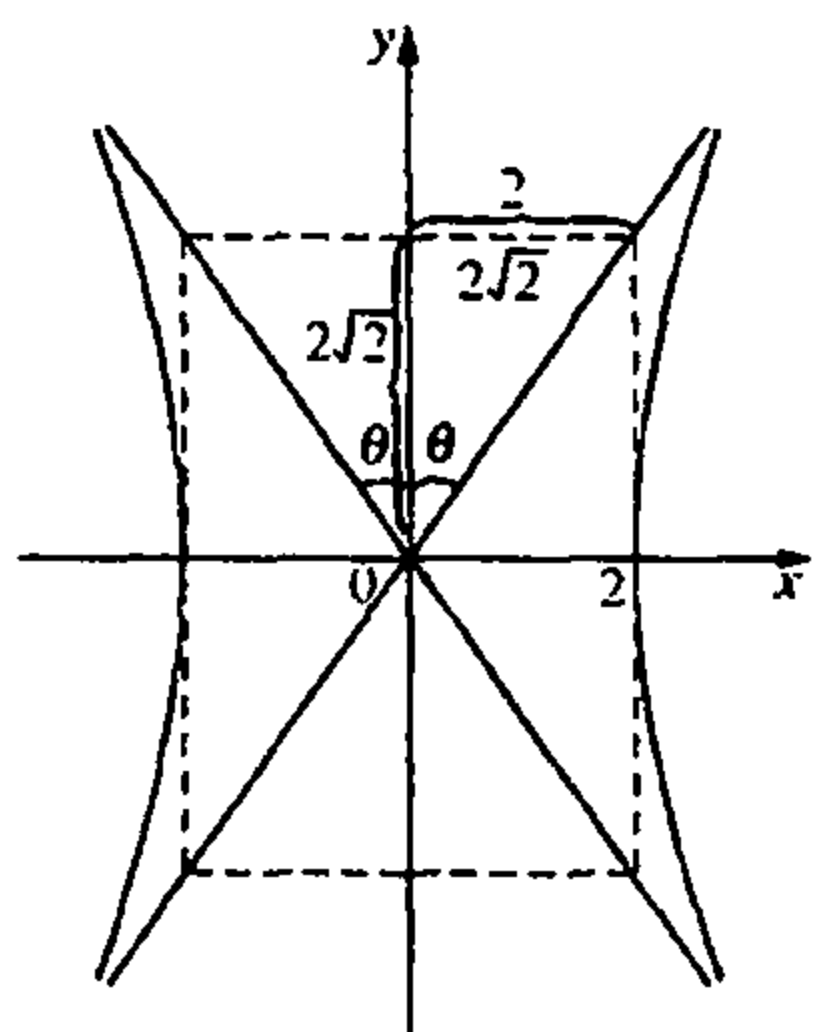
【答案】 D.

12. 条件甲:  $x^2 + y^2 > 1$ , 条件乙:  $[\arccos |x| + \arccos |y|] \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 那么, 条件甲是条件乙的( )

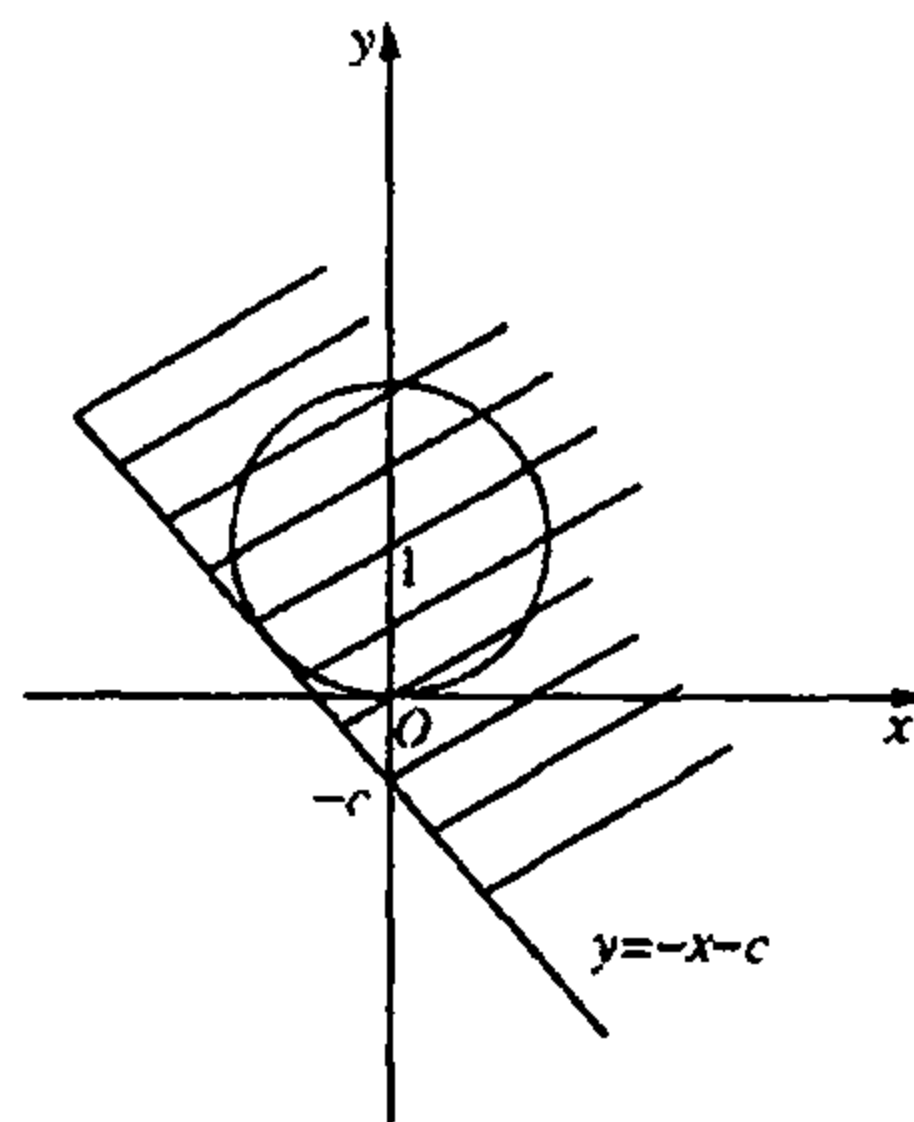
- A. 充分但不必要条件;                      B. 必要但不充分条件;



图篇 3-2



图篇 3-3



图篇 3-4

C. 充分并且必要条件;

D. 既不充分又不必要条件.

【想法】对  $x^2 + y^2 > 1$  的情景做想像, 可以  $x = 5$ , 此时  $\arccos|x|$  不存在, 于是甲不是乙的充分条件.\*

再逆向分析, 考虑到  $\arccos|x|$  和  $\arccos|y|$  都非负, 所以, 对条件  $(0, \frac{\pi}{2})$ , 主要须利用它的“上限”  $\frac{\pi}{2}$ , 这样, 宜对于  $\arccos|x| + \arccos|y|$  取余弦, 而不是取正弦, 那么, 因为

$$\theta = [\arccos|x| + \arccos|y|] \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

所以

$$\cos\theta = |x| \cdot |y| - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} > 0,$$

$$|x| \cdot |y| > \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} > 0,$$

$$x^2 y^2 > (1-x^2)(1-y^2),$$

$$x^2 + y^2 > 1.$$

本题也可以利用图形来思考, 更为简明(从\*号处开始). 具体做法如下:

再逆向分析, 考虑到  $\arccos|x|$  和  $\arccos|y|$  都非负, 并且其和小于  $\frac{\pi}{2}$ , 若分别记它们为  $\alpha, \beta$ , 则在单位圆上, 它们可如图篇 3-5 所示,

$\angle AOC = \alpha, \angle BOD = \beta$ .

此时,  $OC = |x|, BB' = OD = |y|$ .

$\because OC^2 + CA^2 = 1$ , 及  $BB' > AC$ ,

$\therefore OC^2 + BB'^2 > 1$ ,

即  $x^2 + y^2 > 1$ .

前面谈到, 对于  $[\arccos|x| + \arccos|y|]$  宜取余弦……

事实上, 如果取了正弦, 因为

$$\theta = [\arccos|x| + \arccos|y|] \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

那么,

$$\sin\theta = \sqrt{1-x^2} \cdot |y| + |x| \cdot \sqrt{1-y^2} > 0,$$

$$|y| \cdot \sqrt{1-x^2} > -|x| \cdot \sqrt{1-y^2}.$$

这时, 不等式两端一正一负, 不能运用两边平方的手段, 问题就复杂化了.

如果利用

$$\sin\theta = \sqrt{1-x^2} \cdot |y| + |x| \cdot \sqrt{1-y^2} < 1$$

去变化不等式, 虽可以得出

$$x^2 + y^2 > 1,$$

但过程较繁, 故取余弦为宜.

【答案】 B.

(二) 填空(每小题 4 分, 共 24 分)

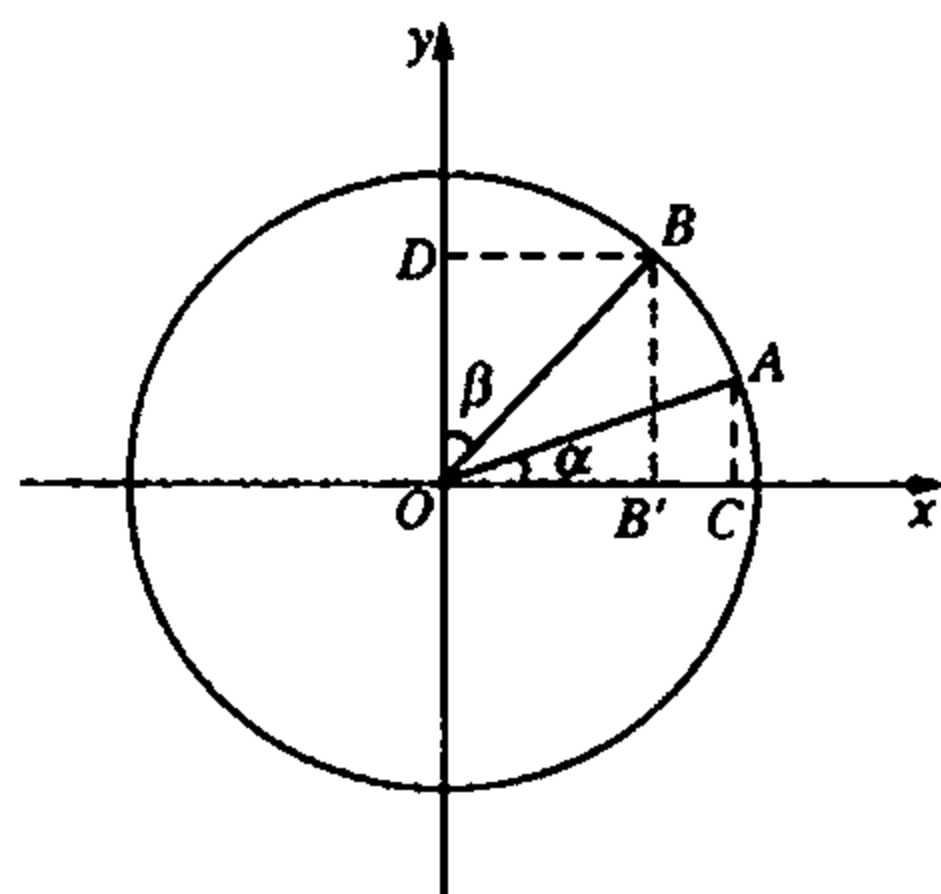
13. 一个多边形的周长为 133 cm, 各边长组成等差数列, 公差是 5 cm, 边长最长为 34 cm, 这个多边形的边数是\_\_\_\_\_.

【想法】把 34 cm 选作  $a_1$ , 代入公式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

来计算将节省时间. 其中  $d = -5$ , 这也是换个角度来思考, 而不把 34 cm 看做  $a_n$ .

【答案】 7.



图篇 3-5



14. 复数  $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ , 那么,  $z_1^5 + 5z_1^4z_2 + 10z_1^3z_2^2 + 10z_1^2z_2^3 + 5z_1z_2^4 + z_2^5$  的值是\_\_\_\_\_.

【想法】 如果把  $z_1, z_2$  代入欲求式, 太麻烦了! 于是换个角度思考.

观察欲求式, 它是  $(z_1 + z_2)^5$ . 答案立得.

【答案】  $9\sqrt{3}$ .

15. 不等式  $\sqrt{(x^2 - 6x + 7)^2} \leq 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

【想法】 见题, 立即联想  $\sqrt{a^2} = |a|$ , 于是原不等式  $\Leftrightarrow |x^2 - 6x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 6x + 7 \leq 1$ .

【答案】  $\{x | 3 - \sqrt{3} \leq x \leq 2, x \in R\} \cup \{x | 4 \leq x \leq 3 + \sqrt{3}, x \in R\}$ .

16. 若  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ , 并且  $x \neq y$ , 那么,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + x^{n-1}y + \cdots + x^{n-k}y^k + \cdots + xy^{n-1} + y^n) =$ \_\_\_\_\_.

【想法】 先从正面想,  $n \rightarrow \infty$  时, 各项都  $\rightarrow 0$ , 但项数  $\rightarrow \infty$ , 无法算.

于是, 换个角度思考, 联想公式  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , 那么, 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = 0$  (因为  $x - y$  是定值, 而  $x^{n+1} \rightarrow 0, y^{n+1} \rightarrow 0$  时,  $x^{n+1} - y^{n+1} \rightarrow 0$ ).

【答案】 0.

17. 函数  $f(x) = 5 \left( \frac{1 - \tan^2 2x}{1 + \tan^2 2x} \right)^2 - 1$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.

【想法】 求周期, 一般宜把表达式中的多个三角函数, 消化为一个三角函数. 于是, 运用万能公式

$$\text{原式} = 5 \cos^2 4x - 1 = 5 \left( \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) - 1,$$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{\pi}{4}.$$

【答案】  $\frac{\pi}{4}$ .

18. 若  $x > 1, y > 1$ , 并且  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x \cdot \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y = 1$ , 那么,  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} xy$  的最大值是\_\_\_\_\_.

【想法】 首先想到用  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . 但是,  $x+y$  没给出是定值, 如本书第一篇第5章二(二)中所分析的, 不适合用公式  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  求最大值; 而且, 即使求出了  $xy$  的最大值, 由于  $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$ ,  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} xy$  也变成最小值了, 此路不通!

从  $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$  上打主意, 由于  $x > 1, y > 1$ , 这时  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x, \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y, \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} xy$  都小于 0, 为了应用平均数不等式 (本题的形式似与平均数不等式有缘), 于是, 改造已知式为  $(-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x)(-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y) = 1$ , 那么

$$-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} xy = -(\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x + \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y) = (-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x) + (-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y)$$

$$\geq 2 \sqrt{(-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x)(-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y)} = 2.$$

则  $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} xy \leq -2$ .

【答案】 -2.

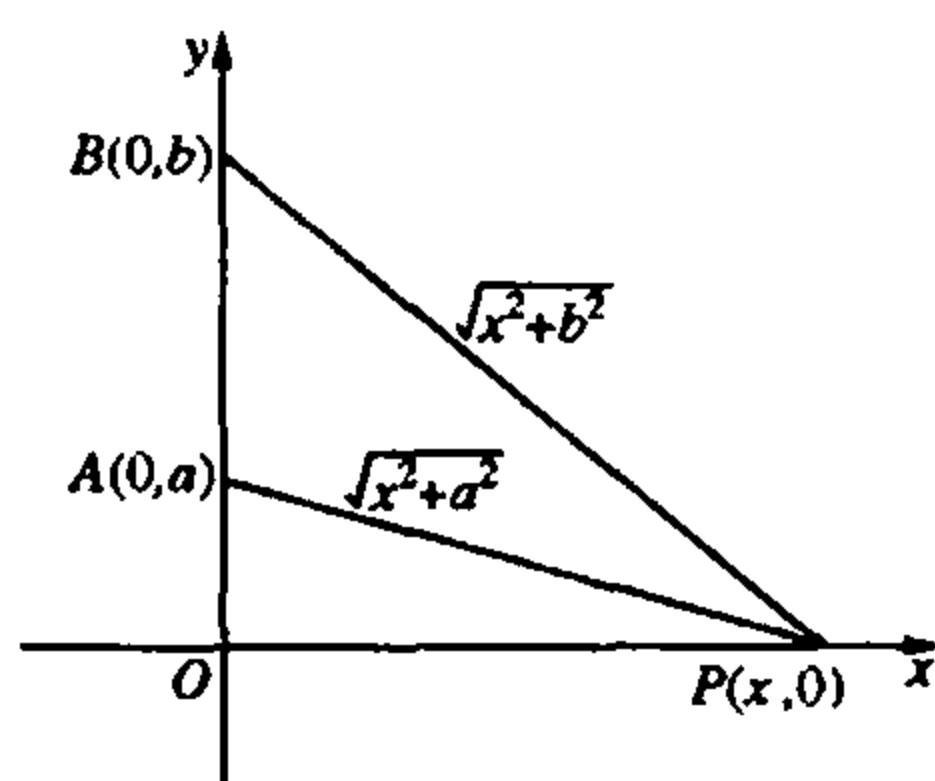
(三) 解答题(要写出推理过程,每小题 10 分,共 60 分)

19. 如图篇 3-6 所示,在  $y$  轴正向上有点  $A(0, a), B(0, b), b > a$ , 在  $x$  轴正向上求一点  $P$ , 使  $\angle APB$  最大.

【说明】 对于这道 1986 年多数考生解不出来的高考题,本书第一篇第四章一(二)中介绍了标准答案上的解法,本书第一篇第 3 章二(二)的例 3 中又介绍了简捷的平面几何证法.

但大多数考生在考场上,用了余弦定理,解到

$$\cos \angle APB = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}} \quad ①$$



图篇 3-6

这一步时,由于分式的分子、分母都有变量  $x$  无法求最大(小)值,只好半途而废.

这时,对于一名考生,最重要的是,在头脑清醒的前提下,坚韧不拔,而在顽强奋斗的过程中,又保持头脑清醒.

【想法】 把上面的①式改造,使只在分母上有  $x$ .

$$\text{上式} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}{x^2 + ab}}.$$

但这时,作为分母的分式,又是分子、分母中都有  $x$ . 如果仍做这种处理,将不尽循环. 怎么办? 换一种方法试试.

$$\text{上式} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4 + (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2}{x^4 + 2abx^2 + a^2b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(a^2 + b^2)x^2 - 2abx^2}{x^4 + 2abx^2 + a^2b^2}}}.$$

做上述第二步变形的动机,是在根号内观察对照分子、分母的共同点的结果.

再继续下去,由于欲求最大(小)值,想试试平均数不等式,于是,再作变形,根号内分式的分子、分母同除以  $x^2$ :

$$\text{上式} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{\frac{(x^2 + ab)^2}{x^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{\left(x + \frac{ab}{x}\right)^2}}}.$$

变形成功!

当  $x = \frac{ab}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$  时,  $\cos \angle APB$  取得最小值,此时,锐角  $\angle APB$  最大.

不屈不挠,终于成功.

20. 证明:当  $x \in R^+$  时,

$$2\arctg \sqrt{x} - \arccos \frac{1-x}{1+x}$$

的值是常数.

【想法】 处理用反三角函数形式给出的角度,一般地,宜通过它的三角函数去变换处理,那么,如果记

$$\theta = 2\arctg \sqrt{x} - \arccos \frac{1-x}{1+x}. \quad (*)$$

宜取  $\theta$  的一个三角函数值,取  $\theta$  的哪个函数值为好呢? 由于计算  $\lg(\arccos \alpha)$  较计算  $\cos(\arctg \alpha)$  为

易,所以,取  $\theta$  的正切值.

$$\text{设 } \alpha = \arctg \sqrt{x} \Rightarrow \tg \alpha = \sqrt{x}, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

则 
$$\tg 2\alpha = \frac{2\tg \alpha}{1 - \tg^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{x}}{1 - x}, \quad 2\alpha \in (0, \pi),$$

$$\text{设 } \beta = \arccos \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \tg \beta = \frac{2\sqrt{x}}{1-x}, \beta \in (0, \pi),$$

由于  $\tg 2\alpha = \tg \beta$ , 且  $2\alpha, \beta \in (0, \pi) \Rightarrow 2\alpha - \beta = \theta = 0$ ,  
如果熟悉万能公式,从(\*)式处开始,将立即得到

$$\cos(2\arctg \sqrt{x}) = \frac{1 - (\sqrt{x})^2}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1-x}{1+x}.$$

又由 
$$2\arctg \sqrt{x}, \arccos \frac{1-x}{1+x} \in (0, \pi) \Rightarrow 2\arctg \sqrt{x} = \arccos \frac{1-x}{1+x},$$

所以 
$$\theta = 2\arctg \sqrt{x} - \arccos \frac{1-x}{1+x} = 0.$$

21. 一个四面体有两个底面上的高线相交,证明它的另两条高线也相交.

这是一道难度较高过程又烦琐的题目,如果运用“对称”思想去分析(已知中的两条高线和结论中的两条高线的地位平等,因而是“对称”的),将使思考的难度降低一半.

【想法】 画出如图篇 3-7 所示的图形,  $AE \perp$  平面  $BCD$  于  $E$ ,  $BF \perp$  平面  $ACD$  于  $F$ ,  $AE$  和  $BF$  相交,那么,共面直线  $AF$  和  $BE$  的交点  $G$ ,应在平面  $ACD$  和  $BCD$  的交线  $CD$  上(公理二).

$$\begin{aligned} &\text{由} \quad \left. \begin{aligned} AE \perp \text{平面 } BCD &\Rightarrow AE \perp CD \\ BF \perp \text{平面 } ACD &\Rightarrow BF \perp CD \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD \perp \text{平面 } ABG. \end{aligned}$$

这时,运用“对称”思想来猜想,  $AB$  应该垂直于另两条高线所决定的平面,这是证出本题的最关键的一步思考.

先由上面已证的  $CD \perp$  平面  $ABG \Rightarrow CD \perp AB$ . 为了减少图形的视觉纷乱,把已经完成推理任务的平面  $ABG$  擦去,重新画图,如图篇 3-8 所示.

这也是一种处理技巧.

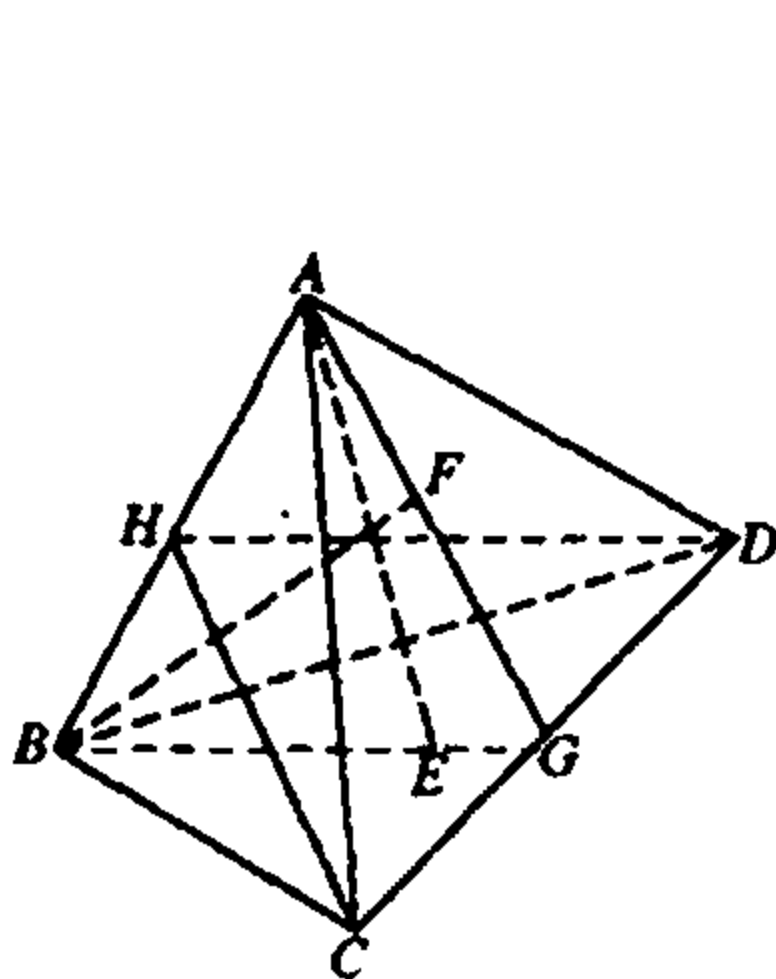


图 篇 3-7

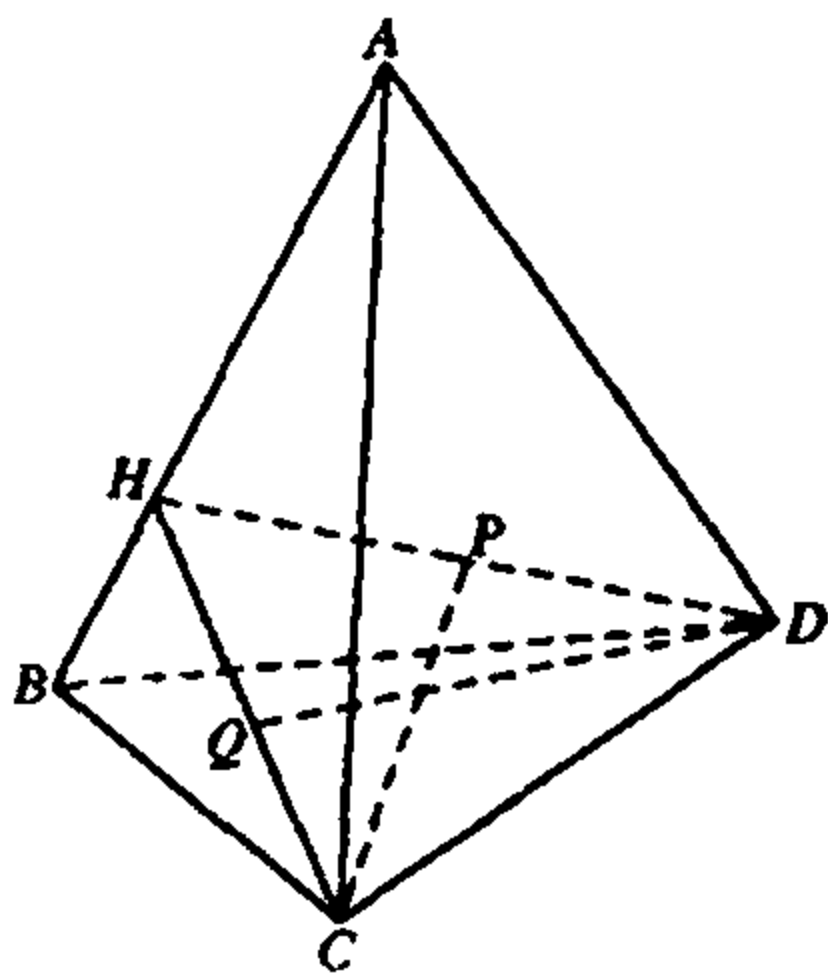


图 篇 3-8

作  $CP \perp$  平面  $ABD$  于  $P$ , 设直线  $DP$  交  $AB$  于  $H$ , 连结  $CH$ , 于是  $CP \perp AB$ , 又由  $CD \perp AB$ , 则  $AB \perp$  平面  $CHD \Rightarrow$  平面  $ABC \perp$  平面  $CHD$ . 因而, 若作  $DQ \perp CH$  于  $Q$ , 那么  $DQ \perp$  平面  $ABC$  (如果两个平面互相垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线, 必垂直于另一平面), 即  $DQ$  是四面体的底面  $ABC$  上的高.

而在平面  $CDH$  上,  $CP$  和  $DQ$  必相交(同一三角形的两条高线相交).

22. 已知  $\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3$  构成公比为  $q$  的等比数列,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  构成公差为  $d$  的等差数列, 如果复数  $z = aq[\cos(\varphi + d) + i\sin(\varphi + d)]$  (常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 又复数  $u = z + \frac{1}{z}$ .

求 当  $\varphi$  变化时,  $u$  在复平面内所对应的点的轨迹, 并求使  $u$  的模为 1 时,  $a, d$  的取值范围.

【想法】 欲求复数  $u$  的图形, 需先求出复数  $z$ , 由于在  $z$  的表达式中有三个未知参变量  $\varphi, q, d$ , 需求出其中的两个. 又由于已知中给出了关于  $q$  及  $d$  的条件, 于是考虑, 先确定  $d$  与  $q$ .

由已知,  $\theta_1 = \theta_2 - d, \theta_3 = \theta_2 + d$ , 又由  $\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3$  成等比数列, 有

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_2 &= \sin(\theta_2 - d) \cdot \sin(\theta_2 + d) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}[1 - \cos 2\theta_2] = -\frac{1}{2}[\cos 2\theta_2 - \cos 2d] \\ &\Rightarrow \cos 2d = 1 \\ &\Rightarrow d = k\pi (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

因为  $q = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{\sin(\theta_1 + k\pi)}{\sin\theta_1} = (-1)^k (k \in \mathbb{Z}),$

所以  $z = (-1)^k a[\cos(\varphi + k\pi) + i\sin(\varphi + k\pi)].$

当  $k$  为奇数时,

$$\text{上式} = -a[-\cos\varphi - i\sin\varphi] = a(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

当  $k$  为偶数时,

$$\text{上式} = a(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

所以  $z = a(\cos\varphi + i\sin\varphi).$

①

因为  $a > 0$ , 所以①式是复数  $z$  的三角式.

若复数  $u$  对应点为  $P(x, y)$ , 因为

$$u = z + \frac{1}{z} = a(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{a}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos\varphi + i\left(a - \frac{1}{a}\right)\sin\varphi,$$

②

所以

$$\begin{cases} x = \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos\varphi, \\ y = \left(a - \frac{1}{a}\right)\sin\varphi. \end{cases}$$

由于  $a \neq 1$ , 则上式表示了以  $\varphi$  为参数的椭圆方程, 化为普通形式则为:

$$\frac{x^2}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = 1.$$

表示对称中心在坐标原点, 长轴在  $x$  轴上, 长、短半轴分别为  $a + \frac{1}{a}, a - \frac{1}{a}$  的椭圆, 这就是复数  $u$  在复平面上所对应的点的轨迹.

当  $|u| = 1$  时, 由②式有

$$\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)\cos\varphi\right]^2 + \left[\left(a - \frac{1}{a}\right)\sin\varphi\right]^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\cos 2\varphi = 1 \Rightarrow 1 - 2\cos 2\varphi = a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

$$\Rightarrow \cos 2\varphi < -\frac{1}{2} (\because a \neq 1) \Rightarrow 2k\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\varphi < 2k\pi + \frac{4}{3}\pi$$

$$\Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{3} < \varphi < k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

由前述

$$\cos 2a \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 < a^2 + \frac{1}{a^2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 3a^2 + 1 \leq 0 (\because a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0 \text{ 恒成立})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq a^2 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

又因为  $a > 0$ , 所以  $a$  的取值范围是

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right], \quad \text{且 } a \neq 1.$$

23. 已知 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} (n \geq 2)$ ,  $S_n$  表示前  $n$  项的和,

求  $\{a_n\}$  的通项表达式.

【想法】 欲求  $a_n = f(n)$ , 若代入  $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ , 将得到  $f(n) = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ . 因而, 若首先求得  $S_n = \Phi(n)$ , 可得到本题的一个解决途径.

$$\text{由} \quad S_n - S_{n-1} = a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} (\geq 2) \Rightarrow S_{n-1} - S_n = 2S_n S_{n-1} \quad \text{①}$$

(想法: 如果把此式两边除以  $S_n \cdot S_{n-1}$ , 将出现大有前途的等差数列  $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$ . 但这需要  $S_n, S_{n-1}$  都不为零, 于是, 先试试证明  $S_n \neq 0$ )

用反证法, 若存在某个  $i (i \in \mathbb{N} \text{ 且 } i \geq 2)$ , 使得

$$S_i = 0 \Rightarrow a_i = \frac{2S_i^2}{2S_i - 1} = 0 \Rightarrow S_{i-1} = S_i - a_i = 0,$$

同样地,  $S_{i-2} = 0, S_{i-3} = 0, \dots, S_1 = 0 = a_1$ , 与  $a_1 = 1$  矛盾.

于是, 数列  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  是以  $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$  为首项, 以 2 为公差的等差数列, 则

$$\frac{1}{S_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1 \Rightarrow S_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3}$$

$$= \frac{-2}{(2n-1)(2n-3)} (n \geq 2), \text{ 及 } a_1 = 1.$$

24. 过曲线  $f(x) = x^2 - 2$  上一点  $(x_n, f(x_n))$  的直线  $l$  的斜率为  $2x_n$ , 并且,  $l$  与  $x$  轴交于点  $(x_{n+1}, 0) (n \in \mathbb{N})$ , 如果  $x_1 = 2$ , 求用  $x_n$  表示  $x_{n+1}$  的表达式, 并证明

$$0 < x_n - \sqrt{2} < 1 \quad \text{及} \quad x_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2} (n \in \mathbb{N}).$$

【想法】 题读罢一遍, 多数同学会感到扑朔迷离, 摸不着头脑, 那就再读, 并且数形结合, 一定要很细致地把题目所表达的情景弄清, 再往下进行, 如图篇 3-9 所示.

在曲线上任取一点  $A$ , 依题意可画出  $\text{Rt} \triangle ABC$ . 这里,  $A[x_n, f(x_n)], B(x_{n+1}, 0), C(x_n, 0), CA =$

$f(x_n)$ ,  $BC = x_n - x_{n+1}$ , 那么,

$$2x_n = \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{CA}{BC} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}.$$

①

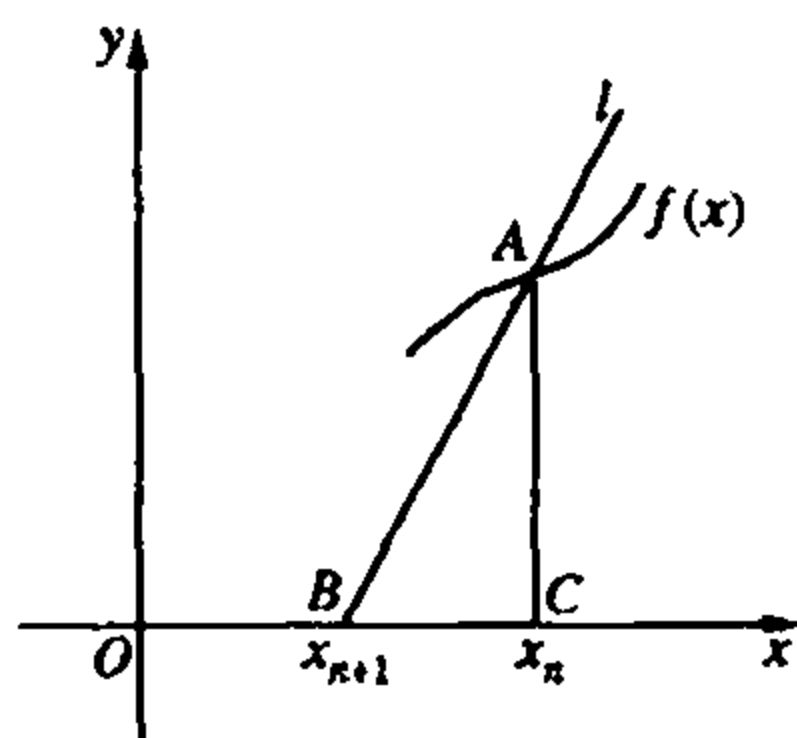


图 篇 3-9

至此,在弄通情景的思考中,无形中,使推理迈进一步,完成了第一个欲达到的目的.

下面来证  $0 < x_n - \sqrt{2} < 1$ .

由于从①式尚不易推出用  $n$  表示  $x_n$  的表达式,又由于是与自然数  $n$  有关的命题,于是,想试试数学归纳法.

1°  $n=1$  时,因为已知  $x_1=2$ ,所以

$$x_1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \in (0, 1).$$

命题成立.

2° 若  $0 < x_k - \sqrt{2} < 1$  ( $k \geq 1, k \in N$ ), 则

$$x_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k} - \sqrt{2} = \frac{(x_k - \sqrt{2})^2}{2x_k},$$

②

记它为  $\lambda$ .

由归纳假设有

$$0 < x_k - \sqrt{2} < 1 \Rightarrow 0 < (x_k - \sqrt{2})^2 < 1 \text{ (为了向 ② 式靠拢)}.$$

由归纳假设还可以有

$$\sqrt{2} < x_k < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} < 2x_k < 2 + 2\sqrt{2} \text{ (也是为了向 ② 式靠拢)}.$$

并且  $(x_k - \sqrt{2})^2, 2x_k > 0$ . 那么,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{\min} > \frac{0}{2 + \sqrt{2}} = 0 \\ \lambda_{\max} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \in (0, 1).$$

即

$$0 < x_{k+1} - \sqrt{2} < 1.$$

综合 1°, 2°, 对一切  $n \in N$ ,

$$0 < x_n - \sqrt{2} < 1$$

③

总成立.

再证

$$x_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2} \quad (n \in N).$$

④

由于前面已经推出了用  $x_n$  表示  $x_{n+1}$  的①式,并且③式给出了  $x_n$  的范围,这时,自然想到把①式代入④式中,再变形,向③式靠拢.

过程如下:

由于  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ , 则欲使④式成立,只需

$$\frac{x_n^2 + 2}{2x_n} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2}.$$

即只需

$$\frac{x_n^2 - \sqrt{2}x_n + \sqrt{2}x_n + 2}{2x_n} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2}$$

成立(不等式左端变形的想法是,为了凑出  $x_n - \sqrt{2}$ ,以便与右端的  $x_n - \sqrt{2}$  合并,并且利用③式),

即只需

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2}$$

成立,即只需

$$\frac{1}{x_n} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_n > \sqrt{2} \tag{⑤}$$

成立.

由于⑤式已经成立( $x_n - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow x_n > \sqrt{2}$ ),故④式成立.

应用部分分式的知识,上述过程还可以更简单些(从\*处开始):

即只需

$$\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} < \frac{x_n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{1}{x_n} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_n > \sqrt{2} \tag{⑤}$$

成立.

由于⑤式已经成立( $x_n - \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x_n > \sqrt{2}$ ),故④式成立.

本题是有一定难度的题目(《中学生数理化》杂志、北京大学招生办公室联合举办的1991年度全国高中通讯数学竞赛的试题,是陶晓勇老师和我共同编拟的.其中第10题第1问,就是在本题基础上再提高难度加工而成),面目扑朔迷离.但首先利用数形结合和“要弄通情景”的指导思想,识破了它的庐山真面目,一步步解来,也并非难事.

如果,在“弄通情景”这个环节,花更大气力,又将如何呢?

再作分析:曲线是抛物线,与  $x$  轴交于  $(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $(\sqrt{2}, 0)$ ,如图篇3-10所示.

于是,第一问

$$0 < x_n - \sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < x_n < 1 + \sqrt{2}$$

实质是证明  $x_n$  向左移动的过程不会达到  $\sqrt{2}$ .

那么,很容易想到对  $x_{n+1}$  的表达式作变形

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \geq \sqrt{2}.$$

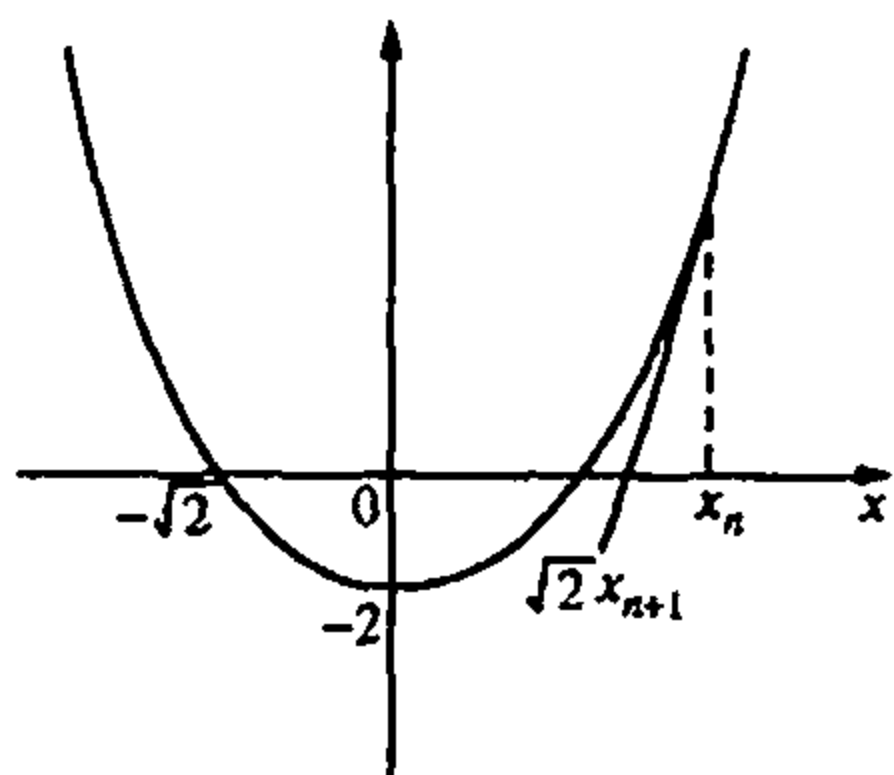
往下只剩下证明  $x_n > 0$  和“=”号不会成立的工作了,这远比解法一中用数学归纳法简捷多了.再分析第二问的情景.

从图形上看,欲证

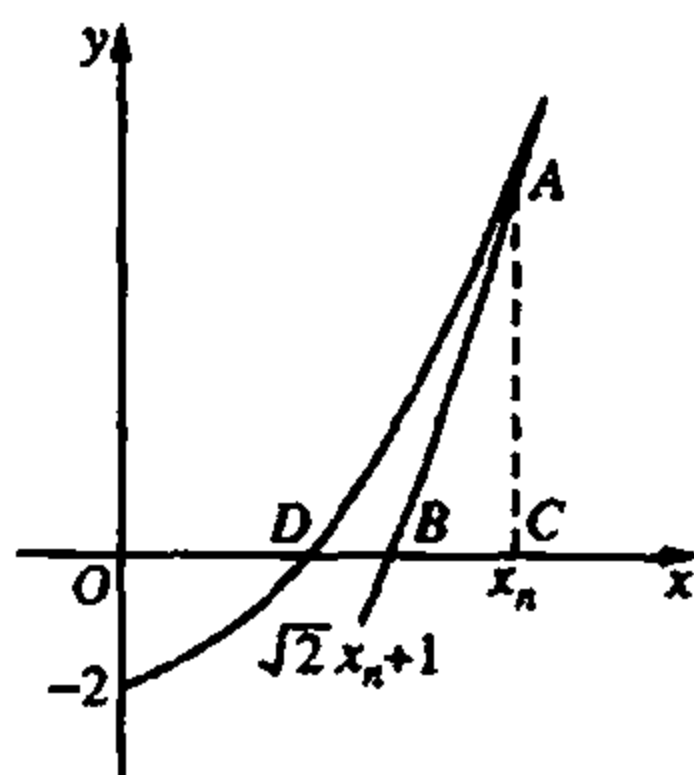
$$x_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2}$$

的实质,不过是证明点  $B(x_{n+1}, 0)$  在线段  $DC$  中点的左侧,  $D(\sqrt{2}, 0)$ ,  $C(x_n, 0)$ ,如图篇3-11所示.即只要证明

$$x_{n+1} < \frac{x_n + \sqrt{2}}{2}$$



图篇3-10



图篇3-11

即可,而这极其简单.

**证明** 在曲线上任取一点  $A$ . 依题意可画出  $\text{Rt} \triangle ABC$  (如图篇 3-11 所示), 这里  $A(x_n, f(x_n))$ ,  $B(x_{n+1}, 0)$ ,  $C(x_n, 0)$ ,  $CA = f(x_n)$ ,  $BC = x_n - x_{n+1}$ . 那么,

$$2x_n = \lg \angle ABC = \frac{CA}{BC} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} (n \in N). \quad ①$$

即

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}} (n \in N, n > 1). \quad ②$$

$$1^\circ \because x_1 = 2 > 0,$$

$$\therefore x_2 = \frac{x_1^2 + 2}{2x_1} > 0,$$

同理  $x_3 > 0, \dots, x_n > 0$ .

$$\therefore x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}} \geq \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{x_{n-1}}{2} = \frac{1}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-1} = \sqrt{2} \text{ 时, “=” 号成立.}$$

由  $x_1 = 2$ , 代入上式, “=” 号不成立, 于是  $x_2 > \sqrt{2}$ . 同理,  $x_3 > \sqrt{2}, \dots, x_n > \sqrt{2}$ , 即

$$x_n - \sqrt{2} > 0. \quad *$$

**注意** \* 号式的这一段证明, 严谨地写出来, 是第二数学归纳法.

$2^\circ \lg \angle ABC = 2x_n > 0$ , 则  $x_{n+1}$  总在  $x_n$  左侧, 即

$$x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 = 2 < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_n - \sqrt{2} < 1.$$

综合  $1^\circ, 2^\circ, 0 < x_n - \sqrt{2} < 1$ .

再证

$$x_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{x_n - \sqrt{2}}{2} (n \in N). \quad ③$$

欲使③式成立, 只需

$$x_{n+1} < \frac{x_n + \sqrt{2}}{2}$$

成立, 即只需

$$\frac{x_n^2 + 2}{2x_n} < \frac{x_n + \sqrt{2}}{2}$$

成立, 即只需

$$x_n > \sqrt{2} (\because x_n > 0)$$

成立. 在  $1^\circ$  中已证它成立, 故③式成立.

以上, 较“证法一”之简捷, 实不可同日语, 何以致此? 皆缘“数形结合弄通情景”矢志不移. 到头来, 把个庞然大物剥得原形毕露, 威风扫地. 而敢于拿下难题的勇气, 亦从此由心底升起!

现在再去探讨, 又将有许多漂亮的解法纷至沓来, 似从天降般随手拈来, 得来全不费功夫. 难题不难了!

这正是笔者奉献给同学们对待难题的态度和方法.



## 第四篇 解题思考分析的再示范

到现在为止,本书向同学们介绍了如何把知识学好、学扎实.而学习的目的,全在于应用.本书也介绍了如何运用知识去解决问题,但篇幅和深度不够.因为在前几篇中只是为了说明方法而举例,而要真正能灵活地运用知识和思考规律去解决问题,逐步达到出神入化炉火纯青的境界,我们还要在解题的分析方法上做更深入的讨论.在解题的思考中,一些更进一步的规律和方法,也需要我们去体会和丰富.

设立本篇就是要达到上述目的.

为此,对于本篇的每道例题,请同学们先充分思考之后,再来看我的解答,以便和我的思考做比较.

同学们要特别重视我在每道例题后面的说明,它将介绍前面说到的更丰富的解题思考规律.而解法前的分析,则叙述了我的分析思考的由来,这些也是应该引起重视的地方.

### 一、示范一

**例1** 如图篇4-1所示,有一条笔直的河流,仓库A到河岸所在直线MN的距离是10公里, $AC \perp MN$ 于C,码头B到C为30公里.现在有一批货物,要从A运到B,已知货物走陆地时,单位里程的运价是走水路时的2倍,那么,直线MN上的点D应选在离点C多远处,才能使货物经过陆地到达D,再由水路到达B后的总运费最低.



图篇4-1

**分析** 第一步,若D点选在射线CM上,由于 $AD > AC$ , $DB < CB$ ,那么,总运费高于D点选在C点处;类似可得,D点也不能选在射线BN上.这样,D点应选在线段CB上.

设CD长 $x$ 公里,则陆路AD长 $\sqrt{100+x^2}$ 公里,水路DB长 $(30-x)$ 公里.

第二步,由于是求总运费的最小值,所以,宜设总运费为 $y$ .

在这里,由于陆、水路运费只给出了倍数关系,因此宜设水路单价为 $a$ 元/公里,则陆路单价为 $2a$ 元/公里.

立即依题意表达 $y$ :

$$\begin{aligned} y &= \text{陆路运费} + \text{水路运费} = \text{陆路单价} \times \text{陆路里程} + \text{水路单价} \times \text{水路里程} \\ &= 2a \cdot \sqrt{100+x^2} + a(30-x). \end{aligned}$$

第三步,对 $y = 2a\sqrt{100+x^2} + a(30-x)$ 做分析、简化处理:

$$y = a[(2\sqrt{100+x^2} - x) + 30],$$

由于  $a > 0$ , 那么, 欲使  $y$  得最小值, 只要

$$u = 2\sqrt{100 + x^2} - x$$

得到最小值. 现在问题转化为求一个函数  $u$  的最小值.

眼下的障碍是  $u$  存在着“ $\sqrt{\quad}$ ”号. 要去掉它\*, 自然想到了两边平方的手段. 这便得到了解法一.

解法一 设  $CD$  长  $x$  公里, 总运费为  $y$  元, 水路运输单价为  $a$  元/公里, 那么

$$y = 2a\sqrt{100 + x^2} + a(30 - x), \text{ 整理得 } y = a[2(\sqrt{100 + x^2} - x) + 30].$$

记  
有

$$u = 2\sqrt{100 + x^2} - x$$

①

$$u + x = 2\sqrt{100 + x^2}$$

两边平方, 并整理为关于  $x$  的一元二次方程:

$$3x^2 - 2ux - u^2 + 400 = 0,$$

使  $x$  有实数解的充要条件是

$$\Delta = (2u)^2 - 4 \times 3(-u^2 + 400) \geq 0,$$

解得

$$u^2 \geq 300,$$

$$u \geq 10\sqrt{3}$$

或

$$u \leq -10\sqrt{3} \quad (\text{舍去, 因为 } u = 2\sqrt{100 + x^2} - x > 0)$$

这样,  $u$  的最小值为  $10\sqrt{3}$ , 代入①式. 得

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \in [0, 30] \quad **$$

$\therefore D$  应选在  $CB$  之间距离  $C$  点  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$  公里处.

说明 本解法所用的方法, 人们称之为求值域的判别式法.

它的原理是, 利用判别式, 求出能使得  $x$  取实数值的函数( $y$ )值的范围, 其端点则当然是函数( $y$ )值的最大(小)值了.

但是, 一方面, 对于一个具体的函数, 它的自变量取值范围常常只是实数的一部分; 另一方面, 在变形过程中, 有时采取过一些不保证同解的变形步骤. 因而, 对于用“判别式法”求出的最大(小)值, 需要返回原题(式)去检验. 如本解法最后一步“\*\*”式所示.

一般地, 当函数解析式的各项中, 只有一个含“ $\sqrt{\quad}$ ”, “ $\sqrt{\quad}$ ”下含的  $x$  项不高于 2 次, 含“ $\sqrt{\quad}$ ”项之外的各项是不高于  $x$  的一次式时, “判别式”法是适用的; 当函数的解析式是一个分式, 分子、分母都是关于  $x$  的二次式, 或其中之一是关于  $x$  的二次式, 另一是关于  $x$  的一次式时, “判别式”法也适用.

解法二 设  $\text{tg}\theta = \frac{x}{10} (\theta \in [0, \text{arctg}3])$ ,

则

$$\begin{aligned} u &= 2\sqrt{100 + x^2} - x \quad * = 20\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2} - x = 20\sqrt{1 + \text{tg}^2\theta} - 10\text{tg}\theta \\ &= 20\sec\theta - 10\text{tg}\theta (\because \sec\theta \geq 0) = 10\left(\frac{2}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = 10 \cdot \frac{2 - \sin\theta}{0 - (-\cos\theta)} \end{aligned}$$

在这里,  $\frac{2 - \sin\theta}{0 - (-\cos\theta)}$  表示点  $A(0, 2)$  到点  $(-\cos\theta, \sin\theta)$  连线的斜率, 其中  $\theta \in [0, \text{arctg}3]$ , 如图

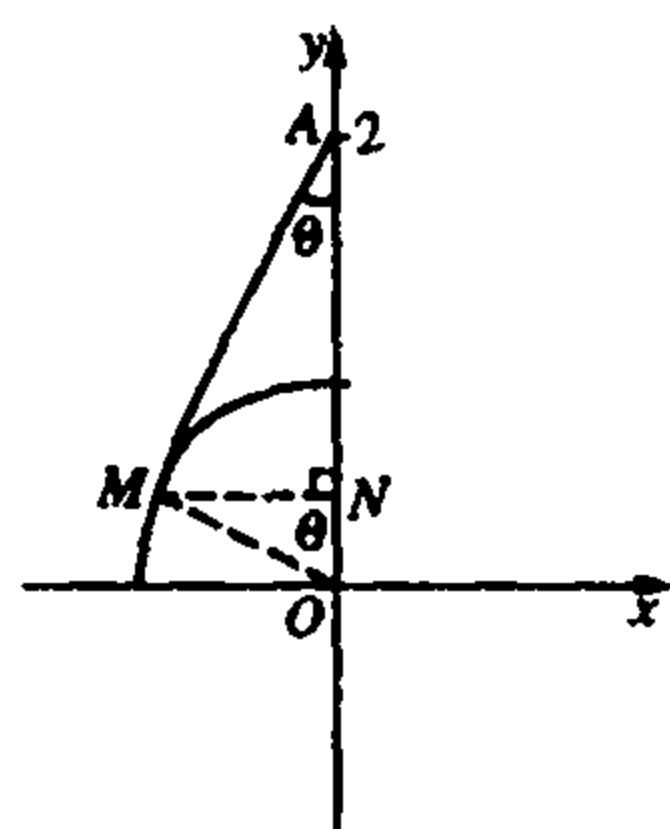
篇 4-2 所示.

其中最小的斜率为切线  $AM$  的斜率. 连结  $OM$ , 在  $\text{Rt}\triangle AMO$  中,  $OM = 1$ ,  $OA = 2$ , 于是  $\angle MAO = 30^\circ$ , 作  $MN \parallel x$  轴,  $MN$  交  $y$  轴于  $N$ , 则在  $\text{Rt}\triangle AMN$  中,  $\angle AMN = 60^\circ$ , 于是切线  $AM$  的斜率为  $\sqrt{3}$ , 即  $\frac{2 - \sin\theta}{0 - (-\cos\theta)}$  的最小值为  $\sqrt{3}$ ,

$$\Rightarrow u_{\min} = 10\sqrt{3}.$$

代入 \* 式, 得

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \in [0, 30].$$



图篇 4-2

**说明** [1] 本解法最后一步为什么仍要检验? 因为, 把  $u_{\min} = 10\sqrt{3}$  代入 \* 式后的计算中, 有两边平方的步骤.

[2] 为什么  $\theta \in [0, \arctg 3]$ , 是因为, 由题意,  $0 \leq x \leq 30$ .

[3] 为什么一开始想到要设  $\tg\theta = \frac{x}{10}$ ? 这也是为了要去掉  $u = 2\sqrt{100 + x^2} - x$  中的“ $\sqrt{\quad}$ ”号.

这是一种有普遍意义的方法, 称做三角代换.

当解析式中含有  $\sqrt{1 - x^2}$ , 或  $\sqrt{x^2 - 1}$ , 或  $\sqrt{1 + x^2}$  时, 可设  $x$  为  $\sin\theta$  (或  $\cos\theta$ ), 或  $\sec\theta$  (或  $\csc\theta$ ), 或  $\tg\theta$  或  $\ctg\theta$ , 进行代换后, “ $\sqrt{\quad}$ ”号必可去掉.

如果解析式中出现的是  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , 或  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , 或  $\sqrt{a^2 + x^2}$ , 那么只需把  $a^2$  提到“ $\sqrt{\quad}$ ”号外边, 变形为  $a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ,  $a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$ ,  $a\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$  后, 再设  $\sin\theta$  (或  $\cos\theta$ ) =  $\frac{x}{a}$ , 或  $\sec\theta$  (或  $\csc\theta$ ) =  $\frac{x}{a}$ , 或  $\tg\theta$  (或  $\ctg\theta$ ) =  $\frac{x}{a}$ .

对于  $\sqrt{a^2 - b^2x}$ ,  $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$  的情况, 同样可做类似的处理.

**解法三** 设  $\angle ADC = \theta$ ,  $\theta \in \left[\arctg \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 如图篇 4-3 所示.

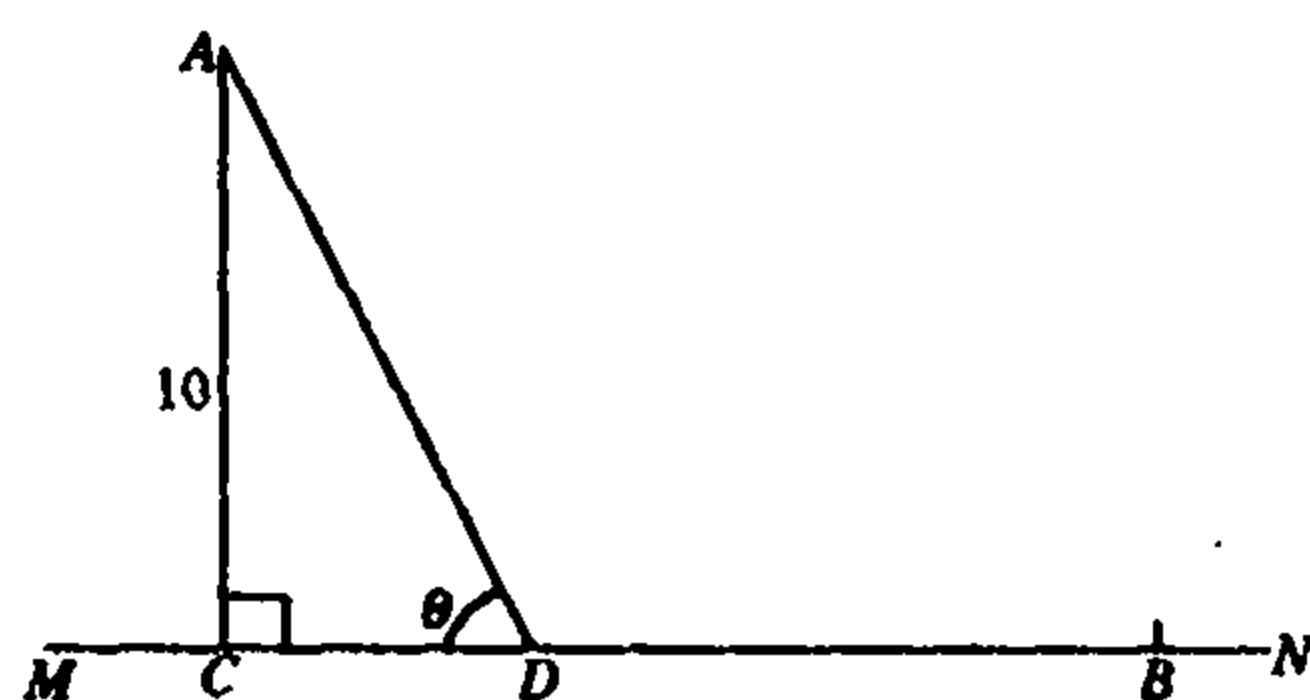
$$\text{则 } \sqrt{100 + x^2} = AD = \frac{10}{\sin\theta},$$

$$x = CD = 10 \cdot \ctg\theta,$$

$$\text{于是 } u = 2 \cdot \frac{10}{\sin\theta} - 10\ctg\theta = 10 \cdot \frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= 10 \cdot \frac{2 - \frac{1 - \tg^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tg^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{2\tg \frac{\theta}{2}}{1 + \tg^2 \frac{\theta}{2}}} = 10 \cdot \frac{1 + 3\tg^2 \frac{\theta}{2}}{2\tg \frac{\theta}{2}} = 10 \cdot \left( \frac{1}{2\tg \frac{\theta}{2}} + \frac{3}{2}\tg \frac{\theta}{2} \right) \geq 10\sqrt{3},$$

使  $u$  得到最小值, 当且仅当,



图篇 4-3

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left( \text{舍, 因为 } \theta \geq \arctg\frac{1}{3} \right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

于是

$$x = 10 \cdot \operatorname{ctg}\theta = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

**说明** [1] 本解法一开始,就设  $\angle ADC = \theta$ . 这是在解决与图形有关的最大(小)值应用问题时的一种常用手段. 即在图形中选择一个活动的角作为自变量,去统一“ $y$ ”表达式中的变量.

因而,在本题中,既可设  $\angle ADC = \theta$ ,也可以记  $\angle CAD = \theta$ ,还可以记  $\angle ACB = \theta$ ,但不可记  $\angle ACD = \theta$ ,因为  $\angle ACD$  不是活动的角,即,  $\angle ACD$  不是变量角.

[2] 本解法到达 \* 式时,也是可以走解法二的途径的,即,使

$$u = 10 \cdot \frac{1}{\frac{0 - (-\sin\theta)}{2 - \cos\theta}}$$

后,把  $\frac{0 - (-\sin\theta)}{2 - \cos\theta}$  看做是定点  $A(2,0)$  到动点  $B(\cos\theta, -\sin\theta)$  的连线的斜率,用解法二中的数形结合的方法,求得它的最大值,从而得到  $u$  的最小值.

但本解法却在这里果断地利用了万能公式的变形,这个决断的构思,产生于对万能公式的熟悉,在对于

$$\frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

进行多想下几步的分析时,看到了应用万能公式的前景.

[3] 解法二的  $\theta$ ,选取时仅仅从三角代换的角度着眼,并未考虑它的几何意义,而完成解法三的过程中,才发现它是  $\angle CAD$ . 这样看来,解法二与解法三,在本质上,是贯通的,是一个解法. 解法二,可以看做是采用解法三选择一个活动角的分析思考,而选取  $\angle CAD = \theta$ ; 而解法三,也可以看做是采用解法二的三角代换的思考,只是改设  $\operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{10}$ .

这样,解法三的过程,就成为了

$$u = 20\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2} - x = 20\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\theta} - 10\operatorname{ctg}\theta = 10\left(\frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

至此及往下仍是解法三.

而解法二的过程,就成为了,设  $\angle CAD = \theta, \theta \in [0, \arctg 3]$ , 参见图篇 4-3.

则

$$\sqrt{100 + x^2} = AD = \frac{10}{\cos\theta}$$

$$x = CD = 10 \cdot \operatorname{tg}\theta,$$

于是,

$$u = 2 \cdot \frac{10}{\cos\theta} - 10\operatorname{tg}\theta,$$

至此及往下,仍是解法二.

而且,解法二往下的过程,也可以转向为利用万能公式到利用平均数不等式. 具体解法如下:

$$\begin{aligned}
 u &= 2 \cdot \frac{10}{\cos \theta} - 10 \operatorname{tg} \theta = 10 \cdot \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta} = 10 \cdot \frac{2 - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}} \\
 &= 10 \cdot \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = 10 \cdot \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 2 + 4 - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= 10 \left( -2 + \frac{4 - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \right) = 10 \left( -2 + \frac{1}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{4 - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

再记

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{4 - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = \frac{-\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 1}{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4}{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4} + \frac{-3}{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4} \\
 &= 2 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - 1 + \frac{-3}{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4} \\
 &= 2 - \left( -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 1 + \frac{3}{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4} \right)
 \end{aligned}$$

由于  $\theta \in [0, \operatorname{arctg} 3] \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \in \left[ 0, \frac{-1 + \sqrt{10}}{3} \right] \Rightarrow -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 1, -2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4 > 0,$

于是,可以运用平均数不等式.

$$\text{因为} \left( -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 1 \right) \left( \frac{3}{-2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 4} \right) = \frac{3}{4},$$

那么,当且仅当

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1 &= \frac{3}{-2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+4} \\
\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1\right)^2 &= \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1>0\right) \\
\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} &= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

时,  $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta+1+\frac{3}{-2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+4}$  得到最小值  $\sqrt{3}$ ,  $v$  便得到最大值  $2-\sqrt{3}$ ,  $u$  便得到最小值

$$u_{\min}=10\left(-2+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)=10\sqrt{3}.$$

这时,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=2-\sqrt{3}\Rightarrow\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x=10\cdot\operatorname{tg}\theta=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

太棒了! 曲曲折折, 恰似“山重水复疑无路, 柳暗花明又一村”, “条条江河归大海”。

题目做到这个份儿上, 是不是才如京剧《沙家浜》的一句台词: “这茶, 喝到这时, 是不是才喝出点味儿来了!” (阿庆嫂)

什么“味儿”呢?

——“漫江碧透”, “鱼翔浅底”。

初识解法二, 为其巧妙击掌; 初识解法三, 为“平均数不等式”应用技巧的神秘叫绝。

但一番移花接木之后, 惊回首, 原来不过如此。哪有偌多神秘, 哪有偌多巧妙的稀世幽径!

这里, 其实是一个十分清晰又非常简单的思路:

第一, 求某个量的最大(小)值时, 要把这个量作为函数  $y$  表达出来。

第二, 若表达式中有“ $\sqrt{\quad}$ ”号, 而且是“ $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ ”、“ $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ ”、“ $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ ”的形式, 要用相应的三角代换去掉“ $\sqrt{\quad}$ ”号, 再观察是否能利用数形结合转化为单位圆上某一段弧的极端位置的切线斜率; 也可以观察能否利用万能公式把表达式中的  $\sin\theta, \cos\theta$  统一为  $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ , 设想一下, 能否归结为平均数不等式求最大(小)值。

第三, 如果是涉及图形的函数  $y$ , 选择一个活动的角去统一  $y$  的表达式中的各变量, 之后再用第二条思路中的做法。

这样, 解法二和解法三, 就自然而然成 8 种方法纷呈眼前。

**方法 1** 选  $\angle DAC$  为  $\theta \rightarrow$  (数形结合) 借助直线斜率;

**方法 2** 选  $\angle DAC$  为  $\theta \rightarrow$  万能公式  $\rightarrow$  平均数不等式;

**方法 3** 选  $\angle ADC$  为  $\theta \rightarrow$  (数形结合) 借助直线斜率;

**方法 4** 选  $\angle ADC$  为  $\theta \rightarrow$  万能公式  $\rightarrow$  平均数不等式(解法三);

**方法 5** 设  $\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{10} \rightarrow$  三角代换  $\rightarrow$  (数形结合) 借助直线斜率(解法二);

方法6 设  $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{10} \rightarrow$  三角代换  $\rightarrow$  万能公式  $\rightarrow$  平均数不等式;

方法7 设  $\operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{10} \rightarrow$  三角代换  $\rightarrow$  (数形结合) 借助直线斜率;

方法8 设  $\operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{10} \rightarrow$  三角代换  $\rightarrow$  万能公式  $\rightarrow$  平均数不等式.

这样一来,面纱一经揭下,神秘凑巧的解法二和解法三,变成如此自然的8种方法.放眼看去,漫江碧透,其实为一个解法.

还品出什么“味儿”了呢?

——应用“平均数不等式”的技巧,令人眼花缭乱,有些目不暇接,望而生畏.

如果读者有这种感受,那恰恰是本书在前面专题反对过的讲题方法所致,即只讲了而且讲清了每一个步骤,而没有讲出得到这个解法的酝酿过程——为什么和怎么想到要采取这每一个步骤的.

简单说来,对于一个分式  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ,如果拟利用平均数不等式求它的最小值,当  $g(x)$  是一次式,

$f(x)$  是二次式时,可利用部分分式把它变形为  $ax + m + \frac{n}{g(x)}$ ,这里  $a, m, n$  是常数.这时,只要根据  $ax$  和  $g(x)$  的系数的比,让  $ax$  向  $g(x)$  看齐.方法为:

若  $g(x) = cx + d$ ,则对  $ax$  加上  $\frac{ad}{c}$ ,当然,在后面再减去  $\frac{ad}{c}$ ,这时,原式便变为

$$\frac{a}{c}(cx + d) + \frac{n}{cx + d} + m - \frac{ad}{c},$$

即可运用平均数不等式了.

但无论在这一步还是其他步骤,都要考查有关项的正负性(例如去掉根号时),保证变形的正确进行.

以上对解法二和解法三的讨论,是又一种“多解归一”的示范.

解法四 在前述解法二或解法三中  $u$  的表达式

$$u = 10 \cdot \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{或} \quad u = 10 \cdot \frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

中,任择其一,例如,取

$$u = 10 \cdot \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta},$$

进行变形,得

$$\begin{aligned} 10\sin\theta + u\cos\theta &= 20, \\ \sqrt{100 + u^2}\sin(\theta + \varphi) &= 20, \end{aligned}$$

(在这里,可令  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{u}{10}$ )

$$\sin(\theta + \varphi) = \frac{20}{\sqrt{100 + u^2}},$$

由于

$$u = 10 \cdot \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} > 10 \cdot \frac{1}{\cos\theta} > 10,$$

于是

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{10} > 1 \Rightarrow \varphi > \frac{\pi}{4}.$$

而

$$\theta \in [0, \arctg 3],$$

那么

$$u = 10 \cdot \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta} < 10 \cdot \frac{2}{\cos \theta} < 20,$$

则

$$\tg \varphi = \frac{u}{10} < 2 \Rightarrow \varphi < \arctg 2,$$

那么,当  $\theta$  取  $\arctg 3$  时,

$$\theta + \varphi > \frac{\pi}{2},$$

当  $\theta$  取 0 时,

$$\theta + \varphi > \arctg 2,$$

这样,

$$[\sin(\theta + \varphi)]_{\max} = 1,$$

代入 \* 式,得

$$\frac{20}{\sqrt{100 + u^2}} \leq 1,$$

且其中“=”号可以成立,因而

$$20 \leq \sqrt{100 + u^2},$$

$$u \geq 10\sqrt{3} \quad (u \leq -10\sqrt{3} \text{ 舍去}),$$

代入解法一中的①式

$$u = 2\sqrt{100 + x^2} - x,$$

得

$$x = \frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

**说明** [1] 一般人采用本解法时,在得到 \* 号式  $\sin(\theta + \varphi) = \frac{20}{\sqrt{100 + u^2}}$  后,立即就利用正弦函数的有界性,  $\sin x \in [-1, 1]$ , 得出

$$\frac{20}{\sqrt{100 + u^2}} \leq 1$$

的结论,立即得到  $u \geq 10\sqrt{3}$ ,  $u_{\min} = 10\sqrt{3}$ , 这种处理,是欠严密的.

因为,由  $\sin x \in [-1, 1]$ , 的确可以得到

$$\frac{20}{\sqrt{100 + u^2}} \leq 1,$$

但这里的“=”号是否成立,则要看  $\sin x$  中  $x$  的具体取值范围. 而用这种方法求最值时,恰恰必须“=”号成立.

因而,本解法中,对于  $\theta + \varphi$  是从小于  $\arctg 2$  到大于  $\frac{\pi}{2}$  连续取值的讨论,是必须的. 当然,讨论的途径还可以有别的方式.

开始时如果多想几步,那么,选择

$$u = 10 \cdot \frac{2 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\theta \text{ 为 } \angle ADC \text{ 的度数}),$$

这时,在“=”号成立的讨论中,则会简单许多. 因为,此时  $\theta$  的范围是  $[\arctg \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}]$ .

不过,也可以不先做本解法所进行的讨论,而在求得  $u_{\min}$  后,代回检验,证明“=”号可以成立,如本例解法一所采取的方式.

[2] 本解法所示的方法,在求范围、求数值(两者是统一的)的题目中,是一个被人们广泛采用



的方法. 其思路很简单, 简述如下:

先把原始的函数式或等式整理为

$$\sin[f(\theta)] = \varphi(y)$$

的形式, 然后利用正弦(或余弦)函数的有界性, 去解

$$-1 \leq \varphi(y) \leq 1,$$

得到  $y$  的范围, 当然, 要考虑“=”号成立的可能性; 如果不是求  $y$  的范围, 而是证明关于  $y$  的某个不等式, 则不必考虑“=”号是否成立.

而在有些具体的题目中, 由于解析式  $\varphi(y)$  的特殊结构, 有可能利用诸如平均数不等式等手段, 对  $\varphi(y)$  的取值得到某种结论, 例如

$$\varphi(y) \geq \frac{1}{2},$$

那么, 反过来, 又可由

$$\sin[f(\theta)] \geq \frac{1}{2}$$

得到对  $\theta$  范围的结论.

$$\begin{aligned} \text{解法五 } u &= 2\sqrt{100+x^2} - x = \sqrt{400+4x^2} - x = \sqrt{300+(100+3x^2)+x^2} - x \\ &\geq \sqrt{300+2 \times 10\sqrt{3}x+x^2} - x = \sqrt{(10\sqrt{3}+x)^2} - x = 10\sqrt{3}+x-x = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

当且仅当,  $10 = \sqrt{3}x$ , 即

$$x = \frac{10}{3}\sqrt{3}$$

时,  $u$  得到最小值  $10\sqrt{3}$ .

**说明** 在本例的各种解法里, 无疑解法五是最巧妙又最简捷的了.

幼时, 在街头看“变戏法儿”曾听到这种说法: 会看的看“门道”, 不会看的看热闹. 意思是说, 不要只看表面现象, 要看得更穿, 看出背后的招数儿. 在讲题时, 我们一向强调得到解法的想法是怎么产生的, 那么, 对于令人叹为观止的“解法五”, 是不是尤应分析它是怎么想出来的呢?

解法五是我的第三轮班的一名优秀学生杨维华在试卷上的解答.

他说, 当时他有这样几个思考:

观察  $u = 2\sqrt{100+x^2} - x$ ,

i 为了得到  $u \geq$  常数(一般是考虑平均数不等式), 需要把根号外的  $x$  与根号内的  $x^2$  (出根号后恰是  $x$  的一次项) 相抵消, 这样, 就应当把“ $\sqrt{\quad}$ ”号外的“2”移进去, 并且把“ $4x^2$ ”分离出一个“ $x^2$ ”来, 将来与“ $\sqrt{\quad}$ ”号外的“ $-x$ ”相抵消;

ii 这时, “ $\sqrt{\quad}$ ”号内除保留  $x^2$  之外, 还有  $400+3x^2$ , 为了将来形成  $(x+a)^2$ , 恰好可以对  $400+3x^2$  应用  $a^2+b^2 \geq 2ab$ , 使得  $x$  的一次项出现;

iii 在对  $400+3x^2$  应用  $a^2+b^2 \geq 2ab$  时,  $3x^2$  是不能再分离的, 若视  $3x^2$  为  $a^2$ , 那么,  $2a$  是  $2\sqrt{3}x$ ,  $b$  应是什么呢? 一时真想不出该怎么办. 这时, 应该换个角度来看问题. 关于这点, 正是本书所一再提倡的.

iv 换个角度, 从 400 应该如何分拆来思考.

由于  $2a$  是  $2\sqrt{3}x$ , 那么, 为了将来配完全平方时要出现  $\sqrt{3}$  (因为  $x^2$  是出不来  $\sqrt{3}$  的), 宜试试把 400 留下 300, 让剩下的 100 作为  $b^2$  去参与应用平均数不等式. 喔! 眼前一片光明, 成功了!

一个神妙的解法诞生了. 但它的孕育成功是那樣的合情合理, 这正是本书所提倡的, 把这个“合情合理”挖出来, 你将逐渐从“必然王国”走进“自由王国”.

**解法六** (供学习过微积分初步的中学生阅读)

对于  $u = 2\sqrt{100 + x^2} - x$ ,  
求它的一阶导数, 得

$$u' = \frac{2 \times \frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{100 + x^2}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{100 + x^2}} - 1.$$

令  $u' = 0$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{2x}{\sqrt{100 + x^2}} - 1 &= 0, \\ 2x &= \sqrt{100 + x^2}, \\ x &= \pm \frac{10}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

经检验,  $-\frac{10}{3}\sqrt{3}$  为增根. 舍去.

取  $x = 0 < \frac{10}{3}\sqrt{3}$ ,  $u'(x) = -1 < 0$ ,

取  $x = 2\sqrt{11} > \frac{10}{3}\sqrt{3}$ ,  $u'(x) = \frac{\sqrt{11}}{3} - 1 > 0$ .

则  $x = \frac{10}{3}\sqrt{3}$  时,  $u$  得到极小值.

又由于  $u$  只有一个极值点, 于是  $x$  取  $\frac{10}{3}\sqrt{3}$  时,  $u$  得到的极小值也是最小值.

**说明** 我们用了 1 万字的篇幅, 对本章例 1 的思考进行了“打破砂锅问到底”的分析, 又进行了引申. 如果同学们对每道题目都下这样的功夫, 那么无论是解题能力还是思维水平, 以及对方法、概念、知识的理解, 都会得到迅速提高.

有人说, 这样的好题目不多见. 其实不然, 关键在于你是否有心去发现.

## 二、示范二

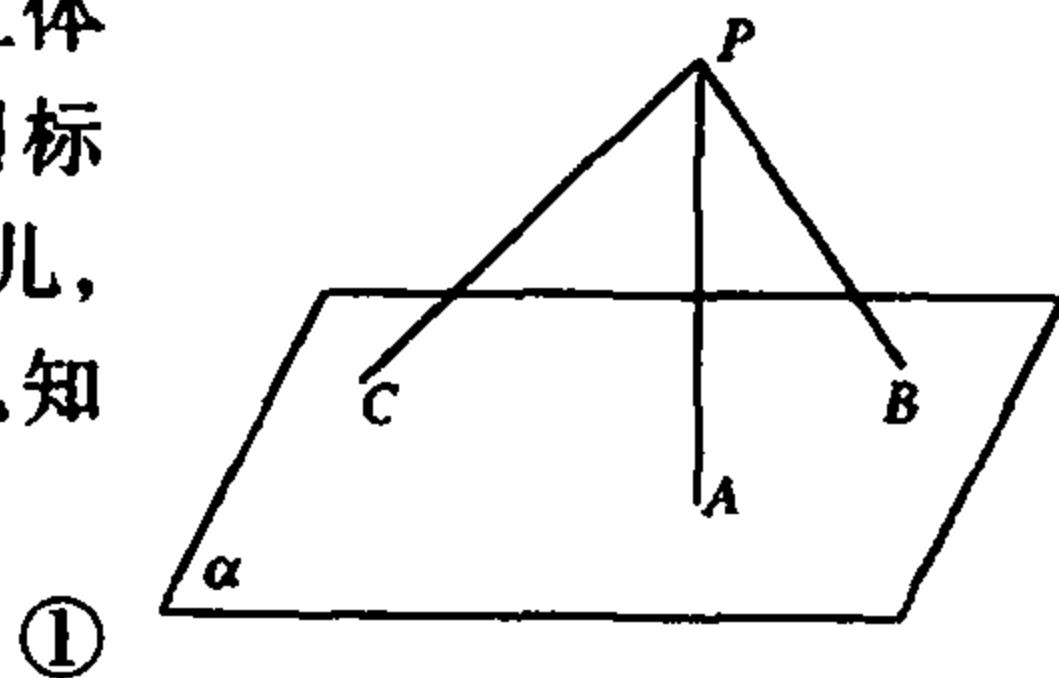
下面的例题是我在给一个水平一般的业余辅导班讲课时, 一名学生提出的一道很简单的题目. 利用这道题目, 我引导大家当场进行了一次讨论.

**例 2**  $P$  点在平面  $\alpha$  外,  $PA$  是平面  $\alpha$  的垂线段,  $PB$ 、 $PC$  是平面  $\alpha$  的斜线段.

是否有这种可能, 使得  $PB$  是  $PA$  和  $PC$  的比例中项, 并且  $PA$  和  $PC$  的和是  $PB$  的 2 倍?

**分析** 看见这道题, 教室里一片寂静. 因为大家没做过这样的立体几何题. 以前的题, 都是给了出发点和目标, 解题过程就是寻找达到目标的途径. 而现在呢, 目标没有, 反过来要求论证它是否存在. 过了一会儿, 终于有一位同学证出来了. 他先画了图 (如图篇 4-4 所示), 然后把已知条件摆在一起.

$$PB^2 = PA \cdot PC,$$



图篇 4-4

$$PA + PC = 2PB.$$

②

由②式,得

$$PB = \frac{PA + PC}{2},$$

代入①式,得

$$\frac{1}{4}(PA + PC)^2 = PA \cdot PC,$$

$$(PA - PC)^2 = 0,$$

$$PA = PC.$$

这与  $PA$ 、 $PC$  分别是过平面  $\alpha$  外同一点  $P$  向平面  $\alpha$  引出的垂线段与斜线段矛盾. 故, 题目所设想的可能性是不存在的.

这个证明完全正确, 但对其立意却不敢恭维. 因为, 他画了图, 摆出已知条件的两个式子后, 进行变形, 抱着走一步是一步的走着瞧的心理, 没想到, 解出来了(这是他当场介绍的想法).

其实呢, 拿到一道题目, 如果不是一眼望穿, 就不要急于动笔, 宜左看看, 右瞧瞧, 绕前绕后, 飞上跳下, 钻进钻出, 层层剥去其伪装, 争取达到品玩于股掌之间的火候.

于是, 我问了一个问题.

“这是一道几何题, 但我想问同学们. 代数中, 是不是有这样一道题目: 如果一个等差数列同时也是一个等比数列, 那么, 这个数列只能是常数数列. 大家都知道吗?”

“知道!” 教室一片雀跃. 因为, 这几乎是任何一个高中生, 都熟悉的代数知识.

更重要的是, 这一来, 解出这道立体几何题可以不费吹灰之力了. 因为这道立体几何题, 不过是把这道代数题换了个包装.

$PA + PC = 2PB$ , 即  $PA, PB, PC$  成等差数列;  $PB$  是  $PA, PC$  的比例中项, 说明  $PA, PB, PC$  又成等比数列. 那么, 只能有  $PA = PB = PC$ , 这与已知条件矛盾.

这个例子明白地告诉我们, 不必跳进“题海”, 重要的是对每道题目深入进去, 取其精髓. 面对新题目, 要养成细心观察、联想思维的好习惯. 也可以说, 这个例子是一次最简单或者说初级阶段的多题一解吧!

当时, 在课堂上我并没就此止住.

我又说: “同时是等差数列和等比数列的一个数列, 只能是常数数列. 这个结论不是课本上的定理, 考试中若直接引用它, 有些阅卷者不承认. 因此, 宜把它在备注中证明一下. 现在, 请大家证明.”

一位同学在黑板上是这样证明的:

设等差数列为  $a, a + d, a + 2d, \dots$

因为它也是等比数列, 所以有

$$\frac{a + d}{a} = \frac{a + 2d}{a + d},$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2ad$$

$$d = 0$$

即数列是常数数列.

这时, 有同学举手说, 证明过程只涉及数列的前 3 项, 应对称地设这 3 项为  $a - d, a, a + d$ .

由于它们同时成等比数列, 这样证明过程为:

$$a^2 = (a + d)(a - d)$$

$$d = 0.$$

这里,有两点需要说明.

一是,后一种设法,的确使证明过程简单了一些,但简化的程度并不明显. 如果,题目难度较高,这种设法,有时会使过程的简化较明显.

二是,这里没采用 $\frac{a}{a-d} = \frac{a+d}{a}$ ,而采用了 $a^2 = (a+d)(a-d)$ . 如本书前面所分析,作为描述等比数列,它们是不等价的,作为等比数列的充要条件是 $\frac{a}{a-d} = \frac{a+d}{a}$ ,而不是 $a^2 = (a+d)(a-d)$ ,它只是前者的必要而非充分条件. 但在本例中是用它进行证明,只需要得到作为必要条件的结论. 所以,用谁,都是正确的.

为了得到进一步的升华,我没有结束对这道题目的讨论.

我又提出了问题:“大家的证明,都是从它们是等差数列列出式子,再代入到等比数列中去引出 $d=0$ ,但在题目中,这3个数既是等差数列又是等比数列,这两个条件是平等的,那么,对眼下的讨论,谁有什么想法? ……”

我的话音刚落,好多同学纷纷举起手来. 他们的证法当然是利用等比数列列出式子,再代入到等差数列的条件中去,结果引出 $q=1$ . 即

设成等比数列的3个数为 $\frac{a}{q}, a, aq$ ,它们又成等差数列,于是

$$2a = \frac{a}{q} + aq,$$

$$2aq = a + aq^2,$$

$$(q-1)^2 = 0,$$

$\therefore q=1$ .

这样,就完成了——一个对称的证明. 这个对称的证明是多么美好而和谐.

该画句号了.

可是,一位平常不太引起我注意的同学举起了手. 他说,他另有一个对本例的证法,如下所示:

由已知 $PB = \sqrt{PA \cdot PC}$ ,

再由平均数不等式

$$PA + PC \geq 2\sqrt{PA \cdot PC} = 2PB.$$

其中,当且仅当 $PA = PC$ 时“=”号成立,使得 $PA + PC = 2PB$ ,这恰是已知条件.

于是,垂线段 $PA$ 等于斜线段 $PC$ ,引出矛盾.

太好了. 这个证法不仅仅好在它的简捷,更好在其思路的新颖,不落俗套,他竟然把平均数不等式这么巧妙地应用了.

他为什么能做到这点呢?

当然这与他基础知识的扎实分不开. 但更重要的是,在他手中的基本概念、基础知识是活的,这样他的头脑是灵活的和解放的. 不能不说,这与我们日日夜夜孜孜以求的课堂的“解放”,因果相关.

### 三、示范三

本篇的例1着重示范了一题多解到多解归一. 下面的例3、例4则着重介绍的是多题归一.

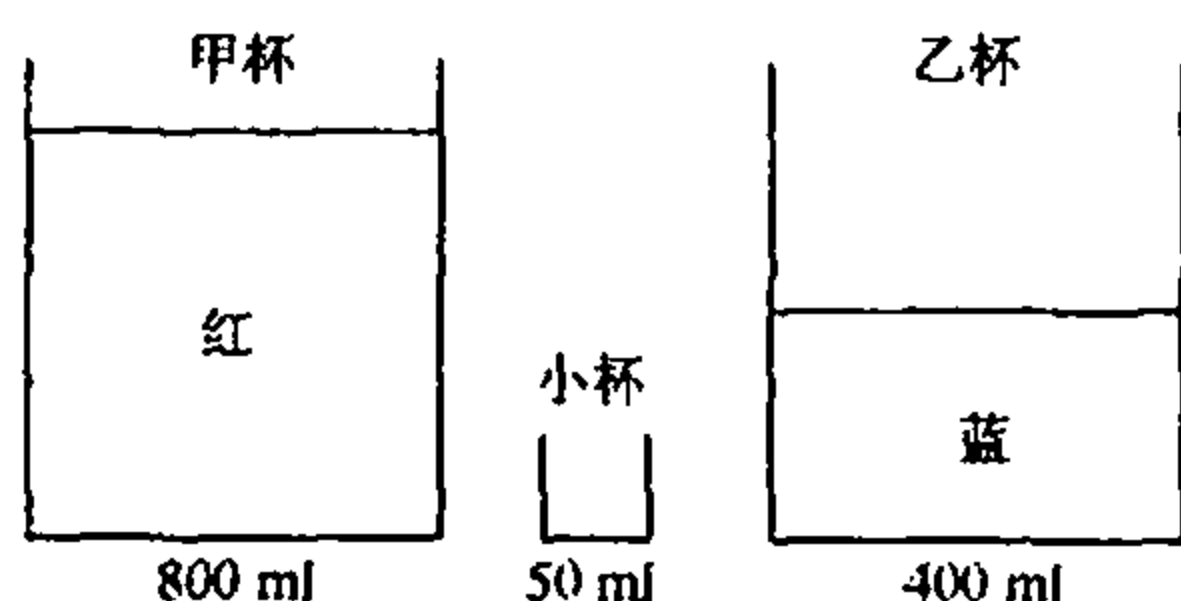
例3 (1) 红墨水800 ml 置于甲烧杯中,蓝墨水400 ml 置于乙烧杯中,如图篇4-5所示,用一只容积为50 ml 的小烧杯,从甲杯中盛满一小烧杯红墨水倒入乙杯中,这时,

- i 当乙杯中红蓝墨水混合均匀后,仍用这个小烧杯,盛满 50 ml 混合液,倒入甲杯中;
  - ii 未等乙杯中红、蓝墨水混合均匀,即用小烧杯,从乙杯中,盛满 50 ml 液体,倒入甲杯中.
- 问:分别在这两种情况下,最后甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水,哪个多?

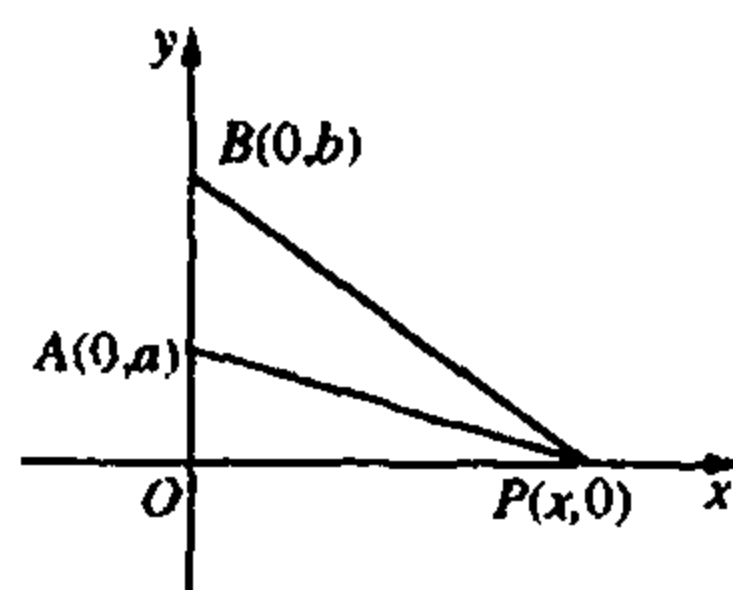
(2) 现在是 3 点 10 分,再过多少时间,分针和时针第一次重合?

(3) 如图篇 4-6 所示,动点  $P$  在  $x$  轴正向上,定点  $A$ 、 $B$  在  $y$  轴正向上, $A$  为  $(0,a)$ , $B$  为  $(0,b)$ , $b > a$ ,动点  $P$  在什么位置时, $\angle APB$  最大?

(这道题,在前面第一篇第 3 章二(二)中作为例 3、在第一篇第 4 章二(二)作为第 2 个例子还引用过).



图篇 4-5



图篇 4-6

**分析** 把以上三道看来风马牛不相及的题目,扯到一起,凑成“例 3”,似令人不解.先来看看(1).

这道题目,从 1976 年,我曾拿它考过许多人,有小学生、初中生、高中生、大学生、也有小学教师、中学教师,或其他认识的人,答对者甚廖,至少是让其中多数人当场受憋了一段时间,特别是对于它的第 ii 问.

记得某著名重点中学的一位高中生,他这样解出了第 i 问,

他先算出了第一次倒入后,在乙杯中蓝墨水的浓度是  $\frac{400}{400+50} = \frac{8}{9}$ ,那么,在返回甲杯的 50 ml 混合液中,蓝墨水有  $50 \times \frac{8}{9} = 44 \frac{4}{9}$  (ml);

他又算出了第一次倒入后,在乙杯中,红墨水的浓度是  $\frac{50}{400+50} = \frac{1}{9}$ ,那么,在返回甲杯的 50 ml 混合液中,红墨水有  $50 \times \frac{1}{9} = 5 \frac{5}{9}$  (ml),这时,乙杯中还存留红墨水  $50 - 5 \frac{5}{9} = 44 \frac{4}{9}$  (ml).

**答案** 两者一样多.

但对于第 ii 问,浓度不均匀,他这套办法不灵了.他认为,答案不固定,因为从乙杯盛 50 ml 混合液返回时,随机性太大了,可能盛在红墨水浓度大或者小的甚至是 0 的位置,因而,答案也是不定的.所以,第 ii 问不能做,题目出错了!

题目出错了么? 没有出错.题目给的许多条件,诸如 800 ml, 400 ml, 50 ml, 以及分成 i、ii 两问,等等,都是我故意编进来虚张声势、混淆视线的.

编出这些数字,是故意把被考人的思考往计算这条道上引;分成 i、ii 两问,则是给人以假象,似乎有不同的结论.

其实无论在什么情况下,答案只有一个,而那些数字统统可以撇开.

很多人的困惑在于,来回倾倒的过程把红、蓝墨水反复混合,令人眼花缭乱,感到无法分析而进行不下去了.

我们一再指出“换个角度看问题”是灵活性的本质所在. 遵从这个想法, 不再沿着题目展示的过程去寻求解决, 就得到了意想不到的简单解答, 如下所示:

“注意到在两次倒入之后, 甲杯的液面高度保持不变, 但它里面混入了蓝墨水, 这说明, 它挤走了等量的红墨水, 这些红墨水到了乙杯中, 所以, 甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水是一样的(包括它们都是0这个个别情况).”

太简捷了. 这是因为, 在一个方向上受阻时, 我们适时地、机智地换了个思考角度.

当然, 即使不换角度, 在原来的方向上敢于深入, 敢于逢山开路, 问题也是可以解决的. 如下:

设第二次倒入(即从乙杯盛满50 ml混合液倒回甲杯)时, 小烧杯内有 $x$  ml蓝墨水, 这 $x$  ml就是题目所求的甲杯中混入的蓝墨水, 这时, 小烧杯中同时有红墨水 $(50 - x)$  ml返回甲杯, 那么, 乙杯中留下的红墨水, 是

$$50 - (50 - x) = x(\text{ml})$$

两者一样多.

解决本例(1)题的思考过程, 有普遍意义吗? 我们来看看对本例(2)题的解决.

(2) 这是个追及问题. 表盘上的旋转, 我们可以把它拉直. 分针每分钟前进1个格, 时针则每分钟前进 $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ 个格. 那么,

$$\text{追上时间} = \text{距离差} \div \text{速度差}.$$

问题的解决不是很基本嘛!

然而, 距离差是多少? 这并不是想当然的

$$15 - 10 = 5$$

个格, 因为3点10分钟, 时针的指示比3点整时所指的第15个格要多一些. 多多少? 这是个麻烦的问题, 一时不好想.

怎么办? 应换个角度去思考. 于是, 便产生了第一个解法.

分析 从3点10分之后分、时针第一次重合的位置, 与3点整之后分、时针第一次重合的位置是相同的. 但3点整分、时针的距离差, 人人皆知, 是15个格. 那么, 算出3点整后用多少时间分、时针第一次重合, 再减去10分钟, 不就是3点10分后分、时针第一次重合所用的时间了吗!

解法一 依题意,

$$15 \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) - 10 = 6\frac{4}{11}(\text{分钟}).$$

答: 再过 $6\frac{4}{11}$ 分钟, 分、时针第一次重合.

另一种分析: 当计算3点10分时, 时针与分针的距离差, 遇到麻烦时, 若不换个角度从3点整来计算, 而是敢于深入, 逢山开路, 问题是不是也能得到解决呢?

既然时针的速度是每分钟 $\frac{1}{12}$ 个格, 那么3点10分时, 时针应指在第 $15 + \frac{1}{12} \times 10 = 15\frac{5}{6}$ 个格处.

这时, 时针与分针的距离差是 $15\frac{5}{6} - 10 = 5\frac{5}{6}$ 个格. 于是, 便得到了解法二.

解法二 依题意,

$$\left(15 + \frac{1}{12} \times 10 - 10\right) \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 6\frac{4}{11}(\text{分钟}).$$

答:再过  $6\frac{4}{11}$  分钟,分、时针第一次重合.

说明 现在再来看本例的(1)和(2)这两道题目.从类型上,它们是风马牛不相及,但解法的酝酿过程,却如出一辙.

它们的解法一,却是在分析的道路上遇到麻烦时,换个角度来考虑;

它们的解法二,都是在分析的道路上遇到麻烦时,不换角度,敢于深入,细致分析麻烦所在和症结,逢山开路,克服了困难前进了.

这是不是就是多题一解?这个“一解”,不是一个死的方法和套子,而是一种思想方法,而且是普遍适用的.下面,我们把它应用到本例的第(3)题上.

(3) 分析 本书在第一篇第4章的二中指出,拟这道题的本意,是考查对平面解析几何中坐标平面上两条直线所成角公式

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (\theta \text{ 是直线 } l_1 \text{ 沿逆时针转向直线 } l_2 \text{ 所成的角})$$

的掌握.

考场上,多数同学对这个公式掌握不到家,只掌握了

$$\operatorname{tg}\theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (\theta \text{ 是直线 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 所成锐角}).$$

用到这道题目上,出现了

$$\operatorname{tg}\theta = \left| \frac{k_{PA} - k_{PB}}{1 + k_{PA} \cdot k_{PB}} \right|$$

时,由于  $k_{PA}$ 、 $k_{PB}$  都不是具体数字而无法打开绝对值号,而弃之不用.而在日常学习时,部分教师告诉学生,这时用余弦定理好,因为不存在打开绝对值号的问题.这样,便出现了

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|PA|^2 + |PB|^2 - |AB|^2}{2|PA| \cdot |PB|} \\ &= \frac{x^2 + a^2 + x^2 + b^2 - (b-a)^2}{2\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

但这时,分式的分子、分母上都有变量  $x$ ,不符合分子是定值(或分母是定值)才好求分式最大(小)值的要求.

怎么办?

一条出路是,换个角度看问题,从解析几何的角度,转到平面几何的角度,本书在“第一篇第3章的二(二)”中,给出了十分漂亮的解法.

这个解法,不正与本例的(1)和(2)题的“解法一”是一脉相承的吗!是又一次多题一解.

当然,作为拟题人,是希望考生扎实掌握两条直线夹角公式,应用

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (\theta \text{ 是直线 } l_1 \text{ 沿逆时针转向直线 } l_2 \text{ 所成角})$$

把题目作出来,本书在第一篇第4章二(二)中给出了这个解法.

由于教学上的不足,考生没掌握好这个公式,而想不出这个方法,又没有适时换个角度去思考,想不到漂亮的平面几何方法,而在自己选定的方向上又遇到了麻烦,这时就真的一筹莫展,半途而废了吗?

是不是应该运用本例(1)、(2)题中解法二的思想,敢于深入,弄清“麻烦事”的症结,对症下药,逢山开路,跨过天堑呢?

完全应该,也是完全可以实现的!

先讨论用了余弦定理而遇到麻烦的情况,就本题来说,我们记之为第三个解法.

**解法三** 为便于读者理解解题步骤的想法的酝酿过程,我在一些重要步骤后的括号内适当做了注解.

记  $OP = x$ ,  $\angle APB = \theta$ , 则  $|PA| = \sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $|PB| = \sqrt{x^2 + b^2}$ ,  $|AB| = b - a$ .

由余弦定理

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x^2 + a^2 + x^2 + b^2 - (b - a)^2}{2\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}{x^2 + ab}}.\end{aligned}$$

(这是为了使分子为常量. 但这时作为分母的分式, 又是分子、分母都有变量  $x$ , 往下就不能如法炮制而再把它分子翻下来, 宜另辟蹊径. 观察作为大分母的分式的分母  $x^2 + ab$ , 如果把它移进根号内, 将得到与分子的  $\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + b^2}$  很相近的结果, 那么, 再利用部分分式的手段, 看来是有出路的.)

$$\begin{aligned}\text{上式} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4 + (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2}{x^4 + 2abx^2 + a^2b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4 + 2abx^2 + a^2b^2 + (a^2 + b^2)x^2 - 2abx^2}{x^4 + 2abx^2 + a^2b^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b - a)^2 x^2}{(x^2 + ab)^2}}}.\end{aligned}$$

(这时, 根号内的分式的分子、分母又都有变量, 但观察现在的形势, 借鉴刚刚变形的经验, 只要把  $x^2$  从分子上翻上来, 再进入  $(x^2 + ab)^2$  内, 就出现了可以利用平均数不等式的局面.)

$$\text{上式} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b - a)^2}{\frac{(x^2 + ab)^2}{x^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b - a)^2}{\left(x + \frac{ab}{x}\right)^2}}} > 0.$$

由于  $x, a, b, (b - a)^2 > 0$ ,

那么, 当且仅当  $x = \frac{ab}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$  时,  $x + \frac{ab}{x}$  得到最小值, 从而

$$\frac{(b - a)^2}{\left(x + \frac{ab}{x}\right)^2}$$

得到最大值, 使得  $\cos\theta$  得到最小值, 又  $\theta$  是三角形内角且  $\cos\theta > 0$ , 则此时  $\theta$  (即  $\angle APB$ ) 得到最大值. 解毕.

**说明** 在前进中遇到麻烦时, 敢于深入, 细心观察, 认真分析, 逢山开路, 遇水架桥, 天堑都是可以跨过去的.

现在再处理夹角公式掌握不全面遇到的麻烦.



解法四 如图篇 4-7 所示,

直线  $PA$  的斜率  $k_{PA} = -\frac{a}{x}$ ,

直线  $PB$  的斜率  $k_{PB} = -\frac{b}{x}$ , 记  $\angle APB = \theta$ , 那么

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_{PA} - k_{PB}}{1 + k_{PA} \cdot k_{PB}} \right| = \left| \frac{-\frac{a}{x} + \frac{b}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} \right|$$

$\because a, b, x > 0, b > a$ ,

$\therefore \frac{b}{x} > \frac{a}{x}, \frac{ab}{x^2} > 0$ .

则

$$\text{上式} = \frac{-\frac{a}{x} + \frac{b}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}}.$$

(这是关键性的一步, 由于敢于深入, 具体地分析了绝对值符号内式子的正负性, 把绝对值符号打开了, 一切都迎刃而解了.)

$$\text{上式} = \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

由于  $b - a > 0$ , 那么, 当且仅当

$$x = \frac{ab}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$$

时,  $x + \frac{ab}{x}$  得到最小值, 从而  $\operatorname{tg} \theta$  得到最大值, 则  $\angle APB$  得到最大值.

说明 这里的解法三、解法四从思考方法和过程上看, 正是本例中的 (1)、(2) 题的解法二.

如果从一开始就细致地寻找出发点和目标的关系, 还可以水到渠成地得到下面的第 5 个解法.

解法五 如图篇 4-8 所示,

记  $\angle APB$  为  $\theta$ , 则  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\angle BPO - \angle APO)$ ,

而

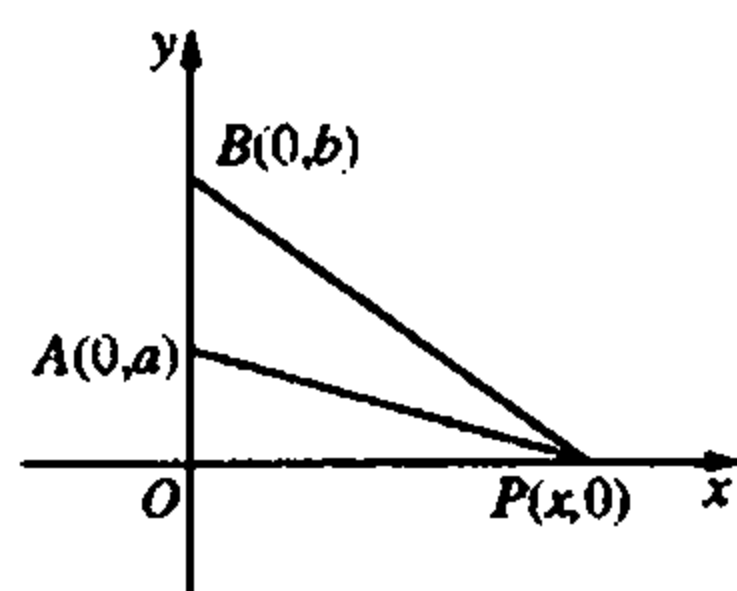
$$\operatorname{tg} \angle BPO = \frac{b}{x}, \quad \operatorname{tg} \angle APO = \frac{a}{x}.$$

$$\therefore \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \angle BPO - \operatorname{tg} \angle APO}{1 + \operatorname{tg} \angle BPO \cdot \operatorname{tg} \angle APO} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}}$$

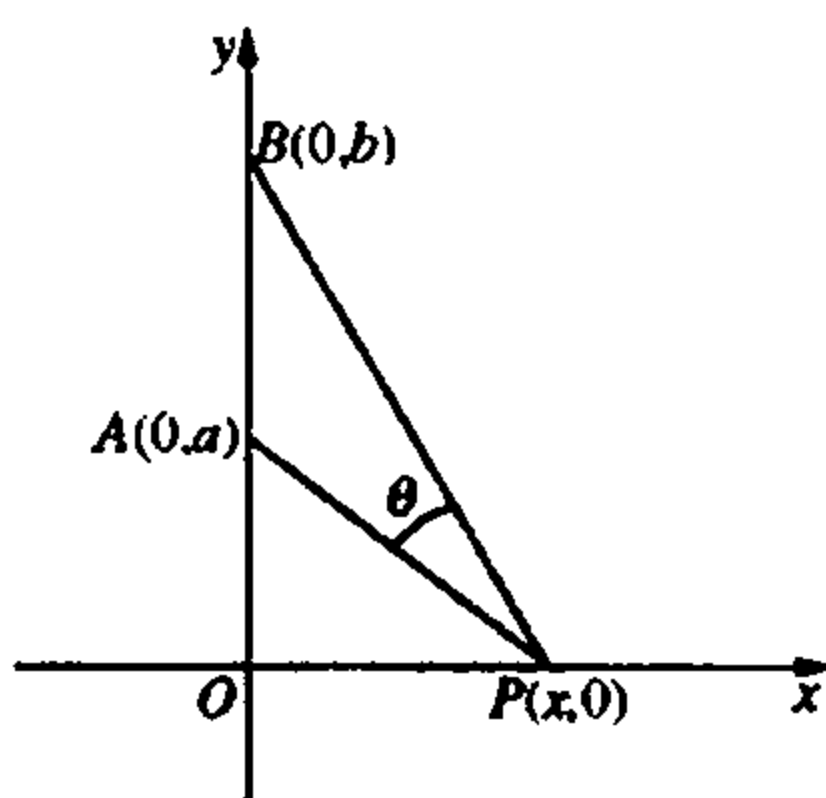
以下, 同解法四.

说明 至此, 本例中的 (1)、(2)、(3) 题的 9 种解法讨论完成了. 眼花缭乱呢, 还是鱼翔浅底? 不过是两种思考方式!

无论得到哪种解法, 都有一点是共同的, 那就是拿到题目后, 不急于动笔, 要全面观察, 敢于深入, 要推敲每个细节, 把情景弄通后, 再欣然命笔.



图篇 4-7



图篇 4-8

## 四、示范四

例4 (1) 四边形内有一点  $M$ , 使过  $M$  的一切直线都把四边形分成面积相等的两部分, 试判断四边形的形状.

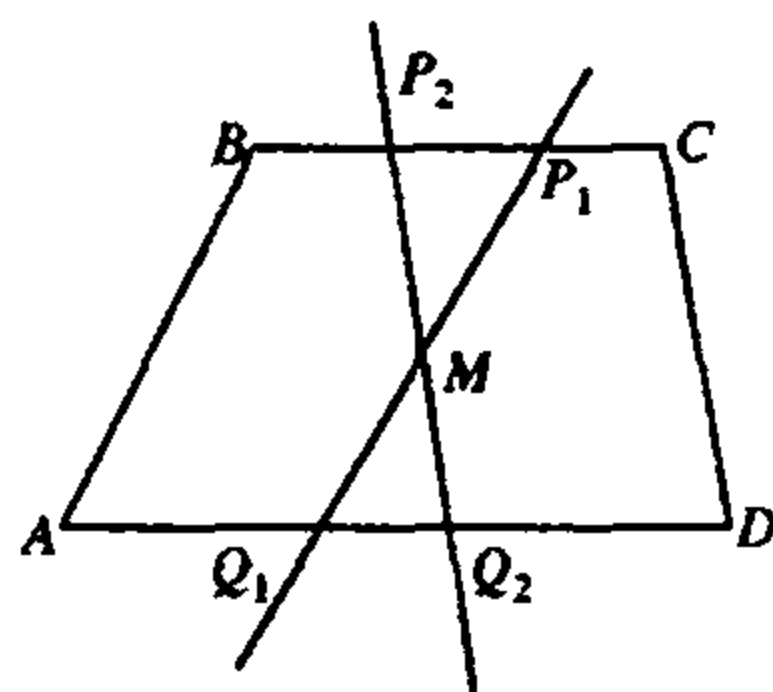
(2) 把平面上的点进行红、蓝二染色, 试证明, 一定存在两个相似比为 1995 的三角形, 它们各自的三顶点同色.

分析(1).

想法一 本题的条件, 使我们联想起这样一条有关面积的规律:

如果过一个平面图形内的一点有两条直线都把这个平面图形的面积二等分, 那么, 图形里将出现两对各自等积的图形.

解法一 如图篇 4-9 所示, 在四边形  $ABCD$  中, 过  $M$  的直线  $P_1Q_1$  和  $P_2Q_2$  都在面积上等分四边形  $ABCD$  ( $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  都在四边形的边上), 那么有



图篇 4-9

$$\begin{aligned} S_{P_1CDQ_1} &= \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{P_2CDQ_2}, \\ \Rightarrow S_{P_1CDQ_1} - S_{MP_1CDQ_2} &= S_{P_2CDQ_2} - S_{MP_1CDQ_2}, \\ \Rightarrow S_{\triangle Q_1MQ_2} &= S_{\triangle P_1MP_2}. \end{aligned}$$

同理  $S_{MP_1CDQ_2} = S_{MP_2BAQ_1}$ .

把已知条件顺推分析到这一步, 继续前进.

$$\therefore S_{\triangle Q_1MQ_2} = S_{\triangle P_1MP_2}.$$

$$\therefore \frac{1}{2}MQ_1 \cdot MQ_2 \cdot \sin \angle Q_1MQ_2 = \frac{1}{2}MP_1 \cdot MP_2 \cdot \sin \angle P_1MP_2.$$

$$\therefore MQ_1 \cdot MQ_2 = MP_1 \cdot MP_2.$$

$$\frac{MQ_1}{MP_1} = \frac{MP_2}{MQ_2}.$$

“麻烦事儿”又出现了.

在  $\triangle MQ_1Q_2$  和  $\triangle MP_1P_2$  中, 对顶角相等, 夹这组相等的角的两组边, 写出了一个比例式, 但顺序不对应.

这怎么办? 此路不通, 拂袖而去呢, 还是敢于深入, 寻找症结, “遇水架桥”?

解题中, 有时出路是这样找到的:

首先, 看看已知条件是否都用上了, 如果有没用上的已知条件, 为它“因人设事”, 即想方设法把它用进去, 这样前进的道路常常豁然开朗、柳暗花明. 对于本例, 已知条件很少, 而且是用上了.

其次, 看看用上的已知条件, 是否用充分了. 例如, 已知某四边形是平行四边形, 我们只用上了它的一组对边平行. 这就是用得不够充分. 要再用用“这组对边相等”、“另一组对边平行”或“对角线互相平分”等结论试试. 可以这样想, 如果只用“一组对边平行”即可证出题目, 那么原题不必给出“平行四边形”这样强的条件.

从这个想法出发, 再看“想法一”至今的思考, 我们发现对已知条件的运用尚不充分.

已知中说, 过点  $M$  的一切直线, 都把四边形分成面积相等的两部分, 而我们只用了过  $M$  的两条直线  $P_1Q_1$  和  $P_2Q_2$ .

如果再添上一条直线  $P_3Q_3$  呢? 噢, 证明立即成功.

如图篇 4-10 所示.

与前同理,在  $\triangle Q_2MQ_3$  和  $\triangle P_2MP_3$  中,可得

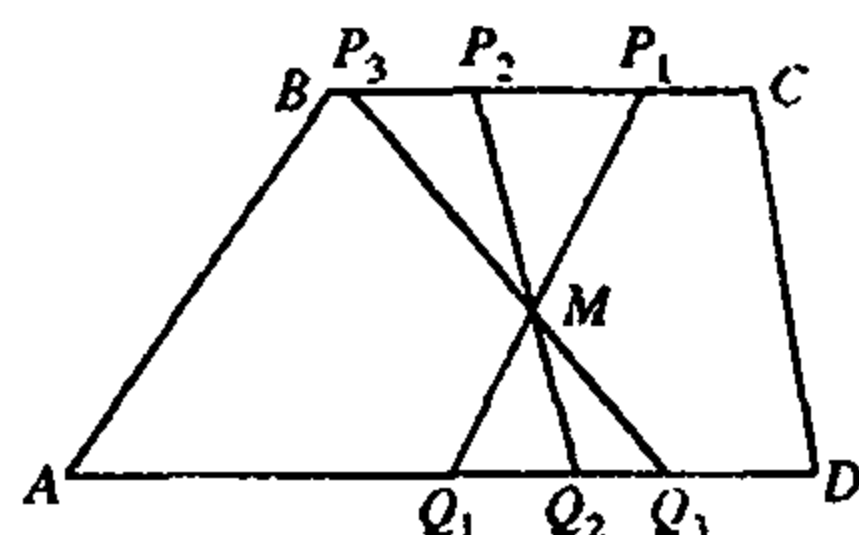
$$\frac{MQ_3}{MP_3} = \frac{MP_2}{MQ_2}.$$

于是

$$\frac{MQ_1}{MP_1} = \frac{MQ_3}{MP_3}$$

$$\Rightarrow \triangle MQ_1Q_3 \sim \triangle MP_1P_3 \Rightarrow \angle MQ_1Q_3 = \angle MP_1P_3$$

$$\Rightarrow AD \parallel BC.$$



图篇 4-10

类似地,  $AB \parallel CD$ .

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形.

这便得到了解法一. 想出解法一的思想酝酿过程, 是一次典型的从已知条件出发向目标前进的顺推分析过程.

**想法二** 先猜想.

凡对平面几何基本熟悉的人都会知道, 平行四边形对角线的交点, 具备题目所给  $M$  点的性质.

但存在了  $M$  点的四边形, 是不是一定是平行四边形呢? 乘胜追击, 试试证明它.

从哪里入手呢? 不要放弃已经开始了的思考.

画一个平行四边形和它对角线的交点  $O$ , 皆知  $O$  点平分一切经过它并且夹于一组对边间的线段, 是否可以从这里入手? 由于题目已知条件太少, 这时, 宜选择反证法证明, 证明若  $M$  点不平分夹于一组对边间的通过  $M$  点的线段是不可能的.

**解法二**

过  $M$  点作线段  $P_1Q_1, P_2Q_2$ , 其中  $P_1, P_2 \in BC, Q_1, Q_2 \in AD$ . (见图篇 4-11)

由已知可得

$$S_{\triangle P_1P_2M} = S_{\triangle Q_1Q_2M}.$$

$$\therefore \frac{1}{2}MP_1 \cdot MP_2 \cdot \sin \angle P_1MP_2 = \frac{1}{2}MQ_1 \cdot MQ_2 \cdot \sin \angle Q_1MQ_2.$$

$$\therefore MP_1 \cdot MP_2 = MQ_1 \cdot MQ_2^*.$$

(以下用反证法)

假设  $MP_1 < MQ_1$ , 则有  $MP_2 > MQ_2^{**}$ .

(这时, 并没有引出什么矛盾. 麻烦了!

怎么办?

看看有没有没用上的已知条件, 或用得不充分的已知条件. 考虑到, 已知条件是过点  $M$  的一切直线……)

过  $M$  作线段  $P_3Q_3, P_3 \in BC, Q_3 \in AD$ .

在  $\triangle P_1P_3M$  和  $\triangle Q_1Q_3M$  中, 由  $MP_1 < MQ_1$ , 同理可得,

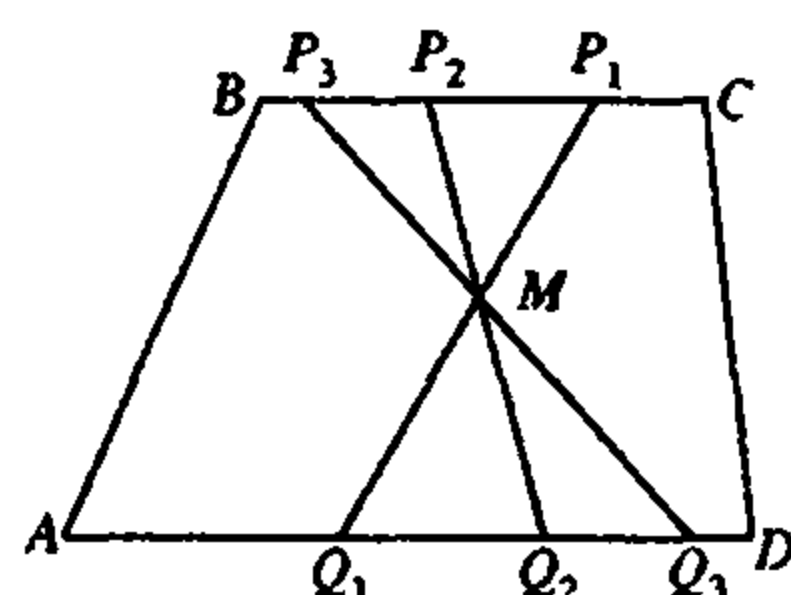
$$MP_3 < MQ_3.$$

在等积的  $\triangle P_2P_3M$  和  $\triangle Q_2Q_3M$  中, 由  $MP_3 > MQ_3$  又同理可得,  $MP_2 < MQ_2^{***}$ , 与  $*$  式矛盾.

若开始假设  $MP_1 > MQ_1$ , 同理引出

$$MP_2 < MQ_2 \quad \text{和} \quad MP_2 > MQ_2$$

的矛盾.



图篇 4-11

于是  $MP_1 = MQ_1$ ,

代入 \* 式, 得

$$MP_2 = MQ_2 \Rightarrow \triangle P_1 P_2 M \cong \triangle Q_1 Q_2 M \Rightarrow \angle P_2 P_1 M = \angle Q_2 Q_1 M \Rightarrow BC \parallel AD.$$

类似地  $AB \parallel CD$ .

于是, 四边形  $ABCD$  是平行四边形.

说明 [1] 在上述证明过程中, 从  $MP_1 < MQ_1$ , 得到了 \* \* 式  $MP_2 > MQ_2$ , 而从  $MP_1 < MQ_1 \Rightarrow MP_3 > MQ_3$ , 又得到了 \* \* \* 式  $MP_2 < MQ_2$ .  $MP_1$  与  $MQ_2$  的大小关系, 是在从左右两个方向受“夹板气”, 说句趣话, 如果说, 这种手段, 是在造成某个关系“左右为难”, 恐怕再恰当不过了.

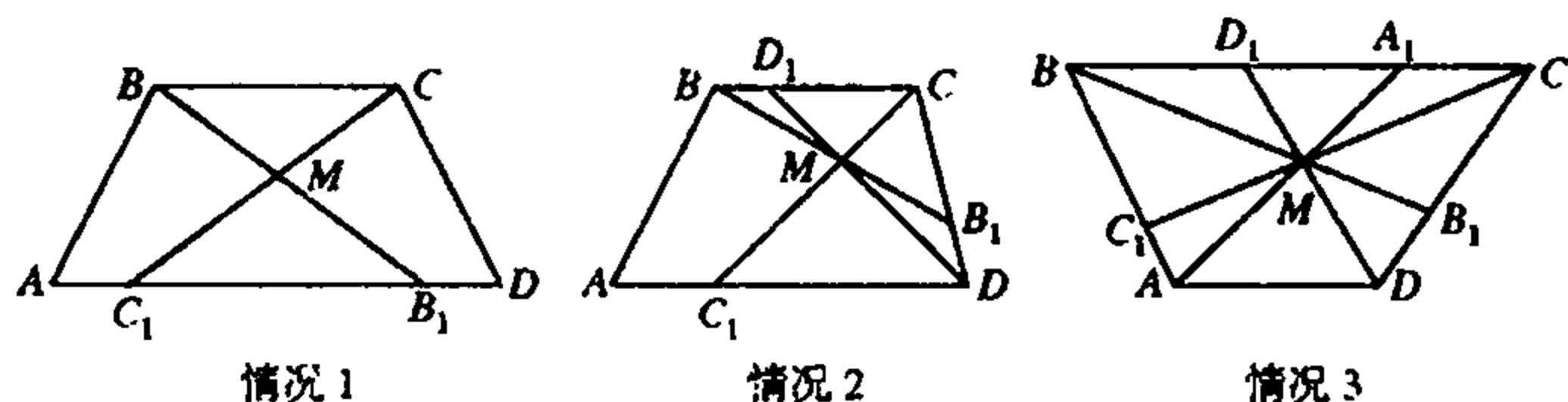
[2] 解法一和解法二迥然不同, 一个顺证法, 一个反证法, 但证明过程中, 越过困难的关键, 都是又作了第三条线段  $P_3 Q_3$ , 这是不是又是一次多解归一?

[3] 严格说来, 两个解法, 都存在一个不严密的地方, 不知同学们是否觉察到了?

缺陷在于, 无论哪种解法, 都要过  $M$  点作线段  $P_1 Q_1, P_2 Q_2, P_3 Q_3$  夹于一组对边之间, 添加这个辅助线时, 在作图上是否一定可以实现应予证明.

答案是肯定的, 下面写出一种证明(见图篇 4-12).

情况 1 连  $B, M$ , 延长后交  $AD$  于  $B_1$ , 连  $C, M$  延长后交  $AD$  于  $C_1$ , 那么, 在  $BC$  上任取点  $P_1$ , 连结  $P_1, M$  延长后必交  $C_1 B_1$  于  $Q_1$  (因为射线  $MQ_1$  在  $\angle C_1 M B_1$  的内部).



图篇 4-12

情况 2 连  $B, M$ , 延长后交  $CD$  于  $B_1$ , 连  $C, M$ , 延长后交  $AD$  于  $C_1$ , 那么, 连  $D, M$ , 延长后必交  $BC$  于  $D_1$  (与情况 1 中括号内的理由相同). 这时, 在  $D_1 C$  上任取点  $P_1, P_2, P_3$ , 与  $M$  连结并延长, 都可以作出所需要的线段, 理由同上.

情况 3 连  $B, M$ , 延长后交  $CD$  于  $B_1$ , 连  $C, M$ , 延长后交  $AB$  于  $C_1$ , 那么, 连  $D, M$ , 延长后必交  $BC$  于  $D_1$ , 连  $A, M$ , 延长后必与  $BC$  交于  $A_1$ , 理由同上. 这时, 在  $D_1 A_1$  上任取点  $P_1, P_2, P_3$ , 与  $M$  连结并延长, 都可以作出所需要的线段, 理由同上.

这道题的拟定, 严格说来在措辞上也似有可探讨之处.

答案是平行四边形, 显然是正确的, 结论不可能再强了, 比如矩形、菱形、正方形, 等等. 因为已经证明, 非矩形的平行四边形, 也是符合题目要求的, 等等.

但是, 答案再弱一些, 可以不可以呢? 例如, “有一组对边平行的四边形”, 作为符合题目的要求, 这其中有一部分(另一组对边不平行)不合格, 但题目是要求判断符合条件的图形的形状, 是要求一个必要条件. 说符合题意的图形“有一组对边平行”在逻辑上, 是没有错误的.

如果要得到“平行四边形”这个结论, 宜把措辞改为“充分且必要条件”, 但一个事实是充要条件很多, 是等价的. 所以, 本题在措辞上是否改为“试写出符合要求的图形的充要条件之一”为宜.

这时, 即使答成“两组对边相等的四边形”、“对角线互相平分的四边形”、“两组对角分别相等的四边形”等, 也不为错.

我们这段讨论, 好像话扯远了. 绝非如此!

首先, 这再次表现了我们对于充要条件概念的理解是否深刻, 是否到家. 当然, 人们约定俗成, 把

判断形状理解为要求充要条件,则是另一回事儿.

更重要的,从分析题目,把题解出,还一题多解,多解归一,到反过来对题目进行推敲,评头论足,尝试改进,实在标志着水平的又一番提高.

历届俄罗斯(包括前苏联)数学竞赛,有这样一项安排,即学生答完卷后,每人拿一张纸,评选最好的试题.从这个角度看,他们与我们上边的做法有共同之处吧.

下面来讨论本例的第(2)题.

本例的第(2)题,是1995~1996年度,全国高中数学联赛第二试的第4大题(第二试共4道大题,考2小时,本题35分),本题甚难,从全国10多万优秀的参赛高中生来看,答出者寥寥.

命题组的评分标准上给出的答案是这样的.

我们称之为解法一.

**解法一** 首先证明平面上一定存在三顶点同色的直角三角形.

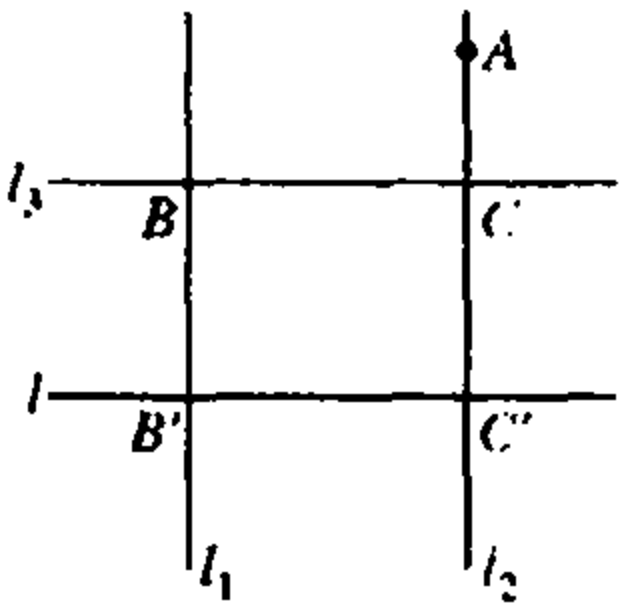
在平面上任作直线 $l$ ,则 $l$ 上必有两点同色,设此两点为 $B',C'$ .过 $B',C'$ 分别作 $l$ 的垂线 $l_1,l_2$ .

如果 $l_1$ 或 $l_2$ 上有与 $B',C'$ 同色的点 $A'$ ,则 $\triangle A'B'C'$ 即为三顶点同色的直角三角形.

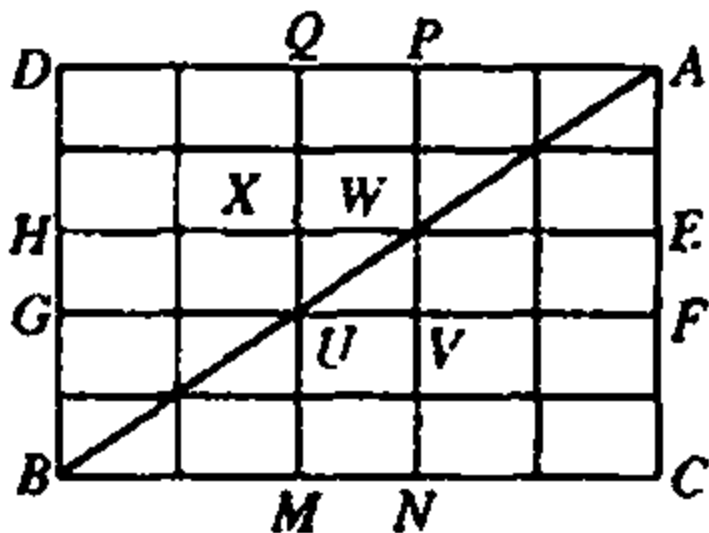
如果 $l_1$ 与 $l_2$ 上除 $B'$ 与 $C'$ 外其余点均与 $B',C'$ 异色,则在 $l_2$ 上取异于 $C'$ 的两点 $A,C$ ,并过 $C$ 作 $l_3 \perp l_1$ ,垂足为 $B$ ,则 $\triangle ABC$ 即为三顶点同色的直角三角形(见图篇4-13).

因此,平面上一定存在三顶点同色的直角三角形,设其中之一为 $\text{Rt}\triangle ABC$ .

将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 对称地补成矩形 $ABCD$ .用两组分别平行于 $AC$ 与 $CB$ 的 $n$ 等分平行线将矩形 $ABCD$ 等分成 $n^2$ 个与原矩形相似的小矩形(如图篇4-14所示).



图篇4-13



图篇4-14

以下用反证法证明:若 $n$ 为奇数,则在这些小矩形中必有一个,它的顶点中至少有三个同色,即存在一个三顶点同色的小直角三角形.

假设不存在三顶点同色的小直角三角形.

线段 $AC$ 上端点及分点共 $n+1$ 个, $n+1$ 为偶数,因此 $AC$ 上必有相邻的两点同色(若每相邻两点异色,则 $A,B$ 亦应异色,与已知矛盾),不妨设为 $E,F$ .则 $E,F$ 所在的小矩形的另两个顶点必与 $E,F$ 异色(否则已出现同色小三角形).依次类推,可知矩形 $EFGH$ 中,每条竖线上的两顶点都同色.

同理,线段 $BC$ 上有相邻两点 $M,N$ 同色,也有矩形 $MNPQ$ ,其中每条横线上的两顶点都同色.

设矩形 $EFGH$ 与 $MNPQ$ 的公共部分为小矩形 $UVWX$ ,由以上所说, $U$ 与 $V$ 同色且 $V$ 与 $W$ 同色,从而 $\triangle UVW$ 即是三顶点同色的小直角三角形,这与假设矛盾.

因此必存在一个三顶点同色的小直角三角形.

这个三顶点同色的小直角三角形与原直角三角是相似的,相似比为 $n$ ,当 $n=1995$ 时就是题目所要证明的结论.

证明周密严谨,无可挑剔.

但从这个过程看,要求一名考生在考场上有限的时间内想得出来并表达好,实在有如登天.

另外,这种证法,只适用于相似比是奇数(本题是1995)的情况.

我班的闫珺同学,在考场上作了如下的解答,我们称它为解法二.

**解法二** 先证明一个引理:在平面上可以找到任意长的两端同色的线段.

**证明** 按要求的长度,在平面上画出线段  $AB$ ,

1° 若  $A, B$  同色,  $AB$  线段即为所求;

2° 若点  $A, B$  不同色,则不妨设  $A$  红、 $B$  蓝,以  $AB$  为一边作正  $\triangle ABC$  (见图篇 4-15).

若点  $C$  红,则  $AC$  为所求,若点  $C$  蓝,则  $BC$  为所求.

引理证毕.

(请注意,对于  $C$  点,是不是在受夹板气,左右为难了,而使得证明成功?)

由引理,可在平面上作长度为 1 且两端同色的线段  $AB$ ,再作长度为 1995 且两端同色的线段  $A_1B_1$ .

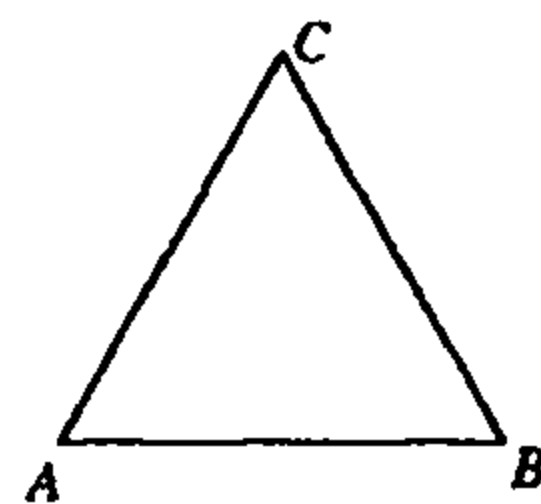
不妨设  $A, B$  两点同红. 在平面上直线  $AB$  之外,取三个不在同一直线上的红色点.

若这个要求不能实现,则有两种可能:

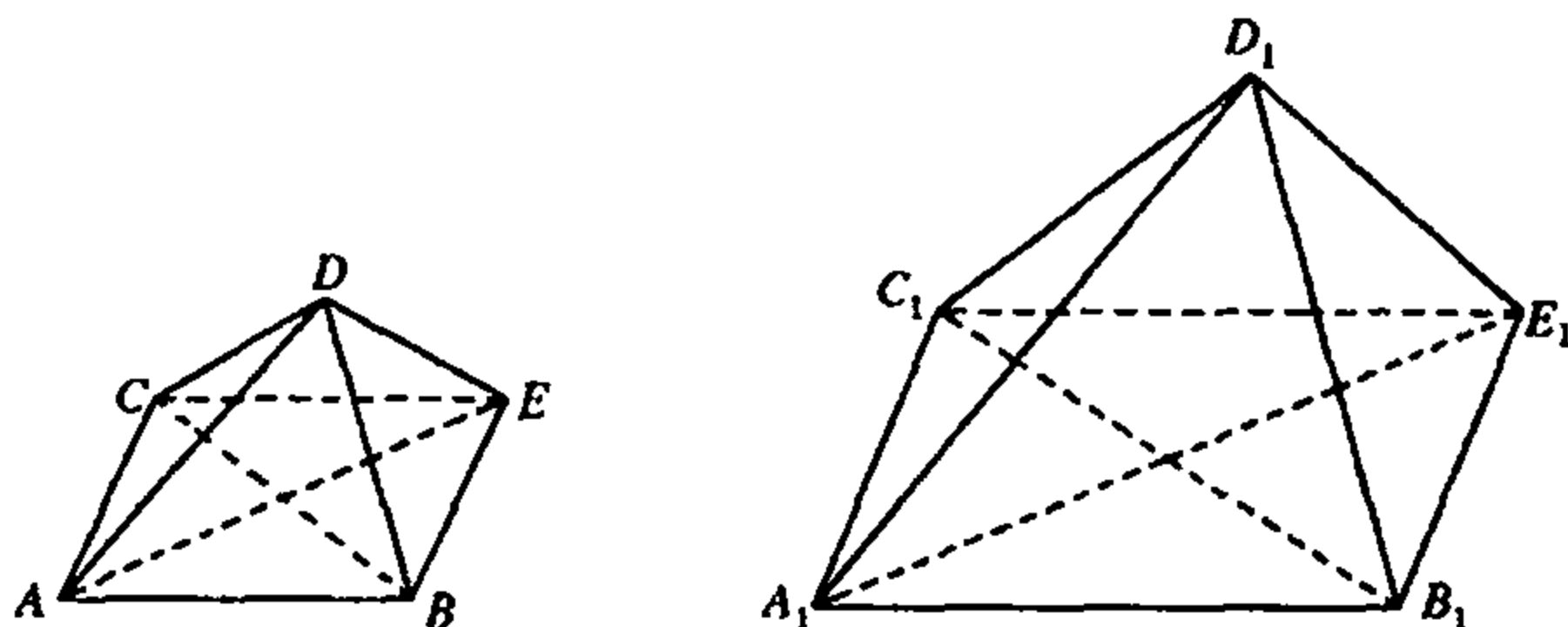
i 直线  $AB$  之外红色的点集中在一条直线  $l$  上,这时,平面被直线  $AB$  和直线  $l$  分划成了 3 个 ( $AB \parallel l$  时)或 4 个 ( $AB$  和  $l$  相交时)部分,每个部分都向某个方向无限展延,并且每个部分上都是蓝色点,那么,显然可以作出两个三顶点都是蓝色的相似比是 1995 的三角形;

ii 直线  $AB$  之外红色的点只有 1 个或 2 个或没有. 那么,在平面上挖去这几个点和直线  $AB$  后的无限展延的区域上,更易于作出两个三顶点都是蓝色的相似比是 1995 的三角形.

若这个要求能实现,记这三个点分别是  $C, D, E$ . 如图篇 4-16 所示.



图篇 4-15



图篇 4-16

以  $A_1B_1$  为一边,在相应的一侧,作  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1D_1 \sim \triangle ABD$ ,  $\triangle A_1B_1E_1 \sim \triangle ABE$ . 由于  $C_1, D_1, E_1$  选择在关于直线  $A_1B_1$  的与点  $C, D, E$  关于直线  $AB$  相应的一侧,于是易证  $\triangle C_1D_1E_1 \sim \triangle CDE$  (两个三角形的三组边对应成比例),且相似比是 1995.

这时,点  $C_1, D_1, E_1$  中若有与  $A_1, B_1$  同色的,不妨设为点  $C_1$ ,则  $\triangle A_1B_1C_1$  即是与  $\triangle ABC$  相似比为 1995 的三顶点同色的三角形.

如果点  $C_1, D_1, E_1$  都与点  $A_1, B_1$  异色,那么,  $C_1, D_1, E_1$  三个点是同色的,这时,  $\triangle C_1D_1E_1 \sim \triangle CDE$ ,且相似比是 1995.

全题证毕.

**说明** [1] 在证明中,  $E_1$  点的颜色是关键性的,若  $E_1$  与点  $A_1, B_1$  同色,则  $\triangle A_1B_1E_1$  是符合要求的;若想躲避这个局面,则  $E_1$  与点  $C_1, D_1$  同色,使得  $\triangle C_1D_1E_1$  是符合要求的.

这里,是不是让  $E_1$  的颜色“左右为难”了,从而使证明成功?

[2] 这个证法较解法一要简单些,特别是它的主体部分. 同时,相似比即使不是奇数,证明仍然

适用.

人大附中姚志宏在考场上的证明又简单了一些,我们记它为解法三.

**解法三** 在平面上作两个半径之比为 1995 的同心圆大 $\odot O$ 和小 $\odot O$ ,如图篇 4-17 所示.

作小 $\odot O$ 的 9 条半径  $OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OI$ , 并分别延长,得到大 $\odot O$ 的半径  $OA_1, OB_1, OC_1, OD_1, OE_1, OF_1, OG_1, OH_1, OI_1$ .

在  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  这 9 个点中,至少有 5 个点颜色相同,不妨设  $A, B, C, D, E$  颜色相同.

那么,在  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  这 5 个点中,至少有 3 个点颜色相同.不妨设点  $A_1, B_1, C_1$  颜色相同.

连结  $A_1, B_1, C_1$  得到三顶点同色的三角形(因为  $A_1, B_1, C_1$  在同一圆弧上,因而不在于同一直线上),它与三顶点同色的 $\triangle ABC$ 易证相似比为 1995.

**说明** [1] 这个证法,也有“左右为难”的影子,那就是小 $\odot O$ 上两种颜色的点若各占 4 个时,这时的第 9 个点的取色;和大 $\odot O$ 上的  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  中的第 5 个点的取色……

[2] 这个证明,不单十分简捷明快,而且也不受相似比须为奇数的限制.

我们把我班郭绍汾同学在考场上的证明记为解法四.

**解法四** 先证引理:在平面上可以作出任意指定长度且两端同色的线段(前已证过).

作长度为 1 的两端同色的线段  $AB$ (不妨设点  $A, B$  同为红色).以  $AB$  为直径作 $\odot O$ ,并六等分 $\odot O$ ,记各分点为  $A, C, D, B, E, F$ ,如图篇 4-18 所示.

若  $C, D$  中有红色,不妨设为  $C$ ,则  $\text{Rt}\triangle ACD$  有一个内角是  $30^\circ$ .

若点  $C, D$  皆蓝,则  $E$  点的颜色为红时,  $\text{Rt}\triangle ABE$  有  $30^\circ$  的内角,若  $E$  点的颜色为蓝时,则  $\text{Rt}\triangle CDE$  有  $30^\circ$  的内角.

总之,可以作出斜边长为 1 的有  $30^\circ$  锐角的直角三角形.

同理,可以作出斜边长为 1995 的有  $30^\circ$  锐角的直角三角形.

这两个三角形符合题目要求,证毕.

(我问郭绍汾同学,何以想出这么漂亮的证法?)

他笑了,说:“我用的是几年前做那道题(指本例中的(1)题)时,您教我们的造成‘左右为难’形势的思想.在这里,我造成了点  $E$  在取颜色时的左右为难.”)

**说明** [1] 好一个“左右为难”,一气贯穿了解法二、解法三、解法四这三个解法,其实解法一就没有它的影子了吗?! 这就是一个侧面的多解归一.

而它又是从本例中的第(1)题过来的,就又成为了一个侧面的多题归一.

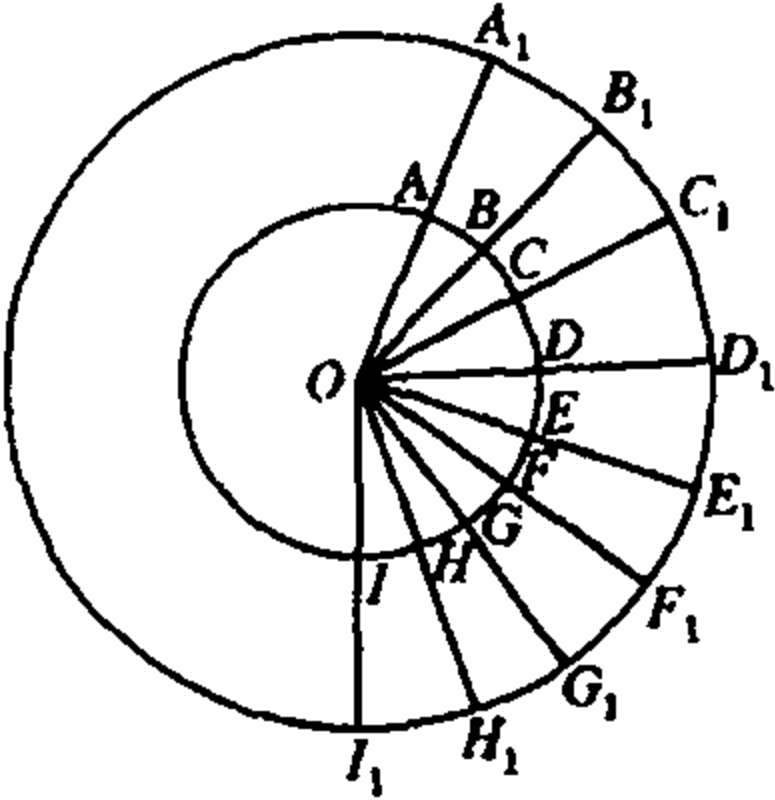
[2] 本解法也不受相似比须奇数的限制.

[3] 公平地说,闫珺、姚志宏、郭绍汾的解法,优于标准答案的解法.可以说,他们是我们的学生,但他们有时超过我们了.

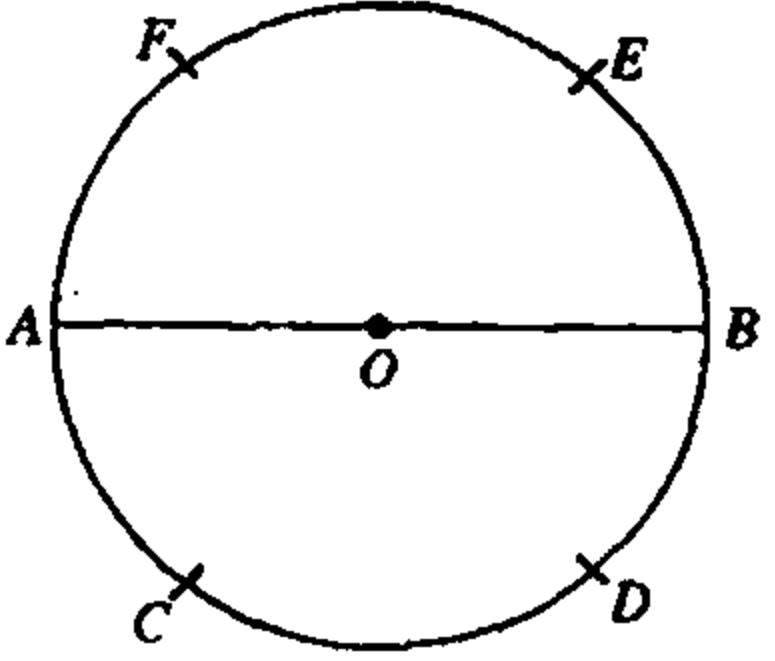
本篇要结束了,本书也要结束了.结束在哪里呢? 结束在 3 位同学想出了很优秀的方法.

牛顿说,我之所以有成就,是因为我站在巨人的肩膀上.

我衷心地祝愿年轻的读者朋友们,既要切切实实地站在巨人的肩膀上,又要去中流击水.那么,你一定会有“两岸猿声啼不住,轻舟已过万重山”的感觉.



图篇 4-17



图篇 4-18



## 后 记

尤记得那个初秋的下午,与孙维刚老师的爱人王海亭女士会面的情形。我们在书桌前对坐着,眼前放着一杯热茶,茶叶淡淡的幽香在空气中袅绕,伴着王老师的述说,旧日感怀缭绕弥漫,我陷了进去。

“我从没感觉孙老师离开我,他一直在我身边……我现在想的、做的都是他的事。”王老师看着我,目光坚定。

如果您在网上搜索“孙维刚”,会显示 5000 多条信息,您会发现这些信息中更多的字眼是“育人专家”、“平民教育家”、“名师”、“神奇教师”,这些无不显示着对孙老师的尊敬。

孙维刚老师生前所在的学校二十二中,是北京一所普通中学,自 1980 年起,孙老师进行教改试验,教数学并兼任班主任,从初一到高三,六年一循环,到 1997 年共带了三轮实验班。十几年下来实验班有很多不一样,尤其是第三轮实验班,全班 40 名学生中,38 人达到重点分数线,有 55% 考上北大、清华。如今,他的学生遍布世界各地,有的在哈佛、斯坦福、密西根等大学继续深造,他们都有着骄人的成绩,成为各行各业的中坚力量。也有的学生在继续着孙老师的事业,在“孙维刚数学兴趣培训中心”向学生们传递着孙老师的教学理念——把不聪明的孩子变得聪明起来,让聪明的孩子更聪明。

然而这些成绩并不是孙老师最看重的,他曾经说过:“一如既往,我们要坚持品德第一,学习第二;训练发达的脑子第一,学分第二。”孙老师最看重的是品德,其次才是学识,他把这种思想潜移默化地植入学生的心灵。孙老师有着高人一筹的学术功底和独特的人格魅力,我听说过一个个有关孙老师的令人感动的故事。有个和孙老师素未谋面的河南学生,在孙老师去世后背着两箱饮料来到孙老师家,他被孙老师的事迹深深地感动了。还有个学生,听过孙老师的一堂课,当她怀着忐忑不安的心情向孙老师请教问题时,没想到孙老师和蔼可亲地回答了她,这让她欣喜若狂。在知道孙老师去世后,她和她的同学向北京的方向祭拜孙老师……

原东城区教研室主任高贤明是发现孙老师并支持孙老师搞教改试验的伯乐,在孙老师去世后,他说:“不能因为孙老师的去世,而让他这份事业中断,如果那样,我们对不起社会,是一种犯罪。”中央教科所纪秩尚称孙老师为“当代的孔夫子”。如今,孙维刚教育思想研究会正在筹备之中,希望能通过政府的引导,把孙老师“个例”产生的土壤,变成名师大面积生成的沃土。

很荣幸能有机会由北京大学出版社出版孙维刚老师的著作。读孙老师的书,就仿佛孙老师在眼前亲自为您辅导一样,对于不会做的题,看到孙老师的解法往往会有峰回路转的感觉。书中力求一题多解,多解归一,多题归一,用“动”的观点考虑问题,尽可能地拓宽思路,训练发达的头脑,做到“八方联系,浑然一体”,最终达到“漫江碧透,鱼翔浅底”的境界,这正是孙老师一直在强调的。

如果您在阅读当中发现有什么问题,或有什么想法或建议,请来信或发 E-mail 与我们联系。来信请寄:北京市海淀区成府路 205 号北京大学出版社温丹丹收,邮编 100871, E-mail: xxjs@pup.pku.edu.cn。

责任编辑

2005 年元月于北京



策划编辑：温丹丹

封面设计：李 亮

八方联系，浑然一体  
漫江碧透，鱼翔浅底  
让不聪明的学生变聪明  
让聪明的学生更聪明

——孙维刚



1938年出生，山东海阳郭城人，2002年1月因癌症扩散不幸逝世，享年63岁。

孙维刚生前为北京市数学特级教师，中国数学会理事，全国人大代表。在北京市第二十二中学任教40年。自1980年起，进行从初一接班直到高中毕业的六年一循环的教学教育改革试验，教数学，当班主任，教育教学效果突出，全国多种报刊及电视台均有报道。以1991~1997年的第三轮班为例，学生德智体全面发展，素质大幅度提高，全班40人全部升入大学，其中22人考进北京大学、清华大学。

孙维刚是北京市首批有突出贡献的专家，首批中国数学奥林匹克高级教练，获首都“五一”劳动奖章，被评为北京市模范班主任、北京市十大杰出教师、全国十名师德标兵。

ISBN 7-301-08497-8



9 787301 084977 >

ISBN 7-301-08497-8/G·1381

定价：19.00元