

数学 培优竞赛

黄东坡 著

新方法

初三年级

数学竞赛培优新方法
初三

地址：武汉市武昌区洪山街
邮编：430071

湖北教育出版社
地址：武汉市洪山区

湖北人民出版社
地址：武汉市洪山区

湖北人民出版社
地址：武汉市武昌区

湖北人民出版社
地址：武汉市武昌区

湖北人民出版社
地址：武汉市武昌区

ISBN 7-318-03387-2



鄂新登字 01 号

数学培优竞赛新方法
初三年级

黄东坡 著

出版：湖北人民出版社
发行：

地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：武汉市东华印刷厂
开本：787 毫米×1092 毫米 1/16
字数：358 千字

经销：湖北省新华书店
印张：14.5

版次：2002 年 7 月第 1 版
印数：1—12 120

印次：2002 年 7 月第 1 次印刷
定价：15.00 元

书号：ISBN 7-216-03392-2/G·907

序

2002年1月,湖北省新闻出版局组织评选出了2001年“最有影响的10本书”,名列榜首的是《康熙大帝》,排名第六的是《数学培优竞赛新帮手》(下简称《新帮手》)——黄东坡的大作,其余的8本书,也都选自不同的领域:政治、经济、科普、历史和艺术。从1月9日的《武汉晚报》得到这一消息后,我感到非常激动,因为《新帮手》的成功也是我的预期,证明我对该书的判断和鉴赏是正确的,向读者的举荐和承诺是可信的;我感到激动,还因为一本关于培优竞赛辅导的书,也能跻身于《康熙大帝》、《中国共产党历史图典》、《世界摄影名作欣赏》、《21世纪高级营销书库》等宏篇巨制之中,毕竟是一件意料之外的事。

面对《新帮手》的成就,本来可以弹冠相庆,作些修饰与补正的工作,但黄东坡并没有止于此,而是乘胜前进,继续探索,终于又一部新作《数学培优竞赛新方法》(下简称《新方法》)问世。我赞赏这样的精神,因为著书与教学满足同样的公理:没有最好的,只有不断地反思才可能更好。一打开《新方法》,你就会发现,它的创新之处在于:从知识的回眸说起,重过程;以“知识纵横”发轫,浸透着历史的信息,重思想;在标题后是一阙名言,紧扣主题的同时也关注着人文精神的滋养,这体现的是什么呢?一种改革的精神,一种数学教育的现代理念。同样,你也会发现《新方法》贯穿了现代数学教育的基本理念:比如课题组织与学习进程同步、与学生发展协调、与培优过程一致的基本设想;以典型问题为载体,着力反映教学真实,选材联系课本而又高于课本的基本原则;点拨、旁批和计白当黑的例题分析方式;着眼针对性、层次性以及开放互动性的训练材料;以及丰富性、实用性和有序性兼具的数学竞赛课程资源等,这些被实践所证明了的成功经验,在本书中又得以进一步张扬,成为作者的写作个性,这体现的是什么呢?是一种重视学术经验、重视教学积累的正确态度,既有反思,又有发展,不是否定,而是扬弃,这正是现代数学教育理念的精神所在。因此,我们说,体现现代数学教育理念,而且把这种理念转化为教学行为和写作实践,是本书的突出特点。

随着《义务教育国家课程标准》的颁布,数学教育正处于一个重要的变革时期,人们对数学的认识,对数学学习的认识,对数学价值与功能的认识,都在发生着显著的变化,它们将直接影响到中考数学、竞赛数学中内容的选取、题型的变化,影响到数学试题的立意、情境和设问方式,当这一切都在变化的时候,不能没有适应这种变化的培优竞赛读本。这是一个良好的机遇,看来,这个机遇又被黄东坡抓住了。我们期待着:有更多的老师会与作者达成共识,有更多的学生会从中受益。

裴光亚

2002年5月于武昌水果湖

审视反思 萌动突破

2001年10月,我来到广州,参加骨干教师国家级培训,在三个月的培训中,我有幸聆听到国内外著名专家学者关于国家课程标准、基础教育改革、数学教育进展、东西方数学教育比较等方面的演讲,他们高屋建瓴、总揽全局的讲演,极大地开阔了我的视野,我看到一场数学教育的范式革命已悄然拉开了序幕。

岁末回到武汉,我全面分析了一年来全国各地中考试题、各级竞赛试题,透过试题,能感受到颁布不久的《义务教育国家课程标准》(以下简称《标准》)给命题者带来的深刻影响,把握到他们清晰的命题思路:逼近课程标准,通过命题的改革与创新,反映新的数学教育理念,具体体现在:

- 设计新颖的试题,在新的情景下考查基础知识和基本技能,组合填空、完形填空、多项选择、阅读理解问题崭露头角;
- 削弱几何证明难度,强调数形结合,引入几何动态;
- 改变问题的设问方式,变封闭为开放,给学生以主动的思考空间;
- 要求运用学过的数学知识,通过观察、试验、联想、演绎、归纳、类比、分析、综合等思维形式,对数学问题进行探索和研究,探索性问题、发展性问题大量涌现;
- 通过类比和联想、延伸和推广,考查数学创新能力;
- 倡导数学建模、数学应用,贴近社会实际、体现时代要求的情景应用题应运而生

.....

本套书就是这次培训学习与分析思考的结晶,它以《标准》为指导,将初中数学组织为90个专题讲座,以最新中考、竞赛试题为载体,运用开放互动式写作方式,注重数学思想方法的介绍、数学思维的培养、数学意识的培育、跨学科的综合渗透、数学文化氛围的营造,本套书的编写宗旨是:知识能力并举、培优竞赛兼顾、激发学习兴趣、优化学习过程、追求人文关怀、培养数学美感。

愿读者能透过本书的创意,优化教学过程,优化学习过程,从中感受到数学教育改革、试题创新设计的一缕气息。

多年来,湖北大学数学系汪江松先生、武汉市教研室胡顺先生给了我很多的支持和帮助。百忙之中,裴光亚先生又欣然作序。在写作过程中,湖北省水果湖第二中学领导、老师给了我关怀,武汉魏红女士、柯华女士、张立临先生,江苏海门范红洪小姐,广州留美博士朱洁华女士等给予了我帮助,在此一并表示诚挚的谢意。

黄东坡

2002年5月于湖北省水果湖第二中学

目 录

代 数 篇

- ① 追问求根公式 (1)
- ② 判别式——二次方程的根的检测器 (5)
- ③ 充满活力的韦达定理 (10)
- ④ 明快简捷——构造方程的妙用 (15)
- ⑤ 一元二次方程的整数解 (20)
- ⑥ 转化——可化为一元二次方程的方程 (24)
- ⑦ 化归——解方程组的基本思想 (29)
- ⑧ 由常量数学到变量数学 (34)
- ⑨ 坐标平面上的直线 (40)
- ⑩ 抛物线 (46)
- ⑪ 双曲线 (53)
- ⑫ 方程与函数 (59)
- ⑬ 怎样求最值 (64)
- ⑭ 图表信息问题 (69)
- ⑮ 统计的思想方法 (76)

几 何 篇

- ⑯ 锐角三角函数 (84)
- ⑰ 解直角三角形 (89)
- ⑱ 圆的基本性质 (94)
- ⑲ 转化灵活的圆中角 (101)
- ⑳ 直线与圆 (107)
- ㉑ 从三角形的内切圆谈起 (113)
- ㉒ 圆幂定理 (119)
- ㉓ 圆与圆 (126)
- ㉔ 几何的定值与最值 (133)

综 合 篇

- ㉕ 简单的数学建模 (140)
- ㉖ 开放性问题评说 (145)
- ㉗ 动态几何问题透视 (152)
- ㉘ 避免漏解的奥秘 (157)
- ㉙ 由正难则反切入 (162)
- ㉚ 从创新构造入手 (166)
- 参考答案 (170)

1 追问求根公式

在真实的生命里,每桩事业都是由信心开始,并由信心跨出第一步.

——史格勒

知识纵横

形如 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的方程叫一元二次方程 (quadratic equation in one variable), 配方法 (solving by of completing the square)、公式法 (solving by formula)、因式分解法 (solving by factorization) 是解一元二次方程的基本方法. 而公式法是解一元二次方程的最普遍、最具有一般性的方法.

求根公式 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 内涵丰富: 它包含了初中阶段已学过的全部代数运算; 它回答了一元二次方程的诸如怎样求实根、实根的个数、何时有实根等基本问题; 它展示了数学的简洁美.

降次转化是解方程的基本思想, 有些条件中含有 (或可转化为) 一元二次方程相关的问题, 直接求解可能给解题带来许多不便, 往往不是去解这个二次方程, 而是对方程进行适当的变形来代换, 从而使问题易于解决. 解题时常用到变形降次、整体代入、构造零值多项式等技巧与方法.

例题求解

【例 1】若 $x^2 + xy + y = 14$, $y^2 + xy + x = 28$, 则 $x + y$ 的值为 _____.

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

思路点拨 恰当处理两个等式, 解关于 $x + y$ 的一元二次方程.

链接

一部代数史就是研究方程、讨论方程根的历史. 一元三次方程或更高次数的方程, 是否也如一元二次方程有求根公式? 16 世纪意大利数学家卡当给出了三次和四次方程的公式解; 19 世纪 20 年代, 挪威数学家阿贝尔意识到一般的四次以上方程没有公式解; 大约又过了十年, 法国数学家伽罗华彻底回答了这个问题, 并创立群、环、域等概念, 深刻影响着物理学、现代数学的发展.

【例2】 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根, 那么 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值等于().

- A. -4 B. 8 C. 6 D. 0

(全国初中数学联赛题)

思路点拨 求出 x_1, x_2 的值再代入计算, 则计算繁难, 解题的关键是利用根的定义及变形, 使多项式降次, 如 $x_1^2 = 3 - x_1, x_2^2 = 3 - x_2$.

【例3】 解关于 x 的方程 $(a-1)x^2 - 2ax + a = 0$.

思路点拨 因不知晓原方程的类型, 故需分 $a-1=0$ 及 $a-1 \neq 0$ 两种情况讨论.

【例4】 设方程 $x^2 - |2x - 1| - 4 = 0$, 求满足该方程的所有根之和.

(2000年重庆市竞赛题)

思路点拨 通过讨论, 脱去绝对值符号, 把绝对值方程转化为一元二次方程求解.

【例5】 是否存在某个实数 m , 使得方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 和 $x^2 + 2x + m = 0$ 有且只有一个公共的实根? 如果存在, 求出这个实数 m 及两方程的公共实根; 如果不存在, 请说明理由.

思路点拨 假设存在实数 m , 使这两个方程有且只有一个公共实根 x_0 , 将 x_0 分别代入两个方程, 联立后消去 x_0^2 项, 求出 x_0 及 m 值.

链接

一元二次方程常见的变形形式有:

(1) 把方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 直接作零值多项式代换;

(2) 把方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 变形为 $ax^2 = -bx - c$, 代换后降次;

(3) 把方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 变形为 $ax^2 + bx = -c$ 或 $ax^2 + c = -bx$, 代换后使之转化关系或整体地消去 x .

解含字母系数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 时, 在未指明方程类型时, 应分 $a=0$ 及 $a \neq 0$ 两种情况讨论; 解绝对值方程需脱去绝对值符号, 并用到绝对值一些性质, 如 $|x|^2 = |x^2| = x^2$.

解公共根问题的基本策略是: 当方程的根有简单形式表示时, 利用公共根相等求解; 当方程的根不便于求出时, 可设出公共根, 设而不求, 通过消去二次项寻找解题突破口.

学 力 训 练

基础夯实

1. 已知 a, b 是实数, 且 $\sqrt{2a+6} + |b-\sqrt{2}| = 0$, 那么关于 x 的方程 $(a+2)x^2 + b^2x = a-1$ 的根为_____.

(2001年北京市海淀区中考题)

2. 已知 $x^2 - 3x - 2 = 0$, 那么代数式 $\frac{(x-1)^3 - x^2 + 1}{x-1}$ 的值是_____.

(2001年四川省中考题)

3. 方程 $(2001x)^2 - 2000 \times 2002x - 1 = 0$ 的较大根为 α ; 方程 $x^2 + 2000x - 2001 = 0$ 的较小根为 β , 则 $\alpha - \beta =$ _____.

4. 若两个方程 $x^2 + ax + b = 0$ 和 $x^2 + bx + a = 0$ 只有一个公共根, 则().

- A. $a = b$ B. $a + b = 0$ C. $a + b = 1$ D. $a + b = -1$

(第十六届江苏省竞赛题)

5. 已知 $\frac{1}{a} - |a| = 1$, 则 $\frac{1}{a} + |a|$ 的值为().

- A. $\pm\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$ 或 1

(2001年重庆市中考题)

6. 方程 $(x+1)|x+1| - x|x| + 1 = 0$ 的实根的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 解下列关于 x 的方程:

(1) $(m-1)x^2 + (2m-1)x + m - 3 = 0$;

(2) $x^2 - |x| - 1 = 0$; (3) $|x^2 + 4x - 5| = 6 - 2x$.

8. 已知 a 是方程 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ 的根, 求 $\frac{a^3 - 1}{a^5 + a^4 - a^3 - a^2}$ 的值.

9. 阅读材料, 解答问题:

为解方程 $(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 4 = 0$, 我们可以将 $x^2 - 1$ 视为一个整体, 然后使 $x^2 - 1 = y$, 则 $(x^2 - 1)^2 = y^2$, 原方程化为 $y^2 - 5y + 4 = 0$

①, 解得 $y_1 = 1, y_2 = 4$, 当 $y = 1$ 时, $x^2 - 1 = 1$, 解得 $x = \pm\sqrt{2}$; 当 $y = 4$ 时, $x^2 - 1 = 4$, 解得 $x = \pm\sqrt{5}$, 故原方程的解为 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{5}, x_4 = -\sqrt{5}$.

解答问题:

(1) 填空: 在由原方程得到方程①的过程中, 利用_____法达到了降次的目的, 体现了_____的数学思想.

(2) 解方程 $x^4 - x^2 - 6 = 0$. (2001年大连市中考题)



对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 而言;

(1) 若 $a + b + c = 0$, 则方程必有一根为 1;

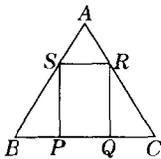
(2) 若 $a - b + c = 0$, 则方程必有一根为 -1, 反之亦然.

能力拓展

10. 若 $x^2 - 5x + 1 = 0$, 则 $2x^2 - 9x + 3 + \frac{5}{x^2 + 1} =$ _____.
11. 已知 m, n 是有理数, 方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有一个根是 $\sqrt{5} - 2$, 则 $m + n$ 的值为 _____.
12. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$, 那么 $\frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 1 =$ _____.
(“希望杯”邀请赛试题)
13. 对于方程 $x^2 - 2|x| + 2 = m$, 如果方程实根的个数恰为 3 个, 则 m 值等于().
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 2.5 (北京市竞赛题)
14. 自然数 n 满足 $(n^2 - 2n - 2)^{n^2 + 47} = (n^2 - 2n - 2)^{16n - 16}$, 这样的 n 的个数是().
A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
(第十五届江苏省竞赛题)
15. 已知 a, b 都是负实数, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} = 0$, 那么 $\frac{b}{a}$ 的值是().
A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
16. 已知 $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$, 求 $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ 的值.
17. 已知 m, n 是一元二次方程 $x^2 + 2001x + 7 = 0$ 的两个根, 求 $(m^2 + 2000m + 6)(n^2 + 2002n + 8)$ 的值.
18. 首项系数不相等的两个二次方程
 $(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0$ ①
 $(b-1)x^2 - (b^2+2)x + (b^2+2b) = 0$ ②
 (其中 a, b 为正整数) 有一个公共根, 求 $\frac{a^b + b^a}{a^{-b} + b^{-a}}$ 的值.

综合创新

19. 已知方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根 α, β 也是方程 $x^4 - px^2 + q = 0$ 的根, 求 p, q 的值.
(四川省选拔赛题)
20. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, $PQRS$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形, 且 $S_{\triangle ABC} = nS_{\text{矩形}PQRS}$, 其中 n 为不小于 3 的自然数. 求证: $\frac{BS}{AB}$ 为无理数.



(上海市竞赛题)

2 判别式——二次方程的根的检测器

思考时,必须要对思考的对象发生“兴趣”,不断地刺激它,并且要持之久而不懈怠.

——叔本华

知识纵横

为了检查产品质量是否合格,工厂里通常使用各种检验仪器,为了辨别钞票的真伪,银行里常常使用验钞机,类似地,在解一元二次方程有关问题时,最好能知道根的特性:如是否有实数根,有几个实数根,根的符号特点等.我们形象地说,判别式是一元二次方程根的“检测器”,在以下方面有着广泛的应用:

利用判别式,判定方程实根的个数、根的特性;

运用判别式,建立等式、不等式,求方程中参数或参数的取值范围;

通过判别式,证明与方程相关的代数问题;

借助判别式,运用一元二次方程必定有解的代数模型,解几何存在性问题、最值问题.

例题求解

【例1】 已知关于 x 的一元二次方程 $(1-2k)x^2 - 2\sqrt{k+1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,那么 k 的取值范围是_____.

(2001年广西中考题)

思路点拨 利用判别式建立关于 k 的不等式组,注意 $1-2k$ 、 $k+1$ 的隐含制约.

【例2】 已知三个关于 y 的方程: $y^2 - y + a = 0$, $(a-1)y^2 + 2a + 1 = 0$ 和 $(a-2)y^2 + 2a - 1 = 0$,若其中至少有两个方程有实根,则实数 a 的取值范围是().



链接

运用判别式解题,需要注意的是:

(1) 解含参数的一元二次方程,必须注意二次项系数不为0的隐含制约;

(2) 在解涉及多个一元二次方程的问题时,需在整体方法、降次消元等方法思想的引导下,综合运用方程、不等式的知识.

A. $a \leq 2$

B. $a \leq \frac{1}{4}$ 或 $1 \leq a \leq 2$

C. $a \geq 1$

D. $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$

(山东省竞赛题)

思路点拨 “至少有两个方程有实根”有多种情形,从分类讨论入手,解关于 a 的不等式组,综合判断选择.

【例 3】 已知关于 x 的方程 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$,

(1) 求证:无论 k 取任何实数值,方程总有实数根;

(2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a = 1$,另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根,求 $\triangle ABC$ 的周长.

(2001 年湖北省荆门市中考题)

思路点拨 对于(1)只需证明 $\Delta \geq 0$;对于(2)由于未指明底与腰,须分 $b = c$ 或 b, c 中有一个与 a 相等两种情况讨论,运用判别式、根的定义求出 b, c 的值.



涉及等腰三角形的考题,需要分类求解,这是命题设计的一个热点,但不一定每个这类题均有多解,还须结合三角形三边关系定理予以取舍.

【例 4】 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x + \frac{m^2 - 1}{x^2 + 2x - 2m} = 0$,其中 m 为实数,当 m 为何值时,方程恰有三个互不相等的实数根? 求出这三个实数根.

(2000 年山东省聊城市中考题)

思路点拨 解题的关键是把问题转化为两个一元二次方程来讨论,原方程恰有三个互不相等的实数根,则其中一个判别式等于零,另一个判别式大于零,设 $x^2 + 2x - 2m = y$.

运用根的判别式讨论方程根的个数为人所熟悉,而组合多个判别式讨论方程多个根(三个以上)是近年中考、竞赛依托判别式的创新题型,解这类问题常用到换元、分类讨论等思想方法.

围是().

A. $m < 3$

B. $m \leq 3$

C. $m < 3$ 且 $m \neq 2$

D. $m \leq 3$ 且 $m \neq 2$

7. 已知 m, n 为整数, 关于 x 的三个方程: $x^2 + (7 - m)x + 3 + n = 0$ 有两个不相等的实数根; $x^2 + (4 + m)x + n + 6 = 0$ 有两个相等的实数根; $x^2 - (m - 4)x + n + 1 = 0$ 没有实数根, 求 m, n 的值.

8. 已知关于 x 的方程 $kx^2 + (2k - 1)x + k - 1 = 0$ ① 只有整数根, 且关于 y 的一元二次方程 $(k - 1)y^2 - 3y + m = 0$ ② 有两个实数根 y_1 和 y_2 .

(1) 当 k 为整数时, 确定 k 的值;

(2) 在(1)的条件下, 若 $m > -2$, 用关于 m 的代数式表示 $y_1^2 + y_2^2$.

9. a, b 为实数, 关于 x 的方程 $|x^2 + ax + b| = 2$ 有三个不等的实数根.

(1) 求证: $a^2 - 4b - 8 = 0$;

(2) 若该方程的三个不等实根, 恰为一个三角形三内角的度数, 求证该三角形必有一个内角是 60° ;

(3) 若该方程的三个不等实根恰为一直角三角形的三条边, 求 a 和 b 的值.

(2001 年江苏省苏州市中考题)

能力拓展

10. 已知等腰三角形 ABC 的一边长 $a = 4$, 另两边的长 b, c 恰好是关于 x 的方程 $x^2 - (2k + 1)x + 4(k - \frac{1}{2}) = 0$ 的两个根, 则 $\triangle ABC$ 的周长是_____.

11. 当 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, 方程 $x^2 + 2(1 + a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$ 有实数根.

12. 若方程 $|x^2 - 5x| = a$ 有且只有相异二实根, 则 a 的取值范围是_____.

13. 如果关于 x 的方程 $mx^2 - 2(m + 2)x + m + 5 = 0$ 没有实数根, 那么关于 x 的方程 $(m - 5)x^2 - 2(m + 2)x + m = 0$ 的实根的个数().

A. 2

B. 1

C. 0

D. 不能确定

14. 若方程 $x^2 - (a - 3)x - 3a - b^2 = 0$ 有两个等根, 则方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根分别是().

A. 0, 3

B. 0, -3

C. 1, 4

D. 1, -4

15. 已知 $x^2 - ax + 3 - b = 0$ 有两个不相等的实数根, $x^2 + (6 - a)x +$

$6 - b = 0$ 有两个相等的实数根, $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ 没有实数根, 则 a, b 的取值范围是().

- A. $2 < a < 4, 2 < b < 5$ B. $1 < a < 4, 2 < b < 5$
C. $1 < a < 4, 1 < b < 5$ D. $2 < a < 4, 1 < b < 5$

16. 设 a, b, c 为互不相等的非零实数, 求证: 三个方程 $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0$ 不可能都有两个相等的实数根.
17. 是否存在整数 m , 使得关于 x 的方程 $mx^2 - 4x + 4 = 0$ 与 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的根都是整数? 如果有, 试求出 m 的值; 如果没有, 请说明理由.
18. 已知三个实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = 1$, 求证: a, b, c 中至少有一个大于 $\frac{3}{2}$.

综合创新

19. 已知关于 x 的方程 $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 3px^2 - 9px + 2p^2 = 0$ 有且仅有一个实根(相等两实根算作一个), 求 p 的值.
20. 已知 m, n 为整数, 方程 $x^2 + (n - 2)\sqrt{n - 1}x + m + 18 = 0$ 有两个不相等的实数根, 方程 $x^2 - (n - 6)\sqrt{n - 1}x + m - 37 = 0$ 有两个相等的实数根, 求 n 的最小值, 并说明理由.

(2000 年我爱数学初中生夏令营竞赛题)

3 充满活力的韦达定理

要记住：历史上所有伟大的成就，都是由于战胜了看来是不可能的事情而取得的。

——卓别林

知识纵横

一元二次方程的根与系数的关系，通常也称为韦达定理，这是因为该定理是由 16 世纪法国最杰出的数学家韦达发现的。

韦达定理简单的形式中包含了丰富的数学内容，应用广泛，主要体现在：

运用韦达定理，求方程中参数的值；

运用韦达定理，求代数式的值；

利用韦达定理并结合根的判别式，讨论根的符号特征；

利用韦达定理逆定理，构造一元二次方程辅助解题等。

韦达定理具有对称性，设而不求、整体代入是利用韦达定理解题的基本思路。

韦达定理，充满活力，它与代数、几何中许多知识可有机结合，生成丰富多彩的数学问题，而解这类问题常用到对称分析、构造等数学思想方法。

例题求解

【例 1】若 α, β 为 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两根，则 $\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha$ 的值为

(2000 年辽宁省中考题)

思路点拨 所求代数式为 α, β 的非对称式，通过组合 $(\alpha^2 + 2\alpha) + \alpha\beta$ ，转化为用基本对称式及根的定义来解决。



韦达 (1540 - 1603)，法国数学家，是第一个有意识地系统使用字母表示数的人，并对数学符号进行了很多改进。

设方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两根为 x_1, x_2 ,

(1) 若 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$ ，则 x_1, x_2 互为相反数；

(2) 若 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$ ，则 x_1, x_2 互为倒数；

(3) 若

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \end{cases}$$

则两根同为正；

(4) 若

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, \end{cases}$$

则两根同为负；

(5) 若 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ，则两根异号。



【例2】 如果 a, b 都是质数, 且 $a^2 - 13a + m = 0, b^2 - 13b + m = 0$, 那么 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值为().

- A. $\frac{123}{22}$ B. $\frac{125}{22}$ 或 2 C. $\frac{125}{22}$ D. $\frac{123}{22}$ 或 2

(2001年 TI 杯全国初中数学竞赛试题)

思路点拨 可将两个等式相减, 得到 a, b 的关系, 由于两个等式结构相同, 可视 a, b 为方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两实根, 这样就为根与系数关系的应用创造了条件.

【例3】 是否存在 a 的值, 使方程 $x^2 - (2a + 1)x + 2(4a - 7) = 0$ 的两个实数根都大于 3?

思路点拨 应注意到, 由 $x_1 > 3, x_2 > 3$ 可推出 $x_1 + x_2 > 6, x_1 x_2 > 9$, 但反过来, 由 $x_1 + x_2 > 6, x_1 x_2 > 9$ 却不能推出 $x_1 > 3, x_2 > 3$, 可把 $x_1 > 3, x_2 > 3$ 转化为 $x_1 - 3 > 0, x_2 - 3 > 0$, 结合判别式建立 a 的不等式组.

【例4】 设 m 是不小于 -1 的实数, 使得关于 x 的方程 $x^2 + 2 \cdot (m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 若 $x_1^2 + x_2^2 = 6$, 求 m 的值;

(2) 求 $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 的最大值.

(2000年全国初中数学竞赛试题)

思路点拨 解答本例是在一定约束条件下 ($\Delta \geq 0$) 进行的, 对于 (2), 先把式子用 m 的代数式表示, 再从配方法入手.

应用韦达定理求根的代数式的值, 一般是关于 x_1, x_2 的对称式, 这类问题可通过变形用 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 表示求解, 而非对称式的求值常用到以下技巧:

- (1) 恰当组合;
- (2) 根据根的定义降次;
- (3) 构造对称式.

应用韦达定理的前提条件是一元二次方程有两个实数根, 即应用韦达定理解题时, 须满足判别式 $\Delta \geq 0$ 这一条件, 转化是一种重要的数学思想方法, 但要注意转化前后问题的等价性.



【例5】 已知： $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 的两个实数根，第三边长为 5.

- (1) k 为何值时， $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形；
 (2) k 为何值时， $\triangle ABC$ 是等腰三角形，并求 $\triangle ABC$ 的周长.

(哈尔滨市中考题)

思路点拨 对于(1)，通过韦达定理、勾股定理建立 k 的方程；对于(2)，从分类讨论入手，又要用到判别式、根的定义.

在处理以线段的长为根的一元二次方程问题，往往通过韦达定理、几何性质将几何问题从“形”向“数”(方程)转化，既要注意通过根的判别式的检验，又要考虑几何量的非负性.

学力训练

基础夯实

1. 已知 x_1 和 x_2 为一元二次方程 $2x^2 - 2x + 3m - 1 = 0$ 的两个实根，并且 x_1 和 x_2 满足不等式 $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 - 4} < 1$ ，则实数 m 的取值范围是 _____.

(2001 年内蒙古中考题)

2. 已知一元二次方程 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ 的值为 _____；已知关于 x 的方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个实数根 x_1 和 x_2 ，且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2)$ ，则 $m =$ _____.

3. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2kx + \frac{1}{2}k^2 - 2 = 0$ 的两根，且 $x_1^2 - 2kx_1 + 2x_1 x_2 = 5$ ，则 $k =$ _____.

(2001 年苏州市中考题)

4. 已知方程 $(x-1)(x^2 + 8x - 3) = 0$ 的三个实数根为 x_1, x_2, x_3 ，则代数式 $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$ 的值为().

A. -1 B. 2 C. 5 D. -11

5. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边， a, b 是关于 x 的方程 $x^2 - 7x + c + 7 = 0$ 的两根，那么 AB 边上的中线长是().

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 5 D. 2

6. 方程 $x^2 + px + 1997 = 0$ 恰有两个正整数根 x_1, x_2 , 则 $\frac{p}{(x_1+1)(x_2+1)}$ 的值是().

- A. 1 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2k - 1 = 0$ ①,

(1) 求证: 对于任意实数 k , 方程①总有两个不相等的实数根;

(2) 如果 a 是关于 y 的方程 $y^2 - (x_1 + x_2 - 2k)y + (x_1 - k)(x_2 - k) = 0$ ②的根, 其中 x_1, x_2 为方程①的两个实数根, 求代数式

$(\frac{1}{a} - \frac{a}{a+1}) \div \frac{4}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a}$ 的值.

(2001年北京市海淀区中考题)

8. 已知方程 $a(2x+a) = x(1-x)$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 设 $S = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$,

(1) 当 $a = -2$ 时, 求 S 的值;

(2) 当 a 取什么整数时, S 的值为 1?

(3) 是否存在负数 a , 使 S^2 的值不小于 25? 若存在, 请求出 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

(2001年浙江省嘉兴市中考题)

能力拓展

9. 已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根均为正整数, 且 $p + q = 28$, 那么这个方程两根为_____.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两个实数根 x_1 和 x_2 , 则 $x_1^3 + 2x_2^2 + 2x_2$ 的值为_____; 若关于 x 的方程 $x^2 + (m+2)x + m+5 = 0$ 有两个正数根, 则 m 的取值范围是_____.

11. 若一元二次方程 $x^2 - x + 1 - m = 0$ 的两实数根 x_1, x_2 满足 $|x_1| + |x_2| \leq 5$, 则 m 的取值范围为_____.

12. 两个质数 a, b 恰好是整系数方程 $x^2 - 99x + m = 0$ 的两个根, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值是().

- A. 9413 B. $\frac{9413}{194}$ C. $\frac{9413}{99}$ D. $\frac{9413}{97}$

13. 如果方程 $x^2 + px + 1 = 0$ ($p > 0$) 的两根之差为 1, 那么 p 等于().

A. 2

B. 4

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{5}$

(北京市竞赛题)

14. 如果方程 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ 的三根可以作为一个三角形的三边之长, 那么实数 m 的取值范围是().

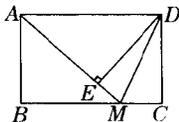
A. $0 \leq m \leq 1$

B. $m \geq \frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{4} < m \leq 1$

D. $\frac{3}{4} \leq m \leq 1$

15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, M 是 BC 上一动点, $DE \perp AM$, E 为垂足, $3AB = 2BC$, 并且 AB 、 BC 的长是方程 $x^2 - (k-2)x + 2k = 0$ 的两个根.



(1) 求 k 的值;

(2) 当点 M 离开点 B 多少距离时, $\triangle AED$ 的面积是 $\triangle DEM$ 的面积的 3 倍? 请说明理由.

16. 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - (2a+7)\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1 = 0$ 有实数根.

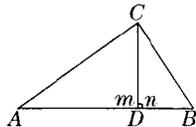
(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若原方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $\frac{x_1}{x_1-1} + \frac{x_2}{x_2-1} = \frac{3}{11}$, 求 a 的值.

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

综合创新

17. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 且 $AD = m$, $BD = n$, $AC^2 : BC^2 = 2 : 1$; 又关于 x 的方程 $\frac{1}{4}x^2 - 2(n-1)x + m^2 - 12 = 0$ 两实数根的差的平方小于 19^2 , 求整数 m, n 的值.



18. 设 a, b, c 为三个不同的实数, 使得方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 和 $x^2 + bx + c = 0$ 有一个相同的实数根, 并且使方程 $x^2 + x + a = 0$ 和 $x^2 + cx + b = 0$ 也有一个相同的实数根, 试求 $a + b + c$ 的值.

(2000 年俄罗斯数学竞赛题)

4 明快简捷——构造方程的妙用

伟大的热情能战胜一切，
因此，我们可以说：一个人只要
强烈地、坚持不懈地追求，他就
能达到目的。

知识纵横

有些数学问题虽然表面与一元二次方程无关，但是如果我们能构造一元二次方程，那么就能运用一元二次方程丰富的知识与方法辅助解题，构造一元二次方程的常用方法是：

1. 利用根的定义构造

当已知等式具有相同的结构，就可把某两个变元看成是关于某个字母的一元二次方程的两根。

2. 利用韦达定理逆定理构造

若问题中有形如 $x + y = a$, $xy = b$ 的关系式时，则 x, y 可看作方程 $z^2 - az + b = 0$ 的两实根。

3. 确定主元构造

对于含有多个变元的等式，可以将等式整理为关于某个字母的一元二次方程。

成功的构造是建立在敏锐的观察、恰当的变形、广泛的联想的基础之上的；成功的构造能收到明快简捷、出奇制胜的效果。

例题求解

【例1】 已知 x, y 是正整数，并且 $xy + x + y = 23$, $x^2y + xy^2 = 120$ ，
则 $x^2 + y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2001年全国初中数学联赛题)

思路点拨 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ，变形题设条件，可视 $x + y, xy$ 为某个一元二次方程两根，这样问题可从整体上获得简解。

 链接

许多数学问题表面上看难以求解，但如果我们创造性地运用已知条件，以已知条件为素材，以所求结论为方向，有效地运用数学知识，构造出一种辅助问题及其数学形式，就能使问题在新的形式下获得简解，这就是解題中的“构造”策略，构造图形、构造方程、构造函数、构造反例是常用构造方法。

【例 2】 若 $ab \neq 1$, 且有 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 及 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值是().

- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $-\frac{2001}{5}$ D. $-\frac{2001}{9}$

(2001 年全国初中数学联赛题)

思路点拨 第二个方程可变形为 $\frac{5}{b^2} + \frac{2001}{b} + 9 = 0$, 这样两个方程具有相同的结构, 从利用定义构造方程入手.

【例 3】 求满足方程 $y^4 + 2x^4 + 1 = 4x^2y$ 的所有整数对.

(江苏省竞赛题)

思路点拨 确定原方程中的 x^2 为主元, 将原方程整理成关于 x^2 的方程, 在方程有解的前提下, 运用判别式.



构造一元二次方程, 在问题有解的前提下, 运用判别式 $\Delta \geq 0$ 建立含参数的不等式, 缩小范围逼近求解, 在求字母的取值范围, 求最值等方面有广泛的应用.

【例 4】 已知实数 a, b 满足 $a^2 + ab + b^2 = 1$, 且 $t = ab - a^2 - b^2$, 求 t 的取值范围.

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

思路点拨 由两个等式可求出 $a + b, ab$ 的表达式, 这样既可以从配方法入手, 又能从构造方程的角度去探索, 有较大的思维空间.

【例 5】 设 x, y, z 都是实数, $x + y + z = 5, x^2 + y^2 + z^2 = 9$, 试判别 $1 \leq z \leq \frac{7}{3}$ 是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 要说明理由.

思路点拨 从条件中可暂时将 z 看作常量, 求出 $x+y$ 、 xy 的值, 由根与系数关系可构造以 x 、 y 为根的一元二次方程, 因为 x 、 y 为实数, 所以有判别式 $\Delta \geq 0$, 从中可求出 z 的关系式.



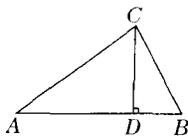
为了能成功地应用构造法, 解题者必须成为一个“建筑师”, 一方面应当记住手头的“建筑材料”, 即已知条件提供的信息; 另一方面, 也不要忘记我们要制造的“建筑”, 即符合命题要求的事物.

学 力 训 练

基础夯实

1. 若方程 $m^2x^2 - (2m-3)x + 1 = 0$ 的两个实数根的倒数和是 s , 则 s 的取值范围是_____.

2. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 $AB = 5$, $CD \perp AB$, 已知 BC 、 AC 是一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + 4(m-1) = 0$ 的两个根, 则 m 的值是_____.



3. 已知 a 、 b 满足 $a^2 - 2a - 1 = 0$, $b^2 - 2b - 1 = 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$ _____.

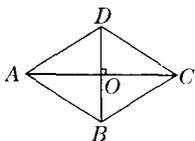
4. 关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 3 = 0$ 有实数根, 则 k 的非负整数值是 ().

- A. 0, 1, 2 B. 1, 2 C. 1, 2, 3 D. 0, 1, 2, 3

5. 设 a 、 b 为方程 $x^2 + 5x + 2 = 0$ 的两根, 则以 $\frac{1}{a^2}$ 、 $\frac{1}{b^2}$ 为根的一元二次方程为 ().

- A. $21x^2 - 4x + 1 = 0$ B. $4x^2 - 21x + 1 = 0$
C. $21x^2 - 4x - 1 = 0$ D. $4x^2 - 21x - 1 = 0$

6. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长是 5, 两条对角线交于 O 点, 且 AO 、 BO 的长分别是关于 x 的方程 $x^2 + (2m-1)x + m^2 + 3 = 0$ 的根, 则 m 的值为 ().



A. -3

B. 5

C. 5 或 -3

D. -5 或 3

7. 先阅读第(1)题的解答过程,然后再解答第(2)题.

(1) 已知实数 a, b 满足 $a^2 = 2 - 2a, b^2 = 2 - 2b$, 且 $a \neq b$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值.

解法 1 由已知得 $a^2 + 2a - 2 = 0, b^2 + 2b - 2 = 0$, 且 $a \neq b$.

$\therefore a, b$ 是方程 $x^2 + 2x - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根.

由根与系数的关系, 得 $a + b = -2, ab = -2$.

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = \frac{(-2)^2}{-2} - 2 = -4.$$

解法 2 由已知 $a^2 = 2 - 2a$,

①

$$b^2 = 2 - 2b.$$

②

① - ②, 得 $(a^2 - b^2) + 2(a - b) = 0$,

即 $(a - b)(a + b + 2) = 0$.

$\therefore a \neq b, \therefore a + b + 2 = 0$.

$\therefore a + b = -2$.

① \times ②, 得 $a^2 b^2 = (2 - 2a)(2 - 2b)$,

即 $(ab)^2 - 4ab - 12 = 0$.

$\therefore ab = 6$, 或 $ab = -2$.

显然 $\begin{cases} a + b = -2 \\ ab = 6 \end{cases}$ 无实数解,

$\therefore a + b = -2, ab = -2$.

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = \frac{(-2)^2}{-2} - 2 = -4.$$

(2) 已知 $p^2 - 2p - 5 = 0, 5q^2 + 2q - 1 = 0$, 其中 p, q 为实数, 求 $p^2 + \frac{1}{q^2}$ 的值.

8. 已知 x 和 y 是正整数, 并且满足条件 $xy + x + y = 71, x^2 y + xy^2 = 880$, 求 $x^2 + y^2$ 的值.

(第十四届江苏省竞赛题)

能力拓展

9. 已知 $3m^2 - 2m - 5 = 0, 5n^2 + 2n - 3 = 0$, 其中 m, n 为实数, 则

$$\left| m - \frac{1}{n} \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(第十五届江苏省竞赛题)

10. 已知 $\frac{1}{4}(b-c)^2 = (a-b)(c-a)$ 且 $a \neq 0$, 则 $\frac{b+c}{a} = \underline{\hspace{2cm}}.$

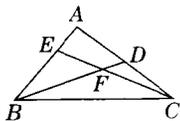
链接

本题是阅读理解型的问题, 通过阅读(1)的解答过程, 进行分析、归纳、类比, 然后运用类比方法解决(2)题, 但不能简单地机械模仿, 需具有一定的创造性思维和归纳推理能力.

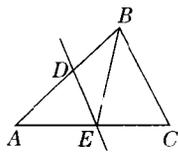
11. 已知 $5x^2 + 2y^2 + 2xy - 14x - 10y + 17 = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. $\triangle ABC$ 的一边长为 5, 另两边长恰是方程 $2x^2 - 12x + m = 0$ 的两根, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 已知 a, b, c 均为实数, 且 $a + b + c = 0, abc = 2$, 求 $|a| + |b| + |c|$ 的最小值.
14. 设实数 a, b, c 满足 $\begin{cases} a^2 - bc - 8a + 7 = 0 \\ b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0, \end{cases}$ 求 a 的取值范围.

综合创新

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于 D , E 是 AB 上一点, $BE = 2AE$, CE 交 BD 于 F .
- (1) 求证: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$;
- (2) 当 $\angle A = 90^\circ, \frac{CF}{EF} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 且 b, c 是方程 $x^2 - px + q^2 = 0$ 的两根时, 求 $\frac{p}{q}$ 的值.



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 和平行于 BC 的直线 DE , 且 $\triangle BDE$ 的面积等于定值 k^2 , 那么当 k^2 与 $S_{\triangle ABC}$ 之间满足什么关系时, 存在直线 DE , 有几条?

5 一元二次方程的整数解

我的人生哲学是工作,我要揭示大自然的奥秘,并以此为人类造福,我们在世的短暂一生中,我不知道还有什么比这种服务更好的了.

——爱迪生

知识纵横

在数学课外活动中,在各类数学竞赛中,一元二次方程的整数解问题一直是个热点,它将古老的整数理论与传统的一元二次方程知识相结合,涉及面广,解法灵活,综合性强,备受关注,解含参数的一元二次方程的整数解问题的基本策略有:

从求根入手,求出根的有理表达式,利用整除求解;

从判别式入手,运用判别式求出参数或解的取值范围,或引入参数(设 $\Delta = k^2$),通过穷举,逼近求解;

从韦达定理入手,从根与系数的关系式中消去参数,得到关于两根的不定方程,借助因数分解、因式分解求解;

从变更主元入手,当方程中参数次数较低时,可考虑以参数为主元求解.

例题求解

【例1】 若关于 x 的方程 $(6-k)(9-k)x^2 - (117-15k)x + 54 = 0$ 的解都是整数,则符合条件的整数 k 的值有_____个.

思路点拨 用因式分解法可得到根的简单表达式,因方程的类型未指明,故须按一次方程、二次方程两种情形讨论,这样确定 k 的值才能全面而准确.



一元二次方程的整数根问题,既涉及方程的解法、判别式、韦达定理等与方程相关的知识,又与整除、奇数、偶数、质数、合数等整数知识密切相关.

系数含参数的方程问题,在没有指明是二次方程时,要注意有可能是一次方程,根据问题的题设条件,看是否要分类讨论.

【例 2】 已知 a, b 为质数且是方程 $x^2 - 13x + c = 0$ 的根, 那么 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值是().

- A. $\frac{127}{22}$ B. $\frac{125}{22}$ C. $\frac{123}{22}$ D. $\frac{121}{22}$

思路点拨 由韦达定理得 a, b 的关系式, 结合整数性质求出 a, b, c 的值.

【例 3】 a 是大于零的实数, 已知存在惟一的实数 k , 使得关于 x 的二次方程 $x^2 + (k^2 + ak)x + 1999 + k^2 + ak = 0$ 的两个根均为质数, 求 a 的值.

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 因解的形式复杂, 故从韦达定理入手, 设方程的两个质数根为 p, q , 则 $p + q = -(k^2 + ak), pq = 1999 + k^2 + ak$, 消去 a, k 得含 p, q 的关系式, 运用整数知识分析, 求出 p, q 值, 再进而求出 a 的值.

【例 4】 是否存在这样的有理数 x , 使代数式 $9x^2 + 23x - 2$ 的值恰为两个连续正偶数的乘积? 若存在, 求出 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

(山东省竞赛题改编题)

思路点拨 假设存在符合要求的有理数 x , 使得 $9x^2 + 23x - 2 = k(k+2)$ (k 为正偶数), 这样问题转化为“求方程 $9x^2 + 23x - (k^2 + 2k + 2) = 0$ 的有理根”, 由于 x 是有理数, 所以判别式为完全平方数, 可设 $\Delta = 23^2 + 4 \times 9(k^2 + 2k + 2) = p^2$ ($p \geq 0$), 从这里寻找解题的突破口.



对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 而言, 方程的根为整数必为有理数, 而 $\Delta = b^2 - 4ac$ 为完全平方数是方程的根为有理数的充要条件.



匈牙利女数学家路莎·彼得曾说：“作为数学家的思维来说，他们往往不对问题进行正面进攻，而是不断地将它变形，直至把它转化为已经能够解决的问题。”促使数与形、主元与辅元、常量与变量的相互转化，是数学解题中的重要技巧。

【例5】 若关于 x 的方程 $ax^2 + 2(a-3)x + (a-13) = 0$ 至少有一个整数根，求整数 a 的值。

思路点拨 因根的表示式复杂，从韦达定理得出的 a 的两个关系式中消去 a 也较困难，又因 a 的次数低于 x 的次数，故可将原方程变形为关于 a 的一次方程。

学力训练

基础夯实

1. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2 + 2x - a - 1 = 0$ 的根都是整数，那么符合条件的整数 a 有_____个。
2. 已知方程 $x^2 - 1999x + m = 0$ 有两个质数解，则 $m =$ _____。
3. 设 p, q 均为正整数，一元二次方程 $(k-1)x^2 - px + k = 0$ 有两个正整数根，则 $k^{kp}(p^p + k^k)$ 的值为_____。
4. 设 a 为整数，若存在整数 b 和 c ，使 $(x+a)(x-15) - 25 = (x+b)(x+c)$ ，则 a 可取的值为_____。
(上海市“鹏欣杯”竞赛题)
5. 设 m 为整数，且 $4 < m < 40$ ，方程 $x^2 - 2(2m-3)x + 4m^2 - 14m + 8 = 0$ 有两个整数根，求 m 的值及方程的根。
(山西省竞赛题)
6. 已知方程 $a^2x^2 - (3a^2 - 8a)x + 2a^2 - 13a + 15 = 0 (a \neq 0)$ 至少有一个整数根，求 a 的值。
7. 求使关于 x 的方程 $kx^2 + (k+1)x + k - 1 = 0$ 的根都是整数的 k 值。
(江苏省竞赛题)

能力拓展

8. 当 n 为正整数时，关于 x 的方程 $2x^2 - 8nx + 10x - n^2 + 35n - 76$

$=0$ 的两根均为质数,试解此方程.

9. 设关于 x 的二次方程 $(k^2 - 6k + 8)x^2 + (2k^2 - 6k - 4)x + k^2 = 4$ 的两根都是整数,试求满足条件的所有实数 k 的值.

(2000 年全国初中数学联赛题)

10. 试求所有这样的正整数 a ,使得方程 $ax^2 + 2(2a - 1)x + 4(a - 3) = 0$ 至少有一个整数解.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

11. 已知 n 为正整数,且 $n^2 - 71$ 能被 $7n + 55$ 整除,试求 n 的值.

(五城市联赛题)

综合创新

12. 已知方程 $x^2 + bx + c = 0$ 及 $x^2 + cx + b = 0$ 分别各有两个整数根 x_1, x_2 及 x'_1, x'_2 ,且 $x_1 x_2 > 0, x'_1 x'_2 > 0$.

(1) 求证: $x_1 < 0, x_2 < 0, x'_1 < 0, x'_2 < 0$;

(2) 求证: $b - 1 \leq c \leq b + 1$;

(3) 求 b, c 所有可能的值.

13. 如果直角三角形的两条直角边都是整数,且是方程 $mx^2 - 2x - m + 1 = 0$ 的根 (m 为整数),这样的直角三角形是否存在? 若存在,求出满足条件的所有三角形的三边长;若不存在,请说明理由.

6 转化——可化为一元二次方程的方程

“晨”为日之始，新鲜的朝
气，清明的曙光，都随“晨”的时
光以俱至，一生最好是少年，一
年最好是春天，一朝最好是清
晨。

——李大钊：《时》

知识纵横

数学(家)特有的思维方式是什么？若从量的方面考虑，通常运用符号进行形式化抽象，在一个概念和公理体系内实施推理计算，若从“转化”这个侧面又该如何回答？匈牙利女数学家路莎·彼得在《无穷的玩艺》一书中写道：“作为数学家的思维来说是很典型的，他们往往不对问题进行正面攻击，而是不断地将它变形，直至把它转化为已经能够解决的问题。”

转化与化归是解分式方程和高次方程(次数高于二次的整式方程)的基本思想. 解分式方程, 通过去分母和换元; 解高次方程, 利用因式分解和换元, 转化为一元二次方程或一元一次方程去求解.

例题求解

【例1】若 $2x^2 - 5x + \frac{8}{2x^2 - 5x + 1} - 5 = 0$, 则 $2x^2 - 5x - 1$ 的值为

(2001年北京市东城区中考题)

思路点拨 视 $2x^2 - 5x$ 为整体, 令 $2x^2 - 5x = y$, 用换元法求出 y 即可.

【例2】若分式 $\frac{1}{x^2 - 2x + m}$ 不论 x 取何实数总有意义, 则 m 的取值范围是().

链接

转化与化归是一种重要的数学思想, 在数学学习与解数学题中, 我们常常用到下列不同途径的转化: 实际问题转化为数学问题, 数与形的转化, 常量与变量的转化, 一般与特殊的转化等.

玻利亚在“怎样解题”表中的许多问句都是以转换问题为目的的, 如:

你知道与它有关的问题么?

你能想出一个相同或相似的熟悉问题吗?

你能改述问题么?

你能不能用不同的方法重新叙述它?

A. $m \geq 1$

B. $m > 1$

C. $m \leq 1$

D. $m < 1$

(2001年辽宁省中考题)

思路点拨 分式 $\frac{1}{x^2-2x+m}$ 不论 x 取何实数总有意义, 即不论 x 取何实数 $x^2-2x+m \neq 0$, 再把问题转化为一元二次方程问题求解.

【例3】 解下列方程:

$$(1) \frac{x^2+3x}{2x^2+2x-8} + \frac{x^2+x-4}{3x^2+9x} = \frac{11}{12};$$

(河南省竞赛题)

$$(2) (1999-x)^3 + (x-1998)^3 = 1;$$

(山东省竞赛模拟题)

$$(3) \frac{13x-x^2}{x+1} \left(x + \frac{13-x}{x+1}\right) = 42.$$

("祖冲之杯"邀请赛试题)

思路点拨 按照常规思路求解繁难, 应恰当转化, 对于(1), 利用倒数关系换元; 对于(2)从 $(1999-x) + (x-1998) = 1$ 受到启示; 对于(3) 设 $y = \frac{13-x}{x+1}$, 则可导出 $x+y, xy$ 的结果.



换元是建立在观察基础上的, 换元不拘泥于一元代换, 可根据问题的特点, 进行多元代换.

分式方程转化为整式方程不一定是等价转化, 有可能产生增根, 分式方程只有一个解, 可能是转化后所得的整式方程只有一个解, 也可能是转化后的整式方程有两个解, 而其中一个为原方程的增根, 故分式方程的解的讨论, 要运用判别式、增根等知识全面分析.

【例4】 若关于 x 的方程 $\frac{2k}{x-1} - \frac{x}{x^2-x} = \frac{kx+1}{x}$ 只有一个解(相等的解也算作一个), 试求 k 的值与方程的解.

(第十五届江苏省竞赛题)

思路点拨 先将分式方程转化为整式方程, 把分式方程解的讨论转化为整式方程的解的讨论, "只有一个解"内涵丰富, 在全面分析的基础上求出 k 的值.



运用根的判别式延伸到分式方程、高次方程根的情况的探讨,是近年中考、竞赛中一类新题型,尽管这种探讨仍以一元二次方程的根为基础,但对转换能力、思维周密提出了较高要求.

【例5】 已知关于 x 的方程 $(x + \frac{a}{x})^2 - 5x - \frac{5a}{x} = -6$ 有两个根相等,求 a 的值.

思路点拨 通过换元可得到两个关于 x 的含参数 a 的一元二次方程,利用判别式求出 a 的值.

学力训练

基础夯实

- 若关于 x 的方程 $\frac{ax+1}{x-1} - 1 = 0$ 有增根,则 a 的值为_____ ;若关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-2} = -1$ 的解为正数,则 a 的取值范围是_____ .
- 解方程 $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} = \frac{1}{12}$ 得_____ .
(“三峡杯”竞赛题)
- 已知方程 $\sqrt{3x+2m} = \frac{1}{2}x - m$ 有一个根是 2,则 $m =$ _____ .
- 方程 $x^2 + 3x - \frac{3}{x^2 + 3x - 7} = 9$ 的全体实数根的积为().
A. 60 B. -60 C. 10 D. -10
- 解关于 x 的方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{k}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$ 不会产生增根,则 k 的值是().
A. 2 B. 1 C. 不为 2 或 -2 D. 无法确定
- 方程 $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$ 所有根的和是().
A. 3 B. -3 C. 4 D. -6 E. 以上都不对
- (1) 如表,方程 1、方程 2、方程 3、……,是按照一定规律排列的一列方程,解方程 1,并将它的解填在表中的空格处;
(2) 若方程 $\frac{a}{x} - \frac{1}{x-b} = 1 (a > b)$ 的解是 $x_1 = 6, x_2 = 10$,求 a, b 的

值. 该方程是不是(1)中所给的一列方程中的一个方程? 如果是, 它是第几个方程?

(3) 请写出这列方程中的第 n 个方程和它的解, 并验证所写出的解适合第 n 个方程.

序号	方 程	方程的解	
1	$\frac{6}{x} - \frac{1}{x-2} = 1$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
2	$\frac{8}{x} - \frac{1}{x-3} = 1$	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$
3	$\frac{10}{x} - \frac{1}{x-4} = 1$	$x_1 = 5$	$x_2 = 8$
...

(2000年山东省淄博市中考题)

8. 解下列方程:

(1) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1} = \frac{19}{6}$;

(2) $\frac{1}{x^2+11x-8} + \frac{1}{x^2+2x-8} + \frac{1}{x^2-13x-8} = 0$;

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$;

(4) $2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x + \frac{1}{x}) = 1$.

9. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x + \frac{m^2-1}{x^2+2x-2m} = 0$, 其中 m 为实数, 当 m 为何值时, 方程恰有三个互不相等的实数根? 求出这三个实数根.

(2001年山东省聊城市中考题)

能力拓展

10. 设 m 为正数且关于 x 的方程 $\sqrt{x^2-4} = x+m$ 有实数根, 则 m 的取值范围是_____.

11. 解方程 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{4}{24}$ 得

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

12. 方程 $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+8}{x+9} = \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+7}{x+8}$ 的解是_____.

(第十六届江苏省竞赛题)

13. 已知关于 x 的方程 $\frac{(a+1)(b+1)}{x+2} + \frac{(a-1)(b-1)}{x-2} = \frac{2ab}{x}$ 无解, 这

里实数 a, b 满足 $a \neq b, ab \neq 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值为_____.

14. 解下列方程:

(1) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$;

(2) $(x^2+3x-4)^2 + (2x^2-7x+6)^2 = (3x^2-4x+2)^2$;

(3) $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$;

(4) $\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{10}{3}$.

15. 关于 x 的方程 $x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x+2p}-p^2=0$, 其中 p 是实数

(1) 若方程没有实数根, 求 p 的范围;

(2) 若 $p > 0$, 当 p 为何值时, 方程有两个相等的实数根? 并求出这两个根.

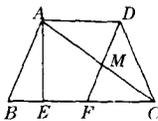
综合创新

16. 已知 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$, 求 $x + \frac{1}{x}$ 的值.

(重庆市竞赛题)

17. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD = AB$,

$$\frac{S_{\text{梯形}ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{13}{8}, \text{ 梯形的高 } AE = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{13}{40}.$$



(1) 求 $\angle B$ 的度数;

(2) 设点 M 是梯形对角线 AC 上一点, DM 的延长线与 BC 相交于点 F , 当 $S_{\triangle ADM} = \frac{125\sqrt{3}}{32}$ 时, 求作以 CF, DF 的长为根的一元二次方程.

(2001年哈尔滨市中考题)

7 化归——解方程组的基本思想

“难”也是如此，面对悬崖峭壁，一百年也看不出一条缝来，但用斧凿，能进一寸进一寸，能得一尺得一尺，不断积累，飞跃必来，突破随之。

——华罗庚

知识纵横

初中阶段已学过的方程组有：二元一次方程组、三元一次方程组、二元二次方程组(system of quadratic equation in two variable)。

尽管具体到每类方程组的解法不全相同，但纵有千变万化，而万变不离其宗：化归是解方程组的基本思想，降次与消元是化归的主要途径，因式分解、换元是降次的常用方法，代入法、加减法是消元的两种主要手段。

解一些特殊方程组(如未知数系数较大，未知数个数较多等)，需要在整体分析方程组特点基础上，灵活运用一些技巧与方法，常用的技巧与方法有迭加、迭乘、换元、配方、取倒等。

例题求解

【例1】 已知 a, b, c 是三角形三边长，若方程组

$$\begin{cases} x^2 - ax - y + b^2 + ac = 0 \\ ax - y + bc = 0 \end{cases} \text{ 只有一组解，则这个三角形一定是 } \underline{\hspace{2cm}} .$$

(河北省中考题)

思路点拨 代入消元，把方程组的解的讨论转化为一元二次方程的讨论，由建立的 a, b, c 关系式来探求 a, b, c 的关系。

链接

转化与化归是解方程(组)的基本思想，常见形式有：

分式方程整式化
无理方程有理化
高次方程低次化
多元方程一元化

通过恰当的转化，化归目的明确，复杂的方程(组)就会变为我们熟悉的、简单的方程(组)。

【例2】方程组 $\begin{cases} xz + yz = 23 \\ xy + yz = 63 \end{cases}$ 的正整数解的组数是().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 直接消元降次解三元二次方程组较困难,从分析常数项的特征入手.

【例3】解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} xy + x + y = -13 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144 \\ x^2 + 4x + 5y = 24 \end{cases}$$

(西安市竞赛题)

$$(3) \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-1} = 2 \\ x + y = 26 \end{cases}$$

(2000年浙江省绍兴竞赛题)

思路点拨 对于(1),先求出整体 $x+y, xy$ 的值,对于(2),视 $x^2+x, 3x+5y$ 为整体,可得到 $(x^2+x) + (3x+5y), (x^2+x)(3x+5y)$ 的值;对于(3)设 $\sqrt[3]{x+1} = a, \sqrt[3]{y-1} = b$,用换元法解.



有些方程组可转化为形如 $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ 特殊的二元对称方程组(也称和积型方程组),这类方程组可用代入法求解,还可视 x, y 为方程 $z^2 - az + b = 0$ 两根,直接求得结果.

【例4】已知: a, b, c 三数满足方程组 $\begin{cases} a+b=8 \\ ab-c^2+8\sqrt{2}c=48, \end{cases}$ 试求方程 $bx^2 + cx - a = 0$ 的根.

(2002年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 先构造以 a, b 为两根的一元二次方程,从判别式入手,突破 c 的值.

方程与方程组在一定的条件下可相互转化,借助配方法、利用非负数性质是促使转化的常用工具,一个含多元的方程,往往蕴含着方程组.



方程组解的性质、个数的探讨问题,往往转化为一元二次方程根的个数、性质的讨论,但这种转化不一定是等价的,注意隐含条件的制约,如本例中 $y^2 = 4x > 0$, 则 $x > 0$, 这就是一个隐含条件.

【例 5】 已知方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x + m \end{cases}$ 有两组实数解 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$ 且

$x_1 x_2 \neq 0$, 设 $n = -\frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2}$.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 试用关于 m 的代数式表示出 n ;

(3) m 是否存在这样的值,使 n 的值等于 -2 ? 若存在,求出这样的所有 m 的值;若不存在,请说明理由.

(山东省中考题)

思路点拨 代入消元,得到关于 x 的一元二次方程,综合运用根的判别式、韦达定理等知识求解,解题中注意隐含条件的制约,方能准确求出 m 的取值范围.

学 力 训 练

基础夯实

1. 一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解是 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$, 试写出符合要求的方程组_____ (只要填写一个即可).

(2000 年安徽省中考题)

2. 若方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x - y = 2 \end{cases}$ 有两组相同的实数解, 则 m 的取值是_____.

(2001 年杭州市中考题)

3. 实数 x, y, z 满足 $\begin{cases} x + 3y - 2xy + 2z^2 = 0 \\ x = 6 - 3y \end{cases}$, 则 x^{2y+z} 的值为_____.

4. 已知: x, y, z 是正整数, 并且满足 $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + y + z = \sqrt{x + y + z - 3 + 15} \end{cases}$, 那么, $x - y + z$ 的值等于_____.

(2001 年我爱数学初中生夏令营竞赛题)

5. 如果方程组 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ mx + y = 3 \end{cases}$ 只有一个实数解, 那么 m 的值是().

- A. 1 B. -1 C. 0 或 1 D. 1 或 -1

6. 若方程组 $\begin{cases} ax^2 + bx + 1 = 0 \\ bx^2 + x + a = 0 \\ x^2 + ax + b = 0 \end{cases}$ 有实数解, 则 $a + b =$ ().

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 无法确定

7. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3x + 3y \\ x^2 - xy + y^2 = 27 \end{cases}$

(2001 年南京市中考题)

(3) $\begin{cases} xy + yz + zx = 1 \\ yz + zt + ty = 1 \\ zt + tx + xz = 1 \\ tx + xy + yt = 1 \end{cases}$

(江苏省竞赛题)

8. 已知方程组 $\begin{cases} kx^2 - x - y + \frac{1}{2} = 0 \\ y = k(2x - 1) \end{cases}$ (x, y 为未知数) 有两组不同的实数

解 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}, \begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 如果 $y_1y_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$, 求实数 k 的值.

(2001 年泰州市中考题)

能力拓展

9. 方程组 $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 + x + y = 32 \end{cases}$ 的解是_____.

(2000 年武汉市中考题)

10. 已知实数 x_0, y_0 是方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = |x| + 1 \end{cases}$ 的解, 则 $x_0 + y_0 =$ _____.

11. 已知 $\frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{a_1} = \frac{a_1 + a_3 + a_4 + a_5}{a_2} = \frac{a_1 + a_2 + a_4 + a_5}{a_3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_5}{a_4} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5} = k$, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$\neq 0$, 则 k 的值为_____.

(2001 年太原市竞赛题)

12. 已知方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x^2 + y^2 = 23 \end{cases}$ 的两组解是 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) , 则 $x_1y_2 + x_2y_1$ 的值是_____.

13. 已知 $mn + p^2 + 4 = 0, m - n = 4$, 则 $m + n$ 的值是().

- A. 4 B. 2 C. -2 D. 0

(2000 年绍兴市竞赛题)

14. 方程组 $\begin{cases} x + yz = 2 \\ y + zx = 2 \\ z + xy = 2 \end{cases}$ 的解共有()组.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. ≥ 4

(第十二届“五羊杯”竞赛题)

15. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} - \sqrt{x + y - 3} = \sqrt{3} \\ 2x + y + \frac{1}{y} = 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y + \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 10 \\ (x^2 + 9)(y^2 + 4) = 24xy \end{cases}$$

$$(3) x = (x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2$$

16. 已知方程组 $\begin{cases} x^2 - y + a + 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ 的两个解为 $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}, \begin{cases} x = x_2 \\ y = y_2 \end{cases}$ 且 x_1, x_2 是两个不等的正数.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若 $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 8a^2 - 6a - 11$, 求 a 的值.

综合创新

17. 已知 a, b 是方程 $t^2 - t - 1 = 0$ 的两个实根, 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 + x \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 + y \end{cases}$$

(“祖冲之杯”邀请赛题)

18. 已知 x, y 为实数, 且满足 $xy + x + y = 17, x^2y + xy^2 = 66$, 求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值.

(2000 年山东省竞赛题)

8 由常量数学到变量数学

他以几乎神一般的思维
力,事先说明了行星的运动和
图象、彗星的轨道和大海的潮
汐.

——牛顿墓志铭

知识纵横

数学漫长的发展历史大致历经四个时期:以自然数、分数体系形成的萌芽期;以代数符号体系形成的常量(constant)数学时期;以函数(function)概念产生的变量(variable)数学时期;以集合论为标志的现代数学时期.

函数是数学中最重要的概念之一,它是变量数学的标志,“函数”是从量的侧面去描述客观世界的运动变化、相互联系,从量的侧面反映了客观世界的动态和它们的相互制约性.

函数的基本知识有:与平面直角坐标系(rectangular coordinates in two dimensions)相关的概念、函数概念、函数的表示法、函数图象(graph)概念及画法.

点的坐标(coordinates)是解决函数问题的基础,函数解析式是解决函数问题的关键,所以,求点的坐标、探求函数解析式是研究函数的两大重要课题.

例题求解

【例1】 已知点 P 在直角坐标系中的坐标为 $(0,1)$, O 为坐标原点, $\angle QPO = 150^\circ$, 且 P 到 Q 的距离为 2, 则 Q 的坐标为_____.

(2001 年全国初中数学联赛题)

思路点拨 将点的坐标转化为求相应线段的长,注意 Q 点位置的不确定性.

链接

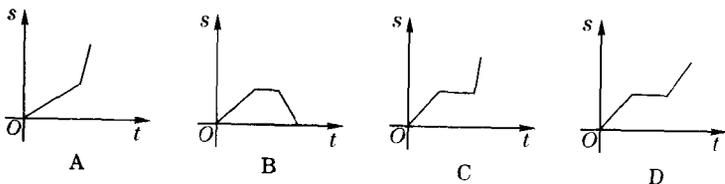
17 世纪的法国数学家笛卡尔发明了平面直角坐标系,17 世纪末函数概念确立,德国数学家莱布尼兹首先使用了这一概念.

点的坐标是数与形结合的桥梁,求点的坐标的基本方法有:

- (1) 利用几何计算求;
- (2) 通过解析式求;
- (3) 解由解析式联立的方程组求.

【例2】 李老师骑自行车上班,最初以某一速度匀速前进,中途由于自行车发生故障,停下修车耽误了几分钟,为了按时到校,李老师加快了速度,仍保持匀速前进,结果准时到校,则李老师离起点的路程 s (千米)与行进时间 t (小时)的函数图象的示意图是().

(2001年辽宁省中考题)



思路点拨 从分析路程 S 与关键词:“行进、耽误、加速”对应变化规律入手.

【例3】 南方 A 市欲将一批容易变质的水果运往 B 市销售,共有飞机、火车、汽车三种运输方式,现只可选择其中的一种,这三种运输方式的主要参考数据如下表所示:

运输工具	途中速度 (千米/时)	途中费用 (元/千米)	装卸费用 (元)	装卸时间 (小时)
飞机	200	16	1000	2
火车	100	4	2000	4
汽车	50	8	1000	2

若这批水果在运输(包括装卸)过程中的损耗为 200 元/小时,记 A 、 B 两市间的距离为 x 千米.

(1) 如果用 W_1 、 W_2 、 W_3 分别表示使用飞机、火车、汽车运输时的总支出费用(包括损耗),求出 W_1 、 W_2 、 W_3 与 x 间的函数关系式.

(2) 应采用哪种运输方式,才使运输时的总支出费用最小?

(2001年湖北省黄冈市中考题)

思路点拨 每种运输工具总支出费用 = 途中所需费用(含装卸费用) + 损耗费用;总支出费用随距离变化而变化,由 $W_1 - W_2 = 0$, $W_2 - W_3 = 0$,先确定自变量的特定值,通过讨论选择最佳运输方式.

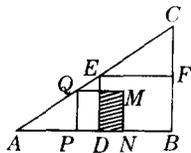


实际生活中量与量之间的关系可以形象地通过图象直观地表现出来,如心电图、股市行情走势图等,图象中包含着丰富的图象信息,要善于从图象的形状、位置、发展变化趋势等有关信息中获得启示.

建立函数关系式,实际上都是根据具体的实际问题和一些特殊的关系、数据而抽象、归纳建立函数的模型.

【例4】 如图, 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 4\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$, D 、 E 、 F 分别为 AB 、 AC 、 BC 边上的中点, 若 P 为 AB 边上的一个动点, $PQ \parallel BC$, 且交 AC 于点 Q , 以 PQ 为一边, 在点 A 的右侧作正方形 $PQMN$, 记 $PQMN$ 与矩形 $EDBF$ 的公共部分的面积为 y .

- (1) 当 $AP = 3\text{cm}$ 时, 求 y 的值;
- (2) 设 $AP = x\text{cm}$ 时, 求 y 与 x 的函数关系式;
- (3) 当 $y = 2\text{cm}^2$, 试确定点 P 的位置.



(2001年天津市中考题)

思路点拨 对于(2), 由于点 P 的位置不同, y 与 x 之间存在不同的函数关系, 故需分类讨论; 对于(3), 由相应函数解析式求 x 值.

链接

确定几何元素间的函数关系式, 首先是借助几何知识与方法把相应线段用自变量表示, 再代入相应的等量关系式, 需要注意的是:

- (1) 当图形运动导致图形之间位置发生变化, 需要分类讨论;
- (2) 确定自变量的几何意义, 常用到运动变化、考虑极端情形、特殊情形等思想方法.

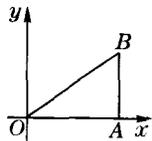
学力训练

基础夯实

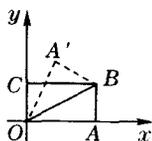
1. 如图, 在直角坐标系中, 已知点 $A(4, 0)$ 、 $B(4, 4)$, $\angle OAB = 90^\circ$, 有直角三角形与 $Rt\triangle ABO$ 全等且以 AB 为公共边, 请写出这些直角三角形未知顶点的坐标_____.

(2001年贵州省中考题)

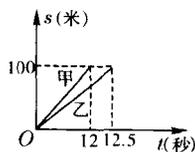
2. 如图, $OA = \sqrt{3}$, $AB = 1$ 的矩形 $OABC$ 在直角坐标系中, 将矩形 $OABC$ 沿 OB 对折, 点 A 落在点 A' , 则点 A' 的坐标是_____.



(第1题)



(第2题)



(第3题)

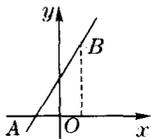
3. 假定甲、乙两人在一次赛跑中, 路程 s 与时间 t 的关系如图所示, 那么可以知道:

- (1) 这是一次_____米的赛跑;
- (2) 甲乙两人中先到达终点的是_____;
- (3) 乙在这次赛跑中的速度为_____米/秒.

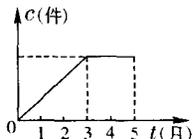
4. 如图,在平面直角坐标系中,直线 AB 与 x 轴的夹角为 60° ,且点 A 的坐标为 $(-2,0)$,点 B 在 x 轴上方,设 $AB = a$,那么点 B 的横坐标为 ().

- A. $2 - \frac{a}{2}$ B. $2 + \frac{a}{2}$ C. $-2 - \frac{a}{2}$ D. $-2 + \frac{a}{2}$

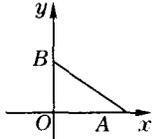
(2001 年南昌市中考题)



(第 4 题)



(第 5 题)



(第 7 题)

5. 幸福村村办工厂今年前五个月生产某种产品的总量件(c)与时间 t (月)有函数图象如图所示,则该厂对这种产品来说().

- A. 1 月至 3 月每月生产总量逐月增加,4,5 两月每月生产总量逐月减少
 B. 1 月至 3 月每月生产总量逐月增加,4,5 两月生产总量与 3 月持平
 C. 1 月至 3 月每月生产总量逐月增加,4,5 两月均停止生产
 D. 1 月至 3 月每月生产总量不变,4,5 两月均停止生产

6. 若函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x + m}$ 的自变量 x 的取值范围为一切实数,则 m 的取值范围是().

- A. $m < 1$ B. $m = 1$ C. $m > 1$ D. $m \leq 1$

7. 如图,在直角坐标系中,已知点 $A(4,0)$ 、点 $B(0,3)$,若有一个直角三角形与 $Rt\triangle ABO$ 全等,且它们有一条公共边,请写出这个直角三角形未知顶点的坐标(不必写出计算过程).

(2000 年常州市中考题)

8. 某校初三(1)班准备外出进行野外考察活动,需要租用一辆大客车一天,现有甲、乙两辆客车的租用方案:甲车每天租金 180 元,另按实际行驶路程每千米加收 2 元;乙车每天租金 140 元,另外实际行驶路程每千米加收 2.5 元.

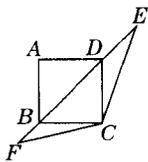
(1) 分别写出租用甲车、乙车所需费用 $y_{甲}$ 、 $y_{乙}$ (单位:元)与行驶路程 x (单位:千米)的函数关系式;

(2) 试就不同的行驶路程讨论哪一辆车费租用较低.

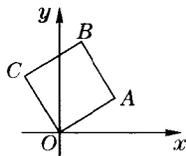
能力拓展

9. 如图,正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 所在的直线上有点 E 、 F ,且 $\angle E + \angle F = 45^\circ$, $ED = 2$,设 $BD = x$, $BF = y$,则 y 关于 x 的函数关系式

是_____.



(第9题)



(第10题)

10. 如图,已知边长为1的正方形 $OABC$ 在直角坐标系中, A 、 B 两点在第一象限内, OA 与 x 轴的夹角为 30° ,那么点 B 的坐标是_____.
11. 在某地区有互相垂直的两条交通主干线,以这两条主干线为轴建立直角坐标系,长度单位为 100km ,地震监测部门预报该地区将有一次地震发生,震中位置为 $(-1, 2)$,影响范围的半径为 300km ,则下列主干线沿线的6个城市在地震影响范围的有_____个.

主干线沿线的6个城市为:

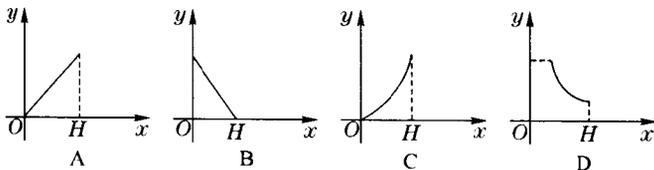
$A(0, -1), B(0, 2.5), C(1.24, 0), D(-0.5, 0), E(1.2, 0), F(-3.22, 0)$ 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236$

(2001年浙江省宁波市中考题)

12. 在直角坐标系中,已知 $A(1, 1)$,在 x 轴上确定点 P ,使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形,则符合条件的点 P 共有().
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

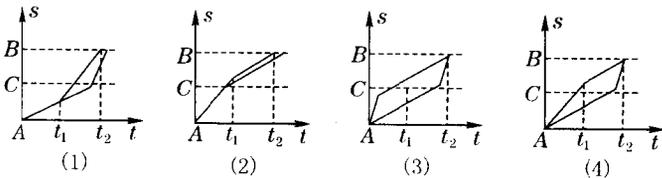
(2001年湖北赛区选拔赛题)

13. 向高为 H 的圆柱形水杯中注水,已知水杯底面半径为2,那么注水量 y 与水深 x 的函数关系的图象是().



(2001年山东省临沂市中考题)

14. 甲、乙二人同时从 A 地出发,沿同一条道路去 B 地,途中都使用两种不同的速度 V_1 与 V_2 ($V_1 < V_2$),甲用一半的路程使用速度 V_1 、另一半的路程使用速度 V_2 ;关于甲乙二人从 A 地到达 B 地的路程与时间的函数图象及关系,有图中4个不同的图示分析.其中横轴 t 表示时间,纵轴 s 表示路程,其中正确的图示分析为().



- A. 图(1) B. 图(1)或图(2) C. 图(3) D. 图(4)

(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛试题)

15. 我省是水资源比较贫乏的省份之一, 为了加强公民的节水和用水意识, 合理利用水资源, 各地采用价格调控等手段达到节约用水的目的. 某市规定如下用水收费标准: 每户每月的用水不超过6立方米时, 水费按每立方米 a 元收费; 超过6立方米时, 不超过的部分每立方米仍按 a 元收费, 超过的部分每立方米按 c 元收费.

该市某户今年3、4月份的用水量和水费如下表所示:

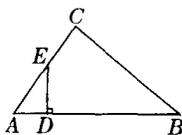
设某户每月用水量为 x (立方米), 应交水费为 y (元).

月份	用水量(m^3)	水费(元)
3	5	7.5
4	9	27

(1) 求 a 、 c 的值, 并写出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 若该户5月份的用水量为8立方米, 求该户5月份的水费是多少元?

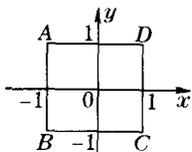
16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 点 D 是 AB 上任意一点 (A 、 B 两点除外), 过 D 作 AB 垂线与 $\triangle ABC$ 的直角边相交于 E , 设 $AD = x$, $\triangle ADE$ 的面积为 y , 当点 D 在 AB 上移动时, 求 y 与 x 之间的函数关系式.



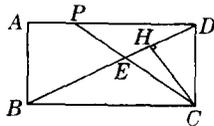
综合创新

17. 正方形 $ABCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图, 在平面内找点 P , 使 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDA$ 同时为等腰三角形, 这样的点 P 有几个? 作出这些点, 并写出它们的坐标 (不必写出解答过程).

(2001年江苏省徐州市中考题)



(第17题)



(第18题)

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $CH \perp BD$ 于 H , P 为 AD 上的一个动点 (点 P 与点 A 、 D 不重合), CP 与 BD 交于点 E , 若 $CH = \frac{60}{13}$, $DH : CD = 5 : 13$, 设 $AP = x$, 四边形 $ABEP$ 的面积为 y .

(1) 求 BD 的长;

(2) 求 y 与 x 的函数关系, 并写出自变量 x 的取值范围;

(3) 当 $S_{ABEP} = 5S_{\triangle PED}$ 时, 连结 PB , 判断 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PDC$ 是否相似, 若相似, 求出相似比; 若不相似, 请说明理由.

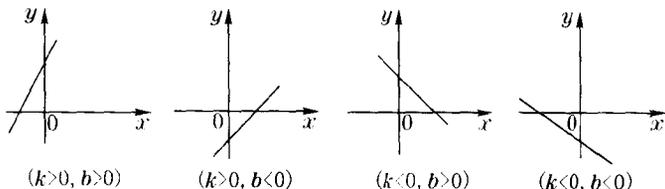
9 坐标平面上的直线

在现代社会中,因为科学技术的进展,和社会组织的日趋复杂,数学便成为整体教育的一个重要组成部分.

——陈省身“对中国数学的展望”

知识纵横

一般地,若 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$), 则 y 叫做 x 的一次函数 (linear function), 它的图象是一条直线, 函数解析式 $y = kx + b$ 中的系数符号, 决定图象的大致位置及单调性 (y 随 x 的变化情况). 如图所示:



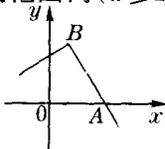
一次函数、二元一次方程、直线有着深刻的联系, 任意一个一次函数 $y = kx + b$ 都可看作是关于 x, y 的一个二元一次方程 $kx - y + b = 0$; 任意一个关于 x, y 的二元一次方程 $ax + by + c = 0$, 可化为形如 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ($b \neq 0$) 的函数形式. 坐标平面上的直线可以表示一次函数与二元一次方程, 而利用方程和函数的思想可以研究直线位置关系, 求坐标平面上的直线交点坐标转化为解由函数解析式联立的方程组.

例题求解

【例1】 函数 $y = 3 - |x - 2|$ 的图象如图所示, 则点 A 与 B 的坐标分别是 A _____, B _____.

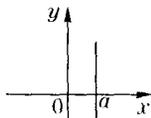
(第十五届江苏省竞赛题)

思路点拨 函数 $y = 3 - |x - 2|$ 在自然变量 x 不同范围内 ($x \geq 2$, $x < 2$) 对应不同解析式, 求 A, B 坐标转化为求特殊点坐标或求两直线交点坐标.

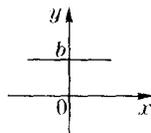


链接

需要注意的是, 不是平面内每一条直线都是一次函数的图象, 如图甲, 当直线垂直 x 轴时, 它不是任何函数的图象, 只说是 $x = a$ 的图象; 如图乙, 当直线垂直 y 轴时, 它是常量函数 $y = b$.



图甲



图乙

【例2】 设直线 $nx + (n+1)y = \sqrt{2}$ (n 为自然数) 与两坐标轴围成的三角形面积为 S_n ($n = 1, 2, \dots, 2000$), 则 $S_1 + S_2 + \dots + S_{2000}$ 的值为 ().

- A. 1 B. $\frac{1999}{2000}$ C. $\frac{2000}{2001}$ D. $\frac{2001}{2002}$

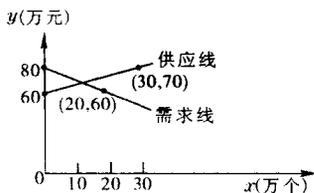
(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛题)

思路点拨 求出直线与 x 轴、 y 轴交点坐标, 从一般情形入手, 把 S_n 用含 n 的代数式表示.

【例3】 随着教学手段不断更新, 要求计算器进入课堂, 某电子厂家经过市场调查, 发现某种计算器的供应量 x_1 (万个) 与价格 y_1 (万元) 之间的关系如图中供应线所示, 而需求量 x_2 (万个) 与价格 y_2 (万元) 之间的关系如图中需求线所示, 如果你是这个电子厂厂长, 应计划生产这种计算器多少个, 每个售价是多少元, 才能使市场达到供需平衡?

(2001年湖北省荆门市中考题)

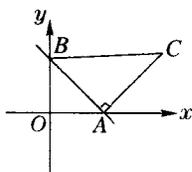
思路点拨 由图象获取信息, 求出解析式, 再运用解析式解决其它问题.



【例4】 如图, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰直角 $\triangle ABC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 如果在第二象限内有一点 $P(a, \frac{1}{2})$, 且 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等, 求 a 的值.

(2001年天津赛区试题)

思路点拨 利用 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC}$ 建立含 a 的方程, 解题的关键是把 $S_{\triangle ABP}$ 表示成有边落在坐标轴上三角形面积和、差.

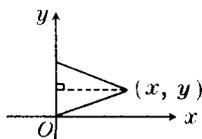
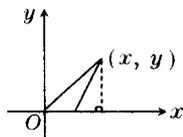


链接

当自变量受限制时, 一次函数图象可能是射线、线段、折线或点, 一次函数当自变量取值受限制时, 存在最大值与最小时, 根据图象求最值直观明了.

当一次函数图象与两坐标轴有交点时, 就与直角三角形联系在一起, 求两交点坐标并能发掘隐含条件是解相关综合题的基础.

解函数图象与面积结合的问题, 关键是把相关三角形用边落在坐标轴的其它三角形面积来表示, 这样面积与坐标就建立联系.



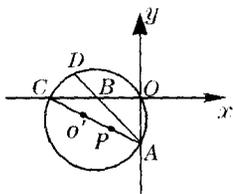
【例5】 如图,在直角坐标系内,点 B 、 C 在 x 轴的负半轴上,点 A 在 y 轴的负半轴上,以 AC 为直径的圆与 AB 的延长线交于点 D , $\widehat{CD} = \widehat{AO}$, 如果 $AB = 10$, $AO > BO$, 且 AO 、 BO 是 x 的二次方程 $x^2 + kx + 48 = 0$ 的两个根.

(1) 求点 D 的坐标;

(2) 若点 P 在直线 AC 上, 且 $AP = \frac{1}{4}AC$, 判断点 $(-2, -10)$ 是否在过 D 、 P 两点的直线上, 并说明理由.

(河南省中考题)

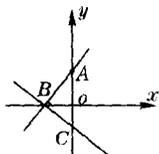
思路点拨 对于(1), 求 D 的坐标转化为对应线段长; 对于(2), 需求出过 D 、 P 两点直线的解析式, 解题的关键是充分运用一元二次方程知识、圆的性质, 发掘隐含条件, 如求出 AO 、 BO 、 $AD = OC$ 等.



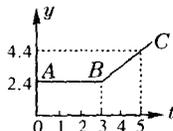
学力训练

基础夯实

- 若一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 无实数根, 则一次函数 $y = (m + 1)x + m - 1$ 的图象不经过第___象限; 若一次函数 $y = (m - 3)x + m + 1$ 的图象经过第一、二、四象限, 则 m 的取值范围是_____.
- 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点, 直线 BC 与直线 AB 垂直, 垂足为 B , 则直线 BC 所对应的函数解析式为_____.



(第2题)

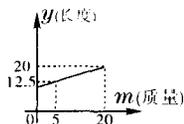


(第3题)

- 图中的折线 ABC 为甲地向乙地打长途电话所需付的电话费 y (元) 与通话时间 t (分钟) 之间的函数关系的图象, 当 $t \geq 3$ 时, 该函数图

象的解析式为_____，从图象可知，通话 2 分钟需付电话费_____元；通话 7 分钟需付电话费_____元。

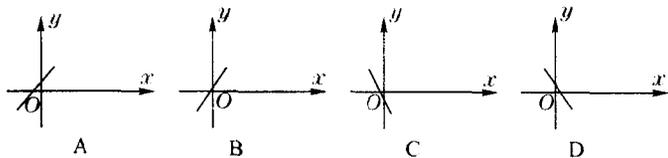
4. 弹簧的长度与所挂物体的质量的关系为一次函数，如图所示，由图可知不挂物体时的弹簧长度为()。



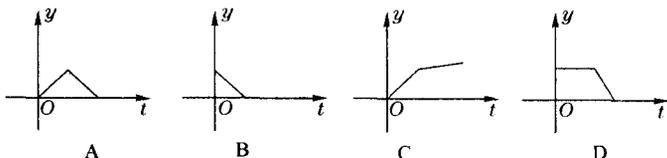
- A. 7cm B. 8cm C. 9cm D. 10cm

(2001 年武汉市中考题)

5. 下列图象中，不可能是关于 x 的一次函数 $y = px - (p - 3)$ 的图象是()。

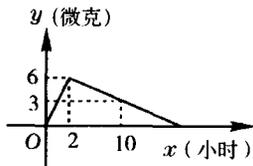


6. 某产品的生产流水线每小时可生产 100 件产品，生产前没有产品积压，生产 3 小时后安排工人装箱，若每小时装产品 150 件，未装箱的产品数量(y)是时间(t)的函数，那么这个函数的大致图象只能是()。

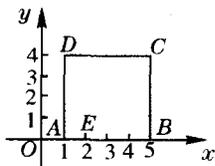


7. 某医药研究所开发了一种新药，在试验药效时发现，如果成人按规定剂量服用，那么服药后 2 小时血液中含药量最高，达每毫升 6 微克(1 微克 = 10^{-3} 毫克)，接着逐步衰减，10 小时血液中含药量为每毫升 3 微克，每毫升血液中含药量 y (微克)随时间 x (小时)的变化如图所示，当成人按规定剂量服用后。

- (1) 分别求出 $x \leq 2$ 和 $x \geq 2$ 时 y 与 x 之间的函数关系式；
 (2) 如果每毫升血液中含药量为 4 微克或 4 微克以上时在治疗疾病时是有效的，那么这个有效时间是多长？



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4，将此正方形置于平面直角坐标系

xOy 中,使 AB 在 x 轴的正半轴上, A 点的坐标是 $(1,0)$

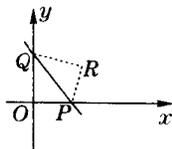
(1) 经过 C 点的直线 $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ 与 x 轴交于点 E , 求四边形 $AECD$ 的面积;

(2) 若直线 l 经过点 E 且将正方形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分, 求直线 l 的方程, 并在坐标系中画出直线 l .

(2001 年湖北省荆州市中考题)

能力拓展

9. 如图, 直线 $y = -2x + 6$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 P 、 Q 两点, 把 $\triangle POQ$ 沿 PQ 翻折, 点 O 落在 R 处, 则点 R 的坐标是_____.

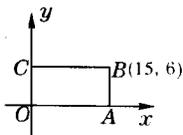


(第十六届江苏省竞赛题)

10. 在直角坐标系 xOy 中, x 轴上的动点 $M(x,0)$ 到定点 $P(5,5)$ 、 $Q(2,1)$ 的距离分别为 MP 和 MQ , 那么, 当 $MP + MQ$ 取最小值时, 点 M 的横坐标为_____.

(2001 年 TI 杯全国竞赛题)

11. 如图, 在直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(15,6)$, 直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 恰好将矩形 $OABC$ 分成面积相等的两部分, 那么 $b =$ _____.

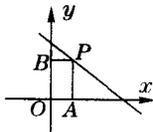


(2000 年全国初中数学联赛题)

12. 已知 $abc \neq 0$, 并且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = p$, 则直线 $y = px + p$ 一定通过().

- A. 第一、二象限 B. 第二、三象限
C. 第三、四象限 D. 第一、四象限

13. 如图, 在一次函数 $y = -x + 3$ 的图象上取点 P , 作 $PA \perp x$ 轴于 A , $PB \perp y$ 轴于 B , 且矩形 $OAPB$ 的面积为 2, 则横纵坐标都是整数的 P 点有().



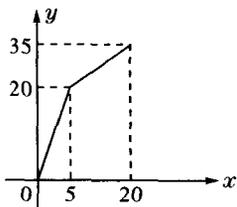
- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

(2000 年浙江省绍兴市竞赛题)

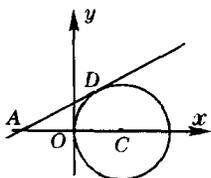
14. 点 $A(-4,0)$, $B(2,0)$ 是坐标平面上两定点, C 是 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 的图象上的动点, 则满足上述条件的直角 $\triangle ABC$ 可以画出().

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

15. 有一个附有进、出水管的容器,每单位时间进、出的水量都是一定的,设从某时刻开始5分钟内只进不出水,在随后的15分钟内既进水又出水,得到时间 x (分)与水量 y (升)之间的关系如下图.若20分钟后只出水不进水,求这时(即 $x \geq 20$) y 与 x 之间的函数关系式.



(第15题)



(第16题)

16. 如图,已知在直角坐标系中, $\odot C$ 与 y 轴相切,且 C 点的坐标为 $(1,0)$,直线 l 过点 $A(-1,0)$ 与 $\odot C$ 相切于 D 点,
 (1) 求直线 l 的解析式;
 (2) 在直线 l 上存在点 P ,使 $\triangle APC$ 为等腰三角形,求 P 点的坐标.

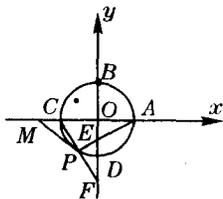
综合创新

17. 在直角坐标系中,有四个点 $A(-8,3)$, $B(-4,5)$, $C(0,n)$, $D(m,0)$,当四边形 $ABCD$ 的周长最短时,求 $\frac{m}{n}$ 的值.

(2000年湖北省选拔赛题)

18. 如图,以 $\odot O$ 两条互相垂直的直径所在直线为轴建立平面直角坐标系,两坐标轴交 $\odot O$ 于 A, B, C, D 四点,点 P 在 \widehat{CD} 上,连 PA 交 y 轴于点 E ,连 CP 并延长交 y 轴于点 F .

- (1) 求 $\angle FPE$ 的度数;
 (2) 求证: $OB^2 = OE \cdot OF$;
 (3) 若 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{3}$,以线段 OE, OF 的长为根的一元二次方程 $x^2 - \frac{5}{2}\sqrt{3}x + m = 0$,求直线 CF 的解析式;



- (4) 在(3)的条件下,过点 P 作 $\odot O$ 的切线 PM 与 x 轴交于点 M ,求 $\triangle PCM$ 的面积.

10 抛物线

在现代实验科学中,能否接受数学方法或与数学相近的物理学方法,已愈来愈成为该学科成功与否的主要标准.

——冯·诺依曼

知识纵横

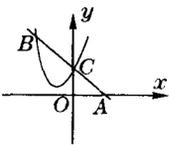
一般地说来,我们称函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 为 x 的二次函数(quadratic function),其图象为一条抛物线(parabola),与抛物线相关的知识有:

1. a, b, c 的符号决定抛物线的大致位置;
2. 抛物线关于 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称,抛物线开口方向、开口大小仅与 a 相关,抛物线在顶点 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 处取得最值;
3. 抛物线的解析式有下列三种形式:
 - ① 一般式: $y = ax^2 + bx + c$;
 - ② 顶点式: $y = a(x-h)^2 + k$;
 - ③ 交点式: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, 这里 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根.

确定抛物线的解析式一般要两个或三个独立条件,灵活地选用不同方法求出抛物线的解析式是解与抛物线相关问题的关键.

例题求解

【例1】 如图,一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于 A, C 两点,二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象过点 C 且与一次函数在第二象限交于另一点 B ,若 $AC:CB = 1:2$,那么,这个二次函数的顶点坐标为



(2001年重庆市中考题)

思路点拨 先求出 C, B 的坐标,再确定 b, c 的值.

链接

对称是一种数学美,它展示出整体的和谐与平衡之美,抛物线是轴对称图形,解题中应积极捕捉、创造对称关系,以便从整体上把握问题,由抛物线捕捉对称信息的方式有:

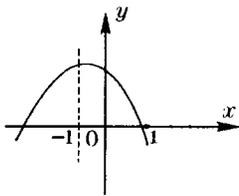
(1) 从抛物线上两点的纵坐标相等获得对称信息;

(2) 从抛物线的对称轴方程与抛物线被 x 轴所截得的弦长获得对称信息.

【例2】 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示,下列结论:① $a + b + c < 0$; ② $a - b + c > 0$; ③ $abc > 0$; ④ $b = 2a$. 其中正确结论的个数为().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

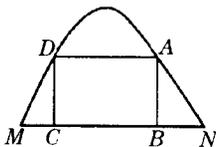
思路点拨 确定 a 、 b 、 c 的符号,解题的关键怎样利用图中“1, -1”这两个条件.



【例3】 如图,有一块铁皮,拱形边缘呈抛物线状, $MN = 4$ 分米,抛物线顶点处到边 MN 的距离是 4 分米,要在铁皮上截下一矩形 $ABCD$,使矩形顶点 B 、 C 落在边 MN 上, A 、 D 落在抛物线上,问这样截下的矩形铁皮的周长能否等于 8 分米?

(2001 年湖北省荆门市中考题)

思路点拨 恰当建立直角坐标系,易得出 M 、 N 及抛物线顶点坐标,从而求出抛物线的解析式,设 $A(x, y)$, 建立含 x 的方程,矩形铁皮的周长能否等于 8 分米,取决于求出的 x 值是否在已求得的抛物线解析式中自变量的取值范围内.



链接

把一个生产、生活中的实际问题转化成数学问题,需要观察分析、建模,建立直角坐标系下的函数模型是解决实际问题的常用方法,同一问题有不同的建模方式,通过分析比较可获得简解.

【例4】 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 - (n+1)x - 2n$ ($n < 0$), 经过点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ 、 $D(0, y_1)$, 其中 $x_1 < x_2$, $\triangle ABD$ 的面积等于 12.

(1) 求这条抛物线的解析式及它的顶点坐标;

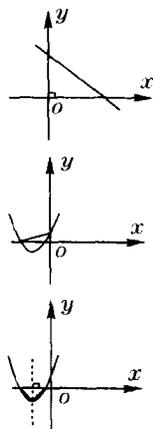
(2) 如果点 $C(2, y_2)$ 在这条抛物线上,点 P 在 y 轴的正半轴上,且 $\triangle BCP$ 为等腰三角形,求直角 PB 的解析式.

(2001 年北京市海淀区中考题)

思路点拨 对于(1), x_1 、 x_2 、 y_1 都可用 n 的代数式表示,由 $S_{\triangle ABD} = 12$, 求出 n 的值即可;对于(2)设 $P(0, m)$. 由几何知识建立 m 的等式,由于三个顶点中有一个顶点的位置待确定,所以哪两条边为腰都具有了可能性,故必须讨论.



如图,函数图象与坐标轴的交点,易得到三角形,于是在直角坐标系中函数与几何有很好的结合点.



解函数与几何结合的综合题,善于求点的坐标,进而求出函数解析式是解题的基础;而充分发挥形的因素,数形互助,把证明与计算相结合是解题的关键.

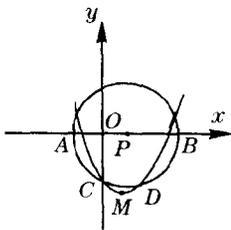
【例5】 如图,直角坐标系中, O 为坐标原点, A 点坐标为 $(-3, 0)$, B 点坐标为 $(12, 0)$,以 AB 的中点 P 为圆心, AB 为直径作 $\odot P$ 与 y 轴的负半轴交于点 C ,抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 、 C 三点,其顶点为 M 点.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 设点 D 是抛物线与 $\odot P$ 的第四个交点(除 A 、 B 、 C 三点外),求直线 MD 的解析式;

(3) 判断(2)中的直线 MD 与 $\odot P$ 的位置关系,并说明理由.

思路点拨 对于(2),运用圆的对称性、抛物线的对称性;对于(3),连 PD ,通过计算看是否能证明 $\angle PDM = 90^\circ$.

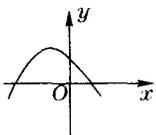


学力训练

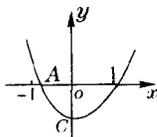
基础夯实

- 平面上经过两点 $A(2, 0)$, $B(0, -1)$ 的抛物线有无数条,请写出其中一条确定的抛物线的解析式(不含字母系数)_____ (要求写成一般式).
- 炮弹从炮口射出后,飞行的高度 h (米)与飞行的时间 t (秒)之间的函数关系是 $h = V_0 t \sin \alpha - 5t^2$,其中 V_0 是炮弹发射的初速度, α 是炮弹的发射角,当 $V_0 = 300$ (米/秒), $\alpha = 30^\circ$ 时,炮弹飞行的最大高度是_____米.

3. 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则直线 $y = abx + c$ 不经过_____象限.



(第3题)



(第4题)

4. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 且 $OA = OC$, 则由抛物线的特征写出如下含有 a, b, c 三个字母的式子 ① $\frac{4ac - b^2}{4a} = -1$, ② $ac + b + 1 = 0$, ③ $abc > 0$, ④ $a - b + c > 0$, 其中正确结论的序号是_____ (把你认为正确的都填上).

5. 无论 m 为任何实数, 二次函数 $y = x^2 + (2 - m)x + m$ 的图象总过的点是().

A. (1,3) B. (1,0) C. (-1,3) D. (-1,0)

6. 若所求的二次函数图象与抛物线 $y = 2x^2 - 4x - 1$ 有相同的顶点, 并且在对称轴的左侧, y 随 x 的增大而增大, 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而减小, 则所求二次函数的解析式为().

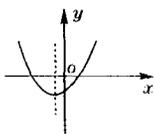
A. $y = -x^2 + 2x - 4$ B. $y = ax^2 - 2ax + a - 3 (a > 0)$

C. $y = -2x^2 - 4x - 5$ D. $y = ax^2 - 2ax + a - 3 (a < 0)$

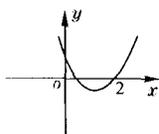
(2001年杭州市中考题)

7. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则点 $(a + b, ac)$ 所在的直角坐标系是().

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限



(第7题)



(第8题)

8. 已知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则下列关系式中成立的是().

A. $0 < -\frac{b}{2a} < 1$ B. $0 < -\frac{b}{2a} < 2$ C. $1 < -\frac{b}{2a} < 2$ D. $-\frac{b}{2a} = 1$

(2001年武汉市中考题)

9. 阅读下面的文字后, 回答问题:

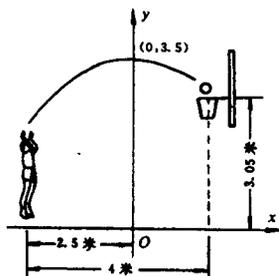
“已知: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0, a)$, $B(1, -2)$ ——, 求证: 这个二次函数图象的对称轴是直线 $x = 2$.

题目中的横线部分是一段被墨水污染了无法辨认的文字.

(1) 根据现有的信息,你能否求出题目中二次函数的解析式?若能,写出求解过程;若不能,说明理由.

(2) 请你根据已有信息,在原题中的横线上,填加一个适当的条件,把原题补充完整.

10. 如图,一位运动员在距篮下 4 米处跳起投篮,球运行的路线是抛物线,当球运行的水平距离为 2.5 米时,达到最大高度 3.5 米,然后准确落入篮圈.已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 米.



(1) 建立如图所示的直角坐标系,求抛物线的解析式;

(2) 该运动员身高 1.8 米,在这次跳

投中,球在头顶上方 0.25 米处出手,问:球出手时,他跳离地面的高度是多少?

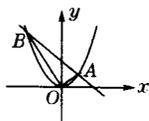
能力拓展

11. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象过点 $A(c, 0)$, 且关于直线 $x = 2$ 对称, 则这个二次函数的解析式可能是_____。(只要求写出一个可能的解析式)

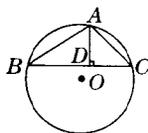
(2001 年湖北省荆门市中考题)

12. 如图, 已知直线 $y = -2x + 3$ 与抛物线 $y = x^2$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 那么 $\triangle OAB$ 的面积等于_____.

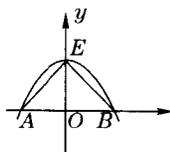
13. 如图, 在 $\odot O$ 的内接 $\triangle ABC$ 中, $AB + AC = 12$, $AD \perp BC$ 于 D , 且 $AD = 3$, 当 AB 的长等于_____时, $\odot O$ 的面积最大, 最大面积为_____.



(第 12 题)



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与两坐标轴的交点分别是 A, B, E , 且 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AE = BE$, 则下列关系式中不能总成立的是().

A. $b = 0$

B. $S_{\triangle ABC} = c^2$

C. $ac = -1$

D. $a + c = 0$

15. 由于被墨水污染, 一道数学题仅能见到如下文字: 已知二次函数 y

$= x^2 + bx + c$ 的图象过点 $(1,0)$...求证:这个二次函数的图象关于直线 $x=2$ 对称.

根据现有信息,题中的二次函数不具有的性质是().

- A. 过点 $(3,0)$
- B. 顶点是 $(2, -2)$
- C. 在 x 轴上截得的线段长为 3
- D. 与 y 轴的交点是 $(0,3)$

(2001 年江苏省盐城市中考题)

16. 已知函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 给出下列四个判断: ① $a > 0$; ② $2a + b = 0$; ③ $b^2 - 4ac > 0$; ④ $a + b + c < 0$. 以其中三个判断作为条件, 余下一个判断作为结论, 可得到四个命题, 其中真命题的个数有().

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

(2001 年江苏省连云港市中考题)

17. 某种产品的年产量不超过 1000 吨, 该产品的年产量(单位: 吨)与费用(单位: 万元)之间函数的图象是顶点在原点的抛物线的一部分(如图 1 所示); 该产品的年销售量(单位: 吨)与销售单价(单位: 万元/吨)之间函数的图象是线段(如图 2 所示). 若生产出的产品都能在当年销售完, 问年产量是多少吨时, 所获毛利润最大? (毛利润 = 销售额 - 费用).

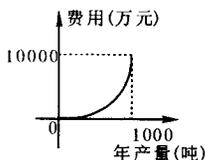


图1

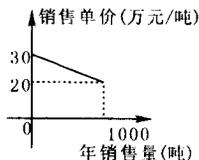
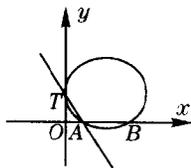


图2

(第 17 题)

18. 如图, 在直角坐标系中, 半径为 5 的圆与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴相切于 T 点, 且 A, T 是直线 $y = -2x + 4$ 与 x 轴, y 轴的交点.



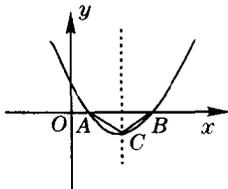
- (1) 求点 T, A, B 的坐标;
- (2) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A, B 两点, 并且顶点 D 在圆上, 求 D 点坐标;
- (3) 求出(2)中过 A, B, D 三点且使 $\triangle ABD$ 的面积是 27 的抛物线的解析式.

(2001 年昆明市中考题)

19. 已知点 $A(1,2)$ 和 $B(-2,5)$, 试写出两个二次函数, 使它们的图象都经过 A, B 两点.

综合创新

20. 如图,在直角坐标 xOy 中,二次函数图象的顶点坐标为 $C(4, -\sqrt{3})$,且在 x 轴上截得的线段 AB 的长为 6.



(1) 求二次函数的解析式;

(2) 在 y 轴上求作一点 P (不写作法)使 $PA + PC$ 最小,并求 P 点坐标;

(3) 在 x 轴的上方的抛物线上,是否存在点 Q ,使得以 Q, A, B 三点为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似? 如果存在,求出 Q 点的坐标;如果不存在,请说明理由.

21. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的系数 a, b, c 都是整数,并且 $f(19) = f(99) = 1999, |c| < 1000$,求 c 的值.

(上海市高中理科数学班选拔赛题)

11 双曲线

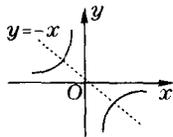
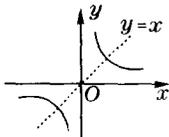
青春是人生最美妙的季节,然而它又是何等短暂,当你撕去日历上的一页,便会预感到青春的花朵凋落了一瓣。

——木塔里甫

知识纵横

形如 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的函数叫做反比例函数,它的图象是由两条曲线组成的双曲线,与双曲线相关的知识有:

1. 双曲线解析式 $y = \frac{k}{x}$ 中的系数 k 决定图象的大致位置及 y 随 x 变化的状况.



2. 双曲线图象上的点是关于原点 O 成中心对称,在 $k > 0$ 时函数的图象关于直线 $y = x$ 轴对称;在 $k < 0$ 时函数的图象关于直线 $y = -x$ 轴对称.

3. 自变量的取值是不等于零的全体实数,双曲线向坐标轴无限延伸但不能接近坐标轴.

例题求解

【例1】 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与直线 $y = 2x$ 和 $y = x + 1$ 过同一点,则当 $x > 0$ 时,这个反比例函数的函数值 y 随 x 的增大而_____ (填增大或减小).

(2001年四川省中考题)

思路点拨 确定 k 的值,只需求出双曲线上一点的坐标即可.

链接

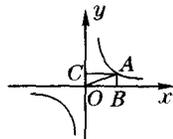
(1) 解与反比例函数相关问题时,应充分考虑它的对称性(关于原点 O 中心对称,关于 $y = \pm x$ 轴对称),这样既能从整体上思考问题,又能提高思维的周密性.

(2) 一个常用的命题:

如图,设点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上一点,过 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B ,过 A 作 $AC \perp y$ 轴于 C ,则

$$\textcircled{1} S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |k|;$$

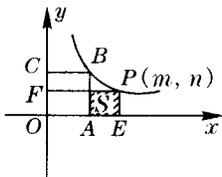
$$\textcircled{2} S_{\text{矩形}OBAC} = |k|.$$



- (1) 求 B 点坐标和 k 的值;
- (2) 当 $S = \frac{9}{2}$ 时, 求点 P 的坐标;
- (3) 写出 S 关于 m 的函数关系式.

(2001 年福州市中考题)

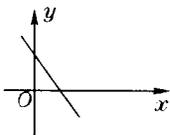
思路点拨 把矩形面积用坐标表示, A 、 B 坐标可求, $S_{\text{矩形}OACF}$ 可用含 n 的代数式表示, 解题的关键是双曲线关于 $y = x$ 对称, 符合题设条件的 P 点不惟一, 故思考须周密.



学 力 训 练

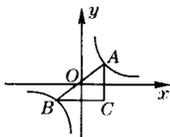
基础夯实

1. 若一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示, 则抛物线 $y = x^2 + kx + b$ 的对称轴位于 y 轴的 _____ 侧; 反比例函数 $y = \frac{kb}{x}$ 的图象在第 _____ 象限, 在每一个象限内, y 随 x 的增大而 _____.



(2001 年大连市中考题)

2. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(m, n)$, 其中 m, n 是一元二次方程 $x^2 + kx + 4 = 0$ 的两个根, 则 A 点坐标为 _____.
3. 如图, A 、 B 是函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上关于原点对称的任意两点, $AC \parallel y$ 轴, $BC \parallel x$ 轴, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S =$ _____.
4. 已知点 $P(n, 2n)$ 是第一象限的点, 下面四个命题:

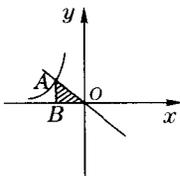


- ① 点 P 关于 y 轴对称的点 P_1 的坐标是 $(n, -2n)$;
- ② 点 P 到原点 O 的距离是 $\sqrt{5}n$;
- ③ 直线 $y = -nx + 2n$ 不经过第三象限;
- ④ 对于

能力拓展

11. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上有一点 $P(m, n)$, 其中 m, n 是关于 t 的一元二次方程 $t^2 - 3t + k = 0$ 的两根, 且 P 到原点 O 的距离为 $\sqrt{13}$, 则该反比例函数的解析式为_____.

12. 如图, $\text{Rt}\triangle AOB$ 的顶点 A 是一次函数 $y = -x + m + 3$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二象限的交点, 且 $S_{\triangle AOB} = 1$, 则点 A 的坐标是_____.



13. 老师给出一个函数 $y = f(x)$, 甲、乙、丙、丁四位同学各指出这个函数的一个性质: 甲: 函数图象不经过第三象限; 乙: 函数图象经过第一象限; 丙: 当 $x < 2$ 时, y 随 x 的增大而减小; 丁: 当 $x < 2$ 时, $y > 0$.

已知这四位同学叙述都正确, 请构造出满足上述所有性质的一个函数是_____.

(2001年江苏省镇江市中考题)

14. 已知反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象和一次函数 $y = kx - 7$ 的图象都经过点 $P(m, 2)$.

(1) 求这个一次函数的解析式;

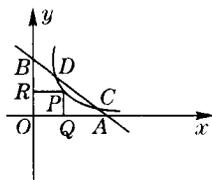
(2) 如果等腰梯形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在这个一次函数的图象上, 顶点 C, D 在这个反比例函数的图象上, 两底 AD, BC 与 y 轴平行, 且 A, B 的横坐标分别为 a 和 $a + 2$, 求 a 的值.

15. 如图, 直线 AB 过点 $A(3m, 0), B(0, n)$

($m > 0, n > 0$), 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象与

直线 AB 交于 C, D 两点, P 为双曲线 $y = \frac{m}{x}$

上任意一点, 过 P 点作 $PQ \perp x$ 轴于 $Q, PR \perp y$ 轴于 R .



(1) 用含 m, n 的代数式表示 $\triangle AOB$ 的面积 S ;

(2) 若 $m + n = 10$, n 为何值时 S 最大? 并求出这个最大值;

(3) 若 $BD = DC = CA$, 求出 C, D 两点的坐标;

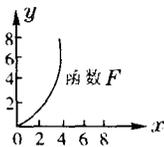
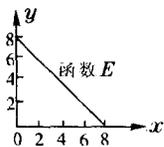
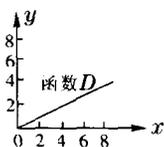
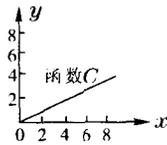
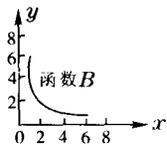
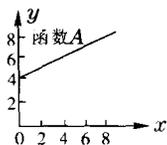
(4) 在(3)的条件过 O, D, C 三点作抛物线, 当该抛物线的对称轴

为 $x = \frac{7}{6}$ 时, 矩形 $PROQ$ 的面积是多少?

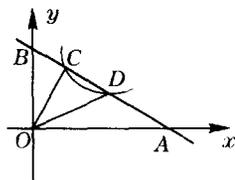
(2001年乌鲁木齐市中考题)

综合创新

16. 试指出下列各函数图象中, 哪些函数具有共同点, 并说明它们具有怎样的共同点? (至少写出四个共同点)



17. 如图, 已知 C, D 是双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 在第一象限内的分支上的两点, 直线 CD 分别交 x 轴、 y 轴于 A, B 两点, 设 C, D 的坐标分别是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 连结 OC, OD .



- (1) 求证: $y_1 < OC < y_1 + \frac{m}{y_1}$;
- (2) 若 $\angle BOC = \angle AOD = \alpha, \tan \alpha = \frac{1}{3}, OC = \sqrt{10}$, 求直线 CD 的解析式;
- (3) 在(2)的条件下, 双曲线上是否存在一点 P , 使得 $S_{\triangle POC} = S_{\triangle POD}$? 若存在, 请给出证明; 若不存在, 请说明理由.

12 方程与函数

钻研数学——这是一种需要全部灵活性和刻苦耐劳的智力体操。

——维纳

知识纵横

方程(equation)思想是指在解决问题时,通过等量关系将已知与未知联系起来,建立方程或方程组,然后运用方程的知识使问题得以解决的方法;函数(function)描述了自然界中量与量之间的依存关系,函数思想的实质是剔除问题的非本质特征,用联系和变化的观点研究问题,转化为函数关系去解决。

方程与函数联系密切,我们可以用方程思想解决函数问题,也可以用函数思想讨论方程问题,在确定函数解析式中的待定系数、函数图象与坐标轴的交点、函数图象的交点等问题时,常将问题转化为解方程或方程组;而在讨论方程、方程组的解的个数、解的分布情况等问题时,借助函数图象能获得直观简捷的解答。

例题求解

【例1】若关于 x 的方程 $|1-x|=mx$ 有解,则实数 m 的取值范围_____。

(2000年“弘晟杯”上海市竞赛题)

思路点拨 可以利用绝对值知识讨论,也可以用函数思想探讨:作函数 $y=|1-x|$, $y=mx$ 函数图象,原方程有解,即两函数图象有交点,依此确定 m 的取值范围。

【例2】设抛物线 $y=x^2+mx+4$ 与 x 轴有两个不同的交点 $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$,则下列结论中一定成立的是()。

A. $x_1^2+x_2^2=17$

B. $x_1^2+x_2^2=8$

C. $x_1^2+x_2^2>8$

D. $x_1^2+x_2^2<17$

连接

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), 令 $y=0$, 则得 $ax^2+bx+c=0$, 这是一个关于 x 的一元二次方程, 它们的联系表现在: 方程实根的个数、抛物线与 x 轴交点的个数的探讨都可转化为由根的判别式 Δ 来讨论, 特别地, 设 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 为抛物线与 x 轴两个不同的交点, 则

$$(1) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

$$(2) \quad AB = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}.$$

思路点拨 x_1, x_2 为方程 $x^2 + mx + 4 = 0$ 的两实根, 从判别式与根与系数关系入手.

【例 3】 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2(m + \frac{5}{4})x + 2(m + 1)$ 与 y 轴的正半轴交于点 C , 与 x 轴交于 A, B 两点, 并且点 B 在 A 的右边, $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle OAC$ 面积的 3 倍.

- (1) 求这条抛物线的解析式;
- (2) 判断 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OCA$ 是否相似, 并说明理由.

(2001 年北京市宣武区中考题)

思路点拨 综合运用判别式、根与系数关系等知识, 可判定对应方程根的符号特征、两实根的关系, 这是解本例的关键. 对于(1), 建立关于 m 的等式, 求出 m 的值; 对于(2)依 m 的值分类讨论.

【例 4】 设 a, b 为整数, 是否存在最小整数 a , 使方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的两个不同的正数根都不大于 1.

思路点拨 因根的表达式复杂, 故把原问题转化为二次函数问题来解决, 即求对应的二次函数与 x 轴的交点 x_1, x_2 在 0 与 1 之间的 a 的最小整数值, 画出函数图象, 由图象建立关于 a, b 的不等式组, 寻找解题突破口.

链 接

抛物线与 x 轴交点问题常转化为二次方程根的个数、根的符号特征、根的关系来探讨, 需综合运用判别式、韦达定理等知识.

对较复杂的二次方程实根分布问题, 常转化为用函数的观点来讨论, 基本步骤是: 在直角坐标系中作出对应函数图象, 由确定函数图象大致位置的约束条件建立不等式组.

【例 5】 已知抛物线 $y = x^2 + px + q$ 上有一点 $M(x_0, y_0)$ 位于 x 轴下方.

(1) 求证: 此抛物线与 x 轴交于两点;

(2) 设此抛物线与 x 轴的交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_1 < x_0 < x_2$.

(2001 年天津赛区选拔赛试题)

思路点拨 对于(1), 即要证 $p^2 - 4q > 0$; 对于(2), 即要证 $(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) < 0$.



一个关于二次函数图象的命题:

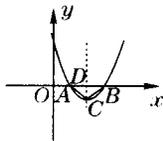
已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 两点, 顶点为 C .

(1) $\triangle ABC$ 是直角三角形的充要条件是:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4.$$

(2) $\triangle ABC$ 是等边三角形的充要条件是:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12.$$



读者你能证明吗?

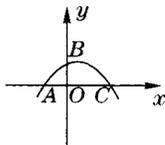
学 力 训 练

基础夯实

1. 已知关于 x 的函数 $y = (m+6)x^2 + 2(m-1)x + m+1$ 的图象与 x 轴有交点, 则 m 的取值范围是_____.

2. 已知抛物线 $y = x^2 - (k-1)x - 3k - 2$ 与 x 轴交于 $A(\alpha, 0), B(\beta, 0)$ 两点, 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 17$, 则 $k =$ _____.

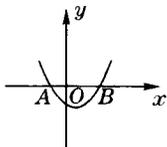
3. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示:



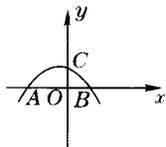
(1) 判断 abc 及 $b^2 - 4ac$ 的符号: abc _____ 0 , $b^2 - 4ac$ _____ 0 ;

(2) 当 $|OA| = |OB|$ 时, a, b, c 满足的关系式为_____.

4. 设函数 $y = x^2 - (k+1)x - 4(k+5)$ 的图象如图所示, 它与 x 轴交于 A 、 B 两点, 且线段 OA 与 OB 的长的比为 $1:4$, 则 $k = (\quad)$.
- A. 8 B. -4 C. 11 D. -4 或 11



(第4题)



(第5题)

5. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 若 $OB = OC = \frac{1}{2}OA$, 则 b 的值为 (\quad) .
- A. -2 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
6. 已知方程 $|x| = ax + 1$ 有一个负根而且没有正根, 那么 a 的取值范围是 (\quad) .
- A. $a > -1$ B. $a = 1$
C. $a \geq 1$ D. 非上述答案

7. 已知: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 4)$, 其顶点的横坐标为 $\frac{1}{2}$, 与 x 轴分别交于 $B(x_1, 0)$ 、 $C(x_2, 0)$ 两点 (其中 $x_1 < x_2$), 且 $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

(1) 求此抛物线的解析式及顶点 E 的坐标;

(2) 设此抛物线与 y 轴交于 D 点, 点 M 是抛物线上的点, 若 $\triangle MBO$ 的面积为 $\triangle DOC$ 面积的 $\frac{2}{3}$ 倍, 求点 M 的坐标.

(2001年北京市西城区中考题)

8. 已知: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 过点 $P(1, -2)$ 、 $Q(-1, 2)$, 且与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 左侧), 与 y 轴交于 C 点, 连结 AC 、 BC .

(1) 求 a 与 c 的关系式;

(2) 若 $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{4}{OC}$ (O 为坐标原点), 求抛物线的解析式;

(3) 是否存在满足条件 $\operatorname{tg} \angle CAB \cdot \operatorname{ctg} \angle CBA = 1$ 的抛物线? 若存在, 请求出抛物线的解析式; 若不存在, 请说明理由.

(2001年山西省中考题)

能力拓展

9. 已知抛物线 $y = x^2 + (k+1)x + 1$ 与 x 轴的两个交点 A 、 B 不全在原



绝对值函数 $y = |f(x)|$ 的图象是将 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴的上方而得到的; $y = f(|x|)$ 的图象是关于 y 轴对称.

点的左侧,抛物线顶点为 C ,要使 $\triangle ABC$ 恰为等边三角形,那么, k 的值为_____.

10. 函数 $y = x^2 - 3|x| + 7$ 的图象与函数 $y = x^2 - 3x + |x^2 - 3x| + 6$ 的图象的交点个数是_____.

(2000年我爱数学初中生夏令营竞赛题)

11. 方程 $x^2 - 3x + 3a^2 - 2 = 0$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有实根,则实数 a 的取值范围是_____.

(2001年太原市竞赛题)

12. 是否存在这样的实数 k ,使得二次方程 $x^2 + (2k - 1)x - (3k + 2) = 0$ 有两个实数根,且两根都在 2 与 4 之间? 如果有,试确定 k 的取值范围;如果没有,试述理由.

13. 设抛物线 $y = x^2 + (2a + 1)x + 2a + \frac{5}{4}$ 的图象与 x 轴只有一个交点.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $a^{18} + 32a^{-6}$ 的值.

综合创新

14. 讨论方程 $x^2 - 2|x| + 2 = m$ (m 为实数) 的解的个数与 m 的关系.

15. 设 p 是实数,二次函数 $y = x^2 - 2px - p$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$.

(1) 求证: $2px_1 + x_2^2 + 3p > 0$;

(2) 若 A, B 两点之间的距离不超过 $|2p - 3|$,求 p 的最大值.

(2000年全国初中数学联赛试题)

13 怎样求最值

除蒲丰说天才是毅力,歌德说天才是勤奋,叔本华说天才是忘我之外,我再补充一句:
“天才就是入迷.”同时还可以说:“天才就是兴趣.”

——木村久一

知识纵横

在生活实践中,人们经常面对带有“最”字的问题,如在一定的方案中,花费最低、消耗最少、产值最高、获利最大等;解数学题时,我们也常常碰到求某个变量的最大值或最小值之类的问题,这就是我们要讨论的最值问题,求最值问题的方法归纳起来有如下几点:

1. 运用配方法求最值;
2. 构造一元二次方程,在方程有解的条件下,利用判别式求最值;
3. 建立函数模型求最值;
4. 利用基本不等式或不等分析法求最值.

例题求解

【例1】 设 a, b 为实数,那么 $a^2 + ab + b^2 - a - 2b$ 的最小值是_____.

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 将原式整理成关于 a 的二次多项式 $a^2 + (b-1)a + (b^2 - 2b)$ 从配方法入手;亦可引入参数设 $a^2 + ab + b^2 - a - 2b = t$,将等式整理成关于 a 的二次方程 $a^2 + (b-1)a + (b^2 - 2b - t) = 0$,利用判别式求最小值.

【例2】 用长 8m 的铝合金条制成如图形状的矩形窗框,使窗户的透光面积最大,那么这个窗户的最大透光面积是().

连接

数学中最大值、最小值问题,运用到社会实践、生活实际中所体现出来的就是最优化思想,所谓最优,就是我们所期望的目标量能达到最大或最小.

一次函数、反比例函数并无最值,但当自变量取值范围有条件限制的,最值在图象的端点处取得;定义在全体实数上的二次函数最值在抛物线的顶点处取得.即:

对于 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

(1) 若 $a > 0$,

则当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时,

$y_{\text{最小值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$;

(2) 若 $a < 0$,

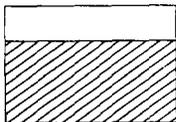
则当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时,

$y_{\text{最大值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

- A. $\frac{64}{25}m^2$ B. $\frac{4}{3}m^2$ C. $\frac{8}{3}m^2$ D. $4m^2$

(2001年浙江省金华市中考题)

思路点拨 设窗框的宽为 $x(m)$, 窗户的透光面积为 $y(m^2)$, 建立 y 与 x 的函数关系式, 运用函数知识求最大值.



【例3】 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 4mx + 2m^2 + 3m - 2 = 0$ 的两个实根, 当 m 为何值时, $x_1^2 + x_2^2$ 有最小值, 并求这个最小值.

(第十六届江苏省竞赛题)

思路点拨 由韦达定理知 $x_1^2 + x_2^2$ 是关于 m 的二次函数, 是否是在抛物线的顶点处取得最小值, 就要看自变量 m 的取值范围, 从判别式入手.

【例4】 A市、B市和C市分别有某种机器10台、10台和8台, 现在决定把这些机器支援给D市18台, E市10台, 已知从A市调运一台机器到D市、E市的运费分别为200元和800元; 从B市调运一台机器到D市、E市的运费分别为300元和700元; 从C市调运一台机器到D市、E市的运费分别为400元和500元.

设从A市、B市各调运 x 台机器到D市, 当28台机器全部调运完毕后, 求总运费 W (元) 关于 x (台) 的函数关系式, 并求 W 的最小值和最大值.

思路点拨 列表分析条件, 可以把复杂的条件清晰地表示出来, 因A市、B市(现存有机器量有限, 即调出机器的台数有限制, 故需在约束条件下求函数的最值).

链接

定义在某一区间的条件限制的二次函数最值问题, 有下列两种情形:

(1) 当抛物线的顶点在该区间内, 顶点的纵坐标就是函数的最值;

(2) 当抛物线的顶点不在该区间内, 二次函数的最值在区间内两端点处取得.

例4在其它条件不变时可作如下延拓:

设从A市调 x 台到D市, B市调 y 台到D台, 当28台机器全部调运完毕后, 求总运费 W 的最小值和最大值.

读者不妨一试.

【例5】 某单位花50万元买回一台高科技设备,根据对这种型号设备的跟踪调查显示,该设备投入使用后,若将养护和维修的费用均摊到每一天,则有结论:第 x 天应付的养护与维修费为 $[\frac{1}{4}(x-1)+500]$ 元.

(1) 如果将该设备从开始投入使用到报废共付的养护与维修费及购买该设备费用的和均摊到每一天,叫做每天的平均损耗,请你将每天的平均损耗 y (元)表示为使用天数 x (天)的函数;

(2) 按照此行业的技术和安全管理要求,当此设备的平均损耗达到最小值时,就应当报废,问该设备投入使用多少天应当报废?

(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛题)

思路点拨 在解本题时可能要用到以下数学知识点:对于确定的正常数 a 、 b 以及在正实数范围内取值的变量 x ,一定有 $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} \geq 2\sqrt{\frac{ax}{xb}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}$,即当且仅当 $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ 时, $\frac{a}{x} + \frac{x}{b}$ 有最小值 $2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

连接

不等式也是求最值的有效方法,常用的不等式有:

(1) $a^2 \geq 0$;

(2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(3) 若 $a > 0, b > 0$,则 $a \pm b \geq 2\sqrt{ab}$;

(4) 若 $a > 0, b > 0, x > 0$,则 $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} \geq$

$2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

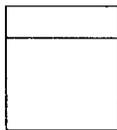
以上各式等号当且仅当 $a = b$ (或 $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$)时成立.

学 力 训 练

基础夯实

1. 当 x 变化时,分式 $\frac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$ 的最小值为_____.

2. 如图,用12米长的木方,做一个有一条横档的矩形窗子,为使透进的光线最多,选择窗子的长、宽各为_____、_____米.



3. 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = 2$,

那么 $|a| + |b| + |c|$ 的最小值可达到_____.

4. 已知两点 $A(3, 2)$ 与 $B(1, -1)$,点 P 在 y 轴上且使 $PA + PB$ 最短,则 P 的坐标是().

- A. $(0, -\frac{1}{2})$ B. $(0, 0)$ C. $(0, \frac{11}{6})$ D. $(0, -\frac{1}{4})$

5. 函数 $y = -x - \frac{9}{x} + 15$ 的最大值为().
 A. 21 B. 15 C. 9 D. 2
6. 已知 $|y| \leq 1$, 且 $2x + y = 1$, 则 $z = 2x^2 + 16x + 3y^2$ 的最小值为().
 A. $\frac{19}{7}$ B. 3 C. $\frac{27}{7}$ D. 13
7. 某玩具厂计划生产一种玩具熊猫, 每日最高产量为 40 只, 且每日产出的产品全部售出. 已知生产 x 只玩具熊猫的成本为 R (元), 售价每只为 P (元), 且 R, P 与 x 的关系式分别为 $R = 500 + 30x, P = 170 - 2x$.
- (1) 当日产量为多少时, 每日获得的利润为 1750 元;
 (2) 当日产量为多少时, 可获得最大利润? 最大利润是多少?

(2001 年厦门市中考题)

8. 某市 20 位下岗职工在近郊承包 50 亩土地办农场, 这些地可种蔬菜、烟叶或小麦, 种这几种农作物每亩地所需职工数和产值预测如下表:

作物品种	每亩地所需职工数	每亩地预计产值
蔬菜	$\frac{1}{2}$	1100 元
烟叶	$\frac{1}{3}$	750 元
小麦	$\frac{1}{4}$	600 元

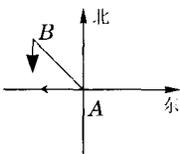
请你设计一个种植方案, 使每亩地都种上农作物, 20 位职工都有工作, 且使农作物预计总产值最多.

能力拓展

9. 已知 a 为实数, 且使关于 x 的一元二次方程 $x^2 + a^2x + a = 0$ 有实数根, 则该方程的根 x 所能达到的最小值为_____.
10. 若抛物线 $y = x^2 - (k-1)x - k - 1$ 与 x 轴的交点为 A, B , 顶点为 C , 则 $\triangle ABC$ 的最小值为_____.
11. 已知实数 a, b 满足 $a^2 + ab + b^2 = 1$, 且 $t = ab - a^2 - b^2$, 则 t 的最大值为_____, 最小值为_____.

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

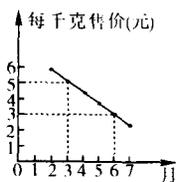
12. 如图, B 船在 A 船的西偏北 45° 处, 两船相距 $10\sqrt{2}$ km, 若 A 船向西航行, B 船同时向南航行, 且 B 船的速度为 A 船速度的 2 倍, 那么 A, B 两船的最近距离为_____ km.



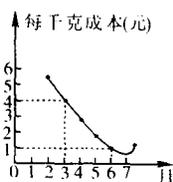
13. 某商店将进货价每个 10 元的商品按每个 18 元售出时, 每天可卖出 60 个, 商店经理到市场上做了一番调查后发现, 若将这种商品的售价(在每个 18 元的基础上)每提高 1 元, 则日销售量就减少 5 个; 若将这种商品的售价(在每个 18 元的基础上)每降低 1 元, 则日销量就增加 10 个, 为获得每日最大利润, 此商品售价应定为每个多少元?

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

14. 某瓜果基地市场部为指导该基地某种蔬菜的生产和销售, 在对历年市场行情和生产情况进行了调查的基础上, 对今年这种蔬菜上市后的市场售价和生产成本进行了预测, 提供了两个方面的信息, 如甲、乙两图.



图(甲)



图(乙)

注: 甲、乙两图中的每个实心黑点所对应的纵坐标分别指相应月份的售价和成本, 生产成本 6 月份最低; 甲图的图象是线段, 乙图的图象是抛物线段.

请你根据图象提供的信息说明:

- (1) 在 3 月份出售这种蔬菜, 每千克的收益是多少元? (收益 = 售价 - 成本)
- (2) 哪个月出售这种蔬菜, 每千克的收益最大? 说明理由.

(2001 年浙江省金华市中考题)

综合创新

15. 设 x, y 都是正整数, 且使 $\sqrt{x-116} + \sqrt{x+100} = y$, 求 y 的最大值.

(200 年“弘晟杯”上海市竞赛题)

16. 在直角坐标系中有三点 $A(0, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(2, 6)$, 已知直线 $y = ax + b$ 上横坐标为 0、1、2 的点分别为 D 、 E 、 F , 试求 a, b 的值使得 $AD^2 + BE^2 + CF^2$ 达到最小值.

(2001 年全国初中数学联赛题)

14 图表信息问题

在信息中

我们的知识哪里去了

在知识中

我们的智慧哪里去了

——艾略特《岩石》

知识纵横

21 世纪是一个信息化的社会,从纷繁的信息中,捕捉搜集、处理、加工所需的信息,是新世纪对一个合格公民提出的基本要求.

图表信息问题是近年中考涌现的新问题,即运用图象、表格及一定的文字说明提供问题情境的一类试题.

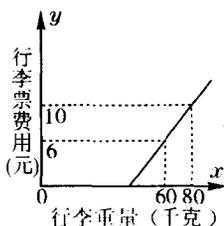
图象信息题是把需要解决的问题借助图象的特征表现出来,解题时要通过对图象的解读、分析和判断,确定图象对应的函数解析式中字母系数符号特征和隐含的数量关系,然后运用数形结合、待定系数法等方法解决问题.

表格信息题是运用二维表格提供数据关系信息,解题中需通过对表中的数据信息的分析、比较、判断和归纳,弄清表中各数据所表示的含义及它们之间的内在联系,然后运用所学的方程(组)、不等式(组)及函数知识等解决问题.

例题求解

【例 1】 某地长途汽车客运公司规定,旅客可随身携带一定重量的行李,如果超过规定,则需要购买行李票,由图可知行李的重量只要不超过_____千克,就可免费托运.

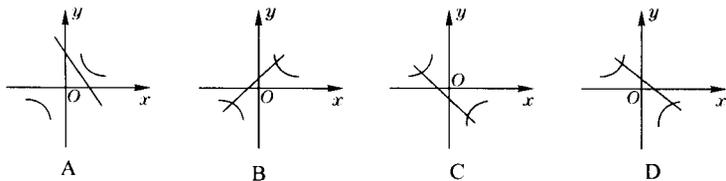
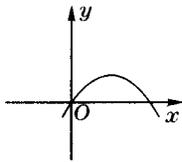
思路点拨 从图象可知行李票费用 y (元)是行李重量 x (千克)的一次函数,从图象还可获取其它信息,确定一次函数解析式是解本例的关键.



链接

股市行情走势图、期货市场趋势图、工厂产值利润表、甚而电子仪器自动记录的地震波等,它们广泛出现在电视、报刊、广告中,渗透到现实生活的每一个角落,在这些图表、图象中蕴含着丰富的信息,我们应学会收集、整理与获取.

【例2】 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则直线 $y = ax + b$ 与双曲线 $y = \frac{ab}{x}$ 在同一坐标系中的位置大致是().



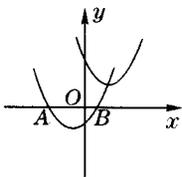
思路点拨 由抛物线的位置判定 a 、 b 、 c 的符号特征, 进而去判定直线、双曲线的大致位置.

【例3】 已知抛物线 $y = x^2 - mx + \frac{m^2}{2}$ 与抛物线 $y = x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2$ 在平面直角坐标系 xOy 中的位置如图所示, 其中一条与 x 轴交于 A 、 B 两点.

(1) 试判断哪条抛物线经过 A 、 B 两点, 并说明理由;

(2) 若 A 、 B 两点到原点的距离 AO 、 BO 满足 $\frac{1}{OB} - \frac{1}{AO} = \frac{2}{3}$, 求经过 A 、 B 两点的这条抛物线的解析式.

思路点拨 对于(1), 可借用判别式判断, 亦可从抛物线与 y 轴交点状态入手; 对于(2), 把 AO 、 OB 转化成对应的横坐标, 利用根与系数关系建立含 m 的等式.



【例4】 某产品每件的成本是 120 元, 试销阶段, 每件产品的销售价 x (元) 与产品的日销售量 y (台) 之间的关系如下表所示, 若日销售量 y 是销售价 x 的一次函数, 为获得最大销售利润, 每件产品的销售价应定为多少元? 此时每月的销售利润是多少?

x (元)	130	150	165
y (台)	70	50	35

思路点拨 根据表格提供信息求出销售量 y 与售价 x 的关系式, 再建立销售利润与售价 x 的函数关系式.

链接

函数图象选择题是广泛见于各地中考试卷中的一种常见问题, 解此类问题的基本思路是: 由图象大致位置确定解析式中系数符号特征, 进而再判定其它图象的大致位置, 在解题中常常要运用直接判断、排除筛选、分类讨论、参数吻合等方法.

本例综合运用了一次函数和二次函数的有关知识, 涉及信息量大, 题中呈现信息的方式不仅是文字和符号, 还包括表格.



解图象信息问题的关键是化“图象信息”为“数学信息”，具体包括：

- (1) 读图找点；
- (2) 看图确定系数符号特征；
- (3) 见形(图象形态)想式(解析式)，建模求解。

【例5】 一蔬菜基地种植的某种绿色蔬菜，根据今年的市场行情，预计从5月1日起的50天内，它的市场售价 y_1 与上市时间 x 的关系可用图1的一条线段表示；它的种植成本 y_2 与上市时间 x 的关系可用图2抛物线的一部分来表示，假定市场售价减去种植成本为纯利润，问哪天上市的这种绿色蔬菜既不赔本也不赚钱？

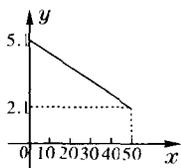


图1

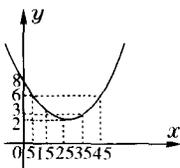


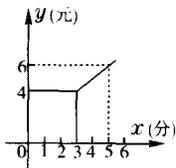
图2

思路点拨 由图象提供的信息，求出直线、抛物线的解析式，利用市场售价与成本价相等建立时间 x 的方程。

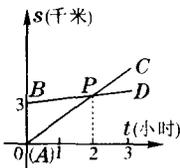
学 力 训 练

基础夯实

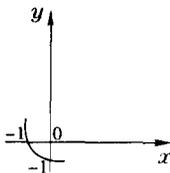
1. 武汉向北京打长途电话，设通话时间 x 分钟需付电话费 y (元)，通话3分钟以内话费为3.6元，请根据图中 y 随 x 变化的图象找出通话5分钟，需付电话费_____元。
2. 已知 A 地在 B 地的正南方3千米处，甲、乙两人同时分别从 A 、 B 两地向正北方向匀速直行，他们与 A 地的距离 s (千米) 与所行的时间 t (小时) 之间的函数关系由如图的图象 AC 和 BD 给出，当他们行了3小时的时候，他们之间的距离为_____千米。



(第1题)

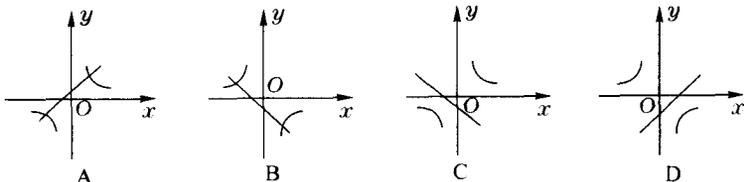


(第2题)



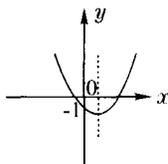
(第3题)

3. 如图，已知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过 $(-1, 0)$ 和 $(0, -1)$ 两点，则 a 的取值范围是_____。
4. 下列各图中，能表示函数 $y = k(1-x)$ 和 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 在同一平面直角坐标系中的图象大致是()。

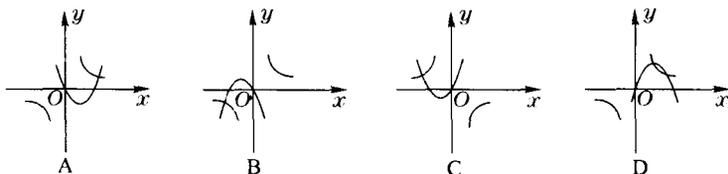


5. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则 a 、 b 、 c 的大小关系是()。

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
 C. $a > b = c$
 D. a 、 b 、 c 的大小关系, 不能确定



6. 在同一坐标系中, 函数 $y = ax^2 + bx$ 与 $y = \frac{b}{x}$ 的图象大致是()。



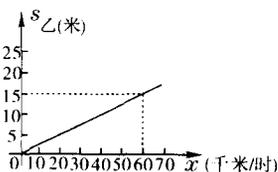
7. 某果品公司欲请汽车运输公司或火车货车站将 60 吨水果从 A 地运到 B 地, 已知汽车和火车从 A 地到 B 地的运输路程均为 S 千米, 这两家运输单位在运输过程中, 除都要收取运输途中的每吨每小时 5 元的冷藏费外, 要收取的其它费用及有关运输资料由下表给出:

运输工具	行驶速度 (千米/时)	运费单价 (元/吨千米)	装卸总费用 (元)
汽车	50	2	3000
火车	80	1.7	4620

(1) 请分别写出这两家运输单位运送这批水果所要收取的总费用 y_1 (元) 和 y_2 (元)(用含 S 的式子表示)。

(2) 为减少费用, 你认为果品公司应选择哪家运输单位运送这批水果更为合算?

8. 汽车在行驶中, 由于惯性作用, 刹车后还要向前滑行一段距离才能停住, 我们称这段距离为“刹车距离”, 刹车距离是分析事故的一个重要因素, 在一个限速 40 千米/小时以内的弯道上, 甲、乙两车相向而行, 发现情况不对, 同时刹车, 但还是相碰了. 事后现场测得甲车的刹车距离为 12 米, 乙车的刹车距离超过 10 米, 但小于 12 米. 查有关资料知, 甲种车的刹车距离 $S_{甲}$ (米) 与车速 x (千米/小时) 之间有下列关系: $S_{甲} = 0.1x + 0.01x^2$; 乙种车的刹车距离 $S_{乙}$ (米) 与车速 x (千米/小时) 的关系如图所示:



请你就两车的速度方面分析相碰的原因。

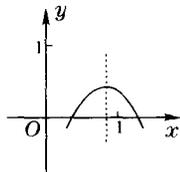
能力拓展



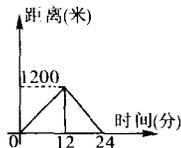
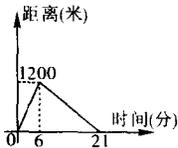
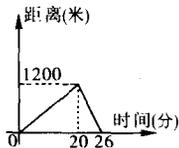
类似题9、题12近年演化为多项选择,因而难度增加.

一般地,我们可以从条件出发,通过推理,得出要判断结论的部分形式,再与所给结论对比;有时也可假设要判断的结论正确,从部分条件出发,看是否能推出矛盾.

9. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示,则下列6个代数式, ab 、 ac 、 $a + b + c$ 、 $a - b + c$ 、 $2a + b$ 、 $2a - b$ 中,其值为正的式子个数是_____个.

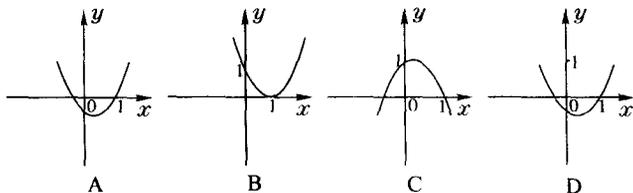


10. 小刚、爸爸、爷爷同时从家中出发到达同一目的地后立即返回. 小刚去时骑自行车,返回时步行;爷爷去时是步行,返回时骑自行车;爸爸往返都步行. 三个人步行的速度不等,小刚与爷爷骑车的速度相等. 每个人的行走路程与时间的关系分别是下面三个图象中的一个. 走完一个往返,小刚用_____分钟,爸爸用_____分钟,爷爷用_____分钟.

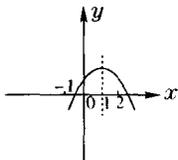


(2001年吉林省中考题)

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 如果 $a > b > c$, 且 $a + b + c = 0$, 则它的图象可能是().



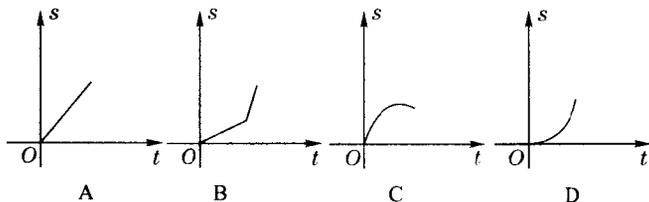
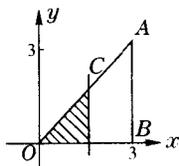
12. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则在下列不等式中, ① $abc < 0$; ② $a + b + c < 0$; ③ $a + c > b$; ④ $a < \frac{c-b}{2}$ 成立的个数是().



- A. 1个
- B. 2个
- C. 3个
- D. 4个

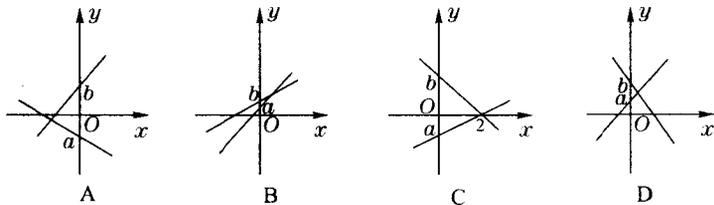
(2001年江苏省连云港市中考题)

13. 如图,在直角三角形中, $AB \perp OB$, 且 $AB = OB = 3$, 设直线 $l: x = t$ 截此三角形所得的阴影部分的面积为 s , 则 s 与 t 之间的函数关系的图象为 ().



(2001 年镇江市中考题)

14. 设 $b > a$, 将一次函数 $y = bx + a$ 与 $y = ax + b$ 的图象画在平面直角坐标系中, 则有一组 a, b 的取值, 使得下列 4 个图中的一个为正确的是 ().



(全国初中数学联赛题)

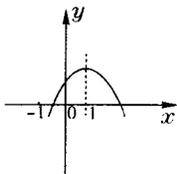
15. 依法纳税是每个公民应尽的义务,《中华人民共和国个人所得税法》规定,公民每月工资、薪金收入不超过 800 元,不需交税;超过 800 元的部分为全月应纳税所得额,都应交税,且根据超过部分的多少按不同的税率交税,详细的税率如下表:

级别	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
...

- (1) 某公民 2000 年 10 月的总收入为 1350 元,问他应交税款多少元?
- (2) 设 x 表示每月收入(单位:元), y 表示应交税款(单位:元),当 $1300 < x \leq 2800$ 时,请写出 y 关于 x 的函数关系式;
- (3) 某企业高级职员 2000 年 11 月应交税款 55 元,问该月他的总收入是多少元?

综合创新

16. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 且 $x = 1$ 是此抛物线的对称轴, 求证: $2c < 3b$.



17. 在元旦晚会上, 学校组织了一次关于语文、数学、外语、奥运及日常生活常识的知识竞赛,

设定满分为 40 分, 以下依次为 30 分、20 分、10 分和 0 分共五个评分等级, 每个小组分别回答这五个方面的问题. 现将 A、B、C、D、E 五个小组的部分得分列表如下:

	语文	数学	外语	常识	奥运	总分	名次
A 组						180	1
B 组							2
C 组							3
D 组		30					4
E 组	40			20			5

表中: (1) 每一竖行的得分均不相同(包括单科和总分);

(2) C 组有 4 个单科得分相同.

求: B、C、D、E 组的总分并填表进行检验.

(2001 年重庆市竞赛题)

15 统计的思想方法

在广袤浩瀚的宇宙中,数字化生存能使每个人变得更易接近,让弱小孤寂者也能发出他们的心声.

——尼葛洛庞帝

知识纵横

20世纪90年代,美国麻省理工学院教授尼葛洛庞帝写过一本畅销全球的《数字化生存》一书.事实上,我们的生活、工作离不开数据,要做到心中有数、用数据说话是信息社会对人的基本要求.

统计(statistics)学是一门研究如何收集、整理、分析数据,并在此基础上作出推断的科学.

随机抽样与统计推断是统计中最重要的思想方法,也是认识客观世界的事物和现象的方法之一.即用样本(sample)的某种特征去估计总体的相应特征,用样本的平均水平、波动情况、分布规律等特征估计总体的平均水平、波动情况和分布规律.

例题求解

【例1】 随机抽取某城市30天的空气质量状况统计如下:

污染指数(w)	40	70	90	110	120	140
天数(t)	3	5	10	7	4	1

其中, $w \leq 50$ 时,空气质量为优; $50 < w \leq 100$ 时,空气质量为良; $100 < w \leq 150$ 时,空气质量为轻微污染,估计该城市一年(以365天计)中有_____天空气质量达到良以上.

(2001年安徽省中考题)

思路点拨 明确空气质量的指标情况,计算出随机抽取的30天中空气质量达到良以上的平均水平.

链接

“落叶知秋”、“见微知著”等中国成语,体现的是从局部看整体的思想方法,与统计的思想方法异曲同工.

平均数、中位数、众数都是反映一组数据集中趋势的特征数,但是它们描述集中趋势的侧重点是不同的:

(1) 平均数易受数据中少数异常值的影响,有时难以真正反映“平均”;

(2) 若一组数据有数据多次重复出现,则常用众数来刻画这组数据的集中趋势.

【例2】 已知数据 x_1, x_2, x_3 的平均数为 a, y_1, y_2, y_3 的平均数为 b , 则数据 $2x_1 + 3y_1, 2x_2 + 3y_2, 2x_3 + 3y_3$ 的平均数为().

- A. $2a + 3b$ B. $\frac{2}{3}a + b$ C. $6a + 9b$ D. $2a + b$

(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛题)

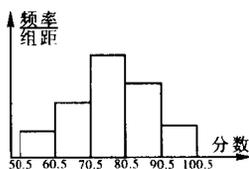
思路点拨 运用平均数计算公式并结合已知条件导出新数据的平均数.

【例3】 某班同学参加环保知识竞赛, 将学生的成绩(得分取整数)进行整理后分成五组, 绘成频率分布直方图(如图). 图中从左到右各小组的小长方形的高的比是 $1:3:6:4:2$, 最右边一组的频数是 6. 结合直方图提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 该班共有多少名同学参赛?
- (2) 成绩落在哪组数据范围内的人数最多, 是多少?
- (3) 求成绩在 60 分以上(不含 60 分)的学生占全班参赛人数的百分率.

(2001年河北省中考题)

思路点拨 读图、读懂图, 从图中获取频率、组距等相关信息.



【例4】 某校初三(1)班分甲、乙两组, 各选 10 名学生进行数学抢答赛, 共有 10 道选择题, 答对 8 题(含 8 题)以上为优秀, 各组选手答对题数统计如下

答对题数	5	6	7	8	9	10	平均数(\bar{x})
甲组选手	1	0	1	5	2	1	8
乙组选手	0	0	4	3	2	1	
答对题数	中位数		众数		方差(S^2)		优秀率
甲组选手	8		8		1.6		80%
乙组选手							

请你完成上表, 再根据所学的统计知识, 从不同方面评价甲、乙两组选手的成绩.

思路点拨 根据平均数、中位数、众数、方差的意义, 全方位地对甲、乙两组选手进行综合评价.



运用数学知识解决实际问题的过程是: 从实际问题中获取必要的信息——分析处理有关信息——建立数学模型——解决这个数学问题.

通过图表获取数据信息, 收集、整理和分析数据, 再运用统计量的意义去分析, 这是用统计的思想方法解决问题的基本方式.



英汉小词典：
 平均数 mean
 众数 mode
 中位数 median
 方差 variance
 集中趋势
 central tendency

【例5】 编号为1到25的25个弹珠被分放在两个篮子A和B中，15号弹珠在篮子A中，把这个弹珠从篮子A移到篮子B中，这时篮子A中的弹珠号码数的平均数等于原平均数加 $\frac{1}{4}$ ，B中弹珠号码数的平均数也等于原平均数加 $\frac{1}{4}$ ，问原来在篮子A中有多少个弹珠？

(第十六届江苏省竞赛题)

思路点拨 用字母分别表示篮子A、B弹珠数及相应的平均数，运用方程、方程组等知识求解。

学 力 训 练

基础夯实

1. 某家庭搬进新居后又添置了新的电冰箱、电热水器等家用电器，为了了解用电量的大小，该家庭在6月初连续几天观察电表的度数，电表显示的度数如下：

日 期	1日	2日	3日	4日	5日	6日	7日	8日
电表显示度数(度)	115	118	122	127	133	136	140	143

估计这个家庭6月份的总电量是_____度。

2. 某商店3、4月份出售同一品牌各种规格的空调销售台数如下表：

月 份	规格 台 数	1匹	1.2匹	1.5匹	2匹
	3月	12台	20台	8台	4台
4月	16台	30台	14台	8台	

根据表中数据回答：

- (1) 商店平均每月销售空调_____ (台)；
- (2) 商店出售的各种规格的空调中，众数是_____ (匹)；
- (3) 在研究6月份进货时，商店经理决定_____ (匹)的空调要多进；_____ (匹)的空调要少进。

(2001年北京市西城区中考题)

3. 为了了解某中学初三年级250名学生升学考试的数学成绩，从中抽取了50名学生的数学成绩进行分析，求得 $\bar{x}_{\text{样本}} = 94.5$ 。下面是50名学生数学成绩的频率分布表：

频率分布表

分 组	频数累计	频数	频率
60.5 ~ 70.5	下	3	a
70.5 ~ 80.5	正一	6	0.12
80.5 ~ 90.5	正正	9	0.18
90.5 ~ 100.5	正正正下	17	0.34
100.5 ~ 110.5	正正	b	0.2
110.5 ~ 120.5	正	5	0.1
合 计		50	1

根据题中给出的条件回答下列问题:

- (1) 在这次抽样分析的过程中,样本是_____;
- (2) 频率分布表中的数据 $a =$ _____, $b =$ _____;
- (3) 估计该校初三年级这次升学考试的数学平均成绩约为_____分;
- (4) 在这次升学考试中,该校初三年级数学成绩在 90.5 ~ 100.5 范围内的人数约为_____人.

(2001 年江苏省苏州市中考题)

4. 某工厂对一个生产小组的零件进行抽样调查,在 10 天中,这个生产小组每天出的次品数如下(单位:个):

0, 2, 0, 2, 3, 0, 2, 3, 1, 2

在这 10 天中,该生产小组生产零件所出的次品数的().

- A. 平均数是 2 B. 众数是 3
C. 中位数是 1.5 D. 方差是 1.25

(2001 年四川省中考题)

5. 甲、乙两班举行电脑汉字输入速度比赛,参加学生每分钟输入汉字的个数经统计计算后填入下表:

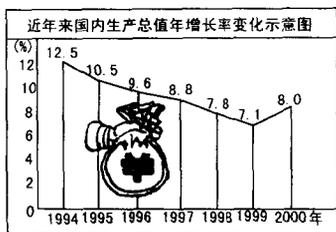
班级	参加人数	中位数	方差	平均字数
甲	55	149	191	135
乙	55	151	110	135

某同学根据上表分析得出如下结论:① 甲、乙两班学生成绩的平均水平相同;② 乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数(每分钟输入汉字数 ≥ 150 个为优秀);③ 甲班的成绩的波动情况比乙班的成绩的波动大,上述结论正确的是().

- A. ①②③ B. ①② C. ①③ D. ②③

(2001 年武汉市中考题)

6. 近年来,国内生产总值年增长率的变化情况如图,从图上看,下列结论中不正确的是().



- A. 1995—1999 年, 国内生产总值的年增长率逐年减小
 B. 2000 年国内生产总值的年增长率开始回升
 C. 这 7 年中, 每年的国内生产总值不断增长
 D. 这 7 年中, 每年的国内生产总值有增有减
7. 一次科技知识竞赛, 两组学生成绩统计如下:

分数		50	60	70	80	90	100
人数	甲组	2	5	10	13	14	6
	乙组	4	4	16	2	12	12

已经算得两个组的人均分都是 80 分, 请根据你所学过的统计知识, 进一步判断这两个组这次竞赛中谁优谁次, 并说明理由.

8. 某个学生参加军训, 进行打靶训练, 必须射击 10 次, 在第 6、第 7、第 8、第 9 次射击中, 分别得了 9.0 环、8.4 环、8.1 环、9.3 环, 他的前 9 次射击所得的平均数高于前 5 次射击所得的平均环数. 如果他要使 10 次射击的平均数超过 8.8 环, 那么, 他在第 10 次射击中至少得要多少环? (每次射击所得环数都精确到 0.1 环)

(2001 年 TI 全国初中数学竞赛题)

能力拓展

9. 小李通过对某地区 1998 年至 2000 年快餐公司发展情况的调查, 制成了该地区快餐公司个数情况的条形图 (如图 1) 和快餐公司盒饭年销量的平均数情况条形图 (如图 2). 利用图 1、图 2 共同提供的信息,

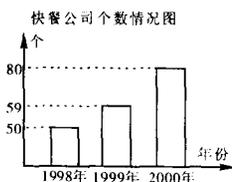


图1

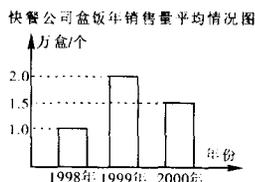


图2

解答下列问题:

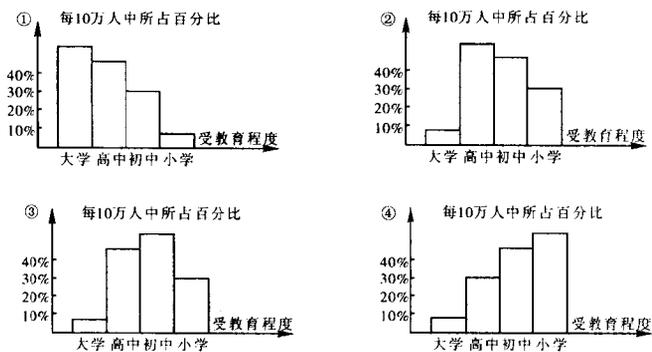
- (1) 1999 年该地区销售盒饭共_____万盒.
 (2) 该地区盒饭销量最大的年份是_____年,这一年的年销量是_____万盒.
 (3) 这三年中该地区每年平均销售盒饭_____万盒.

10. 我国于 2000 年 11 月 1 日起进行了第五次全国人口普查的登记工作,据第五次人口普查,我国每 10 万人中拥有各种受教育程度的人数如下:具有大学程度的为 3611 人;具有高中程度的为 11146 人;具有初中程度的为 33961 人;具有小学程度的为 35701 人.

(1) 根据以上数据填写下表:

受教育程度	每 10 万人中所占百分比($a\%$)(a 精确到 0.01)
大学程度	
高中程度	
初中程度	
小学程度	

(2) 以下各示意图中正确的是(). (将正确示意图数字代号填在括号内)



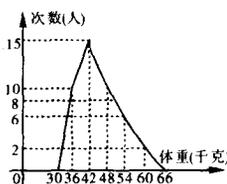
11. 新华科技股份有限公司董事会决定今年用 13 亿资金投资发展项目,现有 6 个项目可供选择(每个项目或者被全部投资,或者不被投资),各项目所需投资金额和预计年均收益如下表:

项目	A	B	C	D	E	F
投资(亿元)	5	2	6	4	6	8
收益(亿元)	0.55	0.4	0.6	0.4	0.9	1

如果要求所有投资的项目的收益总额不得低于 1.6 亿元,那么,当选择的投资项目是_____时,投资的收益总额最大.

(第十五届江苏省竞赛题)

12. 如图为某班学生体重次数分配折线图, 则此班学生体重的算术平均数为 _____ 千克.



13. 从 2001 年 2 月 21 日零时起, 中国电信执行新的电话收费标准, 其中本地网营业区内通话费是: 前 3 分钟为 0.2

元(不足 3 分钟的按 3 分钟计算), 以后每分钟加收 0.1 元(不足 1 分钟的按 1 分钟计算). 现有一学生调查了 A、B、C、D、E 五位同学上星期天打本地网营业区内电话的通话时间情况, 原始数据见表 1.

(1) 根据表 1, 填写频数(落在某一时间段上的通话次数)分布表(表 2).

表 1

	A	B	C	D	E
第一次通话时间	3分	3分45秒	3分55秒	3分20秒	6分
第二次通话时间		4分	3分40秒	4分50秒	
第三次通话时间			5分	2分	

表 2

时间段	频数累计	频数
$0 < t \leq 3$		
$3 < t \leq 4$		
$4 < t \leq 5$		
$5 < t \leq 6$		

(2) 调整前的电话收费标准是每 3 分钟为 0.2 元(不足 3 分钟的按 3 分钟计算). 试按调整前后的电话收费标准分别计算这五位同学这天的平均通话费, 通过比较平均通话费的多少, 你可以得出什么判断?

14. 在科学实验中, 为了测定一个量 x , 常作 n 次观测, 测得 n 个数据 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 然后取这 n 个数据的平均值作为要测定的量的数值. 即取 $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$, 为什么要取这 n 个测定数值的平均数作为测定的值呢?

根据你所学的统计知识, 对表中提供的信息进行分析, 写出你所能得出的结论.

综合创新

15. 某次数学竞赛共有 15 道题,下表是对于做对 n ($n = 0, 1, 2 \cdots 15$) 道题的人数的一个统计,如果又知其中做对 4 道题和 4 道以上的学生每人平均做对 6 道题,做对 10 道题和 10 道题以下的学生每人平均做对 4 道题,问这个表至少统计了多少人?

n	0	1	2	3	……	12	13	14	15
做对 n 道题的人数	7	8	10	21	……	15	6	3	1

(全国初中数学联赛试题)

16 锐角三角函数

有如矗立巨浪中的磐石，
任凭狂风怒涛，迎头扑打，依然
故我，毫不动摇，藐视天空与大
海的威力。

——蒙田：《人生随笔》

知识纵横

古希腊数学家和古代中国数学家为了测量的需要，他们发现并经常利用下列几何结论：在两个大小不同的直角三角形中，只要有一个锐角相等，那么这两个三角形的对应边的比值一定相等。正是古人对天文观察和测量的需要才引起人们对三角函数的研究，1748年经过瑞士的著名数学家欧拉的应用，才逐渐形成现在的 \sin 、 \cos 、 tg 、 ctg 的通用形式。

三角函数揭示了直角三角形中边与锐角之间的关系，是数形结合的桥梁之一，有以下丰富的性质：

1. 单调性；
2. 互余三角函数间的关系；
3. 同角三角函数间的关系。

平方关系： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ；

商数关系： $\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ， $\text{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ；

倒数关系： $\text{tg} \alpha \text{ctg} \alpha = 1$ 。

例题求解

【例1】若锐角 A 满足 $\text{tg} A - \text{ctg} A = 2$ ，则 $\text{tg}^2 A + \text{ctg}^2 A =$ _____。

(哈尔滨市中考题)

思路点拨 利用倒数关系，分别求出 $\text{tg} A$ 、 $\text{ctg} A$ 的值。

链接

设 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 为 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边， R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，不难证明：与锐角三角函数相关的几个重要结论：

$$(1) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$$

$$bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C;$$

$$(2) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} =$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R.$$

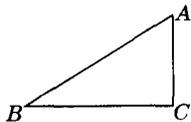


【例2】 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 15^\circ$, $BC = 1$,则 $AC = (\quad)$

- A. $2 + \sqrt{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. 0.3 D. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(2001年全国初中数学联赛试题)

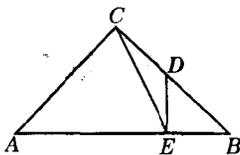
思路点拨 由 15° 构造特殊角,用特殊角的三角函数促使边角转化.



求(已知)非特殊角三角函数值的关键是构造出含特殊角的直角三角形.

【例3】 如图,已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$,过 BC 的中点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,连结 CE ,求 $\sin \angle ACE$ 的值.

思路点拨 作垂线把 $\angle ACE$ 变成直角三角形的一个锐角,将问题转化成求线段的比.



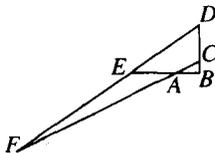
求(已知)锐角三角函数值常根据定义转化为求对应线段的比,有时需通过等角的比来转换.

【例4】 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = a$, $BC = b$,($a > b$),延长 BA 、 BC ,使 $AE = CD = c$,直线 CA 、 DE 交于点 F .

又锐角三角函数有如下性质:锐角的正弦、正切值随锐角的增大而增大;锐角的余弦、余切值随锐角的增大而减小,请运用该性质,并根据以上所提供的几何模型证明你提炼出的不等式.

(2001年江苏省镇江市中考题)

思路点拨 恰当选用三角函数,把角的不等关系转化到线段的不等,从而提炼出不等式,注意角的代换、角的不等关系知识运用.



在阅读中理解,在理解中创新运用.

【例5】 已知:在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A, \sin B$ 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根.

(1) 求实数 p, q 应满足的条件;

(2) 若 p, q 满足(1)的条件, 方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根是否等于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中两锐角 A, B 的正弦?

(江苏省竞赛题)

思路点拨 由韦达定理、三角函数关系建立 p, q 等式, 注意判别式、三角函数值的有界性, 建立严密约束条件的不等式, 才能准确求出实数 p, q 应满足的条件.

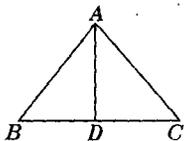
学 力 训 练

基础夯实

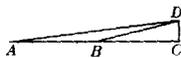
1. 已知 $2 + \sqrt{3}$ 是方程 $x^2 - 5\sin\theta x + 1 = 0$ 的一个根且 θ 为锐角, 则 $\text{tg}\theta =$ _____.

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ, \angle BAC = 75^\circ$, BC 边上的高 $AD = 3$, 则 $BC =$ _____.

3. 如图, $\angle C = 90^\circ, \angle DBC = 30^\circ, AB = BD$, 利用此图可求得 $\text{tg}75^\circ =$ _____.



(第2题图)



(第3题图)

4. 化简

(1) $\sqrt{\text{tg}^2 27^\circ + \text{tg}^2 63^\circ} - 2 =$ _____.

(2) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ =$ _____.

5. 如果 $\angle A$ 是锐角, 且 $\sin A = \frac{3}{4}$, 那么().

A. $0^\circ < \angle A < 30^\circ$

B. $36^\circ < \angle A < 45^\circ$

C. $45^\circ < \angle A < 60^\circ$

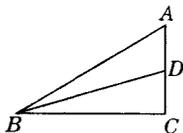
D. $60^\circ < \angle A < 90^\circ$

6. 已知 $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{8}$, 且 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, 则 $\cos\alpha - \sin\alpha$ 的值为().

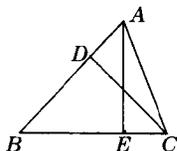
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, D 是 AC 的中点, 则 $\text{ctg} \angle DBC$ 的值是().

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$



(第7题)



(第8题)

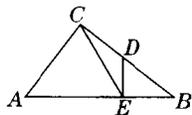
8. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的点, 且 $BD = 2AD$, 已知 $CD = 10$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$, 那么 BC 边上的高 AE 等于().

- A. 9 B. 8 C. 12 D. 6

9. 已知关于 x 的方程 $4x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ 的两根恰是某直角三角形两锐角的正弦, 求 m 的值.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\sin B = \frac{3}{5}$, D

是 BC 上一点, $DE \perp AB$ 于 E , $CD = DE$, $AC + CD = 9$, 求 BE 、 CE 的长.



(2001年北京市宣武区中考题)

能力拓展

11. 若 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ 且 $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{16}$, 则 $\sin\alpha =$ _____.

12. 已知关于 x 的方程 $3x^2 - 4x \cdot \sin\alpha + 2(1 - \cos\alpha) = 0$ 有两个不相等的实数根, α 为锐角, 那么 α 的取值范围是 _____.

13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边, $\text{tg}A$ 、 $\text{tg}B$ 是关于 x 的方程 $x^2 - kx + 12k^2 - 37k + 26 = 0$ 的两个实根, 则 $k =$ _____.

14. 设 α 为锐角, 且满足 $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, 则 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ 等于().

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{3}{10}$

15. 如图, 若两条宽度为 1 的带子相交成 30° 的角, 则重叠部分(图中阴影部分)的面积是().

A. 2

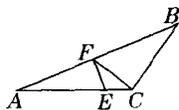
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$



(第15题)



(第16题)

16. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, E 为 AC 上一点,且 $AE:EC = 3:1$, $EF \perp AB$ 于 F ,连结 FC ,则 $\text{ctg} \angle CFB$ 等于().

A. $\frac{1}{6}\sqrt{3}$

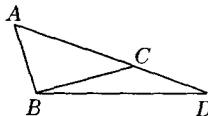
B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边,且 $c = 5\sqrt{3}$,若关于 x 的方程 $(5\sqrt{3} + b)x^2 + 2ax + (5\sqrt{3} - b) = 0$ 有两个相等的实根,又方程 $2x^2 - (10\sin A)x + 5\sin A = 0$ 的两实根的平方和为6,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图,已知 $AB = CD = 1$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$,求 AC 长.

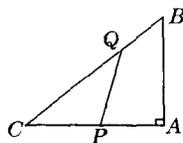


(第十八届加拿大数学奥林匹克竞赛题)

综合创新

19. 设 a, b, c 是直角三角形的三边, c 为斜边, n 为正整数,试判断 $a^n + b^n$ 与 c^n 的关系,并证明你的结论.

20. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$, $AC = 8$,点 P 从点 A 开始沿 AC 边向点 C 匀速移动,点 Q 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 、再沿 BC 边向点 C 匀速移动,若 P, Q 两点同时从点 A 出发,则可同时到达点 C .



如果 P, Q 两点同时从点 A 出发,以原速度按各自的移动路线移动到某一时刻停止运动,当点 Q 移动到 BC 边上(Q 不与 C 重合)时,求作以 $\text{tg} \angle QCA, \text{tg} \angle QPA$ 为根的一元二次方程.



由于三角函数的实质是线段比,所以,很多与三角函数有关问题总与相似三角形联系在一起.

17 解直角三角形

苦难犹如熔炉,伟大才智
都会在其中炼得纯净和永不会
腐蚀,正如钻石那样,能够经受
千锤百炼而不会粉碎.

——巴尔扎克

知识纵横

利用直角三角形中的已知元素(至少有一条是边)求得其余元素的过程叫做解直角三角形,解直角三角形有以下两方面的应用:

1. 为线段、角的计算提供新的途径.

解直角三角形的基础是三角函数的概念,三角函数使直角三角形的边与角得以转化,突破纯粹几何关系的局限.

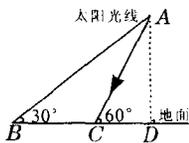
2. 解实际问题.

测量、航行、工程技术等生活生产的实际问题,许多问题可转化为解直角三角形获解,解决问题的关键是在理解有关名词的意义的基础上,准确把实际问题抽象为几何图形,进而转化为解直角三角形.

例题求解

【例1】 如图,太阳光与地面成 60° 角,一棵倾斜的大树 AB 与地面成 30° 角,这时测得大树在地面的影子长约为 $10m$,则大树的长为_____m.
(2001年浙江省台州市中考题)

思路点拨 图中相关线段都便于用 CD 表示,先求出 CD .



在没有直角的条件下,常通过作垂线构造直角三角形;在解由多个直角三角形组合而成的问题时,往往先解已具备条件的直角三角形,使得求解的直角三角形最终可解.

【例2】 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 1$, $CD = 3$, $\angle B = 135^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,则 $\angle D$ 等于().

- A. 60° B. 67.5° C. 75° D. 无法确定

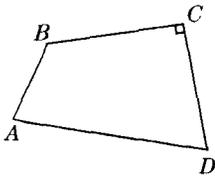
(2000年重庆市竞赛题)



因直角三角形的元素之间有很多关系,故用已知元素求未知元素的途径不惟一,选择怎样的途径最有效、最合理呢?请记住:

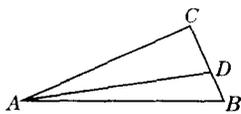
有斜用弦,
无斜用切,
宁乘勿除.

思路点拨 通过对内分割或向外补形,构造直角三角形.



【例3】 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$, D 为 BC 边上一点, $\text{tg}\angle ADC$ 是方程 $3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) = 2$ 的一个较大的根,求 CD 的长.

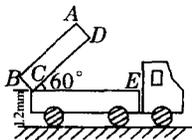
思路点拨 解方程求出 $\text{tg}\angle ADC$ 的值,解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 求出 AC 值,为解 $\text{Rt}\triangle ADC$ 创造条件.



【例4】 如图,自卸车车厢的一个侧面是矩形 $ABCD$, $AB = 3$ 米, $BC = 0.5$ 米,车厢底部距离地面1.2米,卸货时,车厢倾斜的角度 $\theta = 60^\circ$.问此时车厢的最高点 A 距离地面多少米?(精确到1米)

(2001年安徽省中考题)

思路点拨 作辅助线将问题转化为解直角三角形,怎样作辅助线构造基本图形,展开空间想象,就能得到不同的解题思路.



【例5】 几年前,国外有人传说:“从月亮上看地球,长城是用肉眼惟一能看得见的建筑物.”设长城的厚度为10米,人的正常视力能看清的最小物体所形成的视角为1分,且已知月、地之间的距离为380000千米,试用学过的数学知识,对这个传说进行明确的判断.

思路点拨 按题意画图,解题的关键是按照人的最小视角1分观察地球上长城的厚度,求出最远的距离.

链接

在解决一个数学问题后,不能只满足于出问题的答案,同时还应对解题过程进行多方面分析和考察,思考一下有没有多种解题途径,每种途径各有什么优点与缺陷,哪一条途径更合理、更简捷,从中又能给我们带来怎样的启迪等.

若能养成这种良好的思考问题的习惯,则可逐步培养和提高我们分析探索能力.

学会用数据说话,以理服人,不以讹传讹,人云亦云.

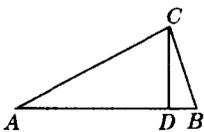
学 力 训 练

基础夯实

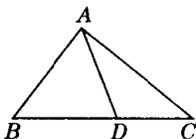
1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AC \perp BC$, $CD \perp AB$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 6\sqrt{3}$,则 $BC =$ _____, $DB =$ _____.

(2001年江苏省徐州市中考题)

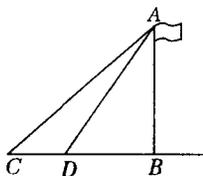
2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $AD = 5$, $AC = 7$, $DC = 3$,则 $\angle ADC =$ _____.



(第1题)



(第2题)

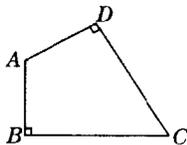


(第3题)

3. 如图,旗杆 AB ,在 C 处测得旗杆顶 A 的仰角为 30° ,向旗杆前进 10m ,达到 D ,在 D 处测得 A 的仰角为 45° ,则旗杆的高为 _____.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 10$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$,则点 A 到 BC 边的距离是().
- A. $10 - 5\sqrt{3}$ B. $5 + 5\sqrt{3}$
C. $15 - 5\sqrt{3}$ D. $15 - 10\sqrt{3}$
5. 已知 a 、 b 、 c 分别为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边,若关于 x 的方程 $(b+c)x^2 - 2ax + c - b = 0$ 有两个相等的实根,且 $\sin B \cdot \cos A - \cos B \cdot \sin A = 0$,则 $\triangle ABC$ 的形状为().
- A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

(2001年黑龙江省中考题)

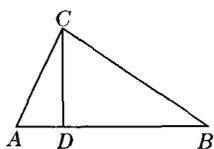
6. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 135^\circ$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AD = 2$,则四边形 $ABCD$ 的面积是().



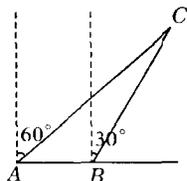
- A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 4 D. 6

(2001年江苏盐城市中考题)

7. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $CD = 1$,已知 AD 、 BD 的长是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根,且 $\text{tg}A - \text{tg}B = 2$,求 p 、 q 的值.



(第7题图)

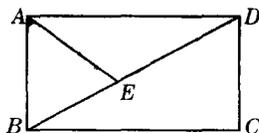


(第8题图)

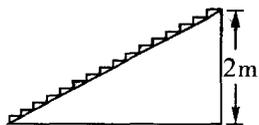
8. 如图,一艘渔船正以 30 海里/时的速度由西向东追赶鱼群,在 A 处看见小岛 C 在船的北偏东 60° ,40 分钟后,渔船行至 B 处,此时看见小岛 C 在船的北偏东 30° ,已知以小岛 C 为中心周围 10 海里以内为我军导弹部队军事演习的着弹危险区,问这艘渔船继续向东追赶鱼群,是否有进入危险区域的可能?

能力拓展

9. 如图,矩形 ABCD 中, $AD > AB$, $AB = a$, $\angle BDA = \theta$,作 AE 交 BD 于 E,且 $AE = AB$,试用 a 与 θ 表示, $AD = \underline{\hspace{2cm}}$, $BE = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 如图,坡角为 30° 的楼梯表面铺地毯,地毯的长度至少需 $\underline{\hspace{2cm}}$ m (精确到 1m).



(第9题图)



(第10题图)

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $BC = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 1,若 $\angle B$ 是锐角,则 $\angle C$ 的度数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2000 年我爱数学初中生夏令营数学竞赛题)

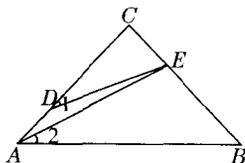
12. 已知等腰三角形的三边长为 a, b, c ,且 $a = c$,若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - \sqrt{2}bx + c = 0$ 的两根之差为 $\sqrt{2}$,则等腰三角形的一个底角是().

A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

(2001 年河北省中考题)

13. 如图, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,若 $AD = \frac{1}{3}AC$, $CE = \frac{1}{3}BC$,则 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小关系是().

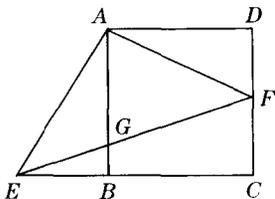
A. $\angle 1 > \angle 2$ B. $\angle 1 < \angle 2$
C. $\angle 1 = \angle 2$ D. 无法确定



14. 下面四个数中最大的是().

- A. $\text{tg}48^\circ + \text{ctg}48^\circ$ B. $\sin48^\circ + \cos48^\circ$
 C. $\text{tg}48^\circ + \cos48^\circ$ D. $\text{ctg}48^\circ + \sin48^\circ$

15. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, F 是 CD 上一点, $AE \perp AF$, 点 E 在 CB 的延长线上, EF 交 AB 于点 G .

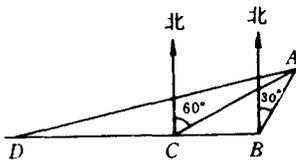


(1) 求证: $DF \cdot FC = BG \cdot EC$;

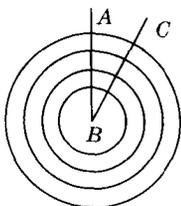
(2) 当 $\text{tg}\angle DAF = \frac{1}{3}$ 时, $\triangle AEF$ 的面积为 10, 问当 $\text{tg}\angle DAF = \frac{2}{3}$ 时, $\triangle AEF$ 的面积是多少?

综合创新

16. 如图, 一轮船在海上以每小时 30 海里的速度向正西方向航行. 上午 8 时, 在 B 处测得小岛 A 在北偏东 30° 方向, 之后轮船继续向正西方向航行, 于上午 9 时到达 C 处, 这时测得小岛 A 在北偏东 60° 方向. 如果轮船仍继续向正西方向航行, 于上午 11 时到达 D 处. 这时轮船与小岛 A 相距多远?



17. 台风是一种自然灾害, 它以台风中心为圆心在周围数十千米范围内形成气旋风暴, 有极强的破坏力. 据气象观测, 距沿海某城市 A 的正南方向 220 千米 B 处有一台风中心, 其中心最大风力为 12 级, 每远离台风中心 20 千米, 风力就会



减弱一级, 该台风中心现正在以 15 千米/时的速度沿北偏东 30° 方向往 C 处移动, 且台风中心风力不变, 若城市所受风力达到或超过四级, 则称为受台风影响.

- (1) 该城市是否会受到这次台风的影响? 请说明理由.
- (2) 若会受到台风影响, 那么台风影响该城市的持续时间有多长?
- (3) 该城市受到台风影响的最大风力为几级?

(2001 年重庆市中考题)

18 圆的基本性质

书,这是这一代人对另一代人的精神上的遗言,这是将死的老人对刚刚开始生活的青年人的忠告,这是准备去休息的哨兵向前来代替他的岗位的哨兵的命令。

——赫尔岑

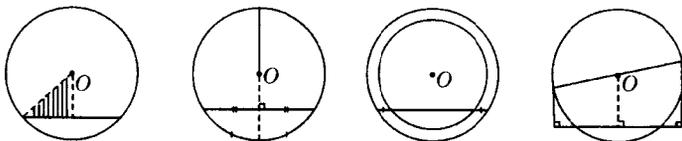
知识纵横

到定点(圆心:center of a circle)等于定长(半径:radius)的点的集合叫圆(circle),圆常被人们看成是最完美的事物,圆的图形在人类进程中打下深深的烙印。

圆的基本性质有:一是与圆相关的基本概念与关系,如弦(chord)、弧(arc)、弦心距、圆心角、圆周角等;二是圆的对称性,圆既是一个轴对称图形,又是一中心对称图形.用圆的基本性质解题应注意:

1. 熟练运用垂径定理及推论进行计算和证明;
2. 了解弧的特性及中介作用;
3. 善于促成同圆或等圆中不同名称等量关系的转化.

熟悉如下基本图形、基本结论:



例题求解

【例1】 在半径为1的 $\odot O$ 中,弦 AB 、 AC 的长分别为 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$,则 $\angle BAC$ 度数为_____.

(2001年黑龙江省中考题)

思路点拨 作出辅助线,解直角三角形,注意 AB 与 AC 有不同的位置关系.

链接

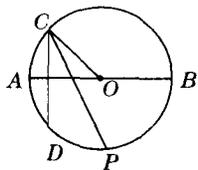
由圆的对称性可引出许多重要定理,垂径定理是其中比较重要的一个,它沟通了线段、角与圆弧的关系,应用的一般方法是构造直角三角形,常与勾股定理和解直角三角形知识结合起来.

圆是一个对称图形,注意圆的对称性,可提高解与圆相关问题的周密性.

【例 2】 如图, AB 为 $\odot O$ 的一固定直径, 它把 $\odot O$ 分成上、下两个半圆, 自上半圆上一点 C 作弦 $CD \perp AB$, $\angle OCD$ 平分线交 $\odot O$ 于点 P , 当点 C 在上半圆(不包括 A 、 B 两点)上移动时, 点 P ().

- A. 到 CD 的距离保持不变 B. 位置不变
C. 等分 \widehat{DB} D. 随 C 点移动而移动

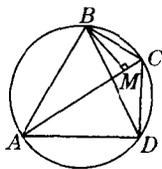
思路点拨 本例涉及点的运动, 从对动点的特殊位置得到的结果受到启迪, 再作基本辅助线, 寻找角的关系进而推知弧的关系, 确定 P 点状况.



【例 3】 如图, 已知点 A 、 B 、 C 、 D 顺次在 $\odot O$ 上, $\widehat{AB} = \widehat{BD}$, $BM \perp AC$ 于 M , 求证: $AM = DC + CM$.

(江苏省竞赛题)

思路点拨 用截长(截 AM)或补短(延长 DC)证明, 将问题转化为线段相等的证明, 证题的关键是促使不同量的相互转换并突破它.

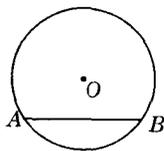


链接

善于促成同圆或等圆中不同名称的相互转化是解决圆的问题的重要技巧, 此处, 要努力把圆与直线形相合起来, 认识到圆为解决与直线形问题提供新的解题思路, 而在解与圆相关问题时常用到直线形的知识与方法(主要是指全等与相似).

【例 4】 如图, AB 是 $\odot O$ 中一条长为 4 的弦, P 是 $\odot O$ 上一动点, $\cos \angle APB = \frac{1}{3}$, 问是否存在以 A 、 P 、 B 为顶点的面积最大的三角形, 试说明理由; 若存在, 求出这个三角形的面积.

思路点拨 可排除 AB 为直径, 则 P 点的位置就可能在优弧 \widehat{AB} 上、劣弧 \widehat{AB} 上, 底相同, 高长则三角形的面积就大, 可判断存在, 画出完整图形, 综合运用垂径定理、方程思想求三角形的面积.



【例5】 如图,直径为13的 $\odot O'$ 经过原点 O ,并且与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点,线段 OA 、 OB ($OA > OB$)的长分别是方程 $x^2 + kx + 60 = 0$ 的两根.

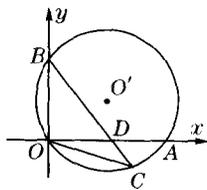
(1) 求线段 OA 、 OB 的长;

(2) 已知点 C 在劣弧 OA 上,连结 BC 交 OA 于 D ,当 $OC^2 = CD \cdot CB$ 时,求 C 点坐标;

(3) 在 $\odot O$ 上是否存在点 P ,使 $S_{\triangle POD} = S_{\triangle ABD}$,若存在,求出 P 点的坐标;若不存在,请说明理由.

(2001年黑龙江省中考题)

思路点拨 本例综合了直角坐标系、一元二次方程、圆等知识,对于(1),由 $\angle BOA = 90^\circ$,得 $AB = 13$,应用韦达定理可求 OA 、 OB 长;对于(2),求 C 点坐标转化为线段的计算;对于(3),先假设存在,求出 P 点到 x 轴的距离,解本例的关键在于能把握隐含条件,如特殊角、 C 点特殊位置、两直线位置关系.

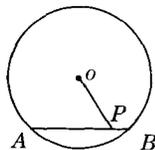


学力训练

基础夯实

1. D 是半径为 5cm 的 $\odot O$ 内一点,且 $OD = 3\text{cm}$,则过点 D 的所有弦中,最小弦 $AB =$ _____.

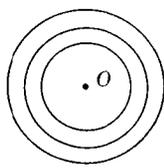
2. 如图, $\odot O$ 的直径为10,弦 $AB = 8$, P 是弦 AB 上的一个动点,那么 OP 的取值范围是_____.



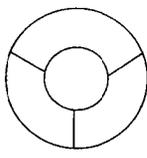
(2001年吉林省中考题)

3. 世界上因为有了圆的图案,万物才显得富有生机,以下来自现实生活的图形中都有圆:它们看上去多么美丽与和谐,这正是因为圆具有轴对称和中心对称性.

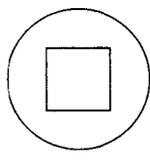
- (1) 请问以下三个图形中是轴对称图形的有_____,是中心对称图形的有_____ (分别用下面三个图的代号 a, b, c 填空).



a 一石激起千层浪

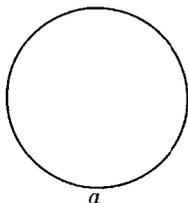


b 汽车方向盘

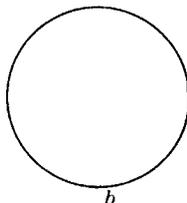


c 铜钱

- (2) 请你在下面的两个圆中,按要求分别画出与上面图案不重复的图案(草图).(用尺规画或徒手画均可,但要尽可能准确些,美观些).



a



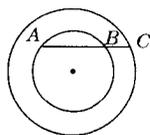
b

- a. 是轴对称图形但不是中心对称图形.
b. 既是轴对称图形又是中心对称图形.

4. 考查下列命题:①半圆是中心对称图形;②相等的圆周角所对的弧相等;③平分弦的直径垂直于弦;④圆内两条非直径的相交弦不能互相平分,其中正确的有().

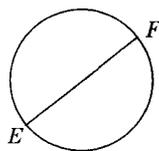
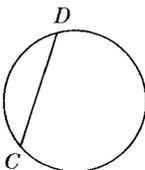
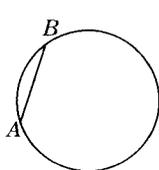
A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

5. 如图,以 O 为圆心的两个同心圆中,小圆的弦 AB 的延长线交大圆于点 C ,若 $AB = 3, BC = 1$,则与圆环的面积最接近的整数是().



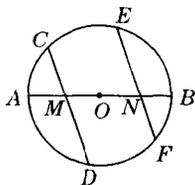
A. 9 B. 10
C. 15 D. 13

6. 如图,在三个等圆上各自有一条劣弧 \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 、 \widehat{EF} ,如果 $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{EF}$,那么 $AB + CD$ 与 EF 的大小关系是().

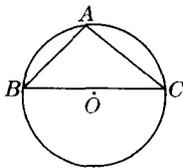


- A. $AB + CD = EF$ B. $AB + CD > EF$
C. $AB + CD < EF$ D. 不能确定

7. 如图, 过 $\odot O$ 的直径 AB 上两点 M, N , 分别作弦 CD, EF , 若 $CD \parallel EF, AC = BF$, 求证: (1) $\widehat{BEC} = \widehat{ADF}$; (2) $AM = BN$.

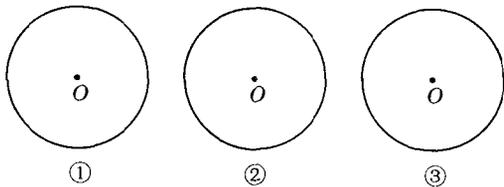


(第7题)



(第8题)

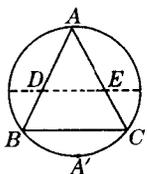
8. 如图, 已知等腰 $\triangle ABC$ 内接于半径为5的 $\odot O$ 中, $AB = AC$, 且 $\operatorname{tg} B = \frac{1}{3}$, 求(1) BC 的长; (2) AB 边上的高.
9. 不过圆心的直线 l 交 $\odot O$ 于 C, D 两点, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AE \perp l$, 垂足为 $E, BF \perp l$, 垂足为 F .
- (1) 在下面三个圆中分别补画出满足上述条件的具有不同位置关系的图形;
 - (2) 请你观察(1)中所画图形, 写出一个各图都具有的两条线段相等的结论(不再标注其它字母, 找结论的过程中所连辅助线不能出现在结论中, 不写推理过程);
 - (3) 请你选择(1)中的一个图形, 证明(2)所得出的结论.



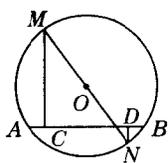
(2001年福州市中考题)

能力拓展

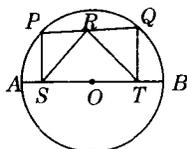
10. 以 AB 为直径作一个半圆, 圆心为 O, C 是半圆上一点, 且 $OC^2 = AC \cdot BC$, 则 $\angle CAB =$ _____.
11. 如图, 把正三角形 ABC 的外接圆对折, 使点 A 落在 \widehat{BC} 的中点 A' 上, 若 $BC = 5$, 则折痕在 $\triangle ABC$ 内的部分 DE 长为_____.
12. 如图, 已知 AB 为 $\odot O$ 的弦, 直径 MN 与 AB 相交于 $\odot O$ 内, $MC \perp AB$ 于 $C, ND \perp AB$ 于 D , 若 $MN = 20, AB = 8\sqrt{6}$, 则 $MC - ND =$ _____.



(第 11 题)



(第 12 题)



(第 13 题)

13. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, PQ 是 $\odot O$ 的弦, PQ 与 AB 不平行, R 是 PQ 的中点, 作 $PS \perp AB$, $QT \perp AB$, 垂足分别为 S 、 T ($S \neq T$), 并且 $\angle SRT = 60^\circ$, 则 $\frac{PQ}{AB} =$ _____.

(2000 年我爱数学初中生夏令营数学竞赛试题)

14. 如图 1, 在平面上, 给定了半径为 r 的圆 O , 对于任意点 P , 在射线 OP 上取一点 P' , 使得 $OP \cdot OP' = r^2$, 这种把点 P 变为点 P' 的变换叫作反演变换, 点 P 与点 P' 叫做互为反演点.

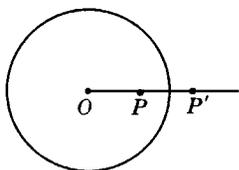


图 1

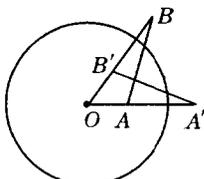


图 2

- (1) 如图 2, $\odot O$ 内外各有一点 A 和 B , 它们的反演点分别为 A' 和 B' , 求证: $\angle A' = \angle B$;
 (2) 如果一个图形上各点经过反演变换得到的反演点组成另一个图形, 那么这两个图形叫做互为反演图形.

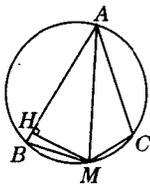
① 选择: 如果不经过点 O 的直线 l 与 $\odot O$ 相交, 那么它关于 $\odot O$ 的反演图形是().

A. 一个圆 B. 一条直线 C. 一条线段 D. 两条射线

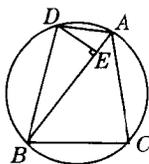
② 填空: 如果直线 l 与 $\odot O$ 相切, 那么它关于 $\odot O$ 的反演图形是 _____, 该图形与圆 O 的位置关系是 _____.

(2001 年南京市中考题)

15. 如图, $\odot O$ 的内接四边形 $ABMC$ 中, $AB > AC$, M 是 \widehat{BC} 的中点, $MH \perp AB$ 于点 H , 求证: $BH = \frac{1}{2}(AB - AC)$.



(第 15 题)



(第 16 题)

链接

阅读理解题的整体模式是: 阅读—理解—应用. 重点是阅读, 难点是理解, 关键是应用, 通过阅读, 对所提供的文字、符号、图形等进行分析 and 综合, 在理解的基础上制定解题策略.

16. 如图,已知圆内接 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, D 为 \widehat{BAC} 的中点, $DE \perp AB$ 于
 E ,求证: $BD^2 - AD^2 = AB \cdot AC$.

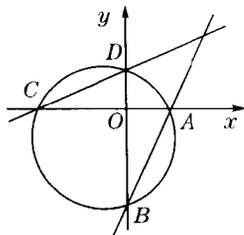
(天津市竞赛题)

综合创新

17. 如图,直线 $y = 3x - 6$ 与直线 $y = a(x + 3)$ 分别与 x 轴、 y 轴相交于
 A 、 B 、 C 、 D ,有一个圆恰好经过这四个点.

(1) 求 a 的值;

(2) 求该圆的圆心坐标.



19 转化灵活的圆中角

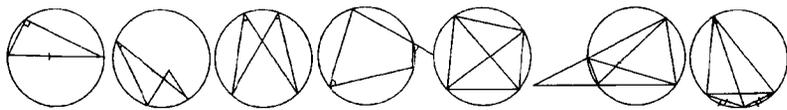
科学的灵感,决不是坐待可以等来的,只能给那些学有素养的人,给那些善于独立思考的人,给那些具有锲而不舍的精神的人.

知识纵横

角是几何图形中最重要的元素,证明两直线位置关系、运用全等三角形法、相似三角形法都要涉及角,而圆的特征,赋予角极强的活性,使得角能灵活地互相转化.

根据圆心角与圆周角的倍半关系,可实现圆心角与圆周角的转化;由同弧或等弧所对的圆周角相等,可将圆周角在大小不变的情况下,改变顶点在圆上的位置进行探索;由圆内接四边形的对角互补和外角等于内对角,可将与圆有关的角互相联系起来.

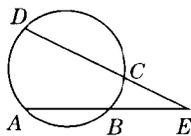
熟悉以下基本图形、基本结论.



例题求解

【例1】 如图, A, B, C, D 是圆上四点, AB, DC 延长线交于点 E , $\widehat{AD}, \widehat{BC}$ 分别为 $120^\circ, 40^\circ$, 则 $\angle E$ 等于_____.

思路点拨 连线, 将 $\angle E$ 的度数转化用圆周角表示, 值得探索的是, $\angle E$ 的度数能不能直接用 $\widehat{AD}, \widehat{BC}$ 表示呢?



链接

根据顶点、角的两边与圆的位置关系, 我们定义了圆心角与圆周角, 类似地, 当角的顶点在圆外或圆内, 我们可以定义圆外角与圆内角, 这两类角分别与它们的夹弧度数有怎样的关系? 读者可自行作一番探讨.

弧是联系与圆有关的角的中介, “由弧到角, 由角看弧”是促使与圆有关的角相互转化的基本方法.



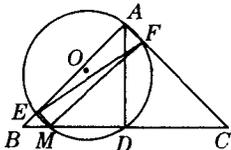
多重选择单选化是近年出现的一种新题型,解这类问题,需把条件重组与整合,挖掘隐含条件,作深入的探究,方能作出正确的选择.

【例2】 如图,已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, D 为斜边 BC 的中点,经过点 A, D 的 $\odot O$ 与边 AB, AC, BC 分别相交于点 E, F, M ,对于如下五个结论:① $\angle FMC = 45^\circ$; ② $AE + AF = AB$; ③ $\frac{ED}{EF} = \frac{BA}{BC}$; ④ $2BM^2 = BF \cdot BA$; ⑤ 四边形 $AEMF$ 为矩形.其中正确结论的个数是().

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

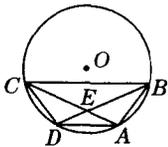
(2001年天津市中考题)

思路点拨 充分运用与圆有关的角,寻找特殊三角形、特殊四边形、相似三角形,逐一验证.



【例3】 如图,已知四边形 $ABCD$ 外接 $\odot O$ 的半径为5,对角线 AC 与 BD 的交点为 E ,且 $AB^2 = AE \cdot AC$, $BD = 8$,求 $\triangle ABD$ 的面积.

思路点拨 由条件出发,利用相似三角形、圆中角可推得 A 为 \widehat{BD} 中点,这是解本例的关键.

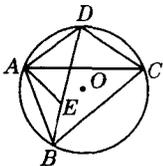


【例4】 如图,已知 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形, E 是 BD 上的一点,且有 $\angle BAE = \angle DAC$.

求证:(1) $\triangle ABE \sim \triangle ACD$;

(2) $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

思路点拨 图中有多对相似三角形,这样问题(2)就可以化为常规的比例线段的证明.



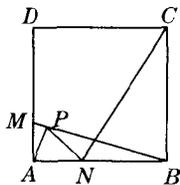
构造直径上 90° 的圆周角,是解与圆相关问题的常用辅助线,这样就为勾股定理的运用、相似三角形的判定创造了条件.

【例5】 如图,已知 M, N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 DA, AB 上,且

$AM = AN$, 过 A 作 BM 的垂线, 垂足为 P , 求证: $\angle APN = \angle BNC$.

(2001 年我爱数学初中夏令营数学竞赛题)

思路点拨 连 CP , 当从直线形的角度证明角相等困难时, 可利用圆证明, 图中虽没有圆, 但可以证明 P, N, B, C 在同一个圆上, 这是解本例的突破口.



有些几何问题虽然表面与圆无关, 但是若能发现隐含的圆, 尤其是能发现共圆的四点, 就能运用圆的丰富性质为解题服务, 确定四点共圆的主要方法有:

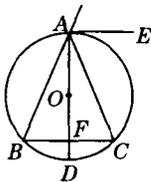
(1) 利用圆的定义判定;

(2) 利用圆内接四边形性质的逆命题判定.

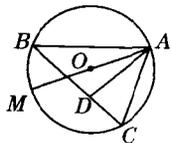
学力训练

基础夯实

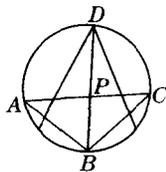
1. 一条弦把圆分成 2:3 两部分, 那么这条弦所对的圆周角的度数为 _____.
2. 如图, $\odot O$ 是等腰 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD, AE 分别是 $\angle BAC$ 及其邻补角的平分线, AD 交 $\odot O$ 于 D , 交 BC 于 F , 由这些条件直接写出六个正确的结论 _____ (不再连接其它线段). (2001 年湖北省荆州市中考题)
3. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD 是 BC 边上的高, 已知 $BD = 8, CD = 3, AD = 6$, 则直径 AM 的长为 _____.



(第 2 题)



(第 3 题)



(第 4 题)

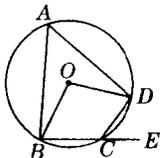
4. 如图, 圆内接四边形 $ABCD$ 中的两条对角线交于点 P , 已知 $AB = BC, CD = \frac{1}{2} BD = 1$, 设 $AD = x$, 则用 x 的代数式表示 $PA \cdot PC =$ _____.

5. 如图, $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, 延长 BC 到 E , 已知 $\angle BCD : \angle ECD = 3:2$, 那么 $\angle BOD$ 等于().

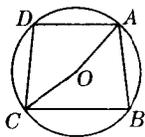
- A. 120° B. 136° C. 144° D. 150°

6. 如图, $\odot O$ 中, 弦 $AD \parallel DC$, $DA = DC$, $\angle AOC = 160^\circ$, 则 $\angle BOC$ 等于().

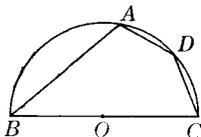
- A. 20° B. 30° C. 40° D. 50°



(第5题)



(第6题)



(第7题)

7. 如图, BC 为半圆 O 的直径, A, D 为半圆 O 上两点, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2$, 则 $\angle D$ 的度数为().

- A. 60° B. 120° C. 135° D. 150°

8. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle BAC = 45^\circ$, $BD \perp AC$ 于点 D , $AE \perp BC$ 于点 E , BD 交 AE 于点 H , AE 的延长线交 $\odot O$ 于点 G , 下列四个等式: $EH = EG$, $AH = BC$, $DH = DC$, $BD = AE$, 其中正确的个数为().

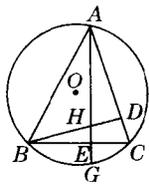
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 如图, $\odot O$ 的两条割线 AB, AC 分别交 $\odot O$ 于 D, B, E, C , 弦 $DF \parallel AC$ 交 BC 于 G .

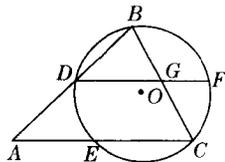
(1) 求证: $AC \cdot FG = BC \cdot CG$;

(2) 若 $CF = AE$, 求证: $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

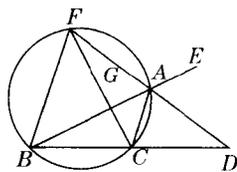
(2001年河南省中考题)



(第8题)



(第9题)



(第10题)

10. 如图, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle EAC$ 的平分线, 交 BC 的延长线于点 D , 延长 DA 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F , 连结 FB, FC .

(1) 求证: $FB = FC$;

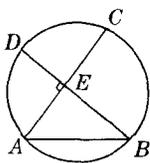
(2) 求证: $FB^2 = FA \cdot FD$;

(3) 若 AB 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径, $\angle EAC = 120^\circ$, $BC = 6\text{cm}$, 求 AD 的长.

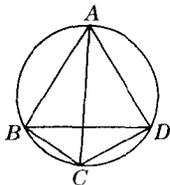
(2001年山西省中考题)

能力拓展

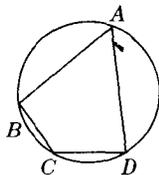
11. 如图, 已知 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$, 弦 AC 和 BD 交于点 E , $\angle AED = 90^\circ$, 则 $\angle B =$ _____.
12. 如图, 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AC = a$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.



(第 11 题)



(第 12 题)



(第 13 题)

13. 如图, 圆内接四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 3$, $CD = 2$, 则 $BC =$ _____.

(江苏省竞赛题)

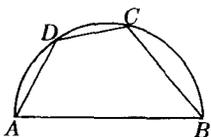
14. 如图, AB 是半圆的直径, D 是 \widehat{AC} 的中点, $\angle B = 40^\circ$, 则 $\angle A$ 等于 ().

- A. 60° B. 50° C. 80° D. 70°

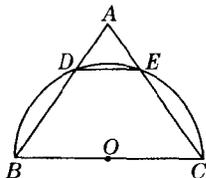
(重庆市竞赛题)

15. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, 以 BC 为直径的半圆 O 分别交 AB 、 AC 于 D 、 E 两点, 且 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形}DBCE} = 1 : 2$, 则 $\cos A =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



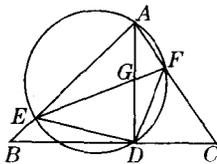
(第 14 题)



(第 15 题)

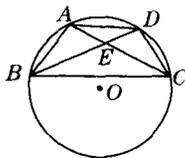
16. 如图, AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的高, $AB = AC$, 过 A 、 D 两点的圆与 AB 、 AC 分别相交于点 E 、 F , 弦 EF 与 AD 相交于点 G , 则图中与 $\triangle GDE$ 相似的三角形的个数为 ().

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

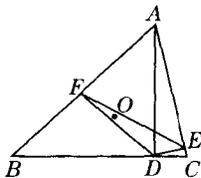


17. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 外接圆 $\odot O$ 的半径为 2, 对角线 AC 与 BD 的交点为 E , $AE = EC$, $AB = \sqrt{2}AE$, 且 $BD = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

(2000 年全国初中数学联赛题)



(第 17 题)



(第 18 题)

18. 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于 D , $DE \perp AC$ 于 E , $DF \perp AB$ 于 F , O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 求证:

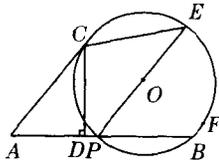
- (1) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$;
- (2) $AO \perp EF$.

(2001 年我爱数学初中生夏令营数学竞赛试题)

综合创新

19. 如图, 在半径为 1 的 $\odot O$ 中, PE 是直径,

$\widehat{PC} = \widehat{PB}$, 点 A 在 BP 的延长线上, $CD \perp AB$, 垂足为 D , 且 $AC \cdot CE = PE \cdot CD$.



- (1) 判断点 P 是否为线段 AB 的中点, 并证明你的结论;

- (2) 如果点 B 是半圆 \widehat{CmF} 上的动点 (不与定点 C 和 F 重合), 设 $PB = x$, $AC = y$, 求 y 与 x 的函数关系式, 写出自变量 x 的取值范围, 并画出函数的图象.

20 直线与圆

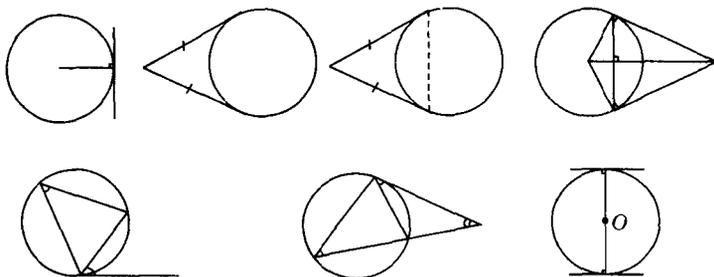
给我最大快乐的,不是已
懂的知识,而是不断地学习.

——高斯

知识纵横

直线与圆的位置有相交、相切、相离三种情形,既可从直线与圆交点的个数来判定,也可以从圆心到直线的距离与圆的半径的大小比较来考察.

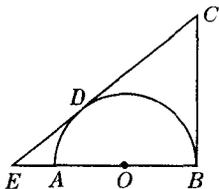
讨论直线与圆的位置关系的重点是直线与圆相切,直线与圆相切涉及切线(tangent line)的性质和判定、切线长定理、弦切角的概念和性质、切割线定理等丰富的知识,这些丰富的知识对应着以下基本图形、基本结论:



例题求解

【例1】 如图, AB 是半圆 O 的直径, CB 切 $\odot O$ 于 B , CD 切 $\odot O$ 于 D , 交 BA 的延长线于 E , 若 $EA = 1$, $ED = 2$, 则 BC 的长为_____.

思路点拨 从 C 点看, 可用切线长定理, 从 E 点看, 可用切割线定理, 而连 OD , 则 $OD \perp EC$, 又有相似三角形, 先求出 $\odot O$ 的半径.



链接

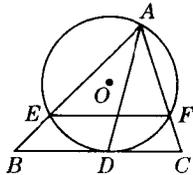
点与圆的位置关系和直线与圆的位置关系的确定有共同的精确判定方法, 即量化的方法(距离与半径的比较), 我们称“由数定形”, 勾股定理的逆定理也具有这一特点.

连结圆心与切点是一条常用的辅助线, 利用切线的性质可构造出直角三角形, 在圆的证明与计算中有广泛的应用.

【例2】 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\odot O$ 过点 A 且和 BC 相切于点 D , 和 AB 、 AC 分别交于点 E 、 F , 若 $BD = AE$, 且 $BE = a$, $CF = b$, 则 AF 的长为().

- A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}a$ C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$ D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}b$

思路点拨 利用与圆相关的角, 寻找相似三角形、发掘两直线位置关系, 建立 AF 的比例式.

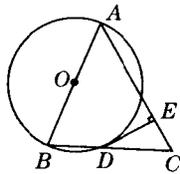


【例3】 如图, 以等腰 $\triangle ABC$ 的一腰 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于 D , 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E , 可得结论: DE 是 $\odot O$ 的切线.

问: (1) 若点 O 在 AB 上向点 B 移动, 以 O 为圆心, OB 为半径的圆的交 BC 于 D , $DE \perp AC$ 的条件不变, 那么上述结论是否还成立? 请说明理由;

(2) 如果 $AB = AC = 5\text{cm}$, $\sin A = \frac{3}{5}$, 那么圆心 O 在 AB 的什么位置时, $\odot O$ 与 AC 相切? (2001年黑龙江省中考题)

思路点拨 (1) 是结论探索题, (2) 是条件探索题, 从切线的判定方法和性质入手, 分别画图, 方能求解.

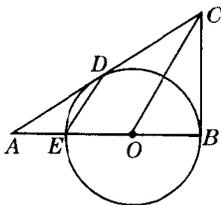


【例4】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, O 是 AB 上一点, 以 O 为圆心, OB 为半径的圆与 AB 交于点 E , 与 AC 切于点 D .

- (1) 求证: $DE \parallel OC$;
 (2) 若 $AD = 2$, $DC = 3$, 求 $\text{tg} \angle ADE$ 的值.

(2001年湖北省荆州市中考题)

思路点拨 对于(1), 有不同的添辅助线方法; 对于(2), 利用弦切角将 $\angle ADE$ 置换.



链接

判定一直线为圆的切线是平面几何中一种常见问题, 判定的基本方法有:

(1) 从直线与圆交点个数入手;

(2) 利用角证明, 即证明半径和直线垂直;

(3) 运用线段证明, 即证明圆心到直线的距离等于半径.

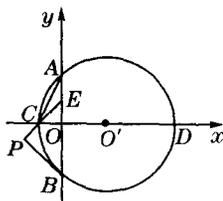
一个圆的问题, 从不同的条件出发, 可有不同的添辅助线方式, 进而可得不同的证法, 对于分层次设问的问题, 需整体考虑.

【例5】 如图,在直角坐标系中,以 $(a,0)$ 为圆心的 $\odot O'$ 与 x 轴交于 $C、D$ 两点,与 y 轴交于 $A、B$ 两点,连结 AC .

- (1) 点 E 在 AB 上, $EA = EC$,求证: $AC^2 = AE \cdot AB$;
- (2) 在(1)的结论下,延长 EC 到 P ,连结 PB ,若 $PB = PE$,试判断 PB 与 $\odot O'$ 的位置关系,并说明理由;
- (3) 如果 $a = 2$, $\odot O'$ 的半径为4,求(2)中直线 PB 的解析式.

(2001年河南省中考题)

思路点拨 对于(1),证明 $\triangle AEC \sim \triangle ACB$;对于(2),连 $O'B$,从确定 $\angle PBO'$ 的定数入手;对于(3),关键是求 $P、B$ 的坐标,将问题转化为求线段的长.



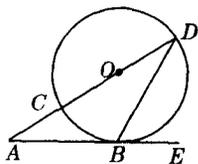
链接

本例将几何图形置于直角坐标系中,综合了圆的有关性质、相似三角形的判定与性质、切线的判定与性质、等边三角形的判定与性质等丰富的知识与性质,并结合了待定系数法、数形互助等思想方法,具有较强的选拔功能.

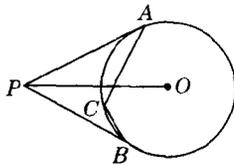
学力训练

基础夯实

1. 在直角坐标系中, $\odot M$ 的圆心坐标为 $(m,0)$,半径是2,如果 $\odot M$ 与 y 轴相切,那么 $m =$ _____ ;如果 $\odot M$ 与 y 轴相交,那么 m 的取值范围是_____ .
2. $PA、PB$ 切 $\odot O$ 于 $A、B$, $\angle APB = 78^\circ$,点 C 是 $\odot O$ 上异于 $A、B$ 的任意一点,则 $\angle ACB =$ _____ .
3. 如图,已知 CD 是 $\odot O$ 的直径, AE 切 $\odot O$ 于点 B , DC 的延长线交 AB 于点 A , $\angle A = 20^\circ$,则 $\angle DBE =$ _____ .



(第3题)



(第4题)

4. 如图, $PA、PB$ 是 $\odot O$ 的两条切线, $A、B$ 为切点, C 是 \widehat{AB} 上的一点,已知 $\odot O$ 的半径为 r , $PO = 2r$,设 $\angle PAC + \angle PBC = \alpha$, $\angle APB = \beta$,则

α, β 的大小关系为_____.

5. l_1, l_2 表示直线, 给出下列四个论断: ① $l_1 \parallel l_2$; ② l_1 切 $\odot O$ 于点 A; ③ l_2 切 $\odot O$ 于点 B; ④ AB 是 $\odot O$ 的直径. 若以其中三个论断作为条件, 余下的一个作为结论, 可以构造出一些命题, 在这些命题中, 正确命题的个数为().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

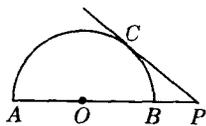
(2001 年江苏镇江市中考题)

6. 如图, AB 是半圆 O 的直径, P 是 AB 延长线上的一点, PC 切半圆 O 于点 C , 若 $\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$, 则 $\angle P$ 的度数是().
- A. 60° B. 45° C. 30° D. 15°

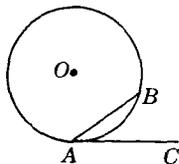
7. 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, AC 是 $\odot O$ 的切线, $\angle BAC = 60^\circ$, 则弦 AB 所对的圆周角等于().
- A. 60° B. 120° C. 150° D. 以上答案都不对

8. 如图, 圆内接 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACH$ 的平分线与圆交于 D 点, $DP \perp AC$ 于 P , $DH \perp BH$ 于 H , 下列结论: ① $CH = CP$; ② $\widehat{AD} = \widehat{DB}$; ③ $AP = BH$; ④ DH 为圆的切线, 其中一定成立的是().
- A. ①②④ B. ①③④ C. ②③④ D. ①②③

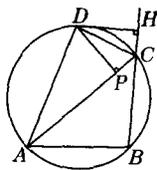
(2001 年武汉市中考题)



(第 6 题)

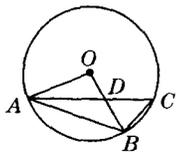


(第 7 题)

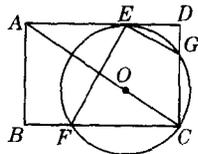


(第 8 题)

9. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 已知 $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\odot O$ 的半径为 1,
- (1) 求弦 AC, AB 的长;
- (2) 若 P 为 CB 的延长线上一点, 试确定 P 点的位置, 使 PA 与 $\odot O$ 相切, 并证明你的结论.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图, 矩形 $ABCD$, $AD = 8$, $DC = 6$, 在对角线 AC 上取一点 O , 以 OC 为半径的圆切 AD 于 E , 交 BC 于 F , 交 CD 于 G .

(1) 求 $\odot O$ 的半径 R ;

(2) 设 $\angle BFE = \alpha$, $\angle GED = \beta$, 请写出 $\alpha, \beta, 90^\circ$ 三者之间的关系 (只需写出一个), 并证明你的结论.

(2001 年吉林省中考题)

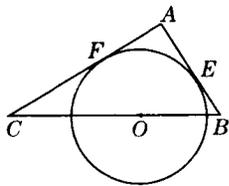
能力拓展

11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 若以 C 为圆心, R 为半径的圆与斜边 AB 只有一个公共点, 则 R 的取值范围是_____.

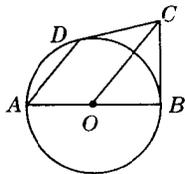
(2001 年江苏盐城市中考题)

12. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\odot O$ 分别与 AB, AC 相切于点 E, F , 圆心 O 在 BC 上, 若 $AB = a$, $AC = b$, 则 $\odot O$ 的半径等于_____.

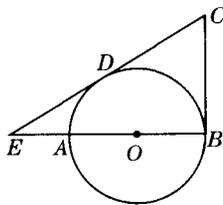
13. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是和 $\odot O$ 的相切于点 B 的切线, $\odot O$ 的弦 AD 平行于 OC , 若 $OA = 2$, 且 $AD + OC = 6$, 则 $CD =$ _____.



(第 12 题)



(第 13 题)



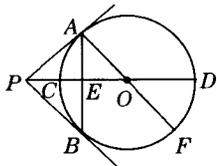
(第 14 题)

14. 如图, 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, CB 切 $\odot O$ 于 B , CD 切 $\odot O$ 于 D , 交 BA 的延长线于 E , 若 $AB = 3$, $ED = 2$, 则 BC 的长为().

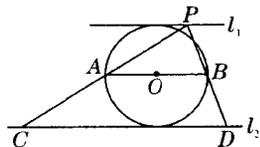
- A. 2 B. 3 C. 3.5 D. 4

15. 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 的两条切线, A, B 为切点, 直线 OP 交 $\odot O$ 于 C, D , 交 AB 于 E , AF 为 $\odot O$ 的直径, 下列结论: (1) $\angle ABP = \angle AOP$; (2) $\widehat{BC} = \widehat{DF}$; (3) $PC \cdot PD = PE \cdot PO$, 其中正确结论的个数有().

- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, l_1, l_2 是 $\odot O$ 的两条切线, 且 $l_1 \parallel AB \parallel l_2$, 若 P 是 l_1 上一点, 直线 PA, PB 交 l_2 于点 C, D , 设 $\odot O$ 的面积为 S_1 , $\triangle PCD$ 的面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = (\quad)$.

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{8}$

(2001 年安徽省中考题)

17. 如图, 已知 AB 为半圆 O 的直径, AP 为过点 A 的半圆的切线. 在 \widehat{AB} 上任取一点 C (点 C 与 A, B 不重合), 过点 C 作半圆的切线 CD 交 AP 于点 D ; 过点 C 作 $CE \perp AB$, 垂足为 E . 连结 BD , 交 CE 于点 F .

- (1) 当点 C 为 \widehat{AB} 的中点时 (如图 1), 求证: $CF = EF$;
 (2) 当点 C 不是 \widehat{AB} 的中点时 (如图 2), 试判断 CF 与 EF 的相等关系是否保持不变, 并证明你的结论.

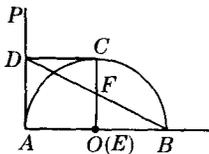


图 1

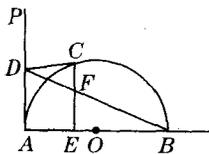
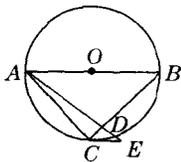


图 2

(2001 年苏州市中考题)

18. 如图, 在半径为 r 的 $\odot O$ 中, AB 为直径, C 为 \widehat{AB} 的中点, D 为 \widehat{CB} 的三分之一分点, 且 \widehat{DB} 的长等于两倍的 \widehat{CD} 的长; 连结 AD 并延长交 $\odot O$ 的切线 CE 于点 E (C 为切点), 求 AE 的长.

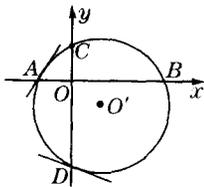


(2001 年河北省初中数学创新与知识应用竞赛试题)

综合创新

19. 如图, $\odot O'$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C, D 两点, 圆心 O' 的坐标是 $(1, -1)$, 半径是 $\sqrt{5}$,

- (1) 求 A, B, C, D 四点的坐标;
 (2) 求经过点 D 的切线的解析式;
 (3) 问过点 A 的切线与过点 D 的切线是



否垂直? 若垂直, 请写出证明过程; 若不垂直, 试说明理由.

21 从三角形的内切圆谈起

人与人之间、弱者与强者之间、大人物与小人物之间最大的差异就在于意志的力量，即所向无敌的决心，一个目标一旦确定，不在奋斗中死亡，就要在奋斗中成功。

——福韦尔·柏克斯顿

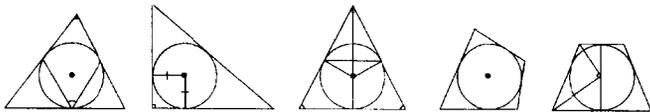
知识纵横

和多边形的各边都相切的圆叫做多边形的内切圆 (inscribed circle), 这个多边形叫做圆的外切多边形. 三角形的内切圆的圆心叫做这个三角形的内心 (incenter), 圆外切三角形、圆外切四边形有下列重要性质:

1. 三角形的内心是三角形的三内角平分线交点, 它到三角形的三边距离相等;

2. 圆外切四边形的两组对边之和相等, 其逆亦真, 是判定四边形是否有外切圆的主要方法.

当圆外切三角形、四边形是特殊三角形时, 就得到隐含丰富结论的下列图形:



例题求解

【例 1】 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 5$, $\odot O$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 AC 分相切于点 D 、 E 、 F , 若 $\odot O$ 的半径 $r = 2$, 则 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的周长为_____.

链接

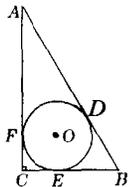
设 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的各边长分别为 a 、 b 、 c (斜边), 运用切线长定理、面积等知识可得到其内切圆半径的不同表示式:

$$(1) r = \frac{a+b-c}{2};$$

$$(2) r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

请读者给出证明.

思路点拨 $AF = AD, BE = BD$, 连 OE, OF , 则 $OECF$ 为正方形, 只需求出 AF (或 AD) 即可.

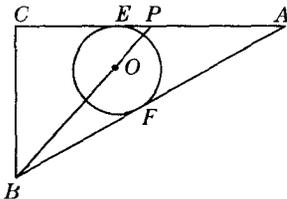


【例 2】 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 8\text{cm}, AB = 10\text{cm}$, 点 P 由点 C 出发以每秒 2cm 的速度沿着线段 CA 向点 A 运动 (不运动至 A 点), $\odot O$ 的圆心在 BP 上, 且 $\odot O$ 分别与 AB, AC 相切, 当点 P 运动 2 秒钟时, $\odot O$ 的半径是 ().

- A. $\frac{12}{7}\text{cm}$ B. $\frac{12}{5}\text{cm}$ C. $\frac{5}{3}\text{cm}$ D. 2cm

(2001 年浙江省绍兴市中考题)

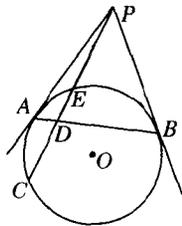
思路点拨 $CP = PA$, 设 $\odot O$ 半径为 r , 建立含 r 的等式, 综合运用比例线段、面积、切线性质等知识探索.



【例 3】 如图, PA, PB 是 $\odot O$ 的两条切线, PEC 是一条割线, D 是 AB 与 PC 的交点, 若 $PE = 2, CD = 1$, 求 DE 的长.

(国家理科实验班招生试题)

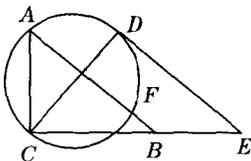
思路点拨 连 PO 交 AB 于 H , 设 $DE = x$, 利用切线长定理构造直角三角形, 综合运用圆中相关定理建立关于 x 的方程.



【例 4】 如图, 已知 $\angle ACE = \angle CDE = 90^\circ$, 点 B 在 CE 上, $CA = CB = CD$, 过 A, C, D 三点的圆交 AB 于 F , 求证: F 为 $\triangle CDE$ 的内心.

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 连 CF, DF , 即需证 F 为 $\triangle CDE$ 角平分线的交点, 充分利用与圆有关的角, 将问题转化为角相等问题的证明.



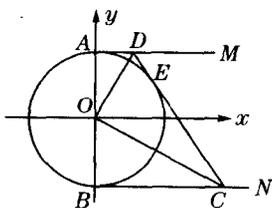
连接

类似地, 三角形三条中线的交点叫三角形的重心, 三角形三边高所在的直线的交点叫三角形的垂心. 外心、内心、垂心、重心统称三角形的四心, 它们处在三角形中的特殊位置上, 有着丰富的性质, 在解题中有广泛的应用.

【例 5】 如图,以坐标原点 O 为圆心,6 为半径的圆交 y 轴于 A 、 B 两点. AM 、 BN 为 $\odot O$ 的切线, D 是切线 AM 上一点(D 与 A 不重合), DE 切 $\odot O$ 于点 E ,与 BN 交于点 C ,且 $AD < BC$. 设 $AD = m$, $BC = n$.

- (1) 求 $m \cdot n$ 的值;
- (2) 若 m 、 n 是方程 $2t^2 - 30t + k = 0$ 的两根,求:
 - ① $\triangle COD$ 的面积;
 - ② CD 所在直线的解析式;
 - ③ 切点 E 的坐标.

思路点拨 本例是建立在直角坐标系中的几何与方程、函数的综合题,发现隐含的“两底之和等于非直角腰的直角梯形”,进而可得多个直角三角形,多对相似三角形,这是解本例的关键,直线 CD 与 x 、 y 轴各有一个交点,这样 CD 上共有五个点的坐标可求,从而 CD 所在直线解析式有多种求法.



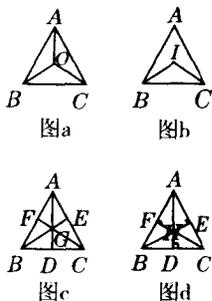
链接

(1) 如图 a, 设 O 为 $\triangle ABC$ 外心, 则 $OA = OB = OC$, $\angle BOC = 2\angle A$.

(2) 如图 b, 设 I 为 $\triangle ABC$ 内心, 则 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

(3) 如图 c, 设 G 为 $\triangle ABC$ 重心, 则 $\frac{BG}{GE} = \frac{AG}{GD} = \frac{CG}{GF} = 2$.

(4) 如图 d, 设 H 为 $\triangle ABC$ 垂心, 则图中有多组四点共圆点.



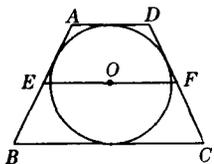
学 力 训 练

基础夯实

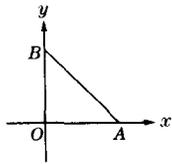
1. 如图, 已知圆外切等腰梯形 $ABCD$ 的中位线 $EF = 15\text{cm}$, 那么等腰梯形 $ABCD$ 的周长等于 $=$ _____ cm .
2. 如图, 在直角坐标系中, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(3, 0)$ 、 $(0, 4)$, 则

Rt $\triangle ABO$ 内心的坐标是_____.

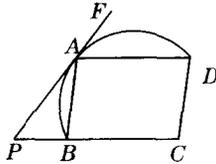
3. 如图, $\square ABCD$ 的 A, B, D 三点在 \widehat{BD} 上, 过点 A 的切线 FA 交 CB 的延长线于 P , 如果 $AB = \frac{1}{2}BC$, $S_{\square ABCD} = 8$, 那么 $S_{\triangle APB} =$ _____.



(第1题)



(第2题)



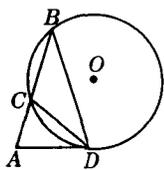
(第3题)

4. 如图, 在 $\triangle ABD$ 中, $AB = BD$, $\angle A = 2\angle B$, $\odot O$ 过 B, C 两点, 且与 AD 切于 D , 与 AB 交于 C , 设 $DC = x$, $AB = y$, 则 $x:y$ 是().

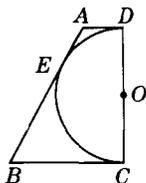
- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

5. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, 以 CD 为直径的半圆 O 切 AB 于点 E , 这个梯形的面积为 21cm^2 , 周长为 20cm , 那么半圆 O 的半径为().

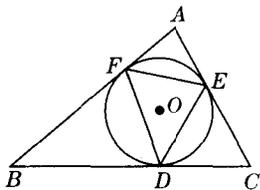
- A. 3cm B. 7cm C. 3cm 或 7cm D. 2cm



(第4题)



(第5题)

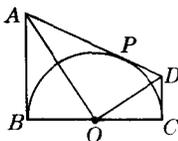


(第6题)

6. 如图, $\triangle ABC$ 中, 内切圆 O 和边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F , 则以下四个结论中, 错误的结论是().

- A. 点 O 是 $\triangle DEF$ 的外心 B. $\angle AFE = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$
 C. $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ D. $\angle DFE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$

7. 如图, BC 是 $\odot O$ 的直径, AB, AD 是 $\odot O$ 的切线, 切点分别为 B, P , 过 C 点的切线与 AD 交于点 D , 连结 AO, DO .

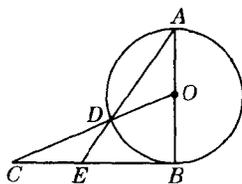


(1) 求证: $\triangle ABO \sim \triangle OCD$;

(2) 若 AB, CD 是关于 x 的方程 $x^2 - \frac{5}{2}(m-1)x$ (第7题)

$+ (m-1)^2 = 0$ 的两个实数根, 且 $S_{\triangle ABO} + S_{\triangle OCD} = 20$, 求 m 的值.

8. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是 $\odot O$ 的切线, OC 与 $\odot O$ 相交于点 D , 连结 AD 并延长, 与 BC 相交于点 E .



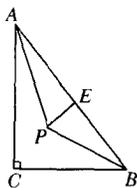
- (1) 若 $BC = \sqrt{3}$, $CD = 1$, 求 $\odot O$ 的半径;
- (2) 取 BE 的中点 F , 连结 DF , 求证: DF 是 $\odot O$ 的切线;
- (3) 过 D 点作 $DG \perp BC$ 于 G , OE 与 DG 相交于点 M , 求证: $DM = GM$.

继续

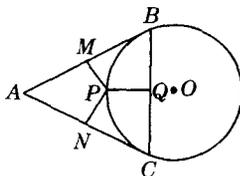
第 8 题是一道有关圆的综合题, 有求解, 有证明, 有探索, 由于设问多, 应分别画出每一问的图形, 以便理清思路, 各个击破, 最后达到求解的目的.

能力拓展

9. 若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 则以 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ 为三边的 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r 与外接圆半径 R 之和为 _____.
10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 和 $\angle B$ 的平分线相交于 P 点, 又 $PE \perp AB$ 于点 E , 若 $BC = 2$, $AC = 3$, 则 $AE \cdot EB =$ _____.



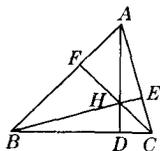
(第 10 题)



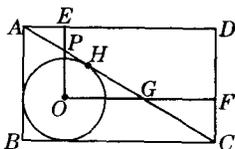
(第 11 题)

11. 如图, 直线 AB 和 AC 与 $\odot O$ 分别相切于 B 、 C 两点, P 为圆上一点, $PM \perp AB$ 于 M , $PN \perp AC$ 于 N , $PQ \perp BC$ 于 Q , 若 $PM = 4\text{cm}$, $PN = 6\text{cm}$, 则 $PQ =$ _____ cm . (全国初中数学联赛试题)
12. 如果一个三角形的面积和周长都被一直线所平分, 那么该直线必通过这个三角形的().
 A. 内心 B. 外心 C. 圆心 D. 重心
13. 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高 AD 、 BE 、 CF 交于 H , 在 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 H 七个点中, 能组成四点共圆的组数是().
 A. 4 组 B. 5 组 C. 6 组 D. 7 组

(2000 年太原市竞赛题)



(第 13 题)



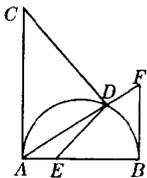
(第 14 题)

14. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,连结 AC ,如果 O 为 $\triangle ABC$ 的内心,过 O 作 $OE \perp AD$ 于 E ,作 $OF \perp CD$ 于 F ,则矩形 $OFDE$ 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积的比值为().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 不能确定

(《学习报》公开赛试题)

15. 如图, AB 是半圆的直径, AC 为半圆的切线, $AC = AB$. 在半圆上任取一点 D , 作 $DE \perp CD$, 交直线 AB 于点 E , $BF \perp AB$, 交线段 AD 的延长线于点 F .



- (1) 设 \widehat{AD} 是 x° 的弧, 并要使点 E 在线段 BA 的延长线上, 则 x 的取值范围是_____;
- (2) 不论 D 点取在半圆什么位置, 图中除 $AB = AC$ 外, 还有两条线段一定相等, 指出这两条相等的线段, 并予以证明.

16. 如图, $\triangle ABC$ 的三边满足关系 $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$, O, I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、内心, $\angle BAC$ 的外角平分线交 $\odot O$ 于 E , AI 的延长线交 $\odot O$ 于 D , DE 交 BC 于 H .



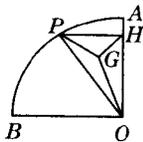
求证: (1) $AI = BD$;

(2) $OI = \frac{1}{2}AE$.

(2001 年湖北省选拔赛试题)

综合创新

17. 如图, 已知点 P 在半径为 6, 圆心角为 90° 的扇形 OAB 的 \widehat{AB} (不含端点) 上运动, $PH \perp OA$ 于 H , $\triangle OPH$ 的重心为 G .



- (1) 当点 P 在 \widehat{AB} 上运动时, 线段 GO, GP, GH 中有无长度保持不变的线段? 如果有, 请指出并求出其相应的长度;
- (2) 设 $PH = x, GP = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并指出自变量 x 的取值范围;
- (3) 如果 $\triangle PGH$ 为等腰三角形, 试求出线段 PH 的长.

(2001 年天津赛区选拔赛试题)

22 圆幂定理

一个没有创造力,只知道循规蹈矩、亦步亦趋的人就是一个没有个性的人,许多人高喊着要追求个性,要想成为真正有个性的人、独树一帜的人,就必须加强创造力的培养.

知识纵横

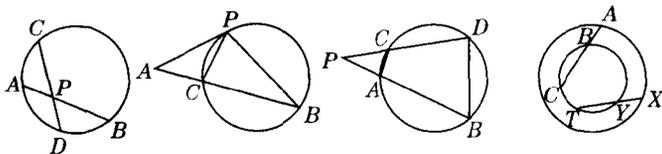
相交弦定理、切割线定理、割线定理统称为圆幂定理.圆幂定理实质上是反映两条相交直线与圆的位置关系的性质定理,其本质是与比例线段有关.

相交弦定理、切割线定理、割线定理有着密切的联系,主要体现在:

1. 用运动的观点看,切割线定理、割线定理是相交弦定理另一种情形,即移动圆内两条相交弦使其交点在圆外的情况;

2. 从定理的证明方法看,都是由一对相似三角形得到的等积式.

熟悉以下基本图形、基本结论:

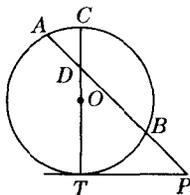


例题求解

【例1】 如图, PT 切 $\odot O$ 于点 T , PA 交 $\odot O$ 于 A 、 B 两点, 且与直径 CT 交于点 D , $CD = 2$, $AD = 3$, $BD = 6$, 则 $PB =$ _____.

(2001年成都市中考题)

思路点拨 综合运用圆幂定理、勾股定理求 PB 长.



链接

比例线段是几何中一个重要问题,比例线段的学习是一个由一般到特殊、不断深化的过程,大致经历了四个阶段:

(1) 平行线分线段对应成比例;

(2) 相似三角形对应边成比例;

(3) 直角三角形中的比例线段可以用积的形式简捷地表示出来;

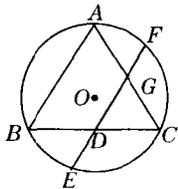
(4) 圆中的比例线段通过圆幂定理明快地反映出来.

【例2】如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形, 弦 EF 经过 BC 的中点 D , 且 $EF \parallel AB$, 若 $AB = 2$, 则 DE 的长是().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

(安徽省中考题)

思路点拨 由相交弦定理得 $BD \cdot DC = DE \cdot DF$, 关键是把 DF 用 DE 的代数式表示.



圆中线段的计算, 常常需要综合相似三角形、直角三角形、圆幂定理等知识, 通过代数化获解, 加强对图形的分解, 注重信息的重组与整合是解圆中线段计算问题的关键.

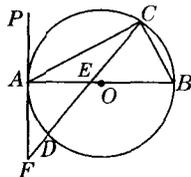
【例3】如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 是过 A 点的直线, $\angle PAC = \angle B$.

(1) 求证: PA 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如果弦 CD 交 AB 于 E , CD 的延长线交 PA 于 F , $AC = 8$, $CE : ED = 6 : 5$, $AE : EB = 2 : 3$, 求 AB 的长和 $\angle ECB$ 的正切值.

(2001年北京市海淀区中考题)

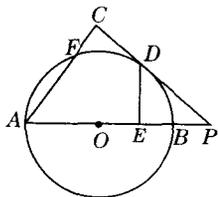
思路点拨 直径、切线对应着与圆相关的丰富知识. (1)问的证明为切割线定理的运用创造了条件; 引入参数 x, k 处理(2)问中的比例式, 把相应线段用 x, k 的代数式表示, 并寻找 x 与 k 的关系, 建立 x 或 k 的方程.



【例4】如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 过 AB 的延长线上一点 P , 作 PC 切 $\odot O$ 于 D , $DE \perp AB$ 于 E , $AC \perp PC$ 于 C 且交 $\odot O$ 于 F . 求证: $AE \cdot EB = AC \cdot CF$

(2001年湖北省荆门市中考题)

思路点拨 用相似三角形证明有困难, 由待证式的特点联想圆幂定理, 这样可巧妙地转化问题.



圆中的许多问题, 若图形中有适用圆幂定理的条件, 则能化解问题的难度, 而圆中线段等积式是转化问题的桥梁.

需要注意的是, 圆幂定理的运用不仅局限于计算及比例线段的证明, 可拓展到平面几何各种类型的问题中.

【例5】 如图1,已知 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过点A和点B,直线PQ切 $\odot O$ 于点P,交 $\odot O'$ 于点Q、M,交AB的延长线于点N.

(1) 求证: $PN^2 = NM \cdot NQ$.

(2) 若M是PQ的中点,设 $MQ = x$, $MN = y$,求证: $x = 3y$.

(3) 若 $\odot O'$ 不动,把 $\odot O$ 向右或向左平移,分别得到图2、图3、图4,请你判断(直接写出判断结论,不需证明):

① (1)题结论是否仍然成立?

② 在图2中,(2)题结论是否仍然成立? 在图3、图4中,若将(2)题条件改为:M是PN的中点,设 $MQ = x$, $MN = y$,则 $x = 3y$ 的结论是否仍然成立?

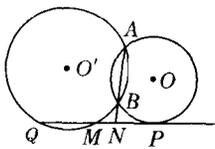


图1

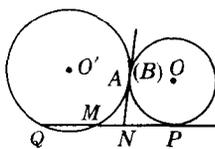


图2

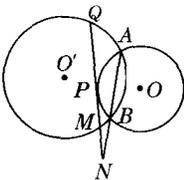


图3

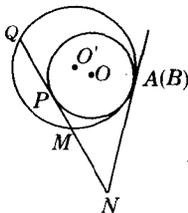


图4

(2001年济南市中考题)

思路点拨 对于(1),从N点看 $\odot O'$ 、 $\odot O$ 可运用切割线定理,割线定理;对于(2),将 x 、 y 代入(1)并化简可导出结论;对于(3),运用对运动变化趋势的观察,注意与图(1)在条件上的比较,从而作出判断.

链接

本例为我们设计了一个动态型数学情景下进行发现、类比并推理的过程,这类问题是间接地从特殊情形入手,再到一般情形,然后对结论进行总结分析,再归纳,猜想,概括结论.

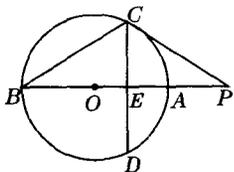
学力训练

基础夯实

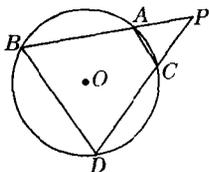
1. 如图,PC切 $\odot O$ 于点C,割线经过圆心O,弦 $CD \perp AB$ 于E,PC=4,

$PB = 8$, 则 $PA = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sin \angle P = \underline{\hspace{2cm}}$, $CD = \underline{\hspace{2cm}}$.

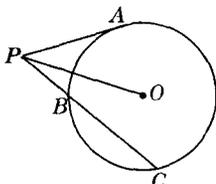
2. 如图, PAB 、 PCD 为 $\odot O$ 的两条割线, 若 $PA = 5$, $AB = 7$, $CD = 11$, 则 $AC:BD = \underline{\hspace{2cm}}$.



(第1题)



(第2题)



(第3题)

3. 如图, PA 切 $\odot O$ 于 A , PBC 是 $\odot O$ 的割线, 若 $\odot O$ 的半径为 8, $PB = 4$, $PC = 9$, 则 $PA = \underline{\hspace{2cm}}$.

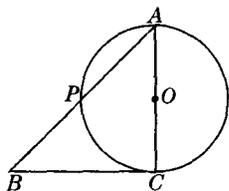
4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$, 以 AC 为直径作圆与斜边交于点 P , 则 BP 的长为().

A. 6.4 B. 3.2 C. 3.6 D. 8

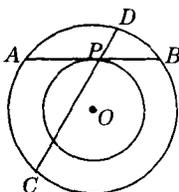
(2001 年苏州市中考题)

5. 如图, 两个同心圆, 大圆的弦 AB 与小圆相切于点 P , 大圆的弦 CD 经过点 P , 且 $CD = 13$, $PD = 4$, 则两圆组成的圆环的面积为().

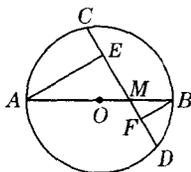
A. 16π B. 36π C. 52π D. 81π



(第4题)



(第5题)



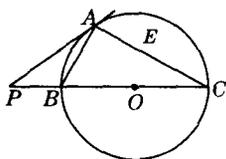
(第6题)

6. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 交于点 M , $AE \perp CD$, $BF \perp CD$, 若 $CM = 4$, $MD = 3$, $BF:AE = 1:3$, 则 $\odot O$ 的半径是().

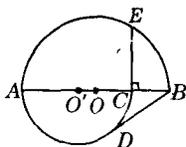
A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

7. 如图, PA 与 $\odot O$ 相切于点 A , PBC 是过圆心 O 的割线, $PA = 6$, $PB = 3$, (1) 求 $\odot O$ 的半径; (2) 求证: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$; (3) 求 AB 的长.

(2001 年江苏省徐州市中考题)



(第7题)



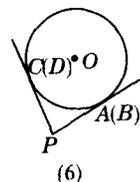
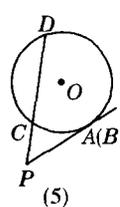
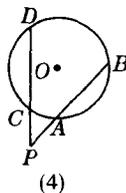
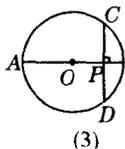
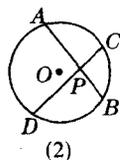
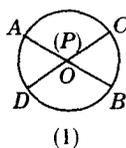
(第8题)

8. 如图,已知 AB 是半圆 O 的直径, C 为 AB 上一点, AC 为半圆 O' 的直径, BD 切半圆 O' 于 D , $CE \perp AB$ 交半圆 O 于点 E .

(1) 求证: $BD = BE$;

(2) 若两圆半径的比为 $3:2$, 试判断 $\angle EBD$ 是直角、锐角、还是钝角? 并给出证明.

9. (1) 经过 $\odot O$ 内或 $\odot O$ 外一点 P 作两条直线交 $\odot O$ 于 A, B 和 C, D 四点(在图(5)、(6)中,有重合的点),得到了如图(1)~(6)所表示的六种不同情况. 在六种不同情况下, PA, PB, PC, PD 四条线段之间在数量上满足的关系式可以用同一个式子表示出来, 请你首先写出这个式子, 然后只就如图(2)所示的圆内两条弦相交的一般情况, 给出它的证明;

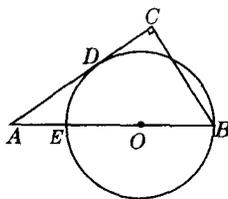


(2) 已知 $\odot O$ 的半径为一定值 r , 若点 P 是不在 $\odot O$ 上的一个定点, 请你过点 P 任作一直线交 $\odot O$ 于不重合的两点 E, F , $PE \cdot PF$ 的值是否为定值? 为什么? 由此你发现了什么结论? 请你把这一结论用文字叙述出来.

(2000 年济南市中考题)

能力拓展

10. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, O 为 AB 上一点, 以 O 为圆心, OB 为半径的圆与 AB 相交于点 E , 与 AC 相切于点 D , 已知 $AD = 2$, $AE = 1$, 那么 $BC =$ _____.

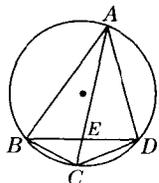


(2001 年山东省临沂市中考题)

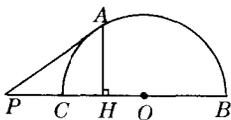
11. 如图, 已知 A, B, C, D 在同一个圆上, $BC = CD$, AC 与 BD 交于 E , 若 $AC = 8, CD = 4$, 且线段 BE, ED 为正整数, 则 $BD =$ _____.

12. 如图, P 是半圆 O 的直径 BC 延长线上一点, PA 切半圆于点 A , $AH \perp BC$ 于 H , 若 $PA = 1, PB + PC = a (a > 2)$, 则 $PH =$ ().

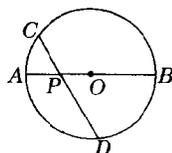
- A. $\frac{2}{a}$ B. $\frac{1}{a}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$



(第 11 题)



(第 12 题)



(第 13 题)

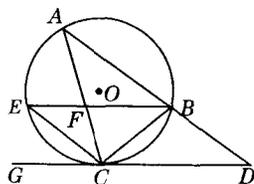
13. 如图, P 是直径 AB 上的一点, 且 $PA = 2\text{cm}, PB = 6\text{cm}$, CD 为过 P 点的弦, 那么下列 PC 与 PD 的长度, 符合题意的是 ().

- A. $1\text{cm}, 12\text{cm}$ B. $7\text{cm}, \frac{12}{7}\text{cm}$ C. $3\text{cm}, 5\text{cm}$ D. $3\text{cm}, 4\text{cm}$

14. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 的延长线与过 C 点的切线 GC 相交于点 D , BE 与 AC 相交于点 F , 且 $CB = CE$.

求证: (1) $BE \parallel DG$;

(2) $CB^2 - CF^2 = BF \cdot FE$.



(2001 年天津市中考题)

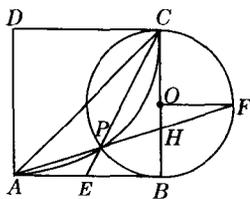
15. 已知: 如图, $ABCD$ 为正方形, 以 D 点为圆心, AD 为半径的圆弧与以 BC 为直径的 $\odot O$ 相交于 P, C 两点, 连结 AC, AP, CP , 并延长 CP, AP 分别交 $AB, BC, \odot O$ 于 E, H, F 三点, 连结 OF .

(1) 求证: $\triangle AEP \sim \triangle CEA$;

(2) 判断线段 AB 与 OF 的位置关系, 并证明你的结论;

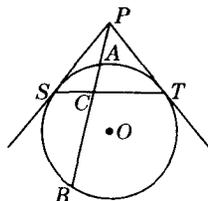
(3) 求 $BH:HC$.

(2001 年四川省中考题)



16. 如图, 已知点 P 是 $\odot O$ 外一点, PS, PT 是 $\odot O$ 的两条切线, 过点 P 作 $\odot O$ 的割线 PAB , 交 $\odot O$ 于 A, B 两点, 与 ST 交于点 C . 求证:

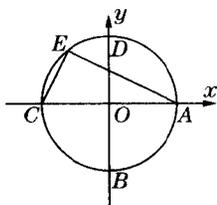
$$\frac{1}{PC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} \right).$$



(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

综合创新

17. 已知:如图,在直角坐标系中,以坐标原点为圆心、半径为 1 的圆与坐标轴分别交于 A 、 B 、 C 、 D 四点, E 是 \widehat{CD} 上一点且 $\widehat{CE} = \frac{2}{3}\widehat{CD}$.



- (1) 求 E 点的坐标;
- (2) 求出以 y 轴为对称轴且经过 E 点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的一个解析式;
- (3) 在圆周上(除 E 点外)是否还存在这样的点,使过此点的圆的切线与两坐标轴的交点和原点 O 构成的三角形与 $\triangle ACE$ 相似? 若存在,求满足条件所有点的坐标;若不存在,请说明理由.

23 圆与圆

要想获得真理和知识, 惟
有两件武器, 那就是清晰的直
觉和严格的演绎.

——笛卡尔

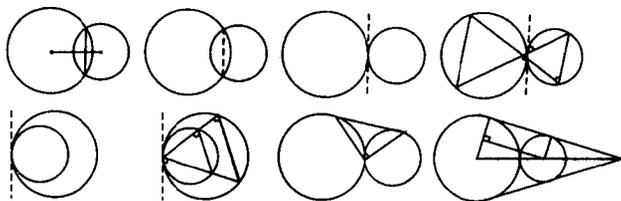
知识纵横

圆与圆的位置关系有外离、外切、相交、内切、内含五种情形, 判定两圆的位置关系有如下三种方法:

1. 通过两圆交点的个数确定;
2. 通过两圆的半径与圆心距的大小量化确定;
3. 通过两圆的公切线的条数确定.

为了沟通两圆, 常常添加与两圆都有联系的一些线段, 如公共弦、公切线、连心线, 以及两圆公共部分相关的角和线段, 这是解圆与圆位置关系问题的常用辅助线.

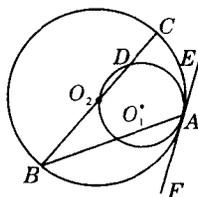
熟悉以下基本图形、基本结论:



例题求解

【例1】 如图, $\odot O_1$ 与半径为 4 的 $\odot O_2$ 内切于点 A , $\odot O_1$ 经过圆心 O_2 , 作 $\odot O_2$ 的直径 BC 交 $\odot O_1$ 于点 D , EF 为过点 A 的公切线, 若 $O_2D = 2\sqrt{2}$, 那么 $\angle BAF =$ _____ 度. (2001 年重庆市中考题)

思路点拨 直径、公切线、 O_2 的特殊位置等, 隐含丰富的信息, 而连 O_2O_1 必过 A 点, 先求出 $\angle DO_2A$ 的度数.



链接

两圆相切或相交时, 公切线或公共弦是重要的类似于“桥梁”的辅助线, 它可以使弦切角与圆周角、圆内接四边形的内角与外角得以沟通. 同时, 又是生成圆幂定理的重要因素.

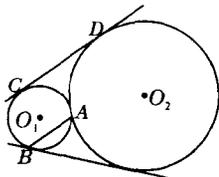
涉及两圆位置关系的计算题, 常作半径、连心线, 结合切线性质等构造直角三角形, 将分散的条件集中, 通过解直角三角形求解.

【例2】 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 A , 两圆的一条外公切线与 $\odot O_1$ 相切于点 B , 若 AB 与两圆的另一条外公切线平行, 则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径之比为().

- A. 2:5 B. 1:2 C. 1:3 D. 2:3

(2002年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 添加辅助线, 要探求两半径之间的关系必须求出 $\angle CO_1O_2$ (或 $\angle DO_2O_1$) 的度数, 为此需寻求 $\angle CO_1B$ 、 $\angle CO_1A$ 、 $\angle BO_1A$ 的关系.

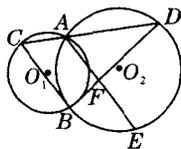


【例3】 如图, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点, 过 B 点作 $\odot O_1$ 的切线交 $\odot O_2$ 于 D 点, 连结 DA 并延长与 $\odot O_1$ 相交于 C 点, 连结 BC , 过 A 点作 $AE \parallel BC$ 与 $\odot O_2$ 相交于 E 点, 与 BD 相交于 F 点.

- (1) 求证: $EF \cdot BC = DE \cdot AC$;
 (2) 若 $AD = 3$, $AC = 1$, $AF = \sqrt{3}$, 求 EF 的长.

(2001年武汉市中考题)

思路点拨 对于(1), 连 AB , 通过相似三角形证明; 对于(2), 利用(1)的结论, 先求出 BC 、 DE 长.

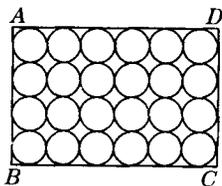


【例4】 一种外形为圆柱体的易拉罐饮料, 它的底面直径为 6cm, 高为 10cm, 单层直立码放在长方形的纸箱内, 每箱 4 行, 每行 6 个, 易拉罐的底面印在箱底的痕迹如图所示.

(1) 请你设计两种节约纸板的码放方案, 使包装箱为长方体, 每箱装 24 个, 可以改变它的长和宽, 高仍为 10cm, 把你的设计方案用示意图画出, 可以附必要的文字说明.

(2) 某饮料厂的一条流水线每天生产这样的易拉罐饮料 6×10^4 个, 按照你设计的方案分别比原来节约多少纸板(不计包装箱纸板的重叠部分)?

思路点拨 图示的是一种“井”字形排法, 依“品”字形排法可得到新的设计方案, 通过计算可得出哪种排法更省空间.



链接

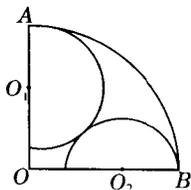
本例集面积计算、解直角三角形、圆与圆的位置关系、图案设计于一体, 考查阅读理解、计算和动手设计能力, 不仅趣味性、应用性、创造性强, 还向我们渗透了美的设计理念.

【例5】 如图, AOB 是半径为 1 的单位圆的四分之一, 半圆 O_1 的圆心 O_1 在 OA 上, 并与 \widehat{AB} 内切于点 A , 半圆 O_2 的圆心 O_2 在 OB 上, 并与 \widehat{AB} 内切于点 B , 半圆 O_1 与半圆 O_2 相切, 设两半圆的半径之和为 x , 面积之和为 y .

- (1) 试建立以 x 为自变量的函数 y 的解析式;
- (2) 求函数 y 的最小值.

(2000 年太原市竞赛题)

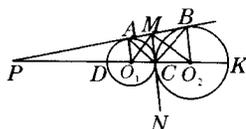
思路点拨 设两圆半径分别为 R, r , 对于 (1), $y = \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2)$, 通过变形把 $R^2 + r^2$ 用“ $x = R + r$ ”的代数式表示, 作出基本辅助线; 对于 (2), 因 $x = R + r$, 故是在约束条件下求 y 的最小值, 解题的关键是求出 $R + r$ 的取值范围.



连接

如图, 半径分别为 r, R 的 $\odot O_1, \odot O_2$ 外切于 C , AB, CM 分别为两圆的公切线, $O_1 O_2$ 与 AB 交于 P 点, 则:

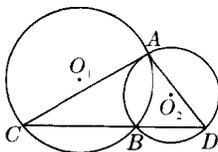
- (1) $AB = 2\sqrt{Rr}$;
- (2) $\angle ACB = \angle O_1 M O_2 = 90^\circ$;
- (3) $PC^2 = PA \cdot PB$;
- (4) $\sin P = \frac{R-r}{R+r}$;
- (5) 设 C 到 AB 的距离为 d , 则 $\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{2}{d}$.



学力训练

基础夯实

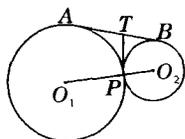
1. 已知: $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 交于 A, B 两点, 且 $\odot O_1$ 经过点 O_2 , 若 $\angle AO_1 B = 90^\circ$, 则 $\angle AO_2 B$ 的度数是_____.
2. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切, 半径分别为 1cm 和 3cm, 那么半径为 5cm 且与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都相切的圆一共可以作出_____个.
3. 如图, 两圆相交于 A, B 两点, 过点 B 的直线与两圆分别交于 C, D , 若 $\odot O_1$ 的半径为 $\sqrt{5}$, $\odot O_2$ 的半径为 2, 则 $AC:AD =$ _____.



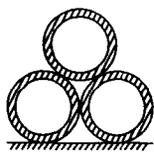
4. 如图, 内公切线 PT 与 AB 交于点 T , 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为 3 和 4, 则 $PT =$ _____.

5. 如图, 施工工地的水平地面上, 有三根外径都是 1 米的水泥管两两相切擦在一起, 则其最高点到地面的距离是().

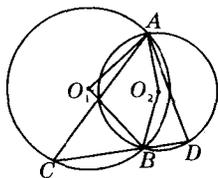
- A. 2 B. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$



(第 4 题)



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A, B 两点, $\angle AO_1B + \angle AO_2B = 250^\circ$, 过 B 作割线交 $\odot O_1$ 于 C , 交 $\odot O_2$ 于 D , 连 AC, AD , 则 $\angle CAD$ 等于 ().

- A. 65° B. 55° C. 45° D. 35°

7. 已知两圆的半径分别为 3 与 5, 圆心距为 x , 且 $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$, $|x-4| = 4-x$, 则两圆的公切线共有().

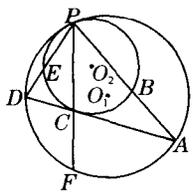
- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

8. 两圆的半径分别是 R 和 r ($R > r$), 圆心距为 d , 若关于 x 的方程 $x^2 - 2rx + (R-d)^2 = 0$ 有两个相等的实数根, 则两圆的位置关系是 ().

- A. 一定内切 B. 一定外切
C. 相交 D. 内切或外切

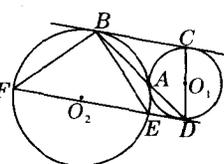
(2001 年连云港市中考题)

9. 如图, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切于点 P , 过点 P 的直线交 $\odot O_1$ 于点 D , 交 $\odot O_2$ 于点 E , DA 与 $\odot O_2$ 相切, 切点为 C .



- (1) 求证: PC 平分 $\angle APD$;
(2) 求证: $PD \cdot PA = PC^2 + AC \cdot DC$;
(3) 若 $PE = 3, PA = 6$, 求 PC 的长.

10. 如图, 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于 A, BC 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的公切线, 切点为 B, C , 连结 BA 并延长交 $\odot O_1$ 于 D , 过 D 点作 CB 的平行线交 $\odot O_2$ 于 E, F , 求证: (1) CD 是 $\odot O_1$ 的直径; (2) 试判断线段 BC, BE, BF 的大小关系, 并证明你的结论.

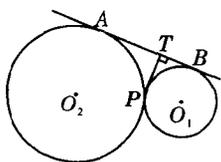


(2001 年四川省中考题)

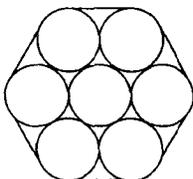
能力拓展

11. 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A, B , 两圆半径分别为 $6\sqrt{2}$ 和 $4\sqrt{3}$, 公共弦 AB 长12, 则 $\angle O_1AO_2 =$ _____.
12. 已知半径分别为1和2的两个圆外切于点 P , 则点 P 到两圆外公切线的距离为_____.

(2001年全国初中数学联赛试题)



(第12题)



(第13题)

13. 如图, 7根圆形筷子的横截面圆半径为 r , 则捆扎这7根筷子一周的绳子的长度为_____.

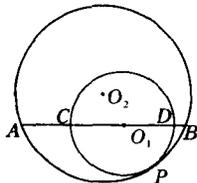
(2002年全国初中数学联赛试题)

14. 如图, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切于点 P , $\odot O_2$ 的弦 AB 经过 $\odot O_1$ 的圆心 O_1 , 交 $\odot O_1$ 于 C, D , 若 $AC:CD:DB = 3:4:2$, 则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的直径之比为().

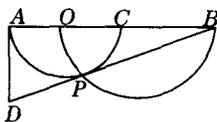
- A. 2:7 B. 2:5 C. 2:3 D. 1:3

15. 如图, 以 OB 为直径的半圆与半圆 O 交于点 P , A, O, C, B 在同一条直线上, 作 $AD \perp AB$ 与 BP 的延长线交于点 D , 若半圆 O 的半径为2, $\angle D$ 的余弦值是方程 $3x^2 - 10x + 3 = 0$ 的根, 则 AB 的长为().

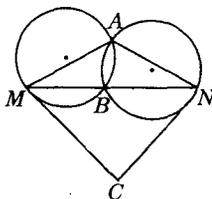
- A. $2\sqrt{10} + 2$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{10} + 5$ C. 8 D. 5



(第14题)



(第15题)



(第16题)

16. 如图, 相等两圆交于 A, B 两点, 过 B 任作一直线交两圆于 M, N , 过 M, N 各引所在圆的切线相交于 C , 则四边形 $AMCN$ 有下面关系成立().

- A. 有内切圆无外接圆 B. 有外接圆无内切圆

C. 既有内切圆,也有外接圆 D. 以上情况都不对

(2000年太原市竞赛题)

17. 把两个半径为5和一个半径为8的圆形纸片放在桌面上,使它们两两外切,若要用一个大圆形纸片把这三个圆形纸片完全盖住,那么这个大圆形纸片的最小半径是多少?
18. 如图,已知 $\odot O_1$ 经过 $\odot O_2$ 的圆心 O_2 ,且与 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点,点 C 为 $\widehat{AO_2B}$ 上的一动点(不运动至 A 、 B),连结 AC ,并延长交 $\odot O_2$ 于点 P ,连结 BP 、 BC .

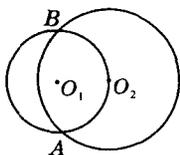


图1

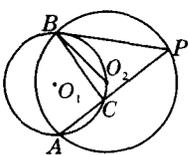


图2

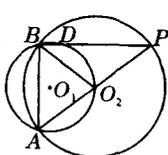
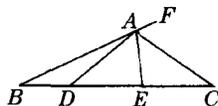


图3

- (1) 先按题意将图1补完整,然后操作、观察,图1供操作观察用,操作时可使用量角器与刻度尺,当点 C 在 $\widehat{AO_2B}$ 上运动时,图中有哪些角的大小没有变.
- (2) 请猜想 $\triangle BCP$ 的形状,并证明你的猜想(图2供证明用).
- (3) 如图3,当 PA 经过点 O_2 时, $AB=4$, BP 交 $\odot O_1$ 于 D ,且 PB 、 DB 的长是方程 $x^2+kx+10=0$ 的两个根,求 $\odot O_1$ 的半径.

(2001年辽宁省中考题)

19. 如图, D 、 E 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的两点, F 是 BA 延长线上一点, $\angle DAE = \angle CAF$.



- (1) 判断 $\triangle ABD$ 的外接圆与 $\triangle AEC$ 的外接圆的位置关系,并证明你的结论;
- (2) 若 $\triangle ABD$ 的外接圆半径是 $\triangle AEC$ 的外接圆半径的2倍, $BC=6$, $AB=4$,求 BE 的长.

(2001年全国初中数学联赛试题)

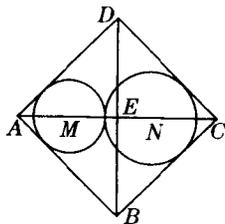
综合创新

20. 如图,菱形铁片 $ABCD$ 的对角线 AC 、 DB 相交于点 E , $\sin \angle DAC = \frac{3}{5}$, AE 、 DE 的长是方程 $x^2 - 140x + k = 0$ 的两根.

- (1) 求 AD 的长;
- (2) 如果 M 、 N 是 AC 上的两个动点,分别以 M 、 N 为圆心作圆,使 $\odot M$ 与边 AB 、 AD 相切, $\odot N$ 与边 BC 、 CD 相切,且 $\odot M$ 与 $\odot N$ 相外切,设 $AM = t$, $\odot M$ 与 $\odot N$ 面积的和为 S ,求 S 关于 t 的

函数关系式；

- (3) 某工厂要利用这种菱形铁片(单位: mm)加工一批直径为 48mm、60mm、90mm 的圆形零件(菱形铁片上只能加工同一直径的零件, 不计加工过程中的损耗), 问加工哪种零件能最充分地利用这种铁片? 并说明理由.



24 几何的定值与最值

青春不是桃面,丹唇,柔膝,而是深沉的意志,恢宏的想象,炽热的感情,是生命的源泉在不息的奔涌.

——美·缪尔·厄尔曼

知识纵横

几何中的定值问题,是指变动的图形中某些几何元素的几何量保持不变,或几何元素间的某些几何性质或位置关系不变的一类问题,解几何定值问题的基本方法是:分清问题的定量及变量,运用特殊位置、极端位置,直接计算等方法,先探求出定值,再给出证明.

几何中的最值问题是指在一定的条件下,求平面几何图形中某个确定的量(如线段长度、角度大小、图形面积)等的最大值或最小值,求几何最值问题的基本方法有:

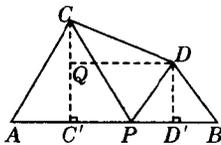
1. 特殊位置与极端位置法;
2. 几何定理(公理)法;
3. 数形结合法等.

例题求解

【例1】 如图,已知 $AB = 10$, P 是线段 AB 上任意一点,在 AB 的同侧分别以 AP 和 PB 为边作等边 $\triangle APC$ 和等边 $\triangle BPD$,则 CD 长度的最小值为_____.

(2001年山东省竞赛题)

思路点拨 如图,作 $CC' \perp AB$ 于 C' , $DD' \perp AB$ 于 D' , $DQ \perp CC'$, $CD^2 = DQ^2 + CQ^2$, $DQ = \frac{1}{2}AB$ 是一常数,当 CQ 越小, CD 越小,本例也可设 $AP = x$,则 $PB = 10 - x$,从代数角度探求 CD 的最小值.



几何中的定值与最值近年广泛出现于中考竞赛中,由冷点变为热点.这是由于这类问题具有很强的探索性(目标不明确),解题时需要运用动态思维、数形结合、特殊与一般相结合、逻辑推理与合情想象相结合等思想方法.

从特殊位置与极端位置的研究中易得到启示,常能找到解题突破口,特殊位置与极端位置是指:

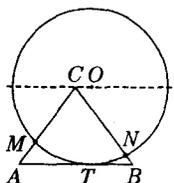
- (1) 中点处、垂直位置关系等;
- (2) 端点处、临界位置等.

【例2】 如图,圆的半径等于正三角形 ABC 的高,此圆在沿底边 AB 滚动,切点为 T ,圆交 AC 、 BC 于 M 、 N ,则对于所有可能的圆的位置而言, \widehat{MTN} 的度数().

- A. 从 30° 到 60° 变动 B. 从 60° 到 90° 变动
C. 保持 30° 不变 D. 保持 60° 不变

(2001年湖北赛区选拔赛试题)

思路点拨 先考虑当圆心在正三角形的顶点 C 时,其弧的度数,再证明一般情形,从而作出判断.



【例3】 如图,已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 C 、 D , A 是 $\odot O_1$ 上一点,直线 AD 交 $\odot O_2$ 于点 B .

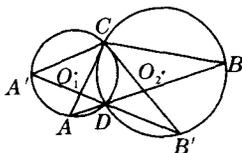
(1) 当点 A 在 \widehat{CAD} 上运动到 A' 点时,作直线 $A'D$ 交 $\odot O_2$ 于点 B' ,连 $A'C$ 、 $B'C$,证明: $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$;

(2) 问当 A' 在 \widehat{CAD} 上什么位置时, $S_{\triangle A'B'C}$ 最大,请说明理由;

(3) 当 $O_1O_2 = 11$, $CD = 9$ 时,求 $S_{\triangle A'B'C}$ 的最大值.

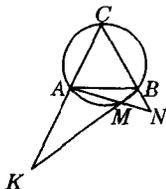
思路点拨 (2) 问承上启下,由(1)知:

$\frac{S_{\triangle A'B'C}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CA'^2}{CA^2}$, 即 $S_{\triangle A'B'C} = \frac{CA'^2}{CA^2} \cdot S_{\triangle ABC}$, 因 CA 、 $S_{\triangle ABC}$ 是定值,故当 CA' 取最大值,即 CA' 为 $\odot O_1$ 的直径时, $S_{\triangle A'B'C}$ 的值最大.



【例4】 如图,已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆,在劣弧 \widehat{AB} 上取异于 A 、 B 的点 M ,设直线 AC 与 BM 相交于 K ,直线 CB 与 AM 相交于点 N ,证明:线段 AK 和 BN 的乘积与 M 点的选择无关.

思路点拨 即要证 $AK \cdot BN$ 是一个定值,在图形中 $\triangle ABC$ 的边长是一个定值,说明 $AK \cdot BN$ 与 AB 有关,从图知 AB 为 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ANB$ 的公共边,作一个大胆的猜想, $AK \cdot BN = AB^2$,从而我们的证明目标更加明确.



链接

几何定值与最值问题,一般都是置于动态背景下,动与静是相对的,我们可以研究问题中的变量,考虑当变化的元素运动到特定的位置,使图形变化为特殊图形时,研究的量取得定值与最值.

只要探求出定值,那么解题目标明确,定值问题就转化为一般的几何证明问题.

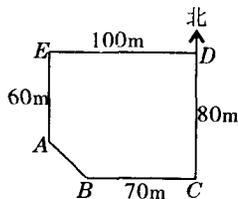


数形结合法解几何最值问题,即适当地选取变量,建立几何元素间的函数、方程、不等式等关系,再运用相应的代数知识方法求解。

【例5】 某房地产公司拥有一块“缺角矩形”荒地 $ABCDE$,边长和方向如图,欲在这块地上建一座地基为长方形东西走向的公寓,请划出这块地基,并求地基的最大面积(精确到 1m^2)。

(北京市数学知识应用竞赛试题)

思路点拨 最大长方形的一个顶点应是 D ,解题的关键在于确定 F 点的位置,有三种可能:在 AB 上或在 AE 上或在 BC 上,先考虑与之不相邻的顶点 F 在 AB 上的情况,建立以直线 BC 、 AE 分别为 x 轴和 y 轴的直角坐标系,用函数知识求解。



学力训练

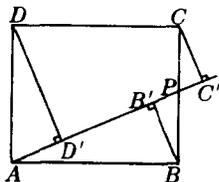
基础夯实

1. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,点 P 为边 BC 上任意一点(可与 B 点或 C 点重合),分别过 B 、 C 、 D 作射线 AP 的垂线,垂足分别是 B' 、 C' 、 D' ,则 $BB' + CC' + DD'$ 的最大值为 _____,最小值为 _____。

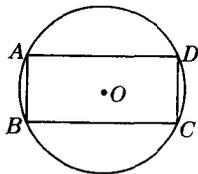
(第十五届江苏省竞赛题)

2. 如图,圆的内接矩形的周长与圆周长之比的最大值是 _____。

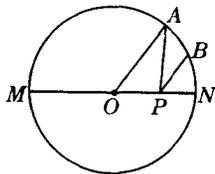
(“希望杯”邀请赛试题)



(第1题)



(第2题)



(第3题)

3. 如图, A 点是半圆上一个三等分点, B 点是 \widehat{AN} 的中点, P 点是直径 MN 上一动点, $\odot O$ 的半径为 1, 则 $AP + BP$ 的最小值为()。

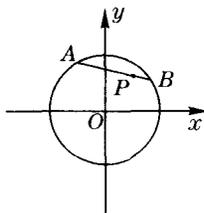
- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

(2000年湖北省荆州市中考题)

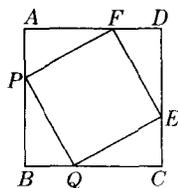
4. 如图, 圆心在原点、半径为 2 的圆内有一点 P

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; 过 P 作弦 AB 与劣弧 \widehat{AB} 组成一个弓形, 则该弓形面积的最小值为().

- A. $\pi - 1$ B. $\pi - 2$
C. $\frac{4}{3}\pi - 1$ D. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

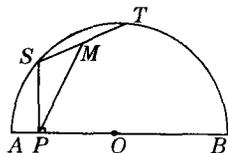


5. 如图, 有四个动点 P, Q, E, F 分别从正方形 $ABCD$ 的顶点 A, B, C, D 同时出发, 沿着 AB, BC, CD, DA 以同样的速度向 B, C, D, A 移动.



- (1) 证明四边形 $PQEF$ 是正方形;
(2) PE 是否总过某一定点, 并说明理由;
(3) 四边形 $PQEF$ 的顶点位于何处时, 其面积有最小值和最大值, 最小值和最大值各是多少?

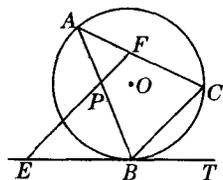
6. 如图, 定长的弦 ST 在一个以 AB 为直径的半圆上滑动, M 是 ST 的中点, P 是 S 对 AB 作垂线的垂足, 求证: 不管 ST 滑到什么位置, $\angle SPM$ 是一定角.



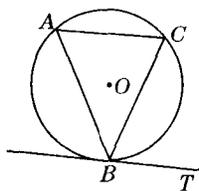
(第十八届加拿大数学奥林匹克试题)

7. 已知 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, BT 为 $\odot O$ 的切线, B 为切点, P 为直线 AB 上一点, 过点 P 作 BC 的平行线交直线 BT 于点 E , 交直线 AC 于点 F .

- (1) 当点 P 在线段 AB 上时(如图), 求证: $PA \cdot PB = PE \cdot PF$;
(2) 当点 P 为线段 BA 延长线上一点时, 第(1)题的结论还成立吗? 如果成立, 请证明, 如果不成立, 请说明理由.



第(1)问图

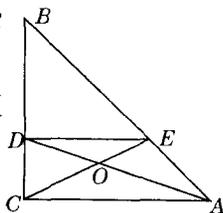


第(2)问图

8. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 8$, 点 D 在 BC 上运动(不运动至 B, C), $DE \parallel CA$, 交 AB 于 E , 设 $DE = x$, $\triangle ADE$ 的面积为 y .

- (1) 求 y 关于 x 的函数关系式及自变量的取值范围.

- (2) 何时 $\triangle ADE$ 的面积最大, 最大面积是多少?

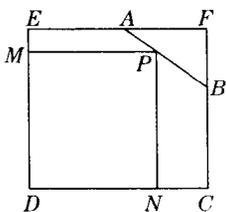


(3) 求当 $\operatorname{tg} \angle ECA = 4$ 时, $\triangle ADE$ 的面积.

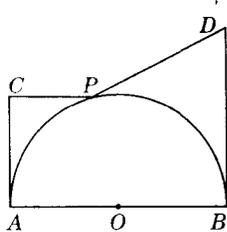
能力拓展

9. 如图, 已知边长为 4 的正方形截去一角成为五边形 $ABCDE$, 其中 $AF = 2$, $BF = 1$, 在 AB 上的一点 P , 使矩形 $PNDM$ 有最大面积, 则矩形 $PNDM$ 的面积最大值是().

- A. 8 B. 12 C. $\frac{25}{2}$ D. 14



(第 9 题)



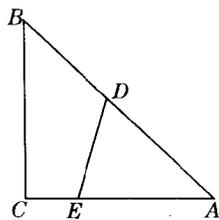
(第 10 题)

10. 如图, AB 是半圆的直径, 线段 $CA \perp AB$ 于点 A , 线段 $DB \perp AB$ 于点 B , $AB = 2$, $AC = 1$, $BD = 3$, P 是半圆上的一个动点, 则封闭图形 $ACPD$ 的最大面积是().

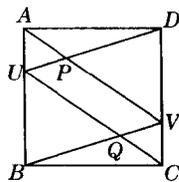
- A. $2 + \sqrt{2}$ B. $1 + \sqrt{2}$ C. $3 + \sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5$, $AC = 12$, $AB = 13$, 在边 AB 、 AC 上分别取点 D 、 E , 使线段 DE 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 试求这样线段的最小长度.

(全国初中数学联赛试题)



(第 11 题)

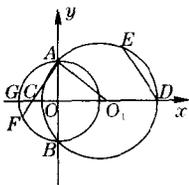


(第 12 题)

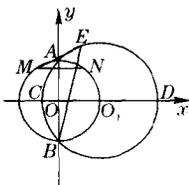
12. 如图, $ABCD$ 是一个边长为 1 的正方形, U 、 V 分别是 AB 、 CD 上的点, AV 与 DU 相交于点 P , BV 与 CU 相交于点 Q . 求四边形 $PUQV$ 面积的最大值.

(2000 年“弘晟杯”上海市竞赛题)

13. 已知:如图,点 O_1 在 x 轴的正半轴上, $\odot O_1$ 与 x 轴交于 C, D 两点. 半径为 4 的 $\odot O$ 与 x 轴的负半轴交于 G 点. $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的交点 A, B 在 y 轴上. 设 $\odot O_1$ 的弦 AC 的延长线交 $\odot O$ 于 F 点, 连结 GF , 且 $AF = 2\sqrt{2}GF$.

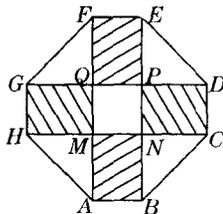


- (1) 求证: C 为线段 OG 的中点;
- (2) 连结 AO_1 , 作 $\odot O_1$ 的弦 DE , 使 $DE \parallel AO_1$, 求 E 点的坐标;
- (3) 线段 EA, EB (或它们的延长线) 分别交 $\odot O$ 于点 M, N . 问: 当点 E 在 \widehat{ADB} (不含端点 A, B) 上运动时, 线段 MN 的长度是否会发生变化? 试证明你的结论.



综合创新

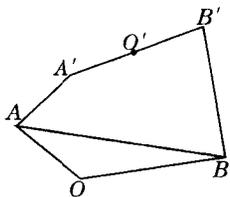
14. 某住宅小区, 为美化环境, 提高居民生活质量, 要建一个八边形居民广场(平面图如图所示). 其中, 正方形 $MNPQ$ 与四个相同矩形(图中阴影部分)的面积的和为 800 平方米.



- (1) 设矩形的边 $AB = x$ (米), $AM = y$ (米), 用含 x 的代数式表示 y 为_____.
- (2) 现计划在正方形区域上建雕塑和花坛, 平均每平方米造价为 2100 元; 在四个相同的矩形区域上铺设花岗岩地坪, 平均每平方米造价为 105 元; 在四个三角形区域上铺设草坪, 平均每平方米造价为 40 元.
 - ① 设该工程的总造价为 S (元), 求 S 关于 x 的函数关系式.
 - ② 若该工程的银行贷款为 235000 元, 仅靠银行贷款能否完成该工程的建设任务? 若能, 请列出设计方案; 若不能, 请说明理由.
 - ③ 若该工程在银行贷款的基础上, 又增加资金 73000 元, 问能否完成该工程的建设任务? 若能, 请列出所有可能的设计方案; 若不能, 请说明理由.

(2001 年镇江市中考题)

15. 如图, A, B 为两定点, O 为一动点, 在 AB 所在平面上异于 O 点的一侧取 A' 点及 B' 点, 使 $\angle OAA' = \angle OBB' = 90^\circ$, 且 $BB' = OB, AA' = OA$, 设 $A'B'$ 的中点为 O' .



- (1) 试问当 O 点在线段 AB 的一侧移动时, $A'B'$ 的中点 O' 的位置怎样变化?
- (2) 请证明你的猜想.

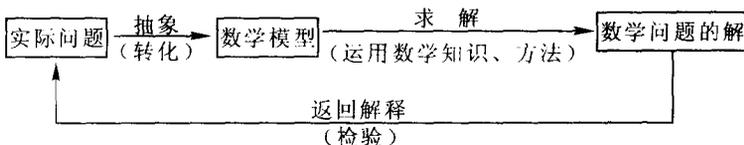
25 简单的数学建模

“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁，无处不用数学。”

——华罗庚

知识纵横

数学建模 (*mathematical modeling*) 是建立数学模型的过程的缩略表示. 所谓数学建模, 就是把所要研究的实际问题, 通过数学抽象构造出相应的数学模型, 再通过对数学模型的研究, 使原问题获得解决的过程. 其基本思路是:



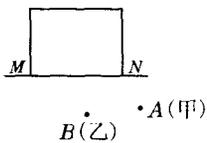
实际问题是复杂多变的, 数学建模需要较多的探索性和创造性, 初中数学常见的建模方法有:

对现实生活中普遍存在的等量关系(不等关系), 建立方程模型(不等式模型); 对现实生活中普遍存在的变量关系, 建立函数模型; 涉及对数据的收集、整理、分析, 建立统计推断模型; 涉及图形的位置性质, 建立几何模型等.

例题求解

【例1】 如图, 在足球比赛场上, 甲、乙两名队员互相配合向对方球门 MN 进攻, 当甲带球冲到 A 点时, 乙已跟随冲到 B 点, 请问此时甲是自己直接射门好, 还是迅速将球回传给乙, 让乙射门好?

思路点拨 在真正的足球比赛中, 情况会更复杂, 这里仅用数学方法从两点的静止状态加以考虑, 如果两个点到球门的距离相差不大, 在确定从哪个点射门最好, 关键看哪个点对球门的张角最大, 从作出过 M 、 B 、 N 三点的圆弧入手.



链接

一次方程是直线的数学模型, 二次函数是平抛物体的数学模型, 几何学是现实空间的模型等.

把数学方法应用到实际问题中去, 都需要把这个问题的内在规律运用数字、图形、符号表示出来(数学化), 经过数学处理得出定量的解答, 这种方法就是通常所说的数学模型方法, 已广泛渗透到各门学科中去.

足球场上有句顺口溜: “冲向球门跑, 越近就越好; 歪着球门跑, 射点要选好。” 一个足球运动员仅有良好的身体条件是不够的, 他还必须有一定的知识水平, 我们常说的要用“头脑”踢球就指的是这个意思.



在日常生活、生产、管理和科学实验中,常需要从数据资料出发,研究一些变量间的关系,寻找其中的规律,并建立符合实际的数学模型,以便利用这种模型预测以后的变化趋势,研究这类问题,我们称为数据拟合.

建立直角坐标系模型,也是一种常见的建模方式,可以使变量间的函数关系得以直观反映,因而当变量的变化具有(近似)函数关系,或物体运动的轨迹具有某种规律时,则可将建立的直角坐标系模型转化为函数图象问题求解.

【例2】 根据统计资料,我国能源生产自1985年以来发展速度很快.下面是我国能源生产总量(折合亿吨煤)的几个统计数据:1985年8.6亿吨,1990年10.4亿吨,1995年12.9亿吨.有关专家预测到2000年我国能源生产总量将超过16.1亿吨,试给出一个简单模型,说明有关专家的预测是否合理.

(北京市中学生数学知识应用竞赛试题)

思路点拨 本例没有现成公式可用,需研究数据间的关系,这是一个数据拟合问题,为了合理,可以把已知三组数据(1985, 8.6), (1990, 10.4), (1995, 12.9)变换为数据(0, 8.6), (5, 10.4), (10, 12.9),建立直角坐标系模型,在直角坐标系中描点,判断它们之间是何种函数关系,再利用相关函数知识解题.

【例3】 某房屋开发公司用100万元购得一块土地,该地可以建造每层1000平方米的楼房,楼房的总建筑面积(即各层面积之和)的每平方米平均建筑费用与建筑高度有关.楼房每升高一层,整幢楼房每平方米建筑费用提高5%.已知建筑5层楼房时,每平方米的建筑费用为400元,为了使该楼每平方米的平均综合费用最省(综合费用是建筑费用与购地费用之和),公司应把楼建成几层?

思路点拨 本例是属于建筑费用最省的最优化问题,问题解决的关键是寻找楼层的层数与综合费用间的函数关系式,将问题转化为求函数的最值问题.

【例4】 一次科技知识竞赛,两组学生成绩统计如下:

分 数	50	60	70	80	90	100
甲组人数	2	5	10	13	14	6
乙组人数	4	4	16	2	12	12

判断这两个组这次竞赛中成绩谁优谁劣,并说明理由.

思路点拨 建立统计模型分析,两组同学成绩优劣可以从以下几个方面衡量:整体的平均水平、整体的波动大小、高分人数等,从平均数、众数、中位数及高分人数、方差去比较分析,从而得出比较全面客观的结论.



铸题成模,以模解题,利用数学建模方法来解的实际问题与通常所说的数学应用题是有区别的,通常意义的应用题是经加工而初步数学化了,它的叙述改变了问题的本来面目,或多或少隐去了问题所表达的实际意义.

源于现实生活的实际问题,信息量大,涉及面广,建立数学模型需要有一定的社会生活、相关学科的知识、阅读能力、信息处理能力、语言转换能力,需要运用观察与分析、抽象与概括等方法.

【例5】 随着人们生活水平的提高,居室地面铺地板砖已是很平常的事了,当你看到这规则而美丽的图案时,你是否想过下列问题:

(1) 用哪些正多边形的材料能铺成平整、无空隙的地面?

(2) 若一个顶点处正多边形不止一种时,若干种什么样的正多边形能组合在一起铺成平整、无空隙的地面?

解答上述问题,并画出示意图.

思路点拨 能用正多边形铺成平整、无空隙的地面的条件是:凑在一个点处各块正多边形的角拼凑在一起等于一个周角,这也是数学建模的条件,对于(1),在某一个顶点有 m 块同种的正 n 边形地砖拼凑在一起,则设 $m \cdot \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = 360^\circ$; 对于(2),设在某一点有 k 块正多边形地砖拼凑在一起,它们的边数分别为 x_1, x_2, \dots, x_k , 则 $\frac{(x_1-2) \times 180^\circ}{x_1} + \frac{(x_2-2) \times 180^\circ}{x_2} + \dots + \frac{(x_k-2) \times 180^\circ}{x_k} = 360^\circ$. 这就是实际问题的数学模型,我们建立的是方程模型.

学 力 训 练

基础夯实

1. 将三支直径为 a 的圆柱形铅笔用软细绳捆紧,最少要用多长的细绳? 画出示意图,并说明理由.
2. 某公司计划明年生产一种新型环保电视机,下面是公司各部门提供的数据信息:

人事部:明年生产工人不多于 80 人,每人每年工作时间为 2400 小时计算;

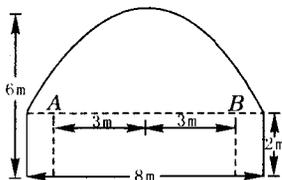
营销部:预测明年销量至少是 10000 台;

技术部:生产一台电视机,平均用 12 个工时,每台机器需要安装 5 个某种主要部件;

供应部:今年年终将库存主要部件 2000 件,明年能采购这种主要部件为 80000 件.

根据上述信息,明年生产新型电视机的台数应控制在什么范围内?

3. 有一隧道内设双行线公路,其截面由一长方形和一抛物线构成,如图所示.为保证安全,要求行驶车辆顶部(设为平顶)与隧道顶部在竖直方向上高度之差至少要有 0.5 米,若行车道总宽度 AB 为 6 米,请计算车辆经过隧道时的限制高度是多少米?(精确到 0.1 米)

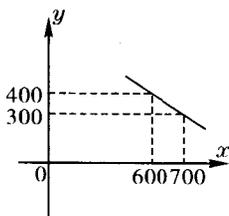


4. 某电厂规定:该厂家属区的每户居民如果一个月的用电量不超过 A 度,那么一个月这户只需交 10 元用电费;如果超过 A 度,则这个月除了仍要交 10 元用电费外,超过部分还要按每度 $\frac{A}{100}$ 元缴费,下表是这户居民 3 月份、4 月份的用电情况和交费情况:

月份	用电量(度)	交电费总数(元)
3 月	80	25
4 月	45	10

根据上表的数据,求电厂规定的 A 度为多少?

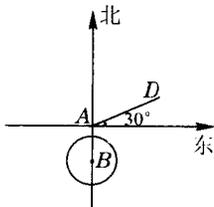
5. 某公司试销一种成本单价为 500 元/件的新产品,规定试销时的销售单价不低于成本单价,又不高于 800 元/件.经试销调查,发现销售量 y (件)与销售单价 x (元/件)可近似看作一次函数 $y = kx + b$ 的关系(如图所示),设公司获得的毛利润(毛利润 = 销售总价 - 成本总价)为 S 元,试问:销售单价定为多少时,该公司可获得最大毛利润?最大毛利润是多少?此时的销售量是多少?



根据上表的数据,求电厂规定的 A 度为多少?

能力拓展

6. 如图所示,一艘轮船以 20 海里/时的速度由西向东航行,途中接到台风警报,台风中心正以 40 海里/时的速度由南向北移动,距台风中心 $20\sqrt{10}$ 海里的圆形区域(包括边界)都属台风区,当轮船到达 A 处时,测得台风中心移到位于点 A 正南方向 B 处,且 $AB = 100$ 海里.

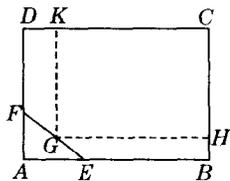


- (1) 若这艘轮船自 A 处按原速度继续航行,在途中会不会遇到台风?若会,试求轮船最初遇到台风的时间;若不会,请说明理

由；

- (2) 现轮船自 A 处立即提高船速, 向位于东偏北 30° 方向, 相距 60 海里的 D 港驶去, 为使台风到来之前到达 D 港, 问船速至少应提高多少? (提高的速度取整数, $\sqrt{13} = 13.6$)

7. 如图, 某房地产公司在—块地上规划建设—个小区公园(矩形 $GHCK$), 为了使文物保护区 $\triangle AEF$ 不被破坏, 矩形公园的顶点 G 不能在文物保护区内. 已知 $AB = 200$ 米, $AD = 160$ 米, $AE = 60$ 米, $AF = 40$ 米. 问: 当 G 在 EF 的什么位置时, 公园面积最大?



8. 某电机厂要生产—批直径分别为 10 cm 和 20 cm 的圆形硅钢片, 其生产数量之比为 2:1, 现有宽为 20 cm 的硅钢长片供使用, 请设计两种排料方法, 并对用料情况加以比较.

综合创新

9. “人口问题”是我国最大社会问题之一, 估计人口数量和发展趋势是我们制订—系列相关政策的基础, 由人口统计年鉴, 可查得我国从 1949 年至 1994 年人口数据资料如下:

年	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994
人口数	541.67	602.66	672.09	704.99	806.71	908.59	975.42	1034.75	1106.76	1176.74

(单位为百万)

试估计我国 1999 年的人口数.

26 开放性问题评说

在人的心灵深处,都有一种根深蒂固的需要,这就是希望感到自己是一个发现者、研究者、探索者,而在青少年的精神世界中,这种需要特别强烈.

——苏霍姆林斯基

知识纵横

一个数学问题的构成含有四个要素:题目的条件、解题的依据、解题的方法、题目的结论,如果题目所含的四个要素是解题者已经知道,或者结论虽未指明,但它是完全确定的,这样的问题就是封闭性的数学问题.

开放性问题相对于封闭性问题而言,从所呈现问题的方式看,有下列几种基本形式:

1. 条件开放题

称条件不充分或没有确定已知条件的开放性问题为条件开放题,解题时需执果寻因,根据结论和已有的已知条件,寻找使得结论成立的其它条件.

2. 结论开放题

称结论不确定或没有确定结论的开放性问题为结论开放题,解题时需由因导果,由已知条件导出相应结论.

3. 判断性开放题

称判定几何图形的形状大小、图形的位置关系、方程(组)的解的情况或判定具有某种性质的数学对象是否存在的开放题问题称为判断性开放题,解题的基本思路是:由已知条件及知识作出判断,然后加以证明.

例题求解

【例1】如图, $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 外切于点 T , PT 为其内公切线, AB 为其外公切线,且 A 、 B 为切点, AB 与 PT 相交于点 P ,根据图中所给出的已知条件及线段,请写出一个正确结论,并加以证明.

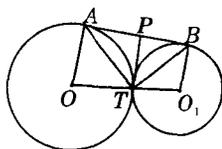
(2001年杭州市中考题)

链接

明确要求将数学开放性题作为中考试题,还是近一二年的事情.开放性题没有明确的目标和解题方向,留有极大的探索空间,解开放性题,不具有定向的解题思路,解题时总要有合情合理、实事求是的分析,要把归纳与演绎协调配合起来,把直觉发现与逻辑推理相互结合起来,把一般能力和数学能力同时发挥出来.

杭州市对本例评分标准是以正确结论的难易程度为标准灵活打分,分值直接反映考生的能力及创新性.

思路点拨 为了能写出更多的正确结论,我们可以从以下几个角度作探索,线段关系,角的关系、三角形的关系及由此推出的相应结论.



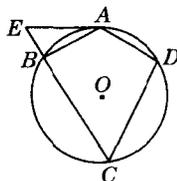
【例2】 如图,四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, A 是 \widehat{BD} 的中点,过 A 点的切线与 CB 的延长线交于点 E .

(1) 求证: $AB \cdot DA = CD \cdot BE$;

(2) 若点 E 在 CB 延长线上运动,点 A 在 \widehat{BD} 上运动,使切线 EA 变为割线 EFA ,其它条件不变,问具备什么条件使原结论成立?(要求画出示意图,注明条件,不要求证明).

(2000年北京市海淀区中考题)

思路点拨 对于(2),能画出图形尽可能画出图形,要使结论 $AB \cdot DA = CD \cdot BE$ 成立,即要证 $\triangle ABE \sim \triangle CDA$,已有条件 $\angle ABE = \angle CDA$,还需增加等角条件,这可由多种途径得到.



【例3】 (1) 如图1,若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 A , BC 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外公切线, B, C 为切点,求证: $AB \perp AC$.

(2) 如图2,若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外离, BC 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的外公切线, B, C 为切点,连心线 O_1O_2 分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于 M, N , BM, CN 的延长线交于 P ,则 BP 与 CP 是否垂直? 证明你的结论.

(3) 如图3,若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, BC 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公切线, B, C 为切点,连心线 O_1O_2 分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于 M, N , Q 是线段 MN 上一点,连结 BQ, CQ ,则 BQ 与 CQ 是否垂直? 证明你的结论.

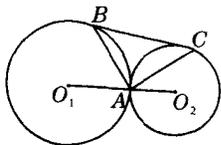


图1

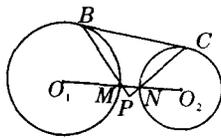


图2

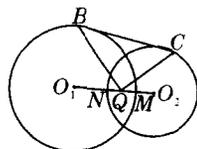


图3

思路点拨 本例是在基本条件不变的情况下,通过运动改变两圆

链接

许多开放性问题解题思路也是开放的(多角度、多维度思考),探索的条件或结论并不惟一.故解开放性问题,应尽可能深入探究,发散思维,提高思维的品质,切忌入宝山而空返.

开放性问题还有以下呈现方式:

(1) 先提出特殊情况进行研究,再要求归纳猜测和确定一般结论;

(2) 先对某一给定条件和结论的问题进行研究,再探讨改变条件时其结论应发生的变化,或改变结论时其条件相应发生的变化.

的位置而设计的,在运动变化中,结论可能改变或不变,关键是把(1)的证法类比运用到(2)、(3)问题中.

【例4】 已知直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + m (m < 0)$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 C 和点 E , 过 E 点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 D , 如果 $\triangle CDE$ 恰为一等边三角形.

(1) 求 b 的值;

(2) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0) (x_1 < x_2)$, 问: 使 $\angle AEC = 90^\circ$ 的实数 m 是否存在? 如果存在, 求出此时 m 的值; 如果不存在, 请说明理由.

(2001年无锡市中考题)

思路点拨 充分挖掘形的因素, 如 $\angle ECO = 30^\circ$, $DC \perp x$ 轴, ED 两点坐标都可用 m 的代数式表示, 恰当设抛物线的解析式, 通过计算出 b 的值; (2) 要使 $\angle CEO = 60^\circ$, $\angle AEO = 30^\circ$, 求出 A 点坐标, 看 A 点是否在抛物线上.

【例5】 如图, 在直角坐标系 xoy 中, 以 x 轴的负半轴上一点 H 为圆心作 $\odot H$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C, D 两点, 以 C 为圆心, OC 为半径作 $\odot C$ 与 $\odot H$ 交于 E, F 两点, 与 y 轴交于 O, Q 两点, 直线 EF 与 AC, BC, y 轴分别交于 M, N, G 三点, 直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 经过 A, C 两点.

(1) 求 $\text{tg} \angle CNM$ 的值;

(2) 连 OM, ON , 问: 四边形 $CMON$ 是怎样的四边形? 请说明理由;

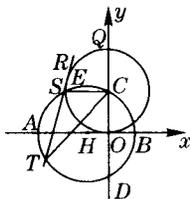
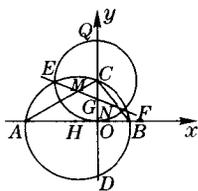
(3) 如图, R 是 $\odot C$ 中 \widehat{EQ} 上一动点 (不与 E 重合), 过 R 作 $\odot C$ 的切线 RT , 若 RT 与 $\odot H$ 相交于 S, T 不同两点, 问: $CS \cdot CT$ 的值是否发生变化? 若不变, 请说明理由并求其值; 若变化, 请求出其值的变化范围.

(2001年武汉市中考题)



解存在性开放问题的基本方法是假设求解法, 即假设存在 \Rightarrow 演绎推理 \Rightarrow 得出结论 (合理或矛盾).

解结论开放题往往要充分利用条件进行大胆而合理的猜想, 通过观察、比较、联想、猜测、推理和判断等探索活动, 发现规律, 得出结论.



思路点拨 (1) 求 $\lg \angle CNM$ 的值, 由于没有明确 CM 、 CN 之长, 故需通过连线转化角, 可证明 $\angle CNM = \angle CAB$;

(2) 观察发现四边形 $CMON$ 为矩形, 由相交弦定理证明;

(3) 要探讨 $CS \cdot CR$ 值, 而 $CS \cdot CR$ 又不可能为两条相交弦或切割线等, 故应将 CS 、 CR 放在两个三角形中, 利用相似解决, 关键在于能否求出 $CS \cdot CR$ 的值.

学力训练

基础夯实

1. 苏学美同学为班级“学习专栏”设计了报头图案, 并用文字说明图案的含义, 如图①, 请你用最基本的几何图形(如直线、射线、线段、角、三角形、四边形、圆、圆弧和函数图象等)中若干个, 为“环保专栏”在图②方框中设计一个报头图案的含义.

图 1 含义: 我们喜欢“合作学习”活动.

图 2 含义: _____.

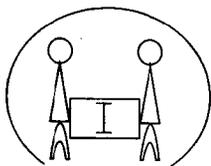


图 1

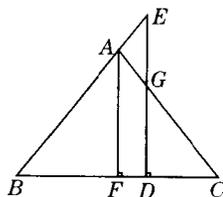


图 2

2. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 12$, F 为 BC 的中点, D 是 FC 上的一点, 过点 D 作 BC 的垂线交 AC 于点 G , 交 BA 的延长线于点 E , 如果设 $DC = x$, 则:

(1) 图中哪些线段(如线段 BD 可记作 y_{BD})

可以看成是 x 的函数(如 $y_{BD} = 12 -$

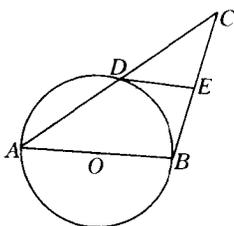


$x(0 < x < 6)$, $y_{FD} = 6 - x(0 < x < 6)$. 请再写出其中的四个函数关系式: ① _____; ② _____; ③ _____; ④ _____.

(2) 图中哪些图形的面积(如 $\triangle CDG$ 的面积可记作 $S_{\triangle CDG}$)可以看成是 x 的函数(如 $S_{\triangle CDG} = \frac{2}{3}x^2(0 < x < 6)$). 请再写出其中的两个函数关系式: ① _____; ② _____.

3. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3(m+1)x + m^2 - 9m + 20 = 0$ 有两个实数根, 又已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, $\angle C = 90^\circ$, 且 $\cos B = \frac{3}{5}$, $b - a = 3$, 是否存在整数 m , 使上述一元二次方程两个实数根的平方和等于 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 c 的平方? 若存在, 请求出符合条件的 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

4. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\odot O$ 过 AC 的中点 D , $DE \perp BC$, 垂足为 E .



(1) 由这些条件, 你能推出哪些正确结论?
(要求: 不再标注其它字母, 找结论的过程中所连辅助线不能出现在结论中, 不写推理过程, 写出4个结论即可).

(2) 若 $\angle ABC$ 为直角, 其它条件不变, 除上述结论外, 你还能推出哪些新的正确结论? 并画出图形[要求写出6个结论即可, 其他要求同(1)].

5. 已知抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 $E(0, -1)$.

(1) 求此二次函数的解析式;

(2) 设点 B 是此抛物线与 x 轴的另一个交点, P 是抛物线上异于 B 的一个动点, 连结 BP 交 y 轴于点 N (点 N 在点 E 的上方), 若 $\triangle AOE$ 与 $\triangle BON$ 相似, 求点 P 的坐标.

能力拓展

6. 给定四个命题: ① $\sin 15^\circ$ 与 $\sin 75^\circ$ 的平方和为1; ②函数 $y = x^2 - 8x + 6$ 的最小值为 -10 ; ③ $a\sqrt{-\frac{1}{a}} = \sqrt{-a^3}$; ④若 $\sqrt{\frac{x-10}{5-x}} = \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x-5}}$, 则 $x = 10$, 其中错误的命题的个数是_____.

7. ①在实数范围内, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; ②在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AC^2 + BC^2 > AB^2$, 则 $\triangle ABC$ 是

锐角三角形;③在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边, a_1, b_1, c_1 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边,若 $a > a_1, b > b_1, c > c_1$,则 $\triangle ABC$ 的面积 S 大于 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积 S_1 .

以上三个命题中,真命题的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知: AB 是 $\odot O$ 的直径, AP, AQ 是 $\odot O$ 的两条弦,如图1,经过 B 做 $\odot O$ 的切线 l ,分别交直线 AP, AQ 于点 M, N .可以得出结论 $AP \cdot AM = AQ \cdot AN$ 成立.

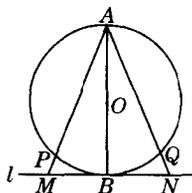


图1

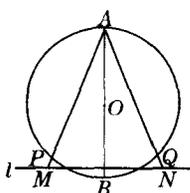


图2

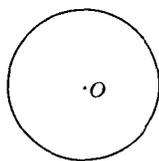
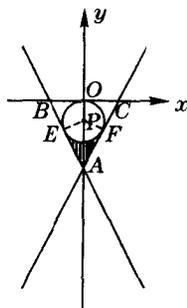


图3

- (1) 若将直线 l 向上平行移动,使直线 l 与 $\odot O$ 相交,如图2所示,其它条件不变,上述结论是否成立?若成立,写出证明,若不成立,说明理由;
 - (2) 若将直线 l 继续向上平行移动,使直线 l 与 $\odot O$ 相离,其它条件不变,请在图3上画出符合条件的图形,上述结论成立吗?若成立,写出证明;若不成立,说明理由.
9. 设二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b > 0$)的图象经过 $(0, y_1), (1, y_2)$ 和 $(-1, y_3)$ 三点,且满足 $y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = 1$.
- (1) 求这个二次函数的解析式;
 - (2) 设这个二次函数的图象与 x 轴的两个交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0), x_1 < x_2, C$ 为顶点,连结 AC, BC ,动点 P 从 A 点出发沿折线 ACB 运动,求 $\triangle ABP$ 的面积的最大值;
 - (3) 当动点 P 在折线 ACB 上运动时,是否存在点 P 使 $\triangle APB$ 的外接圆的圆心在 x 轴上?请说明理由.

10. 如图,等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$,以 BC 边所在直线为 x 轴, BC 边上的高线 AO 所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



- (1) 求过 A, B, C 三点的抛物线的解析式;
- (2) 如图,设 $\odot P$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,分别切 AB, AC 于 E, F 点,求阴影部分的面积;
- (3) 点 D 为 y 轴上一动点,当以 D 点为圆心,3为半径的 $\odot D$ 与直线 AB, AC 都相切时,试判断 $\odot D$ 与(2)中 $\odot P$ 的位置关

系,并简要说明理由.

- (4) 若(2)中 $\odot P$ 的大小不变,圆心 P 沿 y 轴运动,设 P 点坐标为 $(0, a)$,则 $\odot P$ 与直线 AB 、 AC 有几种位置关系?并写出相应位置关系时 a 的取值范围.

(2001年济南市中考题)

综合创新

11. 如果代数式 $-x^3 + 100x^2 + x$ 中的字母 x 只允许在正整数范围内取值,当这个代数式的值达到最大值时, x 的值等于多少?并证明你的结论.

(2001年我爱数学初中生夏令营竞赛题)

12. (1) 证明:若 x 取任意整数时,二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 总取整数值,那么, $2a$ 、 $a - b$ 、 c 都是整数.

(2) 写出上述命题的逆命题,且证明你的结论.

(2001年全国初中数学竞赛题)

27 动态几何问题透视

感谢上帝没有把我造成一个灵巧的工匠,我的那些最主要的发现是受到失败的启发而获得的.

——戴维

知识纵横

春去秋来,花开花落,物转星移,世间万物每时每刻都处于运动变化、相互联系、相互转化中,事物的本质特征只有在运动中方能凸现出来.

动态几何问题,是指以几何知识和图形为背景,渗入运动变化观点的一类问题,常见的形式是:点在线段或弧线上运动、图形的翻折、平移、旋转等,解这类问题的基本策略是:

1. 动中觅静

这里的“静”就是问题中的不变量、不变关系,动中觅静就是在运动变化中探索问题中的不变性.

2. 动静互化

“静”只是“动”的瞬间,是运动的一种特殊形式,动静互化就是抓住“静”的瞬间,使一般情形转化为特殊问题,从而找到“动”与“静”的关系.

3. 以动制动

以动制动就是建立图形中两个变量的函数关系,通过研究运动函数,用联系发展的观点来研究变动元素的关系.

例题求解

【例1】 如图, A, B 是直线 l 上的两点, $AB = 4$ 厘米. 过 l 外一点 C 作 $CD \parallel l$, 射线 BC 与 l 所成的锐角 $\angle 1 = 60^\circ$, 线段 $BC = 2$ 厘米. 动点 P, Q 分别从 B, C 同时出发, P 以每秒 1 厘米的速度沿由 B 向 C 的方向运动, Q 以每秒 2 厘米的速度沿由 C 向 D 的方向运动, 设 P, Q 运动的时间为 t (秒), 当 $t > 2$ 时, PA 交 CD 于 E .

- (1) 用含 t 的代数式分别表示 CE 和 QE 的长;
- (2) 求 $\triangle APQ$ 的面积 S 与 t 的函数关系式;



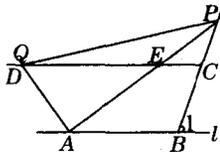
几何动态既是一类问题,也是一种观点与思维方法,运用几何动态的观点,可以把表面看来不同的定理统一起来,可以找到探求几何中的最值、定值等问题的方法;更一般情况是,对于一个数学问题,努力去发掘更多结论,不同解法,通过弱化或强化条件来探讨结论的状况等,这就是常说的“动态思维”.

(3) 当 QE 恰好平分 $\triangle APQ$ 的面积时, QE 的长是多少厘米?

$$(\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3})$$

(2001 年吉林省中考题)

思路点拨 对于(1)问, 无论 t 怎样变化, $\frac{EC}{AB} = \frac{PC}{PB}$ 的比例关系没有变, 从而 CE 、 QE 的表达式容易求出; 对于(3)问, 由 QE 平分 $\triangle APQ$ 的面积, 可联想到 $AE = PE$, 此时 C 为 PB 的中点, 可建立 t 的方程.

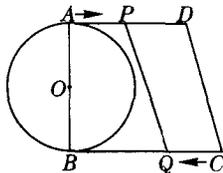


【例 2】 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8\text{cm}$, $AD = 24\text{cm}$, $BC = 26\text{cm}$, AB 为 $\odot O$ 的直径, 动点 P 从点 A 开始沿 AD 边向点 D 以 1cm/秒 的速度运动, 动点 Q 从点 C 开始沿 CB 边向点 B 以 3cm/秒 的速度运动, P 、 Q 分别从点 A 、 C 同时出发, 当其中一点到达端点时, 另一点也随之停止运动, 设运动时间为 t 秒, 求:

- (1) t 分别为何值时, 四边形 $PQCD$ 为平行四边形、等腰梯形?
- (2) t 分别为何值时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切、相交、相离?

(河北省中考题)

思路点拨 对于(2), 首先将 P 、 Q 的运动统一到直线 PQ 的运动中, 要探求时间 t 对直线 PQ 与 $\odot O$ 位置关系的影响, 可先动中取静, 即先考察“直线 PQ 与 $\odot O$ 相切”这一整个运动过程中的特殊一瞬, 再结合 PQ 的初始与终止状态一起加以考察.



链接

动与静是对立的, 又是统一的, 无论图形运动变化的哪一类问题, 都真实地反映了现实世界中数与形的变与不变两个方面, 从辩证的角度去观察、探索、研究此类问题, 是一种重要的解题策略.

【例 3】 已知: 如图, AB 为半圆 O 的直径, 弦 $BC = 2\sqrt{5}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{1}{2}$, $\widehat{AD} = \widehat{DC}$, PD 与半圆 O 相切于点 D , DP 与 BA 的延长线交于点 P .

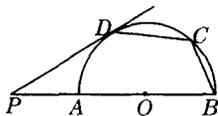
- (1) 求四边形 $PBCD$ 的面积;

建立运动函数关系就更一般地、整体地把握了问题, 许多相关问题就转化为求函数值或自变量的值.

(2) 若 M, N 两点分别在线段 PD 与 PB 上运动(点 M 与 P, D 两点都不重合), 并且 $MN \parallel BC, PN = x$, 五边形 $MNBCD$ 的面积为 y , 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

思路点拨 对于(1), 通过作辅助线, 把四边形 $PBCD$ 的面积表示常规图形面积的和:

$S_{\text{四边形}PBCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\text{梯形}PACD}$, 须计算出相关线段的长; 对于(2) $y = S_{\text{四边形}PBCD} - S_{\triangle PMN}$, 由比例线段把 PM, MN 用 x 的代数式表示.



链接

动态几何问题常通过观察、比较、分析、归纳等方法寻求图形中某些结论不变或变化规律, 而把特定的运动状态, 通过代数化来定量刻画描述也是解这类问题的重要思想.

【例4】 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 有一直径为 BC 的半圆, $BC = 2\text{cm}$, 现有两点 E, F , 分别从点 B 、点 A 同时出发, 点 E 沿线段 BA 以 $1\text{cm}/\text{秒}$ 的速度向点 A 运动, 点 F 沿折线 $A-D-C$ 以 $2\text{cm}/\text{秒}$ 的速度向点 C 运动, 设点 E 离开点 B 的时间为 t (秒).

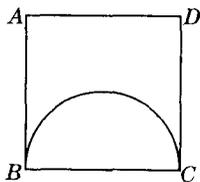
(1) 当 t 为何值时, 线段 EF 与 BC 平行?

(2) 设 $1 < t < 2$, 当 t 为何值时, EF 与半圆相切?

(3) 当 $1 \leq t < 2$ 时, 设 EF 与 AC 相交于点 P , 问点 E, F 运动时, 点 P 的位置是否发生变化? 若发生变化, 请说明理由; 若不发生变化, 请给予证明, 并求 $AP:PC$ 的值.

(2001年江西省中考题)

思路点拨 动中取静, 根据题意画出不同位置的图形, 然后分别求解, 这是解本例的基本策略, 对于(1)、(2), 运用相关几何性质建立关于 t 的方程; 对于(3), 点 P 的位置是否发生变化, 只需看 $\frac{AP}{PC}$ 是否为一定值.



学力训练

基础夯实

1. 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A, B 两点, 点 O_1 在 $\odot O_2$ 上, C 为 $\odot O_1$ 中优弧 \widehat{AB} 上任意一点, 直线 CB 交 $\odot O_2$ 于 D , 连结 O_1D .

(1) 证明: $DO_1 \perp AC$;

(2) 若点 C 在劣弧 \widehat{AB} 上, (1) 中结论是否仍成立? 请在图 2 中画出图形, 并证明你的结论.

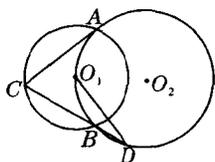


图 1

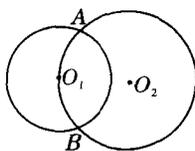
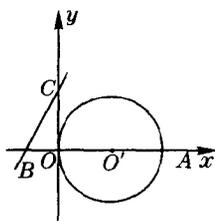


图 2

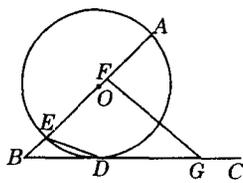
2. 如图, 在直角坐标系中, 点 O' 的坐标为 $(2, 0)$, $\odot O'$ 与 x 轴交于原点 O 和点 A , 又 B, C, E 三点的坐标分别为 $(-1, 0), (0, 3), (0, b)$, 且 $0 < b < 3$.



(1) 求点 A 的坐标和经过 B, C 两点的直线的解析式;

(2) 当点 E 在线段 OC 上移动时, 直线 BE 与 $\odot O'$ 有哪几种位置关系?

3. 如图, 已知 $\angle ABC = 30^\circ$, O 是 BA 上的一点, 以 O 为圆心作圆与 BC 相切于点 D , 交 BO 于 E 点, 连结 ED , F 是射线 OA 上的一动点, 过点 F 作 $FG \perp AB$ 于 F , 交 BC 于点 G , $BD = \sqrt{3}$, 设 $OF = x$, 四边形 $EDGF$ 的面积为 y .



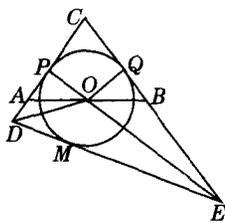
(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 当 x 为何值时, ED 将 $\triangle BGF$ 的周长平分?

(3) 若四边形 $EDGF$ 的面积为 $\triangle BED$ 面积的 5 倍, 试确定 FG 所在的直线与 $\odot O$ 的位置关系, 并且说明理由.

能力拓展

4. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle CAB = \alpha$ (定值), 圆 O 的圆心 O 在 AB 上并分别与 AC, BC 相切于点 P, Q .



(1) 求 $\angle POQ$ 的大小(用 α 表示);

(2) 设 D 是 CA 延长线上一个动点, DE 与 $\odot O$ 相切于点 M , 点 E 在 CB 的延长线

上, 试判断 $\angle DOE$ 的大小是否保持不变? 并说明理由;

(3) 在(2)的条件下, 如果 $AB = m$ (m 为已知数), $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 设

$AD = x, DE = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式.

5. 如图, 已知 EB 是 $\odot O$ 的直径, 且 $EB = 6$, 在 BE 的延长线上取点 P , 使 $EP = EB$, A 是 EP 上一点, 过 A 作 $\odot O$ 的切线 AD , 切点为 D , 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F , 过 B 作 AD 的垂线 BH , 交 AD 的延长线于 H , 连结 ED 和 FH .

(1) 若 $AE = 2$, 求 AD 的长;

(2) 当点 A 在 EP 上移动(点 A 不与点 E 重合)时,

①是否总有 $\frac{AD}{AH} = \frac{ED}{FH}$? 试证明你的结论;

②设 $ED = x, BH = y$, 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

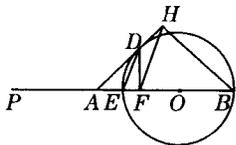
6. 如图, 已知过点 $A(2, 4)$ 分别作 x 轴与 y 轴的垂线, 垂足分别为 M 、 N , 若点 P 从 O 点出发, 沿 OM 作匀速运动, 1 分钟可到达 M 点, 点 Q 从 M 点出发, 沿 MA 作匀速运动, 1 分钟可达到 A 点.

(1) 经过多少时间, 线段 PQ 的长度为 2;

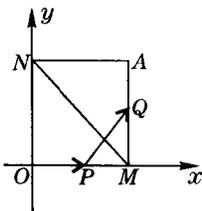
(2) 写出线段 PQ 长度的平方 y 与时间 t 之间的函数关系式;

(3) 在 P 、 Q 的运动过程中, 是否可能出现 $PQ \perp MN$? 若有可能, 求出此时间 t ; 若不可能, 请说明理由;

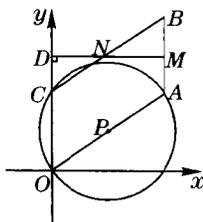
(4) 是否存在时间 t , 使 P 、 Q 、 M 构成的三角形与 $\triangle MON$ 相似? 若存在, 求出 t ; 若不存在, 说明理由.



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 7 题)

综合创新

7. 在如图所示的直角坐标系中, 点 C 在 y 轴的正半轴上, 四边形 $OABC$ 为平行四边形, $OA = 2, \angle AOC = 60^\circ$, 以 OA 为直径的 $\odot P$ 经过点 C , 点 D 在 y 轴上, DM 为始终与 y 轴垂直且与 AB 边相交的动直线, 设 DM 与 AB 边的交点为 M (点 M 在线段 AB 上, 但与 A 、 B 两点不重合), 点 N 是 DM 与 BC 的交点, 设 $OD = t$.

(1) 求点 A 和 B 的坐标; (2) 设 $\triangle BMN$ 的外接圆 $\odot G$ 的半径为 R , 请你用 t 表示 R 及点 G 的坐标; (3) 当 $\odot G$ 与 $\odot P$ 相外切时, 求直角梯形 $OAMD$ 的面积.

28 避免漏解的奥秘

我们不应该像蚂蚁,单只
收集;也不可像蜘蛛,只从自己
肚中抽丝;而应该像蜜蜂,既采
集,又整理,这样才能酿出香甜
的蜂蜜来。

——王梓坤

知识纵横

“会而不对,对而不全”,这是许多同学在解题时无法避免而又屡犯不止的错误,提高解题周密性,避免漏解的奥秘在于:掌握分类讨论法,学会分类讨论。

分类讨论就是按照一定的标准,把研究对象分成几个部分或几种情况,然后逐个加以解决,最后予以总结作出结论的思想方法,其实质是化整为零、各个击破的转化策略。

解题时何时需要进行分类?一般来说,当问题包含的因素发生变化,问题结果也相应发生变化,我们就需要对这一关键因素分类讨论,

怎样进行正确分类?分类的基本要求是不重复、不遗漏,每次分类必须保持同一的分类标准,多级讨论,逐级进行。

例题求解

【例1】 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, AC 与 BD 相交于点 O , $\angle BOC = 120^\circ$, $AD = 7$, $BD = 10$, 则四边形 $ABCD$ 的面积是 _____。(2000年杭州市考题)

思路点拨 满足题设条件的四边形有两个:平行四边形或等腰梯形,由此予以分类求解。

【例2】 方程 $(x^2 + x - 1)^{x+3} = 1$ 的所有整数解的个数是()。

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

(2001年山东省选拔赛试题)

思路点拨 这是一个特殊的幂指数方程问题,根据幂指数的意义,可将原问题分成三个并列的简单问题求解:(1)非零实数的零次幂等于1;(2)1的任何次幂等于1;(3)-1的偶次幂等于1。

链接

初中数学常见的分类方法有:

- (1) 按定义、性质、法则、公式分类;
- (2) 对参数分类;
- (3) 按图形位置分类;
- (4) 按图形特征分类;
- (5) 按余数分类。

参数是较为常见的分类对象,因为参数的不同取值,可能导致不同的运算结果,或者必须使用不同的方法去解决,这一分类方法在方程、不等式、函数中有广泛的应用。

【例3】 试确定一切有理数 r , 使得关于 x 的方程 $rx^2 + (r+2)x + 3r - 2 = 0$ 有根且只有整数根.

(2002年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 根据方程定义, r 是否为零影响方程的次数, 这是质的不同, 解法也不同, 所以, 应对 $r=0$ 及 $r \neq 0$ 两种情况分类求解.

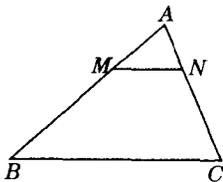
【例4】 已知一三角形纸片 ABC , 面积为 25, BC 边的长为 10, $\angle B$ 和 $\angle C$ 都为锐角, M 为 AB 边上的一动点 (M 与点 A 、 B 不重合). 过点 M 作 $MN \parallel BC$, 交 AC 于点 N . 设 $MN = x$.

(1) 用 x 表示 $\triangle AMN$ 的面积 $S_{\triangle AMN}$;

(2) 用 $\triangle AMN$ 沿 MN 折叠, 使 $\triangle AMN$ 紧贴四边形 $BCNM$ (边 AM 、 AN 落在四边形 $BCNM$ 所在的平面内), 设点 A 落在平面 $BCNM$ 内的点为 A' , $\triangle A'MN$ 与四边形 $BCNM$ 重叠部分的面积为 y . ①试求出 y 关于 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围; ②当 x 为何值时重叠部分的面积 y 最大, 最大为多少?

(2001年苏州市中考题)

思路点拨 折叠 $\triangle AMN$, A 点位置不确定, 可能在 $\triangle ABC$ 内或在 BC 边上或在 $\triangle ABC$ 外, 故需按以上三种情况分别求出 y 关于 x 的函数关系式, 进而求出 y 的最大值.



【例5】 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 的轴相交于不同的两点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$), 与 y 轴的负半轴交于点 C , 若抛物线顶点的横坐标为 -1 , A 、 B 两点间的距离为 10, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 15.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 求出点 A 和点 B 的坐标;

(3) 在 x 轴上方, (1) 中的抛物线上是否存在点 P , 使得以 A 、 B 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

思路点拨 对于 (3), 由于以 A 、 B 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似的对应关系不确定, 所以应分 $\triangle PAB \sim \triangle ABC$ 、 $\triangle APB \sim \triangle ABC$ 两种情况讨论.



有关平面几何问题, 经常按图形相互之间的位置进行分类, 因为图形存在不同的位置关系, 其解答结果可能不同, 也可能需要使用不同的方法解决, 初中平面几何按位置关系分类, 最终一般都归结为点、直线和圆之间的位置关系.

中考压轴题分类讨论有以下常见情形:

(1) 由点的不确定性引起的分类讨论;

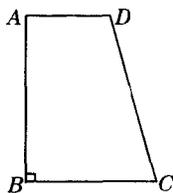
(2) 由图形全等或相似的对对应关系的不确定性引起的分类讨论;

(3) 由图形运动导致图形之间位置发生变化引起的分类讨论.

学力训练

基础夯实

- 已知 m 为实数, 如果函数 $y = (m-4)x^2 - 2mx - m - 6$ 的图象与 x 轴只有一个交点, 那么 m 的取值为_____.
- 若实数 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0, b^2 - 8b + 5 = 0$, 则 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1}$ 的值为_____.
- 若半径为 5 和 4 的两个圆相交, 且公共弦长为 6, 则它们的圆心距等于_____.
- 已知 $\odot O$ 和不在 $\odot O$ 上的一点 P , 过 P 的直线交 $\odot O$ 于 A, B 两点, 若 $PA \cdot PB = 24, OP = 5$, 则 $\odot O$ 的半径为_____.
- 和抛物线 $y = 8x^2 - 10x + 1$ 只有一个公共点 $(-1, -1)$ 的直线解析式为().
 A. $y = -6x - 7$ B. $x = -1$
 C. $y = -6x - 7$ 或 $x = -1$ D. $y = -1$
- 若线段 AB 两端点到直线 l 的距离分别为 4 和 8, 则 AB 的中点到直线 l 的距离是().
 A. 2 B. 4 C. 6 D. 2 或 6
- 点 $A(-4, 0), B(2, 0)$ 是 xoy 坐标平面上两定点, C 是 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 的图象上的动点, 则满足上述条件的直角 $\triangle ABC$ 可以画出().
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB = 7, AD = 2, BC = 3$, 如果边 AB 上的点 P 使得以 P, A, D 为顶点的三角形和以 P, B, C 为顶点的三角形相似, 那么这样的 P 点有().
 A. 1 个 B. 2 个
 C. 3 个 D. 4 个
- 已知关于 x 的方程 $x^2 - (3k+1)x + 2k^2 + 2k = 0$.
 (1) 求证: 无论 k 取何实数值, 方程总有实数根;
 (2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a = 6$, 另两边长为 b, c 恰好是这个方程的两个根, 求此三角形的周长.



(2002 年湖北赛区选拔赛试题)

- 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2(m + \frac{5}{4})x + 2(m+1)$ 与 y 轴的正半轴交于点

C , 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 并且点 B 在点 A 的右边, $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle OAC$ 面积的 3 倍.

- (1) 求这条抛物线的解析式;
- (2) 判断 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OCA$ 是否相似, 并说明理由.

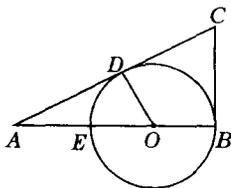
(2001 年北京市宣武区中考题)

能力拓展

11. 以 O 为圆心的两个同心圆的半径分别为 9cm 和 5cm , $\odot O'$ 与这两个圆都相切, 则 $\odot O'$ 的半径是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 的中垂线与 AC 所在直线相交所得的锐角为 50° , 则底角 B 的大小为_____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, O 是 AB 上一点, 以 O 为圆心, OB 为半径的圆与 AB 交于点 E , 与 AC 切于点 D , $AD = 2$, $AE = 1$, 若 F 是线段 BE 上任一点, $FG \perp AC$ 于 G 点, 设线段 CG 和 OF 的长分别为 x 、 y , 写出 y 与 x 之间的函数关系式_____.



14. 已知点 $A(0,6)$, $B(3,0)$, $C(2,0)$, $M(0,m)$, 其中 $m < 6$, 以 M 为圆心, MC 为半径作圆, 那么当 $m =$ _____时, $\odot M$ 与直线 AB 相切.

15. 关于 x 的方程 $kx^2 - (k-1)x + 1 = 0$ 有有理根, 求整数 k 的值.

(2001 年山东赛区选拔赛试题)

16. 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, 且 $AD = 5$, $AB = DC = 2$.

(1) 如图, P 为 AD 上的一点, 满足 $\angle BPC = \angle A$.

- ① 求证: $\triangle ABP \sim \triangle DPC$;
- ② 求 AP 的长.

(2) 如果点 P 在 AD 边上移动 (点 P 与点 A 、 D 不重合), 且满足 $\angle BPE = \angle A$, PE 交直线 BC 于点 E , 同时交直线 DC 于点 Q , 那么

① 当点 Q 在线段 DC 的延长线上时, 设 $AP = x$, $CQ = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域;

② 当 $CE = 1$ 时, 写出 AP 的长 (不必写出解题过程).

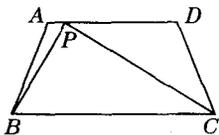
17. 如图, 已知: $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$, $PQ \parallel AB$, P 点在 AC 上 (与点 A 、 C 不重合), Q 点在 BC 上.

(1) 当 $\triangle PQC$ 的面积与四边形 $PABQ$ 的面积相等时, 求 CP 的长;

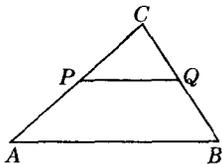
(2) 当 $\triangle PQC$ 的周长与四边形 $PABQ$ 的周长相等时, 求 CP 的长;

(3) 试问: 在 AB 上是否存在点 M , 使得 $\triangle PQM$ 为等腰直角三角

形? 若不存在, 请简要说明理由; 若存在, 请求出 PQ 的长.



(第 16 题)



(第 17 题)

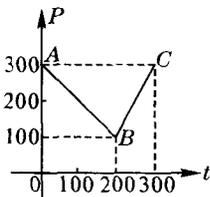
综合创新

18. 已知一个二次函数的图象经过 $A(4, -3)$, $B(2, 1)$ 和 $(-1, -8)$ 三点.

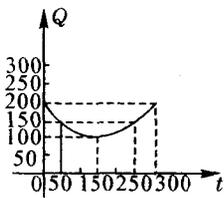
- (1) 求这个二次函数的解析式以及它的图象与 x 轴的交点 M 、 N (M 在 N 的左边) 的坐标;
- (2) 若以线段 M 、 N 为直径作 $\odot G$, 过坐标原点 O 作 $\odot G$ 的切线 OD , 切点为 D , 求 OD 的长.
- (3) 求直线 OD 的解析式;
- (4) 在直线 OD 上是否存在点 P , 使得 $\triangle MNP$ 是直角三角形? 如果存在, 求出点 P 的坐标 (只需写出结果, 不必写出解答过程); 如果不存在, 请说明理由.

19. 某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从 2 月 1 日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图甲的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图乙表示的抛物线段表示.

- (1) 写出图甲表示的市场售价与时间的函数关系 $P = f(t)$; 写出图乙表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q = g(t)$.
- (2) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大? (注: 市场售价和种植成本的单位: 元/ 10^2 kg, 时间单位: 天)



图甲



图乙

29 由正难则反切入

科学家的好奇心是永远满足不了的,因为随着每一个进展,正如巴甫洛夫所说:“我们达到了更高的水平,看到了更广阔的天地,见到了原先在视野之外的东西。”

——贝弗里奇

知识纵横

人们习惯的思维方式是正向思维,即从条件入手,进行正面的推导和论证,使问题得到解决.但有些数学问题,若直接从正面求解,则思维较易受阻,而“正难则反,顺难则逆,直难则曲”是突破思维障碍的重要策略.

数学中存在着大量的正难则反的切入点.数学中的定义、公式、法则和等价关系都是双向的,具有可逆性;对数学方法而言,特殊与一般、具体与抽象、分析与综合、归纳与演绎,其思考方向也是可逆的;作为解题策略,当正向思考困难时可逆向思考,直接证明受阻时可间接证明,探索可能性失败时转向考察不可能性.由正难则反切入的具体途径有:

1. 定义、公式、法则的逆用;
2. 常量与变量的换位;
3. 反客为主;
4. 反证法等.

例题求解

【例1】 当 $x = 1 - \sqrt{2}$ 时,化简下式并求值:

$$\frac{x}{x^2 + a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{2x - \sqrt{x^2 + a^2}}{x^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

(国家理科实验班招生试题)

思路点拨 若分母有理化或直接通分,则计算较繁.逆用公式 $\frac{b}{a} +$

$$\frac{d}{c} = \frac{bc + ad}{ac}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}, \text{ 如 } \frac{x}{x^2 + a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2} - (\sqrt{x^2 + a^2} - x)}{\sqrt{x^2 + a^2}(\sqrt{x^2 + a^2} - x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \text{ 则问题可获得}$$

简解.

链接

人的思维活动既有“求同”和“定势”的方面,又有“求异”和“变通”的方面.求同与求异,定势与变通是人的思维个性的两极,充分利用知识和方法的双向性,是培养思维能力的重要途径.

正难则反在具体的解题中,还表现为下列各种形式:

- (1) 不通分母通分子;
- (2) 不求局部求整体;
- (3) 不先开方先平方;
- (4) 不用直接挖隐含;
- (5) 不算相等算不等;
- (6) 不求动态求静态等.



人们总习惯于用凝固的眼光看待常量与变量,认为它们泾渭分明,更换不得,实际上将常量设为变量,或将变量暂时看作常量,都会给人以有益的启示.

受思维定势的消极影响,人们在解决有几个变量的问题时,总抓住主元不放,使有些问题的解决较为复杂,此时若变换主元,反客为主,问题常常能获得简解.

【例2】 已知实数 a, b, c 满足 $a \neq b$, 且 $2002(a-b) + \sqrt{2002}(b-c) + (c-a) = 0$, 求 $\frac{(c-b)(c-a)}{(a-b)^2}$ 的值.

(第四届《学习报》公开赛试题)

思路点拨 显然求 a, b, c 的值或寻求 a, b, c 的关系是困难的, 令 $\sqrt{2002} = x$, 则 $2002 = x^2$, 原等式就可变形为关于 x 的一元二次方程, 运用根与系数关系求解.

【例3】 设 a, b, c 为非零实数, 且 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$, 试问: a, b, c 满足什么条件时, 三个二次方程中至少有一个方程有不等实数根.

思路点拨 如从正面考虑, 条件“三个方程中至少有一个方程有不等实数根”所涉及的情况比较复杂, 但从其反面考虑情况却十分简单, 只有一种可能, 即三个方程都没有实数根, 然后从全体实数中排除三个方程都无实数根的 a, b, c 的取值即可.

【例4】 已知一平面内的任意四点, 其中任何三点都不在一条直线上, 试问: 是否一定能从这样的四点中选出三点构成一个三角形, 使得这个三角形至少有一内角不大于 45° ? 请证明你的结论.

(第十五届江苏省竞赛题)

思路点拨 结论是以疑问形式出现的, 不妨先假定是肯定的, 然后推理. 若推出矛盾, 则说明结论是否定的; 若推不出矛盾, 则可考虑去证明结论是肯定的.

【例 5】 在六张纸片的正面分别写上整数 1、2、3、4、5、6，打乱次序后，将纸片翻过来，在它们的反面也随意分别写上 1~6 这六个整数，然后计算每张纸片正面与反面所写数字之差的绝对值，得出六个数，请你证明：所得的六个数中至少有两个是相同的。

(2001 年北京市竞赛题)

思路点拨 用反证法证明，即先假设所得的六个数两两不等，由此计算推理，若推出矛盾，则原假设不成立，从而也就证明了原问题。为了便于推理，引入字母表示数，解题中注意不变量与不变性的运用，如数值不变、奇偶性不变等。

连接

反证法是从待证命题的结论的反面出发，进行推理，通过导出矛盾来判断待证命题成立的方法，其证明的基本步骤是：否定待证命题的结论、推理导出矛盾、肯定原命题的结论。

宜用反证法的问题特征是：

- (1) 结论涉及无限；
- (2) 结论涉及唯一性；
- (3) 结论为否定形式；
- (4) 结论涉及“至多，至少”；
- (5) 结论以疑问形式出现等。

学 力 训 练

基础夯实

1. 由小到大排列各分数： $\frac{6}{11}, \frac{10}{17}, \frac{12}{19}, \frac{15}{23}, \frac{20}{33}, \frac{60}{91}$ 是_____。
2. 分解因式： $x^3 + (1-a)x^2 - 2ax + a^2 =$ _____。
3. 解关于 x 的方程： $2x^4 - 7x^3 - 3ax^2 + 3x^2 + 4ax + a^2 = 0$ ($a \geq -\frac{1}{8}$) 得 $x =$ _____。
4. 化简 $\frac{1}{2\sqrt{1+1\sqrt{2}} + 3\sqrt{2+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99+99\sqrt{100}}}$ 的结果是_____。
5. 若关于 x 的三个方程 $x^2 + 4mx + 4m^2 + 2m + 3 = 0$, $x^2 + (2m+1) \cdot x + m^2 = 0$, $(m-1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ 中至少有一个方程有实根，则 m 的取值范围是_____。

6. 有甲、乙两堆小球,如果第一次从甲堆拿出和乙堆同样多的小球放到乙堆,第二次从乙堆拿出和甲堆剩下的同样多的小球放到甲堆,如此挪动4次后,甲、乙两堆小球恰好都是16个,那么,甲、乙两堆最初各有多少个小球?

(重庆市竞赛题)

7. 求这样的正整数 a ,使得方程 $ax^2 + 2(2a - 1)x + 4a - 7 = 0$ 至少有一个整数解.

(上海市竞赛题)

8. 某班参加运动会的19名运动员的运动服号码恰是1~19号,这些运动员随意地站成一个圆圈,则一定有顺次相邻的3名运动员,他们运动服号码之和不小于32,请说明理由.

能力拓展

9. 如正整数 a 和 b 之和是 n ,则 n 可变为 ab ,问能不能用这种方法数次,将22变成2001?

(2000年世界城际间数学联赛题)

10. 证明:如果整系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有有理根,那么 a, b, c 中至少有一个是偶数.

11. 在 $\triangle ABC$ 中是否存在一点 P ,使得过 P 点的任意一直线都将该 $\triangle ABC$ 分成等面积的两部分?为什么?

12. 求证:形如 $4n + 3$ 的整数 $k (n$ 为整数)不能化为两个整数的平方和.

13. 在 7×7 的方格表中共有49个小方格,在每个小方格中要么填上+1,要么填上-1,我们把第一行所有格子中所填的数之积记为 a_1 ,把第二行格子中所填的数之积记为 a_2, \dots 把第七行格子中所填数之积记为 a_7 ,同样对各列格子中所填数之积也分别记为 b_1, b_2, \dots, b_7 .

证明: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 + b_1 + b_2 + \dots + b_7 \neq 0$.

综合创新

14. 有12位同学围成一圈,其中有些同学手中持有鲜花,鲜花总数为13束,他们进行分花游戏,每次分花按如下规则进行:其中一位手中至少持有两束鲜花的同学拿出两束鲜花分给与其相邻的左右两位同学,每人一束.试证:在持续进行这种分花游戏的过程中,一定会出现至少有7位同学手中持有鲜花的情况.

(2001年山东省选拔赛试题)

30 从创新构造入手

智慧,从历史上看,是等同于年龄的,我们能在数字化时代看到相反的情况吗?智慧高于青年?很多革新是在孩子们的天真思想中产生的.

——尼葛洛庞帝

知识纵横

有些数学问题直接求解比较困难,可通过创造性构造转化问题而使问题获解.所谓构造法,就是综合运用各种知识和方法,依据问题的条件和结论给出的信息,把问题作适当的加工处理.构造与问题相关的数学模式,揭示问题的本质,从而沟通解题思路的方法.构造法是一种创造性思维,是建立在对问题结构特点的深刻认识基础上的.

构造法的基本形式是以已知条件为“原料”,以所求结论为“方向”,构造一种新的数学形式,初中阶段常用的构造解题的基本方法有:

1. 构造方程;
2. 构造函数;
3. 构造图形;
4. 对于存在性问题,构造实例;
5. 对于错误的命题,构造反例;
6. 构造等价命题等.

例题求解

【例1】 设 a_1, a_2, b_1, b_2 都为实数, $a_1 \neq a_2$, 满足 $(a_1 + b_1)(a_1 + b_2) = (a_2 + b_1)(a_2 + b_2) = 1$, 求证: $(a_1 + b_1)(a_2 + b_1) = (a_1 + b_2)(a_2 + b_2) = -1$.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

思路点拨 可以从展开已知等式、按比例性质变形已知等式等角度尝试. 仔细观察已知等式特点, a_1, a_2 可看作方程 $(x + b_1)(x + b_2) = 1$ 的两根, 则 $(x + b_1)(x + b_2) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)$, 通过构造方程揭示题设条件与结论的内在规律, 解题思路新颖而深刻.

链接

一般说来, 构造法包含下述两层意思: 利用抽象的普遍性, 把实际问题转化为数学模型; 利用具体问题的特殊性, 给所解决的问题设计一个框架, 强调数学应用的数学建模是前一层意思的代表, 而后一层意思的“框架”含义更为广泛, 如方程、函数、图形、“抽屉”等.

【例2】 求代数式 $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-4x+13}$ 的最小值.

思路点拨 用一般求最值的方法很难求出此代数式的最小值.

$\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-4x+13} = \sqrt{(x+1)^2+(0-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}$, 于是问题转化为: 在 x 轴上求一点 $C(x, 0)$, 使它到两点 $A(-1, 1)$ 和 $B(2, 3)$ 的距离和 $(CA + CB)$ 最小, 利用对称性可求出 C 点坐标. 这样, 通过构造图形而使问题获解.

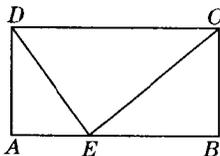
【例3】 已知 b, c 为整数, 方程 $5x^2 + bx + c = 0$ 的两根都大于 -1 且小于 0 , 求 b 和 c 的值.

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 利用求根公式, 解不等式组求出 b, c 的范围, 这是解本例的基本思路, 解法繁难. 由于二次函数与二次方程有深刻的内在联系, 构造函数, 令 $y = 5x^2 + bx + c$, 从讨论抛物线与 x 轴交点在 -1 与 0 之间所满足的约束条件入手.

【例4】 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = a, AB = b$, 问: 能否在 AB 边上找一点 E , 使 E 点与 C, D 的连线将此矩形分成三个彼此相似的三角形? 若能找到, 这样的 E 点有几个? 若不能找到, 请说明理由.

思路点拨 假设在 AB 边上存在点 E , 使 $\text{Rt}\triangle ADE \sim \text{Rt}\triangle BEC \sim \text{Rt}\triangle ECD$, 又设 $AE = x$, 则 $\frac{AD}{AE} = \frac{BE}{BC}$, 即 $\frac{a}{x} = \frac{b-x}{a}$, 于是将问题转化为关于 x 的一元二次方程是否有实根, 在一定条件下有几个实根的研究, 通过构造方程解决问题.



链接

“数缺形时少直观, 形缺少数时难入微” 数形互助是一种重要的思想方法, 主要体现在:

- (1) 几何问题代数化;
- (2) 利用图形图表解代数问题;
- (3) 构造函数, 借用函数图象探讨方程的解.

利用代数法解几何题, 往往是以较少的量的字母表示相关的几何量, 根据几何图形的性质列出代数式或方程(组), 再进行计算或证明.

特别地, 证明几何存在性的问题可构造函数, 利用一元二次方程必定有解的代数模型求证; 运用韦达定理, 讨论几何图形位置的可能性.



有些问题可通过改变形式或换个说法,构造等价命题或辅助命题,使问题清晰且易于把握.

对于存在性问题,可根据问题要求,构造出一个满足条件的结论对象,即所谓的存在性问题的“构造性证明”.

【例5】 试证:世界上任何6个人,总有3人彼此认识或者彼此不认识.

思路点拨 构造图形解题,我们把“人”看做“点”,把2个人之间的关系看作染成颜色的线段.比如2个人彼此认识就把连接2个人的对应点的线段染成红色;2个人彼此不认识,就把相应的线段染成蓝色,这样,有3个人彼此认识就是存在一个3边都是红色的三角形,否则就是存在一个3边都是蓝色的三角形,这样本题就化作:

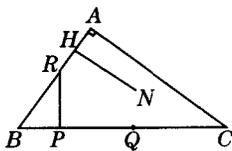
已知有6个点,任何3点不共线,每2点之间用线段连结起来,并染上红色或蓝色,并且一条边只能染成一种颜色.证明:不管怎么染色,总可以找出三边同色的三角形.

学 力 训 练

基础夯实

1. 不查表可求得 $\operatorname{ctg}22.5^\circ$ 的值为_____.
2. 已知 a, b, c, d 是四个不同的有理数,且 $(a+c)(a+d)=1, (b+c)(b+d)=1$, 那么 $(a+c)(b+c)$ 的值是_____.
3. 代数式 $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{(12-x)^2+9}$ 的最小值为_____.
4. A, B, C, D, E, F 六个足球队单循环赛,已知 A, B, C, D, E 五个队已经分别比赛了 5、4、3、2、1 场,则还未与 B 队比赛的球队是_____.
5. 若实数 a, b 满足 $a^2 + ab + b^2 = 1$, 且 $t = ab - a^2 - b^2$, 则 t 的取值范围是_____.
6. 设实数 s, t 分别满足 $19s^2 + 99s + 1 = 0, t^2 + 99t + 19 = 0$, 并且 $st \neq 1$, 求 $\frac{st + 4s + 1}{t}$ 的值.
7. 已知实数 a, b, c 满足 $(a+c)(a+b+c) < 0$, 求证: $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.
8. 写出 10 个不同的自然数,使得它们中的每个是这 10 个数和的一个约数,并说明写出的 10 个自然数符合题设条件的理由.

9. 如图, 已知 P 为直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, Q 为 PC 的中点, 过 P 作 BC 的垂线, 交 AB 于 R , H 为 AR 的中点, 过 H 向 C 所在一侧作射线 $HN \perp AB$. 证明: 射线 HN 上存在一点 G , 使 $AG = CQ$, $BG = BQ$.



(2002 年全国初中数学联赛题)

能力拓展

10. 判断正误:

如果两个三角形的三个内角和三条边六个元素中有五个元素分别相等, 那么这两个三角形全等.

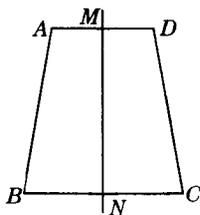
11. 已知关于 x 的方程 $|x^2 - 2\sqrt{3}x + 1| = k$ 有四个不同的实根, 求 k 的取值范围.
12. 设 $0 < x, y, z < 1$, 求证: $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$.
13. 从自然数 $1, 2, 3, \dots, 354$ 中任取 178 个数, 试证: 其中必有两个数, 它们的差为 177.
14. 已知 a, b, c, d, e 是满足 $a + b + c + d + e = 8, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ 的实数, 试确定 e 的最大值.

(第七届美国奥数题)

综合创新

15. 如图, 已知一等腰梯形, 其底为 a 和 b , 高为 h .

- (1) 在梯形的对称轴上求作点 P , 使从点 P 看两腰的视角为直角;
- (2) 求点 P 到两底边的距离;
- (3) 在什么条件下可作出 P 点?



(第二届 IMO 试题)

参考答案

1 追问求根公式

【例题求解】

例1 -7 或 6 两方程相加,得 $(x+y)^2 + (x+y) - 42 = 0$.

例2 选 A 由题意有 $x_1^2 + x_1 - 3 = 0, x_2^2 + x_2 - 3 = 0$, 即 $x_1^2 = 3 - x_1, x_2^2 = 3 - x_2$, 原式 = $x_1 \cdot (3 - x_1) - 4(3 - x_2) + 19 = 3x_1 - x_1^2 + 4x_2 + 7 = 3x_1 - (3 - x_1) + 4x_2 + 7 = 4(x_1 + x_2) + 4 = 4 \times (-1) + 4 = 0$

例3 (1) 当 $a = 1$ 时, 方程的根为 $x = \frac{1}{2}$; 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 方程有两个不相等的实数根 $x_1 = \frac{a + \sqrt{a}}{a - 1}, x_2 = \frac{a - \sqrt{a}}{a - 1}$; 当 $a = 0$ 时, 方程有两个相等实根 $x_1 = x_2 = 0$; 当 $a < 0$ 时, 方程没有实数根.

例4 当 $2x - 1 > 0$ 即 $x > \frac{1}{2}$ 时, 原方程化为 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = 3, x_2 = -1$ (舍去); 当 $2x - 1 = 0$ 即 $x = \frac{1}{2}$ 时, 代入原方程不合, 舍去; 当 $2x - 1 < 0$ 即 $x < \frac{1}{2}$ 时, 原方程化为 $x^2 + 2x - 5 = 0$, 解得 $x_1 = -1 - \sqrt{6}, x_2 = -1 + \sqrt{6} > \frac{1}{2}$ (舍去), 故所有根之和为 $3 + (-1 - \sqrt{6}) = 2 - \sqrt{6}$.

例5 假设存在符合条件的实数 m , 且设这两个方程的公共实根为 α , 则

$$\begin{cases} \alpha^2 + m\alpha + 2 = 0 & \text{①} \\ \alpha^2 + 2\alpha + m = 0 & \text{②} \end{cases} \quad \text{①} - \text{②}, \text{得 } (m-2)(\alpha-1) = 0$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } \alpha = 1.$$

当 $m = 2$ 时, 已知两个方程为同一个方程, 且没有实数根, 故 $m = 2$ 舍去; 当 $\alpha = 1$ 时, 代入①得 $m = -3$, 可求得公共根为 $x = 1$.

【学力训练】

1. $1 \pm \sqrt{5}$ 2. 2 3. 2002 4. A 5. B $\frac{1}{a} = 1 + |a| > 0$, 则 $a > 0$

6. A 当 $x > 0$ 时, $x = -1$ (舍去), 当 $-1 \leq x < 0$ 时, 原方程没有实根, 当 $x < -1$ 时, $x = -\frac{1}{2}$ 舍去.

7. (1) 当 $m = 1$ 时, $x = 2$; 当 $m \neq 1$ 且 $m > \frac{11}{12}$ 时, $x_{1,2} = \frac{1 - 2m \pm \sqrt{12m - 11}}{2(m - 1)}$; 当 $m \neq 1$ 且 $m = \frac{11}{12}$ 时, $x_1 = x_2 = 5$;

当 $m \neq 1$ 且 $m < \frac{11}{12}$ 时, 方程无实数根.

(2) $|x|^2 - |x| - 1 = 0, |x| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $|x| = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (舍去), 故 $x_{1,2} = \pm \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(3) $x_1 = x_2 = -1, x_{3,4} = -3 \pm 2\sqrt{5}$.

8. 由条件得 $a^2 + a = \frac{1}{4}$, 原式 = $\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)^2 a^2} = \frac{a^2+a+1}{(a^2+a)^2} = \frac{\frac{5}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 20$.

9. (1) 换元, 转化. (2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. 10. $6x^2 + 1 = 5x, \frac{1}{x} = 5 - x$.

11. 3 代入有 $(9 - 2m + n) + (m - 4)\sqrt{5} = 0$, 则 $\begin{cases} 9 - 2m + n = 0 \\ m - 4 = 0 \end{cases}$, 解得 $m = 4, n = -1$.

12. 由条件得 $x = \sqrt{2} - 1$, 即 $x^2 + 2x - 1 = 0$, 原式 = $\frac{1}{4}(3x^3 + 10x^2 + 5x + 4) = \frac{1}{4}[(x^2 + 2x - 1)(3x + 4) + 8] = 2$.

13. B $x = 1 \pm \sqrt{m-1}$ 或 $x = -1 \pm \sqrt{m-1}$

14. C $n^2 + 47 = 16n - 16$ 或 $n^2 - 2n - 2 = 1, n^2 - 2n - 2 = -1$. 15. C

16. $x = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = 4 - \sqrt{3}$, 得 $x^2 + 8x + 13 = 0$, 代入原式 = 5.

17. $m^2 + 2001m + 7 = 0, n^2 + 2001n + 7 = 0$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (m^2 + 2001m + 7 - m - 1)(n^2 + 2001n + 7 + n + 1) = (-m - 1)(n + 1) \\ &= -(mn + m + n + 1) = -(7 - 2001 + 1) = 1993. \end{aligned}$$

18. 由题意知 $a > 1, b > 1, a \neq b$, 利用因式分解可求得两个方程的根分别为 $a, \frac{a+2}{a-1}; b, \frac{b+2}{b-1}$,

由题意有: $a = \frac{b+2}{b-1}$ 或 $b = \frac{a+2}{a-1}$, 两式都化简为:

$$ab - a - b - 2 = 0, \text{即 } (a-1)(b-1) = 3, \text{得}$$

$$\begin{cases} a-1=1 \\ b-1=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-1=3 \\ b-1=1 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}, \text{故原式} = a^b b^a = 4^2 \times 2^4 = 256.$$

19. $x^2 = 3x - 1$, 则 $x^4 = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ 代入第二个方程得

$$9x^2 - 6x + 1 - px^2 + q = 0, \text{整理为 } (9-p)x^2 - 6x + (q+1) = 0 \quad (*)$$

(*) 方程与方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 是同解方程, 则 $\frac{9-p}{1} = \frac{-6}{-3} = \frac{q+1}{1}$, 解得 $p = 7, q = 1$.

20. 如图, 设 $BC = a, BC$ 边上的高 $AD = h, PS = x, RS = y$, 由 $\triangle ASR \sim \triangle ABC$, 得

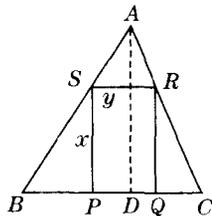
$$\frac{h-x}{h} = \frac{y}{a}, \therefore y = \frac{h-x}{h} \cdot a$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = nS_{\text{矩形}PQRS}$$

$$\therefore \frac{1}{2}ah = nxy = nx \cdot \frac{h-x}{h} \cdot a, \text{整理得 } 2nx^2 - 2nxy + h^2 = 0$$

$$2n\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2n \cdot \frac{x}{h} + 1 = 0, \therefore \frac{x}{h} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2n}\sqrt{n^2 - 2n}, \text{显然 } n^2 - 2n < (n-1)^2, \text{又 } n \geq 3,$$

$\therefore n^2 - 2n > (n-2)^2$, 故 $n^2 - 2n$ 不是完全平方数, $\sqrt{n^2 - 2n}$ 为无理数, 从而 $\frac{x}{h}$ 为无理数, 于是 $\frac{BS}{BA} = \frac{x}{h}$ 为无理数.



2 判别式——二次方程的根的检测器

【例题求解】

例1 由 $\Delta \geq 0, k+1 \geq 0$ 且 $1-2k \neq 0$, 得 $-1 \leq k < 2$ 且 $k \neq \frac{1}{2}$.

例2 选 B $\Delta_1 = 1 - 4a, \Delta_2 = 4(2 - a), \Delta_3 = 4(a - 1)$; 当 $a \leq \frac{1}{4}$ 时, $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$; 当 $\frac{1}{4} < a < 1$ 时, $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$; 当 $1 \leq a \leq 2$ 时, $\Delta_1 < 0, \Delta_2 \geq 0, \Delta_3 \geq 0$; 当 $a > 2$ 时, $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$, 故当 $a \leq \frac{1}{4}$ 或 $1 \leq a \leq 2$ 时, 至少有两个方程有实根.

例3 (1) $\Delta = (k-2)^2 \geq 0$, 故原方程总有实数根;

(2) ① $b = c$ 时, $\Delta = (k-2)^2 = 0, k = 2$, 得 $b + c = k + 2 = 4$, 且符合三角形三边的关系, 故 $\triangle ABC$ 周长为 5; ② b, c 中有一个与 a 相等时, 不妨设 $b = a = 1$, 则 $1^2 - (k+2) \times 1 + 2k = 0$, 得 $k = 1, b + c = k + 2 = 3, c = 2$, 这与 $a + b > c$ 矛盾, 故 a 不能为腰.

例4 令 $x^2 + 2x = y$, 原方程可化为 $y^2 - 2my + m^2 - 1 = 0$, 解得 $y_1 = m + 1, y_2 = m - 1$.

$$\therefore x^2 + 2x - m - 1 = 0 \quad \text{①}, x^2 + 2x - m + 1 = 0 \quad \text{②}$$

从而 $\Delta_1 = 4m + 8, \Delta_2 = 4m$, 由题意, Δ_1 与 Δ_2 中应有一个等于 0, 一个大于 0, 当 $\Delta_1 = 0$ 即 $m = -2$ 时, $\Delta_2 <$

0,不合题意;当 $\Delta_2=0$ 即 $m=0$ 时, $\Delta_1>0$, 此时方程①有两个不相等的实数根 $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_3 = -1$.

例5 x, y 是方程 $t^2 - k(a+b)t + kab = 0$ 的两个实根, 则 $\Delta = k^2(a+b)^2 - 4kab \geq 0$, 因 $k > 0$, 则 $k(a+b)^2 - 4ab \geq 0$, 即 $k \geq \frac{4ab}{(a+b)^2}$, 又 $k(a+b) > 0, kab > 0$, 故 $x > 0, y > 0$, 所以 k 的最小值为 $\frac{4ab}{(a+b)^2}$.

【学力训练】

1. -4 2. 4 3. $k < \frac{2}{3}$ 4. C 5. A 6. A

7. $\Delta_1 = (7-m)^2 - 4 \times (3+n) > 0$ ①, $\Delta_2 = (4+m)^2 - 4 \times (n+6) = 0$ ②, $\Delta_3 = (m-4)^2 - 4 \times (n+1) < 0$ ③, 由②得 $m^2 - 4n = -8m + 8$, 把此式分别代入①、③得 $14m - 37 < -8m + 8 < 8m - 12$, 解得 $\frac{5}{4} < m < \frac{45}{22}$, $\therefore m$ 为整数, $\therefore m=2$, 从而 $n=3$.

8. (1) $k=0$ 时, $x = -1$, 当 $k \neq 0$ 时, 方程①化为 $(x+1)(kx+k-1) = 0$, $x_1 = -1, x_2 = -1 + \frac{1}{k}, k = \pm 1$, 此时 $\Delta = 1 > 0$, 但当 $k=1$ 时, 方程②不是一元二次方程, $\therefore k=1$ 舍去, 即 $k=0, k=-1$.

(2) 当 $k=0$ 时, 方程②为 $-y^2 - 3y + m = 0, \Delta = 9 + 4m \geq 0, m \geq -\frac{9}{4}$ 又 $m > -2$

\therefore 当 $m > -2$ 时, $y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 = 9 + 2m$; 当 $k = -1$ 时, 方程②化为 $-2y^2 - 3y + m = 0, \Delta = 9 + 8m \geq 0$, 即 $m \geq -\frac{9}{8}$ 又 $m > -2, \therefore$ 当 $m \geq -\frac{9}{8}$ 时, $y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 = \frac{9}{4}$.

9. (1) 原方程即为 $x^2 + ax + b = \pm 2, \Delta_1 = a^2 - 4b + 8, \Delta_2 = a^2 - 4b - 8$, 因为原方程有三个不等的实数根, 所以 Δ_1, Δ_2 中必有一个大于 0, 另一个等于 0, 显然 $\Delta_1 > \Delta_2$, 即 $a^2 - 4b - 8 = 0$.

(2) 设方程 $x^2 + ax + b = 2$ 的根为 x_1, x_2 , 方程 $x^2 + ax + b = -2$ 的根为 x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 = 180$, 又 $x_1 + x_2 = -a, x_3 = -\frac{a}{2}, \therefore a = -120, x_3 = 60$.

(3) 由①知 $a^2 - 4b = 8, \Delta_1 = a^2 - 4a + 8 = 16$, 方程 $x^2 + ax + b = 2$, 两根为 $\frac{-a \pm 4}{2}$, 显然 $\frac{-a+4}{2} > \frac{-a}{2} > \frac{-a-4}{2}$, 则 $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a-4}{2}\right)^2 = \left(\frac{-a+4}{2}\right)^2$, 解得 $a_1 = -16, a_2 = 0$ (舍去), $b = \frac{a^2-8}{4} = 62$.

10. 10

11. $\Delta = -4[(1-a)^2 + (a+2b)^2] \geq 0$, 又 $-4[(1-a)^2 + (a+2b)^2] \leq 0$, 得 $4[(1-a)^2 + (a+2b)^2] = 0, \therefore a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

12. $a=0$ 或 $a > \frac{25}{4}$, 当 $a=0$ 时, 方程有相异二实根; 当 $a > 0$ 时, 有 $x^2 - 5x - a = 0$ ①, $x^2 - 5x + a = 0$ ②, $\Delta_1 = 25 + 4a, \Delta_2 = 25 - 4a$, 则 $\Delta_1 > 0$ 且 $\Delta_2 < 0$.

13. D 由前一个方程 $\Delta_1 < 0$ 得 $m > 4$; 当 $m=5$ 时, 后一个方程为一次方程; 当 $m > 4$ 时且 $m \neq 5$ 时, $\Delta_2 > 0$.

14. B 由 $\Delta=0$ 得 $a^2 + 6a + 9 + 4b^2 = 0$, 则 $a = -3, b = 0$. 15. A $2 < a < 4$, 而 $b = \frac{1}{4}(12a - a^2 - 12)$

16. 假设三个方程都有两个相等的实数根, 则 $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 4(a^2 + b^2 + c^2) - 4(ab + bc + ac) = 0$, 即 $a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = 0, \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = 0$, 得 $a = b = c$, 这与题设条件矛盾.

17. 由 Δ_1, Δ_2 得 $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$, 则 $m = -1, 0, 1$, 再分别讨论知存在整数 m , 且 $m=1$ 时, 使两个二次方程的根都是整数.

18. a, b, c 必有一个为正, 不妨设 $c > 0$, 则 $a + b = -c, ab = \frac{1}{c}, a, b$ 可看作方程 $t^2 + ct - \frac{1}{c} = 0$ 两实根, $\Delta = c^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{c}\right) \geq 0, c^3 \geq 4$, 即 $c \geq \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$.

19. 原方程化为 $(x^2 + 3x - p)(x^2 + 3x - 2p) = 0$, 即 $x^2 + 3x - p = 0$ ①, $x^2 + 3x - 2p = 0$ ②, 由题意知两方程中有

一个有两等根,而另一个无实根,经讨论知 $p = -\frac{9}{4}$.

$$20. \begin{cases} n \geq 1 & \text{①} \\ (n-2)^2(n-1) - 4(m+18) > 0 & \text{②} \\ (n-6)^2(n-1) - 4(m-37) = 0 & \text{③} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{②} - \text{③}, \text{并整理得 } (n-4)(n-1) > 27.5, \\ \text{则 } n \geq 8 \text{ 当 } n=8 \text{ 时, } m=44 \text{ 满足题设条件,} \\ \text{故 } n \text{ 的最小值为 } 8. \end{array}$$

③ 充满活力的韦达定理

【例题求解】

例1 $a^2 + 2a = 5, a\beta = -5$, 原式 $= (a^2 + 2a) + a\beta = 5 + (-5) = 0$.

例2 选B 当 $a = b$ 时, 原式 $= 2$, 当 $a \neq b$, a, b 为方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两个根, $a + b = 13, a, b$ 只能为 2 或 11, 原式 $= \frac{11}{2} + \frac{2}{11} = \frac{125}{22}$.

例3 $\Delta = (2a-7)^2 + 8 > 0, x_1 + x_2 = 2a+1, x_1x_2 = 2(4a-7)$, 由 $x_1 - 3 > 0$ 且 $x_2 - 3 > 0$, 得

$$\begin{cases} (x_1-3) + (x_2+3) > 0 \\ (x_1-3) \cdot (x_2-3) > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2a+1-6 > 0 \\ 2(4a-7) - 3(2a+1) + 9 > 0 \end{cases} \quad \text{解得 } a > 4.$$

例4 $\Delta = -4m + 4 > 0$, 得 $m < 1$, 结合题设知: $-1 \leq m < 1$.

$$(1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2m^2 - 10m + 10 = 6. \text{ 解得 } m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

由于 $-1 \leq m < 1$, 故 $m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$.

$$(2) \text{原式} = \frac{m[x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1 + x_2)]}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{2m(m-1)(m^2-3m+1)}{m(m-1)} \\ = 2(m^2-3m+1) = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}.$$

当 $m = -1$ 时, $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 的最大值为 10.

例5 (1) $AB + AC = 2k + 3, AB \cdot AC = k^2 + 3k + 2, AB^2 + AC^2 = BC^2$, 得

$$(2k+3)^2 - 2(k^2+3k+2) = 25, \text{解得 } k=2, k=-5 \text{ (舍去, } \Delta < 0).$$

(2) $\Delta = 1 > 0, AB \neq AC$, ① 当 $AB = BC$ 或 $AC = BC$ 时, 有 $5^2 - 5(2k+3) + k^2 + 3k + 2 = 0$, 当 $k=3$ 时, 得 $x_1=4, x_2=5$; 当 $k=4$ 时, 得 $x_1=5, x_2=6$, 故等腰三角形周长分别为 14 或 16.

【学力训练】

$$1. -\frac{5}{3} < m \leq -\frac{1}{2} \quad 2. \frac{5}{3}\sqrt{3}, -2-\sqrt{6}$$

$$3. x_1^2 - 2kx_1 = 2 - \frac{1}{2}k^2, x_1x_2 = \frac{1}{2}k^2 - 2 \text{ 得 } 2 - \frac{1}{2}k^2 + 2\left(\frac{1}{2}k^2 - 2\right) = 5, \text{解得 } k = \pm\sqrt{14}.$$

$$4. D \quad 5. B \quad 6. C \quad x_1x_2 = 1997, x_1 = 1, x_2 = 1997, p = -(x_1 + x_2) = -1998.$$

7. (1) $\Delta = 8 > 0$;

(2) $x_1 + x_2 = 2(k+1), x_1x_2 = k^2 + 2k - 1, x_1 + x_2 - 2k = 2, (x_1 - k)(x_2 - k) = -1$, 方程②为 $y^2 - 2y - 1 = 0$, 则 $a^2 - 2a - 1 = 0, a \neq 0, a+1 \neq 0, a^2 = 2a+1$.

$$\text{原式} = \frac{(a+1-a^2)(a^2-1)}{4a^2} = \frac{[a+1-(2a+1)](2a+1-1)}{4a^2} = -\frac{1}{2}.$$

8. (1) $S = 3$

(2) 原方程为 $x^2 + (2a-1)x + a^2 = 0$, 由 $\Delta = (2a-1)^2 - 4a^2 \geq 0$, 得 $a \leq \frac{1}{4}$, 又 x_1, x_2 非负, $\therefore x_1 + x_2 = -$

$(2a-1) \geq 0$, 且 $x_1 x_2 = a^2 \geq 0$, 得 $a \leq \frac{1}{2}$, 故 $a \leq \frac{1}{4}$, $S^2 = x_1 + x_2 + 2 \cdot \sqrt{x_1 x_2} = 1 - 2a + 2|a| = 1$, 即 $|a| = a$, $\therefore a \geq 0$, 得 $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$, 故 $a = 0$.

(3) 存在负数 a , 使 $S^2 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 \geq 25$, 只要使 $S^2 = 1 - 2a + 2|a| \geq 25$ 即可.

$\therefore a < 0$, $\therefore 1 - 4a \geq 25$, 解得 $a \leq -6$.

9. 30, 2

10. $x_1^2 = 2x_1 + 2$, 原式 $= x_1(2x_1 + 2) + 2x_2^2 + 2x_2 = 2x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 2x_2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) = 20$; $-5 < m \leq$

-4 . 11. $\frac{3}{4} \leq m \leq 7$

12. B $p + q = 99$, p, q 为 2, 97, $m = pq = 194$. 13. D

14. C 设三根为 1, x_1, x_2 则 $|x_1 - x_2| < 1$,

由 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (x_1 - x_2)^2 \leq 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4 - 4m \geq 0 \\ 4 - 4m > 1 \end{cases}$, 解得 $\frac{3}{4} < m \leq 1$

15. (1) $BC = \frac{3}{2}AB$, $\frac{5}{2}AB = k - 2$, $\frac{3}{2}AB^2 = 2k$, 得 $3k^2 - 37k + 12 = 0$, 解得 $k_1 = 12$, $k_2 = \frac{1}{3}$, 因 $AB + BC = k - 2 > 0$, 故 $k = 12$.

(2) 当 $k = 12$ 时, $AB + BC = 10$, $AB \cdot BC = 24$, 解得 $AB = 4$, $BC = 6$, 要使 $S_{\triangle AED} = 3S_{\triangle DEM}$, 只要使 $AE = 3EM = \frac{3}{4}AM$, 由 $\triangle AED \sim \triangle MBA$ 得 $\frac{AE}{MB} = \frac{AD}{AM}$, 设 $AE = 3a$, $AM = 4a$, 则 $MB = 2a^2$, 而 $AB^2 + BM^2 = AM^2$, 即 $4^2 + 4a^4 = 16a^2$, 解得 $a^2 = 2$, $MB = 4$, 故当 $MB = 4$ 时, 有 $S_{\triangle ADE} = 3S_{\triangle DEM}$.

16. (1) 设 $\frac{x}{x-1} = t$, 则 $t \neq 1$, 原方程化为 $(a^2 - 1)t^2 - (2a + 7)t + 1 = 0$, 当 $a^2 = 1$, 即 $a = \pm 1$ 时, $x = -\frac{1}{8}$ 或 $x = \frac{1}{4}$, 当 $a \neq \pm 1$ 时, $\Delta \geq 0$, 得 $a \geq -\frac{53}{28}$, 综上所述, 当 $a \geq -\frac{53}{28}$ 时, 原方程有实数解.

(2) $\frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_2}{x_2-1}$ 是方程 $(a^2 - 1)t^2 - (2a + 7)t + 1 = 0$ 的两个根, 由韦达定理有 $\frac{2a+7}{a^2-1} = \frac{3}{11}$, 得 $3a^2 - 22a - 80 = 0$, 解得 $a_1 = 10$, $a_2 = -\frac{8}{3}$ (舍去)

17. $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n} = \frac{2}{1}$, 即 $m = 2n$ ①, $\Delta = 4n^2 - m^2 - 8n + 16 > 0$ ②, 把①代入②得 $n \leq 2$.

又 $x_1 + x_2 = 8(n-1)$, $x_1 x_2 = 4(m^2 - 12)$, 由 $(x_1 - x_2)^2 < 19^2$, 得 $4n^2 - m^2 - 8n + 4 < 0$ ③,

把①代入③, 得 $n > \frac{1}{2} \therefore \frac{1}{2} < n \leq 2$, $\therefore n = 1, 2$, 从而得 $m = 2$ 或 4.

18. 设 $x_1^2 + ax_1 + 1 = 0$, $x_1^2 + bx_1 + c = 0$, 得 $x_1 = \frac{c-1}{a-b}$, 同理, 由 $x_2^2 + x_2 + a = 0$, $x_2^2 + cx_2 + b = 0$, 得 $x_2 = \frac{a-b}{c-1}$ ($c \neq 1$). 故 $x_2 = \frac{1}{x_1}$. 另一方面由韦达定理知 $\frac{1}{x_1}$ 是第一个方程的根, 这就表明 x_2 是方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 和 $x^2 + x + a = 0$ 的公共根. 因此两式相减有 $(a-1)(x_2-1) = 0$, 但当 $a=1$ 时, 这两个方程无实根, 故 $x_2 = 1$, 从而 $x_1 = 1$, 于是 $a = -2$, $b + c = -1$, 所以, $a + b + c = -3$.

4 明快简捷——构造方程的妙用

【例题求解】

例 1 由已知, $xy + x + y = 23$, $xy(x+y) = 120$, 则 $xy, x+y$ 是方程 $t^2 - 23t + 120 = 0$ 的两根, 得 $t_1 = 8, t_2 = 15$,

$\therefore \begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=8 \end{cases}$ (舍去), $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 8^2 - 2 \times 15 = 34$.

例2 选A 显然 $b \neq 0$, 由 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ 得 $5 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 2001 \cdot \frac{1}{b} + 9 = 0$, 又 $ab \neq 1$, 即 $a \neq \frac{1}{b}$, 则 $a, \frac{1}{b}$ 是方程 $5x^2 + 2001x + 9 = 0$ 的两个根, 由韦达定理得 $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{9}{5}$, 即 $\frac{a}{b} = \frac{9}{5}$.

例3 原方程可看做是关于 x^2 的一元二次方程, $2(x^2)^2 - 4y(x^2) + y^4 + 1 = 0$, $\therefore x$ 为实根, $\therefore \Delta = -8(y^2 - 1)^2 \geq 0$. 即 $(y^2 - 1)^2 \leq 0$, 而 $(y^2 - 1)^2 \geq 0$
 $\therefore y^2 = 1$, 即 $y = \pm 1$, 当 $y = 1$ 时, $x = \pm 1$, 当 $y = -1$ 时无解.
 故满足方程的整数对为 $(1, 1), (-1, 1)$.

例4 由条件得 $ab = \frac{t+1}{2}, a+b = \pm\sqrt{\frac{t+3}{2}} (t \geq -3)$.

$\therefore a, b$ 是关于 x 的方程 $x^2 \pm \sqrt{\frac{t+3}{2}}x + \frac{t+1}{2} = 0$ 的两个实根, 由 $\Delta = \frac{t+3}{2} - 2(t+1) = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \geq 0$, 解得 $t \leq -\frac{1}{3}$, 故 t 的取值范围是 $-3 \leq t \leq -\frac{1}{3}$.

例5 由条件得 $\begin{cases} x+y=5-z \\ (x+y)^2-2xy=9-z^2 \end{cases}$, 从而 $xy = \frac{1}{2}[(5-z)^2 - (9-z^2)] = z^2 - 5z + 8$.

$\therefore x, y$ 是方程 $t^2 - (5-z)t + (z^2 - 5z + 8) = 0$ 的两个实根

$\Delta = (5-z)^2 - 4(z^2 - 5z + 8) \geq 0$, 解得 $1 \leq z \leq \frac{7}{3}$.

【学力训练】

1. $s \leq -\frac{3}{2}$ 且 $s \neq -3$. 2. 4 3. 2 或 -6 4. A 5. B 6. A

7. (1) 当 $p \neq \frac{1}{q}$ 时, $p, \frac{1}{q}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个不相等的实数根, $p + \frac{1}{q} = 2, p \cdot \frac{1}{q} = -5$, 原式 = 14.

(2) 当 $p = \frac{1}{q}$ 时, $p, \frac{1}{q}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的一个根, 解得 $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $p^2 + \frac{1}{q^2} = 2p^2 = 2(1 \pm \sqrt{6})^2 = 14 \pm 4\sqrt{6}$. 故 $p^2 + \frac{1}{q^2}$ 的值为 14 或 $14 + 4\sqrt{6}$ 或 $14 - 4\sqrt{6}$.

8. 146 参见例1 9. 0 或 $\frac{8}{3}$

10. $(b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) = 0$, 它可看做是关于 x 的方程 $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ 的判别式, $\therefore (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, \therefore 方程有一个根为 1, 又 $(b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) = 0$, \therefore 方程两根均为 1, 则有 $1 = \frac{c-a}{a-b}$, 得 $\frac{b+c}{a} = 2$.

11. 1, 2 按 x 的降幂排列整理原等式得 $5x^2 + (2y-14)x + 2y^2 - 10y + 17 = 0$, 从 $\Delta \geq 0$ 入手.

12. $\frac{11}{2} < m \leq 18$.

13. a, b, c 中有两个为负, 一个为正, 不妨设 $a < 0, b < 0, c > 0$, 且 $a+b = -c, ab = \frac{2}{c}$, a, b 为方程 $x^2 + cx + \frac{2}{c} = 0$ 的两根, $\therefore \Delta = c^2 - \frac{8}{c} \geq 0$, 得 $c \geq 2$, 故原式 = $-a-b+c = 2c \geq 4$, 即原式有最小值为 4.

14. 由条件得 $bc = a^2 - 8a + 7, b+c = \pm(a-1)$.

$\therefore b, c$ 是关于 x 的方程 $x^2 \mp (a-1)x + a^2 - 8a + 7 = 0$ 两实根,

由 $\Delta = [\mp(a-1)]^2 - 4(a^2 - 8a + 7) \geq 0$, 得 $1 \leq a \leq 9$.

15. (1) 作 $AG \parallel BD$ 交 CB 延长线于 G , 则 $\frac{AD}{DC} = \frac{BG}{BC}$, 可证明 $AB = BG$.

(2) 由(1)结论可知: $\frac{CF}{EF} = \frac{CB}{BE} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\therefore BE = \frac{2a}{3\sqrt{5}}$, 而 $\frac{BE}{BA} = \frac{2}{3}$, $\therefore a = \sqrt{5}c, b = 2c$, 又 $b+c = p, bc = q^2$, \therefore

$$p = 3c, q = \pm\sqrt{2}c, \text{故 } \frac{p}{q} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

16. 设 $\frac{AD}{AB} = x, S_{\triangle ABC} = s$, 则 $S_{\triangle ADE} = x^2s, S_{\triangle ABE} = xs$, 由 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDE}$, 得 $xs = x^2s + k^2$, 即 $x^2s - sx + k^2 = 0$.

要使方程有实根, 则 $\Delta = s^2 - 4k^2s \geq 0$, 得 $s \geq 4k^2$.

设这个方程两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = \frac{k^2}{s}$.

$\because x_1, x_2$ 都为非负数, 又 $s \geq 4k^2, \therefore 0 \leq x_1, x_2 < 1$.

于是, 当 $s = 4k^2$ 时, $x_1 = x_2$, 即只有一条直线 DE ; 当 $s > 4k^2$ 时, $x_1 \neq x_2$, 即有这样的两条直线 DE 满足要求.

5 一元二次方程的整数解

【例题求解】

例 1 5 当 $k=6$ 时, 得 $x=2$; 当 $k=9$ 时, 得 $x=-3$, 当 $k \neq 6$ 且 $k \neq 9$ 时, 解得 $x_1 = \frac{9}{6-k}, x_2 = \frac{6}{9-k}$, 当 $6-k = \pm 1, \pm 3, \pm 9$ 时, x_1 是整数, 这时 $k=7, 5, 3, 15, -3$; 当 $9-k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ 时, x_2 是整数, 这时 $k=10, 8, 11, 7, 12, 15, 3$. 综上所述, $k=3, 6, 7, 9, 15$ 时原方程的解为整数.

例 2 选 B $a+b=13$, 则 a, b 为 2, 11, $c=ab=22$.

例 3 $p+q = -(k^2+ak)$ ①, $pq = 1999 + k^2 + ak$ ②,

$$\text{①} + \text{②}, \text{得 } p+q+pq = 1999, \text{则 } (p+1)(q+1) = 2^4 \times 5^3 \quad \text{③}$$

由③知 p, q 显然均不为 2, 则必为奇数, 故 $\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}$ 均为整数, 且 $\frac{p+1}{2} \cdot \frac{q+1}{2} = 2^2 \times 5^3$. 若 $\frac{p+1}{2}$ 为奇数,

则必有 $\frac{p+1}{2} = 5^r (r=1, 2, 3)$, 从而 $p = 2 \times 5^r - 1$ 为一合数, 矛盾. 因此, $\frac{p+1}{2}$ 必为偶数. 同理, $\frac{q+1}{2}$ 也为

偶数, 所以 $\frac{p+1}{4}$ 和 $\frac{q+1}{4}$ 均为整数, 且 $\frac{p+1}{4} \cdot \frac{q+1}{4} = 5^3$, 不妨设 $p \leq q$, 则 $\frac{p+1}{4} = 1$ 或 5. 当 $\frac{p+1}{4} = 1$ 时, $\frac{q+1}{4}$

$= 5^3$, 得 $p=3, q=499$, 均为质数; 当 $\frac{p+1}{4} = 5$ 时, $\frac{q+1}{4} = 5^2$, 得 $p=19, q=99$, 不合题意, 故 $p=3, q=499$.

代入①得 $k^2 + ak + 502 = 0$, 此方程有惟一的实根, 故 $\Delta = a^2 - 4 \times 502 = 0$, 得 $a = 2\sqrt{502}$.

例 4 设 $\Delta = 565 + [6(k+1)]^2 = p^2 (p \geq 0)$, 有

$$p^2 - [6(k+1)]^2 = [p+6(k+1)][p-6(k+1)] = 565 = 113 \times 5 = 565 \times 1$$

$$\text{得 } \begin{cases} p+6(k+1) = 113 \\ p-6(k+1) = 5 \end{cases} \quad \text{①或} \begin{cases} p+6(k+1) = 565 \\ p-6(k+1) = 1 \end{cases} \quad \text{②}$$

解①, 得 $k=8$, 于是 $x=2$ 或 $-\frac{41}{9}$; 解②得 $k=46$, 于是 $x=-17$ 或 $\frac{130}{9}$, 故当 $x=2, -\frac{41}{9}$ 或 $x=-17, \frac{130}{9}$

时, $9x^2 + 23x - 2$ 恰为两正偶数 8 和 10 或者 46 和 48 的乘积.

例 5 $a = \frac{13+6x}{x^2+2x+1} = \frac{13+6x}{(x+1)^2} \geq 1$ ①, 解得: $-2 \leq x \leq 6$ 且 $x \neq -1, x = -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

分别代入①, 得 $a=1, 13$, (a 的分数值已舍去)

【学力训练】

1. 5 当 $a=1$ 时, $x=1$, 当 $a \neq 1$ 时, $x_1=1, x_2=-1-\frac{2}{a-1}$ 2. 3994

3. 1984 设方程两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2 = \frac{p}{k-1}, x_1x_2 = \frac{k}{k-1}, k-1|k$, 得 $k=2, p=3$.

4. 变形后用因式分解法: $a=9, -15, -39$

5. $\Delta = 4(2m+1)$ 为完全平方数, 又 m 为 $4 < m < 40$ 的整数, 则 $m = 12$ 或 24 . 当 $m = 12$ 时, $x_1 = 16, x_2 = 26$; 当 $m = 24$ 时, $x_3 = 38, x_4 = 52$.

6. 显然 $a \neq 0, x_1 = 2 - \frac{3}{a}, x_2 = 1 - \frac{5}{a}$, 从而可得 $a = 1, 3$ 或 5 .

7. 当 $k = 0$ 时, $x = 1$; 当 $k \neq 1$ 时, 设两个整数根为 x_1, x_2 , 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 - \frac{1}{k} & \text{①} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{1}{k} & \text{②} \end{cases} \quad \text{①} - \text{②}, \text{得 } x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 2$$

$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 = 1 \times 3 = (-1) \times (-3)$, 解得 $x_1 + x_2 = 6$ 或 $x_1 + x_2 = -2$.

即 $-1 - \frac{1}{k} = 6$ 或 $-1 - \frac{1}{k} = -2$, 解得 $k = -\frac{1}{7}$ 或 $k = 1$, 故满足要求的 k 值为 $0, -\frac{1}{7}, 1$.

8. 设两质数根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 4n - 5$ 为奇数, x_1, x_2 必一奇一偶, 不妨设 $x_1 = 2$, 代入原方程得 $n^2 - 19n + 48 = 0$, 解得 $n_1 = 16, n_2 = 3$, 当 $n = 16$ 时, $x_2 = 57$; 当 $n = 3$ 时, $x_2 = 5$.

9. $x_1 = -1 - \frac{2}{k-4}, x_2 = -1 - \frac{4}{k-2}$, 消去 k 得 $x_1 x_2 + 3x_1 + 2 = 0$. 即 $x_1(x_2 + 3) = -2$.

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -2 & \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 3 = -2 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 + 3 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 + 3 = 1 \\ x_1 = -2 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases} \end{cases} \quad \text{从而得 } k = 6, 3, \frac{10}{3}.$$

10. $a = \frac{2(x+6)}{(x+2)^2} \geq 1$, 解得 $-4 \leq x \leq 2$, 讨论得 $a = 1, 3, 6, 10$.

11. 设 $\frac{n^2 - 71}{7n + 55} = k$ (k 为整数), 则 $n^2 - 7kn - (55k + 71) = 0$ ①

由题意知 $\Delta = 49k^2 + 220k + 284$ 应为完全平方数.

$$\text{因 } (7k + 15)^2 = 49k^2 + 210k + 225 < 49k^2 + 220k + 284 < 49k^2 + 238k + 289 = (7k + 17)^2,$$

故 $\Delta = (7k + 16)^2$, 即 $(7k + 16)^2 = 49k^2 + 220k + 284$, 解得 $k = 7$.

把 $k = 7$ 代入①, 得 $n = 57$ 或 $n = -8$ (舍去)

12. (1) 假设 $x_1 > 0$, 由 $x_1 x_2 > 0$ 知 $x_2 > 0, x_1 + x_2 = -b = -x'_1 x'_2$, 还与已知 $x_1 x_2 > 0, x'_1 x'_2 > 0$ 矛盾, 故 $x_1 < 0, x_2 < 0$, 同理 $x'_1 < 0, x'_2 < 0$.

(2) $c - (b - 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0$, 故 $c \geq b - 1$, 对于方程 $x^2 + x + b = 0$ 进行同样讨论, 得 $b \geq c - 1$, 综上有 $b - 1 \leq c \leq b + 1$.

(3) ① 当 $c = b + 1$ 时, $x_1 x_2 = -x_1 - x_2 + 1$,

$$\text{从而 } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2 = (-1) \times (-2) = 1 \times 2.$$

$$\text{故 } \begin{cases} x_1 + 1 = -1 \\ x_2 + 1 = -2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 + 1 = -2 \\ x_2 + 1 = -1 \end{cases} \quad \text{由此算出 } b = 5, c = 6 \text{ 符合题意.}$$

② 当 $c = b$, 有 $x_1 x_2 = -(x_1 + x_2)$, 从而 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$, 因此, $x_1 = x_2 = -2$, 故 $b = c = 4$, 符合题意.

③ 当 $c = b - 1$ 时, $b = c + 1$, 对方程 $x^2 + cx + b = 0$ 作类似①讨论有 $b = 6, c = 5$, 综上所述得三组值. $(b, c) = (6, 5), (5, 6), (4, 4)$.

13. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{m^2 - m + 1}}{m}$, 当 $m = 1$ 时, $x = 2$ 或 0 , 这样的直角三角形不存在, 假设还存在不为 0 或 1 的整数 m , 使得方程有整数根, 则 $m^2 - m + 1 = k^2$ (k 为整数), 即 $m^2 - m = k^2 - 1$, 必有 $m(m - 1) = (k - 1)(k + 1)$, 而 $m(m - 1)$ 是两个连续的不为 0 的整数的乘积, 但是 $(k - 1)$ 和 $(k + 1)$, 1 和 $(k^2 - 1)$ 都不是连续整数, 故 $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ 时, $m^2 - m + 1$ 不是某整数的平方, 综上所述, 满足条件的直角三角形不存在.

⑥ 转化——可化为一元二次方程的方程

【例题求解】

例1 0或2 设 $2x^2 - 5x = y$, 则 $y + \frac{8}{y+1} - 5 = 0$, 解得 $y_1 = 2, y_2 = 3$.

例2 选B 方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 无实根, 由 $\Delta = 4 - 4m < 0$, 得 $m > 1$.

例3 (1) 设 $\frac{x^2+3x}{x^2+x-4} = y$, 则原方程化为 $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3y} = \frac{11}{12}$,

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = -4, x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}$$

(2) 设 $1999 - x = a, x - 1998 = b, 1999 - x + x - 1998 = 1$, 则原方程 $a^3 + b^3 = (a+b)^3$, 得 $ab = 0$, 即 $(1999 - x)(x - 1998) = 0, \therefore x_1 = 1999, x_2 = 1998$.

(3) 设 $y = \frac{13-x}{x+1}$, 则 $xy(x+y) = 42$, 又 $xy + (x+y) = \frac{13x-x^2}{x+1} + \frac{x^2+13}{x+1} = 13$.

$\therefore xy, x+y$ 是方程 $t^2 - 13t + 42 = 0$ 的两根, 解得 $t_1 = 6, t_2 = 7$, 即 $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=7 \end{cases}$, 进而可

$$\text{得: } x_1 = 1, x_2 = 6, x_3 = 3 + \sqrt{2}, x_4 = 3 - \sqrt{2}.$$

例4 原方程化为 $kx^2 - 3kx + 2x - 1 = 0$ (*)

(1) 当 $k=0$ 时, 原方程有惟一解 $x = \frac{1}{2}$;

(2) 当 $k \neq 0$ 时, 方程(*) $\Delta = 5k^2 + 4(k-1)^2 > 0$, 总有两个不同的实数根, 由题意知必有一个根是原方程的增根, 从原方程知增根只能是0或1, 显然0不是(*)的根, 故 $x=1$, 得 $k = \frac{1}{2}$.

例5 设 $x + \frac{a}{x} = y$, 则 $y^2 - 5y + 6 = 0$, 解得 $y_1 = 2, y_2 = 3$

$$\therefore x^2 - 2x + a = 0 \quad ①, \quad x^2 - 3x + a = 0 \quad ②$$

若①有两个相等的实根, 则 $\Delta_1 = 4 - 4a = 0$, 得 $a_1 = 1$; 若②有两个相等的实根, 则 $\Delta_2 = 9 - 4a = 0$, 得 $a_2 = \frac{9}{4}$; 若①、②有公共根, 则 $x^2 - 2x + a = x^2 - 3x + a$, 得 $x=0$, 不合题意, 舍去, 故 $a=1$ 或 $\frac{9}{4}$.

【学力训练】

1. $-1; a < 2$ 且 $a \neq 4$

2. 方程中每个分式可分拆变形, 得 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$, 解得 $x_1 = \frac{-9 + \sqrt{649}}{2}, x_2 = \frac{-9 - \sqrt{649}}{2}$.

3. $m = -1$ 4. A 5. C 6. D

7. (1) $x_1 = 3, x_2 = 4$;

(2) $a = 6 + 2\sqrt{2}, b = 6 - 2\sqrt{2}$, 原方程为 $\frac{6+2\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x-(6-2\sqrt{2})} = 1$, 不是表列的系列方程中的一个;

(3) 第 n 个方程为 $\frac{2(n+2)}{x} - \frac{1}{x-(n+1)} = 1$ (n 为自然数), 解得 $x_1 = n+2, x_2 = 2(n+1)$.

8. (1) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{(x^2+x+1)+x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{19}{6}, \frac{x^2+x+1}{x^2+1} + 1 + \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{19}{6}, x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$;

(2) 设 $x^2 + 2x - 8 = y$, 解得 $y = 9x$ 或 $y = -5x$, 进而得 $x_1 = 8, x_2 = -1, x_3 = -8, x_4 = 1$

(3) $x_1 = -6, x_2 = 1$; (4) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$.

9. 设 $x^2 + 2x = y$, 则原方程可化为 $y^2 - 2my + m^2 - 1 = 0$, 解得 $y_1 = m+1, y_2 = m-1$.

$\therefore x^2 + 2x - m - 1 = 0$ ①, $x^2 + 2x - m + 1 = 0$ ②

从而 $\Delta_1 = 4m + 8, \Delta_2 = 4m$ 中应有一个等于零, 一个大于零.

经讨论当 $\Delta_2 = 0$ 即 $m = 0$ 时, $\Delta_1 > 0$, 此时方程②有两个相等实根 $x = -1$, 方程①有两个不等实根, $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

10. $x = -\frac{4+m^2}{2m} (m > 0)$, 又 $x + m = m - \frac{4+m^2}{2m} \geq 0$, 解得 $m \geq 2$. 11. $x_1 = 3, x_2 = -2$ 12. $x = -\frac{11}{2}$

13. 原方程化为 $x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0$ ①, $ab \neq 0, x = 0$ 不是方程①的根, 又 $\Delta = 4(a-b)^2$, 且 $a \neq b, \therefore \Delta > 0$, 方程①有两个不相等实根, 由题意知 $x_1 = 2, x_2 = -2$, 则 $a + b = 0, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = -2$.

14. (1) $(6x+7)^2(6x+8)(6x+6) = 72$, 解得 $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{5}{3}$.

(2) $(x^2 + 3x - 4)^2 + (2x^2 - 7x + 6)^2 = [(x^2 + 3x - 4) + (2x^2 - 7x + 6)]^2$,

解得 $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = \frac{3}{2}$

(3) $\left[x - \frac{x}{x+1}\right]^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} = 3$, 即 $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} = 3$, 解得 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(4) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = -\frac{9}{4}$.

15. (1) 设 $\sqrt{x^2 + 2x + 2p} = y$, 则 $y^2 + 2y - p^2 - 2p = 0$, 解得 $y_1 = p, y_2 = -p - 2$.

$\therefore \sqrt{x^2 + 2x + 2p} = p$ ①, $\sqrt{x^2 + 2x + 2p} = -p - 2$ ②

当 $\begin{cases} p < 0 \\ -p - 2 < 0 \end{cases}$ 时, 即 $-2 < p < 0$ 时, 原方程无解.

(2) $p > 0$ 时, 方程②无实根, 方程① $\Delta = 4(p-1)^2 = 0$, 得 $p = 1$ 时, $x_1 = x_2 = -1$, 是原方程的根.

16. 方程中各项系数关于中间项对称, $x \neq 0$, 在方程两边同除以 x^2 , 得 $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$, 即

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$. 解得 $x + \frac{1}{x} = 2$ 或 $x + \frac{1}{x} = 3$.

17. (1) 可求得 $AD = 5, BC = 8, \angle B = 60^\circ$;

(2) 过 M 作两底的垂线 HN, H, N 为垂足.

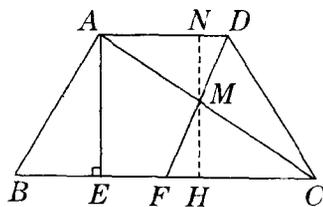
由 $S_{\triangle ADM} = \frac{125\sqrt{3}}{32}$, 得 $MN = \frac{25\sqrt{3}}{16}, MH = AE - MN = \frac{15\sqrt{3}}{16}$.

$\therefore \triangle AMD \sim \triangle CMF, \therefore \frac{MN}{MH} = \frac{AD}{FC} = \frac{5}{3}$.

$\therefore FC = 3, BF = BC - CF = 5$.

$\therefore AD = 5, \therefore$ 四边形 $ABFD$ 为平行四边形, 得 $DF = AB = 5. \therefore DF + CF = 8, DF \cdot CF = 15$.

故以 CF, DF 的长为根的一元二次方程为 $x^2 - 8x + 15 = 0$.



7 化归——解方程组的基本思想

【例题求解】

例 1 消去 y , 得 $x^2 - 2ax + b^2 - bc + ac = 0$, 由 $\Delta = 0$, 得 $(a-b)(a+b-c) = 0, \therefore a = b$.

例 2 选 C. 由 $(x+y)z = 23 \times 1$, 得 $z = 1, x+y = 23$.

例 3 (1) $\begin{cases} x+y = -3 \\ xy = -10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y = 1 \\ xy = -14 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -5 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = \frac{1+\sqrt{57}}{2} \\ y_3 = \frac{1-\sqrt{57}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = \frac{1-\sqrt{57}}{2} \\ y_4 = \frac{1+\sqrt{57}}{2} \end{cases}$.

$$(2) \begin{cases} x^2 + 3x = 4 \\ x + y = 10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x^2 + 3x = 10 \\ x + y = 4 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 9, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 14, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = 9 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} a + b = 2 \\ a^3 + b^3 = 26, \end{cases} \text{ 得 } a^2 - ab + b^2 = 13 \quad \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -3, \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = 26 \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 28. \end{cases}$$

例4 $\because a + b = 8, ab = c^2 - 8\sqrt{2}c + 48, \therefore a, b$ 是方程 $x^2 - 8x + c^2 - 8\sqrt{2}c + 48 = 0$ 的两根, 故判别式 $\Delta = 8^2 - 4(c^2 - 8\sqrt{2}c + 48) = -4(c - 4\sqrt{2})^2 \geq 0, \therefore c = 4\sqrt{2}$, 从而 $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 16 \end{cases}$, 解之得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$, 所以有 $4x^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$.

例5 (1) 消元得: $4x^2 + (4m - 4)x + m^2 = 0$, 此方程有两个不等正根, 故 m 应同时满足 $m \neq 0, \frac{4 - 4m}{4} > 0$ 且 $(4m - 4)^2 - 16m^2 > 0$, 解得 $m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$.

$$(2) x_1 + x_2 = 1 - m, x_1 x_2 = \frac{1}{4} m^2, n = -2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{8m - 8}{m^2}.$$

(3) 假设存在 m , 使 $\frac{8m - 8}{2m^2} = -2$, 解得 $m = -2 - 2\sqrt{2}$ 或 $m = -2 + 2\sqrt{2}$ (舍去, 因 $m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$).

【学力训练】

1. 略 2. 2 3. 9 4. 13 或 7, 设 $\sqrt{x + y + z - 3} = a$, 则有 $a^2 - a - 12 = 0$. 5. D

6. B 由方程得 $(a + b + 1)(x^2 + x + 1) = 0$, 而 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 故 $a + b + 1 = 0$

$$7. (1) \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 5 \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 27 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -3, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 6 \\ y_3 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -6. \end{cases}$$

(3) 前两个方程相减得: $(x - t)(y + z) = 0$, 若 $y + z = 0$, 则 $y = -z$ 代入第一个方程得 $y^2 = -1$ 无实数解, 故 $y + z \neq 0$, 同理 $z + t \neq 0, t + x \neq 0$, 有 $x - t = y - z = z - x = 0$, 即 $x = y = z = t$, 代入得 $x = y = z = t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$8. (1) k > -\frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0; (2) k = 1 \quad 9. \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

10. 由方程组得 $\frac{1}{x} = |x| + 1$, 解得 $x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, y_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, x_0 + y_0 = \sqrt{5}$

11. 4 用合比定理 12. $\frac{23}{2}$ 13. D

14. B 以①、②、③记三个方程, ① - ②得 $(x - y)(1 - z) = 0, \therefore z = 1$ 或 $x = y$, 若 $z = 1$,

$$\text{由②、③得 } \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x = y = 1; \text{ 若 } x = y, \text{ 由②、③得 } \begin{cases} x + xz = 2 \\ x^2 + z = 2. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$15. (1) \text{ 设 } \sqrt{x + \frac{1}{y}} = a, \sqrt{x + y - 3} = b, \text{ 则 } \begin{cases} a - b = \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = 3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \left(x + \frac{9}{x}\right) + \left(y + \frac{4}{y}\right) = 10 \\ \left(x + \frac{9}{x}\right)\left(y + \frac{4}{y}\right) = 24, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x + \frac{9}{x} = 4 \\ y + \frac{4}{y} = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + \frac{9}{x} = 6 \\ y + \frac{4}{y} = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

(3) 令 $y = x^2 + 3x - 2$, 则 $\begin{cases} y = x^2 + 3x - 2 & \text{①} \\ x = y^2 + 3y - 2 & \text{②} \end{cases}$, ① - ② 得 $(y - x)(y + x + 4) = 0$,

$\therefore y = x$ 或 $x + y = -4$, 解得 $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$.

16. (1) 消去 y 得: $x^2 - x + a + 1 = 0$, 再由 $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$ 及 $\Delta > 0$, 得 $-1 < a < -\frac{3}{4}$.

(2) 由韦达定理及(1)得 $a = -\frac{7}{8}$.

17. 原方程组化为 $\begin{cases} bx + ay = -(1+x) & \text{①} \\ ax + by = -(1+y) & \text{②} \end{cases}$, ① + ②, 得 $x + y = -1$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

18. $\begin{cases} xy + x + y = 17 \\ xy(x + y) = 66 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 11 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 6 \end{cases}$

$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 109$.

原式 $= x^4 + y^4 + x^2 y^2 + xy(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 + xy(x^2 + y^2) = 12499$.

8 由常量数学到变量数学

【例题求解】

例 1 $Q(\pm 1, 1 + \sqrt{3})$ 例 2 选 C

例 3 (1) $W_1 = 16x + 1000 + \left(\frac{x}{200} + 2\right) \times 200 = 17x + 1400$; $W_2 = 4x + 2000 + \left(\frac{x}{100} + 4\right) \times 200 = 6x + 2800$; $W_3 = 8x + 1000 + \left(\frac{x}{50} + 2\right) \times 200 = 12x + 1400$.

(2) $W_1 > W_3$ 恒成立. 由 $W_1 - W_2 = 0$ 得 $x \approx \frac{1400}{11} \approx 127$; 由 $W_2 - W_3 = 0$, 得 $x = \frac{700}{3} \approx 233$. \therefore 当 $0 < x \leq \frac{1400}{11}$ 时, $W_2 > W_1 > W_3$; 当 $\frac{1400}{11} < x < \frac{700}{3}$ 时, $W_1 > W_2 > W_3$, 当 $x = \frac{700}{3}$ 时, $W_1 > W_3 = W_2$; 当 $x > \frac{700}{3}$ 时, $W_1 > W_3 > W_2$.

即当 A、B 两市的距离不超过 233 千米时, 用汽车运输比较合理; 当 A、B 两市的距离大约等于 233 千米时, 采用汽车、火车均适合; 当 A、B 两市的距离超过 233 千米时, 采用火车运输比较合理.

例 4 (1) $y = MN \cdot DN = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ (cm²)

(2) $\because AP = x$, $\therefore AN = \frac{3}{2}x$, 当 $0 \leq x < \frac{8}{3}$ 时, $y = 0$; 当 $\frac{8}{3} \leq x \leq 4$ 时, $y = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}x - 4\right) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$; 当 $4 \leq x < \frac{16}{3}$ 时, $y = x$; 当 $\frac{16}{3} \leq x \leq 8$ 时, $y = 2(8 - x) = -2x + 16$.

(3) 当 $y = 4$ 代入 $y = -2x + 16$ ($\frac{16}{3} \leq x \leq 8$) 时, 得 $x = 7$; 将 $y = 2$ 代入 $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x$ ($\frac{8}{3} \leq x < 4$) 时, 得 $x = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{3}$.

【学力训练】

1. (8, 0), (8, 4), (0, 4) 2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 3. (1) 100, (2) 甲, (3) 8 4. D 5. D 6. C

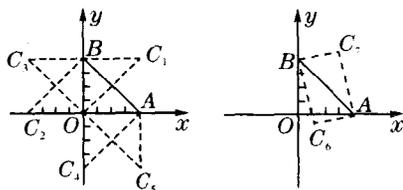
7. 见下图, 未知顶点 C 的坐标为 $C_1(4, 3)$, $C_2(-4, 0)$, $C_3(-4, 3)$, $C_4(0, -3)$, $C_5(4, -3)$, $C_6\left(\frac{28}{25}, -\frac{21}{25}\right)$, $C_7\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$

8. (1) $y_{甲} = 2x + 180; y_{乙} = 2.5x + 100$

(2) 当路程 $x = 80$ 千米时, $y_{甲} = y_{乙}$; 当 $x > 80$ 时, $y_{甲} < y_{乙}$; 当 $x < 80$ 时, $y_{甲} > y_{乙}$.

9. $y = \frac{1}{4}x^2 \quad \triangle BFC \sim \triangle DCE$

10. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, 作 $AD \perp x$ 轴于 $D, BE \perp x$ 轴于 $E, AF \perp BE$ 于 F , 则 $\triangle AFB \cong \triangle ADO$. 11. 4



12. D 当 OA 为腰时, 由 $OA = OP$, 得 $P_1(\sqrt{2}, 0), P_2(-\sqrt{2}, 0)$; 由 $OA = AP$, 得 $P_3(2, 0)$. 当 OA 为底时, 得 $P_4(1, 0)$. 13. A

14. B 图(3)只描述了甲分别用 V_1, V_2 走完前半程, 再用 V_2, V_1 走完后半程的情形; 图(4)是两组对边不平行的四边形, 表示甲、乙先后不是使用同一速度 V_1 或 V_2 , 因而均不合题意.

15. (1) $y = \begin{cases} ax & (x \leq 6) \\ 6a + c(x-6) & (x > 6) \end{cases}$, 由 $\begin{cases} 7.5 = 5a \\ 27 = 6a + 3c \end{cases}$ 得 $a = 1.5, c = 6$.
 $\therefore y = 1.5x (x \leq 6), y = 9 + 6(x-6) = 6x - 27 (x > 6)$

(2) 把 $x = 8$ 代入 $y = 6x - 27$, 得 $y = 21$ (元)

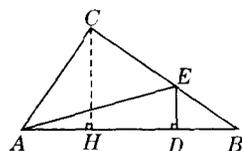
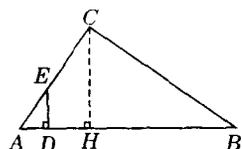
16. 作 $CH \perp AB$ 于 $H, CH = \frac{12}{5}, BH = \frac{16}{5}$

(1) 当 $0 < x \leq \frac{9}{5}$, 由 $\triangle AED \sim \triangle ACH$, 得 $DE = \frac{4}{3}x$,

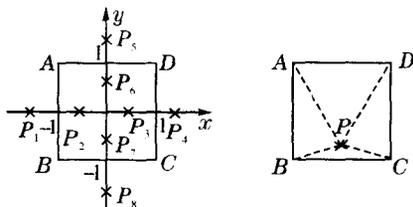
$$\therefore y = \frac{1}{2}AD \cdot DE = \frac{2}{3}x^2$$

(2) 当 $\frac{9}{5} \leq x < 5$ 时, 由 $\triangle BED \sim \triangle BCH$, 得 $DE = \frac{3}{4}(5-x)$

$$\therefore y = \frac{1}{2}AD \cdot DE = \frac{3}{8}x(5-x)$$



17. 满足条件的点 P 共有 9 个, 其坐标分别为 $P_1(-\sqrt{3}-1, 0), P_2(1-\sqrt{3}, 0), P_3(\sqrt{3}-1, 0), P_4(\sqrt{3}+1, 0), P_5(0, \sqrt{3}+1), P_6(0, \sqrt{3}-1), P_7(0, 1-\sqrt{3}), P_8(0, -\sqrt{3}-1), P_9(0, 0)$.



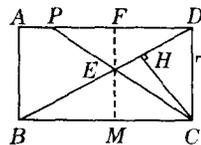
18. (1) $BD = 13$;

(2) $PD = 12 - x$, 由 $\triangle EDP \sim \triangle EBC$ 得 $\frac{EF}{EM} = \frac{PD}{CB}$.

$$\therefore EF = \frac{5(12-x)}{24-x}, S_{ABEP} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle PED} = 30 - \frac{5(12-x)^2}{2(24-x)}$$

(3) 若 $S_{ABEP} = 5S_{\triangle PED}$, 则 $S_{ABEP} = \frac{5}{6}S_{\triangle ABD} = 25$, 即 $30 - \frac{5(12-x)^2}{2(24-x)} = 25$, 解得 x_1

$= 6, x_2 = 16$ (舍去). 当 $AP = 6$ 时, P 为 AD 中点, 连 PB , 则 $\triangle PAB \cong \triangle PDC$, 相似比为 1.



9 坐标平面上的直线

【例题求解】

例 1 $y = \begin{cases} -x+5 & (x \geq 2) \\ x+1 & (x < 2) \end{cases}$, 由 $y = -x+5$ 得 $A(5,0)$, 由 $\begin{cases} y = -x+5 \\ y = x+1 \end{cases}$ 得 $B(2,3)$.

例 2 选 C $S_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $S_1 + S_2 + \dots + S_{2000} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{2000 \times 2001} = \frac{2000}{2001}$.

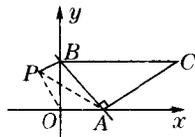
例 3 由 $(0,60)$ 、 $(30,70)$ 知供应线的函数解析式为 $y_1 = \frac{1}{3}x + 60$, 由 $(0,80)$ 、 $(20,60)$ 知需求线的函数解析式为 $y_2 = -x + 80$, 令 $y_1 = y_2$, 解得 $x = 15$, 即生产这种计算器 15 万件时, 市场达到供需平衡.

例 4 $A(\sqrt{3},0)$, $B(0,1)$, $OA = \sqrt{3}$, $OB = 1$, $AB = 2$, $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC} = 2$, 连 PO , $S_{\triangle AOP} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

$$S_{\triangle BOP} = -\frac{a}{2}, S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle BOP} + S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOP} = S_{\triangle ABP}$$

$$\therefore -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 2, \text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}-8}{2}.$$

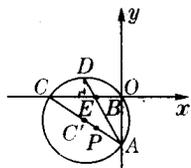


例 5 (1) $AO = 8$, $BO = 6$, $AB = BC = 10$, $AD = CO = 16$, 过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E , 由

$$\text{Rt}\triangle DEB \sim \text{Rt}\triangle AOB, \text{得 } DE = \frac{24}{5}, BE = \frac{18}{5}, EO = \frac{48}{5} \therefore D\left(-\frac{48}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

(2) $A(0, -8)$, $P(-4, -6)$, 过 D, P 的直线为 $y = -\frac{27}{14}x - \frac{96}{7}$, 把 $(-2, -10)$

横坐标 -2 代入直线 DP , $y = -\frac{69}{7} \neq -10$, 故点 $(-2, -10)$ 不在直线 DP 上.



【学力训练】

1. $-1 < m < 3$ 2. $y = -2x - 8$ 3. $y = t - 0.6, 2.4, 5.8$ 4. D 5. C

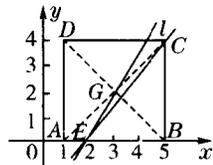
6. 当 $0 \leq t \leq 3$ 时, $y = 100t$, 当 $3 \leq t \leq 6$ 时, $y = 300 - 5t$, 故选 A.

7. (1) $x \leq 2$ 时, $y = 3x$; $x \geq 2$ 时, $y = -\frac{3}{8}x + \frac{27}{4}$.

(2) 把 $y = 4$ 分别代入 $y = 3x$, $y = -\frac{3}{8}x + \frac{27}{4}$ 得 $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{22}{3}$, 由正比例函数和一次函数的性质, 得 $t = x_2 - x_1 = 6$ (小时), 这就是有效时间.

8. (1) $E(2,0)$ $S_{\text{四边形}AECD} = \frac{(AE + CD) \cdot AD}{2} = 10$ (平方单位)

(2) 过点 E 及正方形对称中心的直线即为所求直线, 连 AC, BD 交于 G , 求得 $G(3, 2)$, 设直线 l 的方程为 $y = kx + b$, 代入 $E(2,0), G(3,2)$, 得 $k = 2, b = -4$, 故直线 l 的方程为 $y = 2x - 4$.



9. $\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$

10. $\frac{5}{2}$ $Q(2,1)$ 关于 x 轴对称点 $Q'(2, -1)$, 直线 PQ' 与 x 轴交点即为 M 点.

11. $\frac{1}{2}$ 直线过矩形 $OABC$ 的中心 $G\left(\frac{15}{2}, 3\right)$. 12. B $P = 2$ 或 -1 .

13. A $|x| \cdot |-x+3| = 2$. 14. D

15. 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, 只进水不出水, $y = 4x$, 每分钟进水 4 升; 当 $5 < x \leq 20$ 时, 既进水又出水, $y = 20 + x$; 这样既进又出, 每分钟还可进水 1 升, 则每分钟出水 3 升; 当 $y \geq 20$ 时, 只出水不进水, $y = 35 - 3(x - 20)$, 即 $y = -3x + 95$.

16. (1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

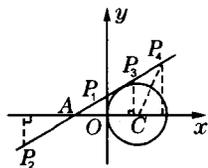
(2) ① 当 $PA = PC$, $P_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为所求;

② 当 $PA = AC$ 时, 点 P 在 $P_2(-\sqrt{3}-1, -1)$ 或 $P_3(\sqrt{3}-1, 1)$ 的位置;

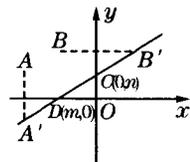
③ 当 $PC = AC$ 时, $P_4(2, \sqrt{3})$ 为所求.

17. 作点 $A(-8, 3)$ 关于 x 轴的对称点 $A'(-8, -3)$, 作点 $B(-4, 5)$ 关于 y 轴的对称点

$B'(4, 5)$, 直线 $A'B'$ 的方程为 $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, 直线 $A'B'$ 与 x 轴交点 $D(m, 0)$, 与 y 轴交点为 $C(0, n)$, 可得 $m = -\frac{7}{2}, n = \frac{7}{3}$, 故 $\frac{m}{n} = -\frac{3}{2}$.



18. (1) 90° ; (2) 由 $\triangle OAE \sim \triangle OFC$ 可证得; (3) $OE \cdot OF = m = OB^2 = 3$, 方程可解, OF 可求, 由 C, F 坐标得 CF 解析式为 $y = -2x - 2\sqrt{3}$; (4) 由 $\triangle PMC \sim \triangle AMP$ 及 $\triangle CAP \sim \triangle CFO$ 得, $\frac{MC}{PM} = \frac{PC}{PA} = \frac{OC}{OF} = \frac{1}{2}$, 由 $PM^2 = MC \cdot MA$ 可求得 MC , 作 $PG \perp x$ 轴于 G , 在 $Rt\triangle PAC$ 中求 PG , $S_{\triangle PCG} = \frac{1}{2} MC \cdot PG = \frac{4}{5}$.



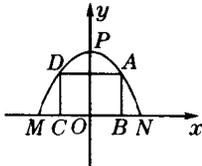
10 抛物线

【例题求解】

例 1 $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$

例 2 选 D

例 3 建立以边 MN 所在的直线为 x 轴, MN 的中垂线为 y 轴的直角坐标系, 设抛物线顶点为 P , 则 M, N, P 的坐标依次为 $M(-2, 0), N(2, 0), P(0, 4)$, 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 4$, 设点 A 的坐标为 (x, y) , 则 $AD = BC = 2x, AB = CD = y, l = -2x^2 + 4x + 8$, 则函数 l 的自变量的取值范围是 $-2 < x < 2$, 且 $x \neq 0$, 若 $l = 8$, 即 $-2x^2 + 4x + 8 = 8$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 2$, 矛盾, 故 l 不可能取 8.



例 4 (1) $x_1 = -2, x_2 = -2n, AB = 2 - 2n, OD = -2n$, 解得 $n = -2$,

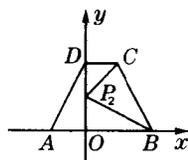
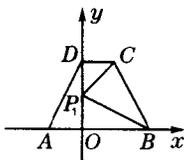
$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

(2) ① 设 $P_1(0, m_1)$, 满足 $P_1B = P_1C$, 由 $OB^2 + OP_1^2 = DP_1^2 + DC^2$ 得 $4^2 + m_1^2 = (4 - m_1)^2 + 2^2$, 解得 $m_1 = \frac{1}{2}$. 直线

$$P_1B \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2};$$

② 设 $P_2(0, m)$ 满足 $P_2B = BC$, 由 $OB^2 + OP_2^2 = 4^2 + 2^2$, 即 $4^2 + m^2 = 4^2 + 2^2$, 解得 $m_2 = 2$, 直线 P_2B 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

③ 设 $P_3(0, m_3)$ 满足 $P_3C = BC$, 由 $DP_3^2 + CD^2 = 4^2 + 2^2$, 得 $(4 - m_3)^2 + 2^2 = 4^2 + 2^2$, 解得 $m_3 = 8$, 直线 P_3B 的解析式为 $y = -2x + 8$, 但点 $C(2, 4)$ 在 P_3B 上, 不合题意.



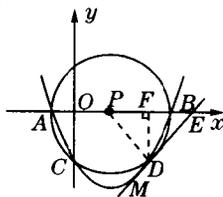
例 5 (1) $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - 6$; (2) $y = \frac{3}{4}x - \frac{51}{4}$;

(3) 直线 MD 与 $\odot P$ 相切, 如图, 作 $DF \perp AB$ 于 F , 连结 PD , 直线 MD 与 x 轴的交点为

$$E(17, 0), P(\frac{9}{2}, 0), F(9, 0), \text{ 则 } PF = \frac{9}{2}, DF = 6, EF = 8, PE = \frac{25}{2}.$$

$$\therefore PD^2 = DF^2 + PF^2 = \frac{225}{4}, DE^2 = DF^2 + FE^2 = 100.$$

$$\therefore PD^2 + DE^2 = \frac{225}{4} + 100 = \frac{625}{4} = (\frac{25}{2})^2 = PE^2, \text{ 即 } \angle PDE = 90^\circ.$$



【学力训练】

1. 如 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$ 2. 1125 3. 第四 4. ①②③④ 5. A 6. D 7. D 8. C

9. (1) 能求出题目中二次函数解析式, 解析式为 $y = x^2 - 4x + 1$.

(2) 可补充的内容有(选其一即可): ① $a = 1$ 或 $b = -4$ 或 $c = 1$; ② 与 y 轴的交点为 $(0, 1)$; ③ 与 x 轴的交点坐标为 $(2 - \sqrt{3}, 0)$ 或 $(2 + \sqrt{3}, 0)$; ④ 最值为 -3 ; ⑤ 顶点坐标为 $(2, -3)$; ⑥ $b^2 - 4ac = 12$ 等.

10. (1) $y = -0.2x^2 + 3.5$;

(2) 当 $x = -2.5$ 时, $y = 2.25$ (米), 球出手时, 他距离地面是 $2.25 - 1.8 - 0.25 = 0.20$ (米).

11. $y = x^2 - 4x$ 或 $y = x^2 - 4x + 3$. 12. 6 $A(1, 1), B(-3, 9)$.

13. $6, 36\pi$ 设 $\odot O$ 半径为 y, AB 长为 x , 则 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x (3 \leq x \leq 9)$. 14. D

15. B 由对称性知与 x 轴交点为 $(3, 0), (1, 0)$ $y = x^2 - 4x + 3$.

16. C ①②③ \Rightarrow ④, ①③④ \Rightarrow ②, ②③④ \Rightarrow ① 都是真命题.

17. 由图 1 得费用 $y = \frac{1}{100}x^2$, 由图 2 得销售单价 $p = -\frac{1}{100}x + 30$, 故毛利润 $W = x \cdot p - y = -\frac{1}{50}x^2 + 30x = -\frac{1}{50}(x - 750)^2 + 11250$, 所以, 当年产量为 750 吨时, 所获毛利润最大.

18. (1) $A(2, 0), T(0, 4)$, 由 $OT^2 = OA \cdot OB$ 得 $OB = 8, \therefore B(8, 0)$;

(2) 圆心 $(5, 4)$, 抛物线的顶点为 $D_1(5, 9)$ 或 $D_2(5, -1)$.

(3) 过点 A, B, D_1 的抛物线为 $y = -x^2 + 10x - 16$, 过点 A, B, D_2 的抛物线不合题意.

19. 本题答案不惟一, 下列解法仅供参考: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(1, 2), B(-2, 5)$ 两点得

$$\begin{cases} 2 = a + b + c & \text{①} \\ 5 = 4a - 2b + c & \text{②} \end{cases}, \text{②} - \text{①}, \text{得 } a - b = 1, \text{ 设 } a = 2, \text{ 则 } b = 1, \text{ 代入①得 } c = -1.$$

$\therefore y = 2x^2 + x - 1$; 设 $a = 1$, 则 $b = 0$. 代入①得 $c = 1, \therefore y = x^2 + 1$.

20. (1) $y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x - 4)^2 - \sqrt{3}$; (2) $P\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$;

(3) 由点 $A(1, 0), C(4, -\sqrt{3}), B(7, 0)$ 得 $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ, \angle ACB = 120^\circ$, ①若以 AB 为腰, $\angle BAQ$ 为顶角, 使 $\triangle ABQ \sim \triangle CBA$, 则 $Q(-2, 3\sqrt{3})$; ②若以 BA 为腰, $\angle ABQ'$ 为顶角, 由对称性得另一点 $Q'(10, 3\sqrt{3})$; ③若以 AB 为底, AQ, BQ 为腰, Q 点在抛物线的对称轴上, 舍去.

21. 设 $f(x) = a(x - 19)(x - 99) + 1999 \therefore ax^2 + bx + c = a(x - 19) \cdot (x - 99) + 1999 = ax^2 - (19 + 99)x + 19 \times 99a + 1999, \therefore c = 1999 + 1981a, \therefore |c| < 1000, a$ 是整数, $a \neq 0, \therefore a = -1$, 此时 $c = 1999 - 1981 = 18$.

11 双曲线

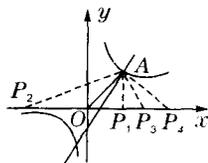
【例题求解】

例 1 减小 反比例函数过点 $(1, 2)$

例 2 选 A $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC}, S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle OAB}$.

例 3 (1) $k = 2, y = \frac{1}{x}$;

(2) 解方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ 得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$ (舍去), 从而 $y = 1$, 点 A 的坐标为 $(1, 1)$;



(3) 符合条件的点 P 存在, 有下列情况:

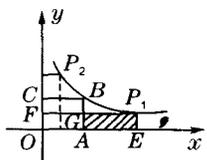
①若 OA 为底, 则 $\angle AOP_1 = 45^\circ$, $OA = \sqrt{2}$, $OP_1 = P_1A$ 得 $P_1(1, 0)$; ②若 OA 为腰, AP 为底, 则由 $OP = OA = \sqrt{2}$, 得 $P_2(-\sqrt{2}, 0)$, $P_3(\sqrt{2}, 0)$; ③若 OA 为腰, OP 为底, 则由 $AO = AP = \sqrt{2}$, 得 $OP = 2$, $P_4(2, 0)$.

例 4 (1) 设 B 点 (x_0, y_0) , $S_{\text{正方形}OABC} = x_0y_0 = 9$, $x_0 = y_0 = 3$, 即 $B(3, 3)$, $k = x_0y_0 = 9$.

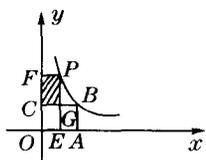
(2) ①如图 a, $P(m, n)$ 在 $y = \frac{9}{x}$ 上, $S_{\text{矩形}OEP_1F} = mn = 9$, $S_{\text{矩形}OAGF} = 3n$, $S = 9 - 3n = \frac{3}{2}$, $n = \frac{3}{2}$, $m = 6$. \therefore

$P_1(6, \frac{3}{2})$; ②如图 a, 同理可得 $P_2(\frac{3}{2}, 6)$

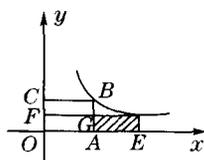
(3) ①如图 b, 当 $0 < m < 3$ 时, $S_{\text{矩形}OEGC} = 3m$, $S = S_{\text{矩形}OEPF} - S_{\text{矩形}OEGC} = 9 - 3m (0 < m < 3)$; ②如图 c, 当 $m \geq 3$ 时, $S_{\text{矩形}OAGF} = 3n$, $S = 9 - 3n = 9 - \frac{27}{m} (m \geq 3)$.



图(a)



图(b)



图(c)

【学力训练】

1. 右, 二, 四, 增大 2. $(-2, -2)$ 3. 4 4. ②、③、④ 5. C 6. B 7. C 8. D

9. (1) 由 $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = \frac{k}{x} (k \neq 0) \end{cases}$, 消去 y , 得 $x^2 - 6x + k = 0$, $\Delta = 36 - 4k > 0$, 当 $k < 9$ 且 $k \neq 0$ 时, 两个函数图象有两个公共点.

(2) 当 $0 < k < 9$ 时, $\angle AOB$ 是锐角; 当 $k < 0$ 时, $\angle AOB$ 是钝角.

10. 由 $\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ y = kx + 3 \end{cases}$, 消去 y , 得 $kx^2 + 3x - 6 = 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{3}{k}$, $x_1x_2 = -\frac{6}{k}$, 由韦达定理, 得 $5k^2 - 12k - 9 = 0$, 解

得 $k_1 = 3$; $k_2 = -\frac{3}{5}$ ($\Delta < 0$, 舍去), 进而求得 A 、 B 两点坐标为 $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$.

11. $y = \frac{2}{x}$ 12. $(-1, 2)$

13. 可填入的答案为: $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 或 $y = -x + 2$ 或 $y = (x - 2)^2$ 或 $y = |x - 2|$ 等均可.

14. (1) $y = \frac{3}{2}x - 7$;

(2) $A(a, \frac{3}{2}a - 7)$, $B(a + 2, \frac{3}{2}a - 4)$, $C(a + 2, \frac{12}{a + 2})$, $D(a, \frac{12}{a})$, 由 $AB = CD$, 得 $2^2 + 3^2 = 2^2 + (\frac{12}{a + 2} - \frac{12}{a})^2$, 即 $\frac{12}{a + 2} - \frac{12}{a} = \pm 3$, 解方程得 $a = -4$, $a = 2$ 均为所求的值.

15. (1) $S = \frac{3}{2}mn$;

(2) 把 $m = 10 - n$ 代入(1)得 $S = -\frac{3}{2}n^2 + 15n$, 当 $n = 5$ 时, $S_{\text{最大}} = \frac{75}{2}$;

(3) 过 C 、 D 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 E 、 F , 由 $BD = CD = CA$, 根据平行线等分线段定理得 $OE = EF = FA$, 又 $OA = 3m$, 则 $OE = 2m$, $OF = m$, 可得 C 、 D 两点坐标分别为 $C(2m, \frac{1}{2})$, $D(m, 1)$;

(4) 将 O 、 D 、 C 代入过此三点的抛物线的解析式 $y = ax^2 + bx + c$, 得 $a = -\frac{3}{4m^2}$, $b = \frac{7}{4m}$, 该抛物线的对称

轴为 $x = \frac{7m}{6} = \frac{7}{6}$, $\therefore m = 1$, 故 $S_{\text{矩形}OQPR} = m = 1$.

16. 略.

17. (1) 过 C 点作 $CG \perp x$ 轴于 G , 则 $CG = y_1$, $OG = x_1$, 因为点 $C(x_1, y_1)$ 在双曲线 $y =$

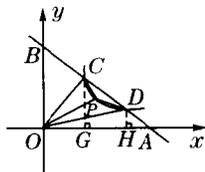
$\frac{m}{x}$ 上, 所以 $x_1 = \frac{m}{y_1}$, 在 $\text{Rt}\triangle OCG$ 中, $CG < OC < CG + OG$, 即 $y_1 < OC < y_1 + \frac{m}{y_1}$;

(2) $(1, 3)$, $y = \frac{3}{x}$, $D(3, 1)$, 直线 CD 解析式为 $y = -x + 4$;

(3) 双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上存在点 P , 使得 $S_{\triangle POC} = S_{\triangle POD}$, 这个点是 $\angle COD$ 的平分线与双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 的交点.

$\therefore P$ 到 OC 、 OD 的距离相等, 又 $OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10} = OC$

$\therefore S_{\triangle POD} = S_{\triangle POC}$



12 方程与函数

【例题求解】

例 1 作出函数 $y = \begin{cases} 1-x & (x \leq 1) \\ x-1 & (x > 1) \end{cases}$ 与 $y = mx$ 图象, 原方程有解, 即两图象有交点, 由图象知 $m \geq 0$ 或 $m < -1$.

例 2 选 C

例 3 (1) 设 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $\Delta = 4\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 > 0$, $C(0, 2m+2)$ 是 y 轴正半轴上的点,

则 $2m+2 > 0$, 即 $m > -1$, 又 $x_1 + x_2 = 4\left(m + \frac{5}{4}\right) > 0$, $x_1 x_2 = 4 \cdot (m+1) > 0$, $\therefore x_2 > x_1 > 0$, 由 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OAC}$ 得 $S_{\triangle OBC} = 4S_{\triangle OAC}$,

$\therefore x_2 = 4x_1$, 由根与系数关系可得 $m_1 = 0$, $m_2 = -\frac{15}{16}$,

对应的抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}$.

(2) 当 $m = 0$ 时, $\triangle AOC \sim \triangle COB$; 当 $m = -\frac{15}{16}$ 时, $\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 不相似.

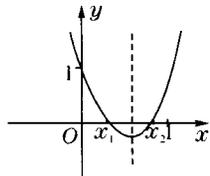
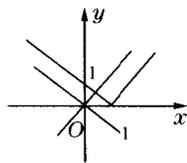
例 4 设方程两根为 x_1, x_2 , 由 $x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0$ 知 $a > 0$, 令 $y = f(x) = ax^2 + bx + 1$ 并作出

如图所示的图象, 则 $\begin{cases} 0 < -\frac{b}{2a} < 1 \\ \Delta = b^2 - 4a > 0 \\ f(0) = 1 \\ f(1) > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < -b < 2a \\ b^2 > 4a \\ a + b + 1 > 0 \end{cases}$

$\therefore 4a^2 > b^2 > 4a$, $a > 1$, 即存在最小整数 a 且 a 为 2.

例 5 (1) $y_0 = x_0^2 + px_0 + q = \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} < 0$, 则 $\frac{p^2 - 4q}{4} > \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$, 有 $p^2 - 4q > 0$, 即抛物线与 x 轴交于两点.

(2) $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ 代入 $x_0^2 + px_0 + q = y_0 < 0$ 有: $x_0^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1 x_2 < 0$, $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$, 故 $x_1 < x_0 < x_2$.



【学力训练】

1. $m \leq -\frac{5}{9}$ 2. 2 3. $<, >, ac - b + 1 = 0$ 4. C 5. D 6. C

7. (1) $y = -x^2 + x + 6, E\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$;

(2) $B(-2, 0), C(3, 0)$, 设 M 点的坐标为 (x, y) , 由 $S_{\triangle MBO} = \frac{2}{3} S_{\triangle DOC}$ 得 $\frac{1}{2} BO \cdot |y_M| = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times OC \times OD$,
得 $|y_M| = 6, \therefore y_M = \pm 6, y_M < \frac{25}{4}$, 可分别求得点 M 的坐标为 $(0, 6), (1, 6), (-3, -6), (4, -6)$.

8. (1) $b = -2, a = -c$;

(2) 设 $A(x_1, 0), B(x_2, 0), x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1 < 0, \therefore x_1 < 0, x_2 > 0, OA = -x_1, OB = x_2, OC = |c| = |a|$, 由 $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{4}{OC}$ 得 $\frac{1}{-x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{|a|}, \therefore \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right)^2 = \frac{16}{a^2}$, 即 $a^2 \left[\frac{4}{a^2} - 4 \times (-1)\right] = 16$, 解得 $a = \pm\sqrt{3}, c = \mp\sqrt{3}$, 故 $y = \sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3}$ 或 $y = -\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3}$;

(3) 若存在满足条件的抛物线, 则 $OA = OB$, 即 $-x_1 = x_2, x_1 + x_2 = 0, -\frac{b}{a} = 0$, 即 $b = 0$ 与 (1) $b = 2$ 矛盾, 故不存在满足条件的抛物线.

9. -5 10. 4

11. 令 $y = f(x) = x^2 - 4x + 3a^2 - 2$, 则由 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 3a^2 - 2 \leq 0 \\ f(-1) \geq 0, f(1) \geq 0 \end{cases}$ 得 $-\frac{\sqrt{15}}{3} \leq a \leq \frac{\sqrt{15}}{3}$.

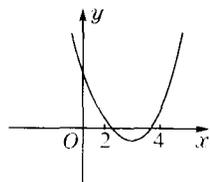
12. 这样的 k 值不存在, 理由如下:

设 $y = f(x) = x^2 + (2k - 1)x - (3k + 2)$ 并作出如图所示图象, 则

$$\begin{cases} \Delta = (2k - 1)^2 + 4(3k + 2) \geq 0 \\ f(2) = 4 + 2(2k - 1) - (3k + 2) > 0 \\ f(4) = 16 + 4(2k - 1) - (3k + 2) > 0 \end{cases}$$

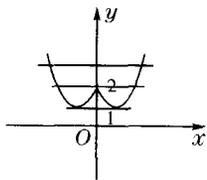
这个不等式组无解.

$$2 < -\frac{b}{2a} = -k + \frac{1}{2} < 4$$



13. (1) 由 $\Delta = 0$ 得 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

(2) 由 (1) 知, $a^2 = a + 1$, 反复利用此式
可得 $a^4 = (a + 1)^2 = 3a + 2, a^8 =$
 $(3a + 2)^2 = 21a + 13, a^{16} = (21a +$
 $13)^2 = 987a + 610, a^{18} = (987a +$



$610)(a + 1) = 2584a + 1597$, 又 $a^{-6} = \frac{1}{a^4 \cdot a^2} = \frac{1}{(3a + 2)(a + 1)} = \frac{1}{8a + 5}, \therefore a^2 - a - 1 = 0, \therefore 64a^2 - 64a - 65 = -1$, 即 $(8a + 5)(8a - 13) = -1$, 故原式 $= 2584a + 1597 + 323(-8a + 13) = 5796$.

14. 讨论方程 $x^2 - 2|x| + 2 = m$ 有解的个数即是讨论 $y = |x|^2 - 2|x| + 2$ 与 $y = m$ 的图象交点个数问题, 画出 $y = |x|^2 - 2|x| + 2$ 的图象, 于是得当 $m > 2$ 或当 $m = 1$ 时, 原方程有两个实数解; 当 $m = 2$ 时, 原方程有三个实数解; 当 $m < 1$ 时, 原方程无实数解.

15. (1) $\Delta = 4p^2 + 4p > 0, x_2^2 - 2px_2 - p = 0 \therefore 2px_1 + x_2^2 + 3p = 2px_1 + 2px_2 + p + 3p = 2p(x_1 + x_2) + 4p = 4p^2 + 4p > 0$.

(2) $AB = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4p^2 + 4p} < |2p - 3|$, 解得 $p \leq \frac{9}{16}$, 又当 $p = \frac{9}{16}$ 时满足题意, 故 p 的最大值是 $\frac{9}{16}$.

13 怎样求最值

【例题求解】

例 1 a 为实数, $\Delta = (b-1)^2 - 4(b^2 - 2b - t) \geq 0$, 即 $4t \geq 3b^2 - 6b - 1$, $4t \geq 3(b-1)^2 - 4 \geq -4$ 当 $b=1$ 时, t 的最小值为 -1 , 这时 $a=0$.

例 2 选 C 窗框的高为 $\frac{8-3x}{2}$, $y = x \cdot \frac{8-3x}{2} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$.

例 3 由 $\Delta = (-4m)^2 - 4 \times 2 \times (2m^2 + 3m - 2) \geq 0$ 得 $m \leq \frac{2}{3}$, $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 3m - 2}{3}$, $x_1^2 + x_2^2 = 2\left(m - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 2\left(\frac{3}{4} - m\right)^2 + \frac{7}{8}$,

$$\because m \leq \frac{2}{3}, \therefore \frac{3}{4} - m \geq \frac{3}{4} - \frac{2}{3} > 0,$$

从而当 $m = \frac{2}{3}$ 时, $x_1^2 + x_2^2$ 取得最小值, 且最小值为 $2 \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{8} = \frac{8}{9}$.

例 4 总运费表示式为: $W = 200x + 300x + 400(18 - 2x) + 800(10 - x) + 700(10 - x) + 500 \cdot (2x - 10)$; 即 $W = 17200 - 800x$.

$$\text{又 } \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq 18 - 2x \leq 8 \end{cases}, \text{ 解得 } 5 \leq x \leq 9.$$

故当 $x=5$ 时, 得 $W_{\text{最大}} = 17200 - 4000 = 13200$ (元); 当 $x=9$ 时, $W_{\text{最小}} = 17200 - 7200 = 10000$ (元).

例 5 (1) $y = \frac{500000 + \left(\frac{1}{4} \times 0 + 500\right) + \left(\frac{1}{4} \times 1 + 500\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2 + 500\right) + \cdots + \left(\frac{x-1}{4} + 500\right)}{x}$
 $= \frac{1}{x} \left[500000 + 500x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x(x-1)}{2} \right] = \frac{500000}{x} + \frac{x}{8} + 499 \frac{7}{8}$.

(2) $y = \frac{500000}{x} + \frac{x}{8} + 499 \frac{7}{8} \geq 2\sqrt{\frac{500000}{x} \cdot \frac{x}{8}} + 499 \frac{7}{8} = 500 + 499 \frac{7}{8} = 999 \frac{7}{8}$. 当且仅当 $\frac{500000}{x} = \frac{x}{8}$, 即 $x=2000$ 时, 取等号. 所以这台设备投入使用 2000 天, 应当报废.

【学力训练】

1. 4 原式 $= 6 - \frac{2}{(x+1)^2 + 1}$ 2. 3, 2

3. 4 a, b, c 中必一正两负, 不妨设 $a > 0, b < 0, c < 0$, 则 $b + c = -a, bc = \frac{2}{a}$, 且 b, c 为方程 $t^2 + at + \frac{2}{a} = 0$ 两实根, 由 $\Delta = a^2 - 4 \times \frac{2}{a} \geq 0$, 得 $a \geq 2$, 故 $|a| + |b| + |c| = a - (b + c) = 2a \geq 4$.

4. D 5. C $y = 15 - \left(x + \frac{9}{x}\right), x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{9}{x}} = 6, y_{\text{最大}} = 15 - 6 = 9$.

6. B 由 $-1 \leq y \leq 1$ 得 $0 \leq x \leq 1$, 则 $z = 2x^2 + 16x + 3y^2 = 14x^2 + 4x + 3$, 是开口向上、对称轴为 $x = -\frac{1}{7}$ 的抛物线.

7. (1) 由 $1750 = Px - R = (170 - 2x)x - (500 + 30x)$, 解得 $x_1 = 25, x_2 = 45$ (舍去);

(2) $Px - R = -2x^2 + 140x - 500 = -2(x - 35)^2 + 1950$, 故当 $x = 35$ 时, 最大利润为 1950.

8. 设种植蔬菜 x 亩, 烟叶 y 亩, 则小麦有 $(50 - x - y)$ 亩, 由题意有 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}(50 - x - y) = 20$, 即 $3x + y = 90, \therefore y = 90 - 3x$, 再设预计总产值为 W , 则 $W = 1100x + 750y + 600(50 - x - y) = 50x + 150y + 30000 = 50x + 43500, \therefore y = 90 - 3x \geq 0, \therefore 0 < x \leq 30$ 且为偶数, 故当 $x = 30$ 时, $y_{\text{最大}} = 45000$ (元), 此时种蔬菜的有 15 人, 种小麦的有 5 人.

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x \neq 0$ 时, $xa^2 + a + x^2 = 0$, 由 $\Delta = 1 - 4x^3 \geq 0$ 得 $x \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

10. 1 设 $A(x_1, 0), B(x_2, 0), AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{k^2 + 2k + 5}$, 又 $C\left(\frac{k-1}{2}, -\frac{k^2+2k+5}{4}\right)$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 2k + 5} \cdot \left| -\frac{k^2 + 2k + 5}{4} \right| = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{(k^2 + 2k + 5)^3},$$

$\therefore k^2 + 2k + 5 = (k+1)^2 + 4 \geq 4$, 当 $k = -1$ 时, 等号成立, $\therefore S_{\triangle ABC} \geq \frac{1}{8} \sqrt{4^3} = 1$.

11. $-\frac{1}{3}, -3$, 由题设条件得 $ab = \frac{1+t}{2}, (a+b)^2 = \frac{3+t}{2}, \therefore a+b = \pm\sqrt{\frac{3+t}{2}}$, a, b 是方程 $z^2 \mp \sqrt{\frac{3+t}{2}}z + \frac{1+t}{2} = 0$ 两实根, 由 $\Delta \geq 0$ 且 $3+t \geq 0$ 得 $-3 \leq t \leq -\frac{1}{3}$.

12. $2\sqrt{5}$. 设经过 t 小时后, A, B 船分别航行到 A_1, B_1 , 设 $AA_1 = x$, 则 $BB_1 = 2x, AA_1 = \sqrt{|10-x|^2 + |10-2x|^2} = \sqrt{5(x-6)^2 + 20}$.

13. 设此商品每个售价为 x 元, 每日利润为 S 元, 当 $x \geq 18$ 时, 有 $S = [60 - 5(x-18)](x-10) = -5(x-20)^2 + 500$; 当 $x \leq 18$ 时, $S = [60 + 10(18-x)] \cdot (x-10) = -10(x-17)^2 + 490$, 故在商品降价时, 当 $x = 17$ 时, 每日利润最大, 每日最大利润是 490 元.

14. (1) 3 月份出售这种蔬菜每千克的收益为 1 元.

(2) 设图甲中图象的函数关系式为 $y_{甲} = -\frac{2}{3}x + 7$, 图乙中图象的函数关系式为 $y_{乙} = \frac{1}{3} \cdot (x-6)^2 + 1, y$

$$= y_{甲} - y_{乙} = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + \frac{7}{3}, \text{故当 } x = 5 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = \frac{7}{3}, \text{即 5 月份出售这种蔬菜, 每千克收益最大.}$$

15. 设 $x-116 = m^2, x+100 = n^2$ (m, n 为自然数), 两式相减得 $n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = 216 = 2^3 \times 3^3$.

$\therefore (n+m), (n-m)$ 奇偶性相同, 且 $n+m > n-m$

$$\therefore \begin{cases} n+m = 2^2 \times 3^2, 2 \times 3^3, 2^2 \times 3^2 \\ n-m = 2, 2^2, 2 \times 3 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} n = 55, 29, 21 \\ m = 53, 25, 15 \end{cases}$$

$\therefore y = 108, 54, 36$, 故 $y_{\text{最大值}} = 108$.

16. D, E, F 的坐标为 $D(0, b), E(1, a+b), F(2, 2a+b)$, 由图象可知

$$\begin{aligned} AD^2 + BE^2 + CF^2 &= (b-1)^2 + (a+b-3)^2 + (2a+b-6)^2 \\ &= 5a^2 + 6ab + 3b^2 - 30a - 20b + 46 \\ &= 5a^2 + (6b-30)a + 3b^2 - 20b + 46 \\ &= 5\left(a + \frac{3}{5}b - 3\right)^2 - 5\left(\frac{3}{5}b - 3\right)^2 + 3b^2 - 20b + 46 \\ &= 5\left(a + \frac{3}{5}b - 3\right)^2 + \frac{6}{5}b^2 - 20b + 1 \\ &= 5\left(a + \frac{3}{5}b - 3\right)^2 + \frac{6}{5}\left(b - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

当 $\begin{cases} a + \frac{3}{5}b - 3 = 0 \\ b - \frac{5}{6} = 0 \end{cases}$ 时, 上式取得最小值, 此时 $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{6}$, 最小值为 $\frac{1}{6}$.

14 图表信息问题

【例题求解】

例 1 30 求得一次函数解析式为 $y = \frac{1}{5}x - 6 (x \geq 30)$.

例 2 选 D 由二次函数图象知 $a < 0, b > 0$.

例 3 (1) 抛物线不经过原点, $m \neq 0, \frac{m^2}{2} > 0$, 即抛物线 $y = x^2 + mx + \frac{m^2}{2}$ 与 y 轴交点 $(0, \frac{m^2}{2})$ 在正半轴上, 故抛物线 $y = x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2$ 经过 A, B 两点.

(2) 设 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 则 $x_1 + x_2 = -m, x_1x_2 = -\frac{3}{4}m^2, OA = -x_1, OB = x_2$, 由 $\frac{1}{OB} - \frac{1}{AO} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{-x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{4}{3m} = \frac{2}{3}$, 得 $m = 2$.

故所求抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

例 4 $y = -x + 200$, 又设销售利润为 W (元), 则 $W = x(200 - x) - 120(200 - x) = -x^2 + 320x - 24000$, 当 $x = 160$ (元)时, $W_{\text{最大}} = 1600$ (元).

例 5 $y_1 = -\frac{3}{50}x + 5.1$ ($0 \leq x \leq 50$), $y_2 = \frac{1}{100}(x - 25)^2 + 2$ ($0 \leq x \leq 50$), 令 $y_1 = y_2$, 得 $-\frac{3}{50}x + 5.1 = \frac{1}{100}(x - 25)^2 + 2$, 解得 $x_1 = 35, x_2 = 9, x_1, x_2$ 均在 $0 \leq x \leq 50$ 内, x_1, x_2 均合题意, 故这种绿色蔬菜在 5 月 9 日和 6 月 4 日上市时既不赔本也不赚钱.

【学力训练】

1. 6

2. $\frac{3}{2}$ OC 的解析式为 $y_1 = kx$, BD 的解析式为 $y_2 = k_1x + 3, P(2, 2k)$ 满足上式, $k_1 = \frac{2k-3}{2}, y_2 = \frac{2k-3}{2}x + 3$, 当 $x = 3$ 时, $y_1 - y_2 = 3k - (\frac{2k-3}{2} \times 3 + 3) = \frac{3}{2}$.

3. $0 < a < 1$ 由题意得 $a < 0, a - b + c = 0, c = -1, -\frac{b}{2a} > 0$, 即 $b > 0$. 4. D 5. A 6. D

7. (1) 汽车运输总费用: $y_1 = 120S + 6S + 3000 = 126S + 3000$; 火车运输总费用: $y_2 = 102S + \frac{15}{4}S + 4620 = 105.75S + 4620$

(2) 若 $y_1 = y_2$ 由 $126S + 3000 = 105.75S + 4620$, 得 $S = 80$; 当 $S < 80$ 时, $y_1 < y_2$; 当 $S > 80$ 时, $y_1 > y_2$, 即当路程小于 80 千米时, 汽车运费较省; 当路程大于 80 千米时, 火车运费较省; 当路程为 80 千米时, 汽车与火车运费相同.

8. 解方程 $12 = 0.1x + 0.01x^2$, 得 $x_1 = 30$ 或 $x_2 = -40$ (舍去), 即甲车的车速为 30 千米/时, $S_Z = \frac{1}{4}x$, 依题意有: $10 < \frac{1}{4}x < 12$, 即 $40 < x < 48$, 乙车超过限速 40 千米/时的规定, 故就速度方面相碰的原因在乙车超速行驶.

9. 2 个 $b > 0, a + b + c > 0$ 10. 21, 24, 26

11. A 抛物线经过点 $(1, 0), b = -(a + c), \Delta = (a - c)^2 > 0$

12. B $a < 0, c > 0, 2a + b = 0, a < \frac{c-b}{2} \Rightarrow 2a + b - c = 0 - c < 0$ 正确 13. D

14. B 两直线的交点为 $(1, a + b)$.

15. (1) 应缴纳税款 $500 \times 5\% + 50 \times 10\% = 30$ (元)

(2) 当 $1300 < x \leq 2800$, 其中 800 元不用纳税, 应纳税的部分在 500 元至 2000 元之间, 当中 500 元按 5% 交纳, 税费为 $500 \times 5\% = 25$ 元, 剩余部分按 10% 交纳, 于是 $y = [(x - 800) - 500] \times 10\% + 500 \times 5\% = (x - 1300) \times 10\% + 25$ ①

(3) 根据第(2)小题, 当收入在 1300 元至 2800 元之间时, 纳税额在 25 元至 175 元之间, 于是该企业职员纳税款 55 元, 他的收入肯定在 1300 元至 2800 元之间, 应用①式, 且 $y = 55$, 得 $x = 1600$ (元).

16. 由函数图象, 得 $a < 0, -\frac{b}{2a} = 1, \therefore a = -\frac{b}{2}, b > 0$, 又由函数图象, 得 $-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > -1$, 将 $a = -\frac{b}{2}$

代入,得 $1 \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-b} > -1$, $\therefore \pm \sqrt{b^2 - 4ac} < 2b$, 即 $\sqrt{b^2 - 4ac} < 2b$, $b^2 - 4ac < 4b^2$, $2c < 3b$.

17. 由表格知, E 组的总分 $E_{\text{总}} \geq 60$. 五个组的总分为 $5 \times (10 + 20 + 30 + 40) = 500$ 分. 若 $E_{\text{总}} = 70$, 又每一竖行得分不相同, 则 5 组的总分之和 $\geq 70 + 80 + 90 + 100 + 180$ 矛盾, 故 $E_{\text{总}} = 60$. 同理, $D_{\text{总}} = 70$ 分.

故 $E_{\text{总}} = 60$ 分, $D_{\text{总}} = 70$ 分, $C_{\text{总}} = 80$ 分, $B_{\text{总}} = 110$ 分, 或 $E_{\text{总}} = 60$ 分, $D_{\text{总}} = 70$ 分, $C_{\text{总}} = 90$ 分, $B_{\text{总}} = 100$ 分. 填表对这两种情况分别给予检验(见下表).

	语文	数学	外语	常识	奥运	总分	名次
A 组	30	40	40	40	30	180	1
B 组	0	10	30	30	40	110	2
C 组	20	20	20	0	20	80	3
D 组	10	30	10	10	10	70	4
E 组	40	0	0	20	0	60	5

	语文	数学	外语	常识	奥运	总分	名次
A 组	30	40	40	40	30	180	1
B 组	10	10	30	30	40	100	2
C 组	20	20	20	10	20	90	3
D 组	0	30	30	0	10	70	4
E 组	40	0	0	20	0	60	5

(注:答案中只给 2 种填表法,另外还有其它填法,只要满足条件均可)两种情况都成立.

15 统计的思想方法

【例题求解】

例 1 $219 \quad (3 + 5 + 10) \div 30 \times 365 = 219$

例 2 选 A

例 3 (1) 各组频数依次是 3, 9, 18, 12, 6, 共有 $3 + 9 + 18 + 12 + 6 = 48$ 名学生.

(2) 成绩落在 70.5 ~ 80.5 数据范围内的人数最多, 人数为 18 人.

(3) 60 分以上的人数是 45, 所占全班参赛人数的百分率为 $\frac{45}{48} \times 100\% = 93.75\%$.

例 4 乙组选手的各种数据依次为 8, 8, 7, 1.0, 60%, 以下从四个方面给出具体评价:

(1) 从平均数、中位数看都是 8 题, 成绩均等;

(2) 从众数看, 甲组 8 题, 乙组 7 题, 甲组成绩比乙组成绩好;

(3) 从方差看, 甲组成绩差距大, 乙组成绩相对稳定, 差距不大;

(4) 从优秀率看(即答对 8 题至 10 题之间的频率看), 甲组优生比乙组优生多.

例 5 设原来篮子 A 中有弹珠 x 个, 则篮子 B 中有弹珠 $(25 - x)$ 个, 又设原来 A 中弹珠号码数的平均数为 a , B 中弹珠号码数的平均数为 b , 由题意得

$$\begin{cases} ax + (25 - x)b = 1 + 2 + \cdots + 25 = 325 & \text{①} \\ \frac{ax - 15}{x - 1} - a = \frac{1}{4} & \text{②} \\ \frac{b(25 - x) + 15}{26 - x} - b = \frac{1}{4} & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{由②得 } a = \frac{x + 59}{4} \quad \text{④};$$

$$\text{由③得 } b = \frac{34 + x}{4} \quad \text{⑤};$$

将④、⑤代入①, 得 $\frac{1}{4}(x + 59)x - \frac{1}{4}(x + 34)x + \frac{25}{4}(x + 34) = 325$, 解得 $x = 9$, 即原来篮子 A 中有 9 个弹珠.

【学力训练】

1. 120 2. (1) 56; (2) 1.2; (3) 1.2, 2

3. (1) 50 名学生的数学成绩; (2) 0.06, 10; (3) 94.5; (4) 85 4. D 5. A 6. D

7. 众数甲为 90 分, 乙为 70 分, 甲优; 方差甲为 172, 乙为 256, 甲较稳定; 中位数甲、乙均为 80 分, 中位数以上甲

33人,乙26人,甲优;高于80分人数甲20人,乙24人;满分甲6人,乙12人,乙又较优.

8. 由题设可知,前5次射击的平均环数小于 $\frac{9.0+8.4+8.1+9.3}{4} = 8.7$,前9次的总环数至多为 $8.7 \times 9 - 0.1 = 78.2$,所以,第10次射击至少得 $8.8 \times 10 + 0.1 - 78.2 = 9.9$ (环).

9. (1) 118; (2) 2000, 120; (3) $\bar{x} = \frac{50 \times 1.0 + 59 \times 2.0 + 80 \times 1.5}{3} = 96$ (万盒)

10. (1) 略; (2) ④ 11. A、B、E 12. 44

13. (1) 略; (2) 调整前,这五位同学这一天的平均通话费为 $\bar{x} = \frac{1}{5}(2 \times 0.2 + 8 \times 0.4) = 0.72$ 元;调整后,这五位同学这一天的平均通话费为 $\bar{x}' = \frac{1}{5}(2 \times 0.2 + 5 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 0.5) = 0.64$ 元, $\bar{x} - \bar{x}' = 0.08$ (元). 故这五位同学这天平均通话费调整后比调整前减少0.08元.

14. 这是因为 x 这个数值是 n 次观测所得数据 a_1, a_2, \dots, a_n 的代表,它体现了要观测的 n 个量的整体性,与这 n 个数据的距离的和最小,但是 $x - a_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 有正有负,如果将它们相加取作 x 的最小值是不合理的,因此,令 $y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \dots + (x - a_n)^2 = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, 当 $x = -\frac{-2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{2n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, y 取最小值,从而使偏差最小,这就是为什么在科学实验中,取 n 次观测数据的算术平均值作为所要观测的量的原因.

15. 由统计表可知,做对0~3道题的总人数为 $7 + 8 + 10 + 21 = 46$ (人),他们做对题目数的总和为 $7 \times 0 + 8 \times 1 + 10 \times 2 + 21 \times 3 = 91$ (题);做对12~15道题的总人数为 $15 + 6 + 3 + 1 = 25$ (人),他们做对题目数的和为 $15 \times 12 + 6 \times 13 + 3 \times 14 + 1 \times 15 = 315$ (题).

以 x_0, x_1, \dots, x_{15} 分别表示做对0道、1道、 \dots 、15道题目的人数,由题意得

$$\frac{4x_4 + 5x_5 + \dots + 15x_{15}}{x_4 + x_5 + \dots + x_{15}} = 6, \frac{0x_0 + x_1 + 2x_2 + \dots + 10x_{10}}{x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{10}} = 4.$$

$$\text{即 } 4x_4 + 5x_5 + \dots + 15x_{15} = 6(x_4 + x_5 + \dots + x_{15});$$

$$0x_0 + x_1 + 2x_2 + \dots + 10x_{10} = 4(x_0 + x_1 + \dots + x_{10}).$$

两式相减得

$$\begin{aligned} & 11x_{11} + 12x_{12} + \dots + 15x_{15} - (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ &= 6(x_4 + x_5 + \dots + x_{15}) - 4(x_0 + x_1 + \dots + x_{10}) \\ &= 6(x_{11} + x_{12} + \dots + x_{15}) - 4(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_4 + x_5 + \dots + x_{10}) \\ &= 4(x_{11} + x_{12} + \dots + x_{15}) - 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_0 + x_1 + \dots + x_{15}) \\ &= 4x_{11} + 4(x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) - 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_0 + x_1 + \dots + x_{15}) \end{aligned}$$

$$\text{而 } x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 46, x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 15, 0x_0 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 91, 12x_{12} + 13x_{13} + 14x_{14} + 15x_{15} = 315, \text{代入上式得}$$

$$11x_{11} + 315 - 91 = 4x_{11} + 4 \times 25 - 6 \times 46 + 2(x_0 + x_1 + \dots + x_{15}).$$

故 $x_0 + x_1 + \dots + x_{15} = 200 + 3.5x_{11} (x_{11} \geq 0)$, 因此,当 $x_{11} = 0$ 时,统计的总人数 $x_0 + x_1 + \dots + x_{15}$ 最少为200人.

16 锐角三角函数

【例题求解】

例1 6 $\operatorname{tg} A - \frac{1}{\operatorname{tg} A} = 2$, 即 $\operatorname{tg}^2 A - 2\operatorname{tg} A - 1 = 0$, 解得 $\operatorname{tg} A = 1 + \sqrt{2}$.

例2 选B 作 $\angle BAD = 15^\circ$, 交 BC 于 D , 则 $AD = BD$, $\angle ADC = 30^\circ$.

例3 过E作 $EF \perp BD$ 于F,设 $BE = a$,则 $BD = CD = 2\sqrt{2}a$, $BC = 4\sqrt{2}a$, $DF = EF = \frac{BD}{2} = \sqrt{2}a$, $CF = CD + DF$

$$= 3\sqrt{2}a, CE = 2\sqrt{5}a, \cos \angle ECF = \frac{CF}{CE} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = \sin \angle ACE.$$

例4 $\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} \angle DEB = \frac{BD}{AB} = \frac{b+c}{a+c}$, $\angle CAB = \angle EAF < \angle DEB$, $\operatorname{tg} \angle CAB < \operatorname{tg} \angle DEB$, 故 $\frac{a}{b} < \frac{b+c}{a+c}$.

例5 (1) p, q 应满足以下条件

$$\begin{cases} \Delta = p^2 - 4q \geq 0 \\ \sin A + \sin B = -p \\ \sin A \cdot \sin B = q \\ 0 < \sin A < 1 \\ 0 < \sin B < 1 \\ \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \end{cases} \quad \text{由此推得} \begin{cases} p < 0 \\ 0 < q \leq \frac{1}{2} \\ p^2 - 2q = 1 \end{cases}$$

(2) 先设方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根为 α, β , 若 p, q 满足(1)的条件, 则 α, β 满足 $\begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$

故 α, β 必定是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 两锐角 A, B 的正弦.

【学力训练】

1. $\frac{4}{3}$ 2. $3 + \sqrt{3}$ 3. $2 + \sqrt{3}$ 4. (1) $\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$; (2) $44 \frac{1}{2}$

5. C 6. B 7. B 8. B 9. $m = \sqrt{3}$

10. $\sin B = \frac{DE}{AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$, 设 $DE = 3k$, 则 $DB = 5k$, $BE = 4k$, $CD = 3k$, $BC = 8k$, $AC = 6k$, $AB = 10k$, 由 $AC + CD = 9$, 得 $k = 1$, $BE = 4$, $BC = 8$.

过C作 $CF \perp AB$ 于F, 则 $EF = \frac{12}{5}$, $CE = \frac{12}{5}\sqrt{5}$.

11. 设 $x = \sin \alpha$, $y = \cos \beta$, 则 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = \frac{3\sqrt{7}}{16} \end{cases}$, 解得 $x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 12. $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 13. $\frac{25}{12}$ ($k = 1$ 舍去)

14. D $\operatorname{tg} \alpha = 3$ 15. A 阴影部分是菱形

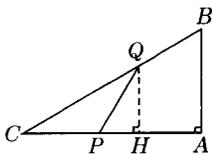
16. D 过C作 $CD \parallel EF$, $\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{1}$, $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$, 设 $EF = x$, 则 $AE = 2x$, $AF = \sqrt{3}x$, $DF = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $CD = \frac{4}{3}x$, $\operatorname{ctg} \angle CFB = \frac{DF}{CD}$.

17. 由 $\Delta = (2a)^2 - 4(5\sqrt{3} + b)(5\sqrt{3} - b)$, 得 $a^2 + b^2 = c^2 = 75$, $\therefore \angle C = 90^\circ$, 由韦达定理得 $\sin A = \frac{3}{5}$ ($\sin A = -\frac{2}{5}$ 舍去), $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab = 18$.

18. 过C作 $CE \parallel AB$ 交BD于E, 设 $AC = x$, 则 $CB = \sqrt{x^2 - 1}$, $CE = BC \cdot \operatorname{tg} \angle CBE = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{3}}$, 由 $\triangle DCE \sim \triangle DAB$, 得 $\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{AB}$, 即 $\frac{1}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{3}}$, $(x+2)(x^3 - 2) = 0$, 解得 $x = \sqrt[3]{2}$, 即 $AC = \sqrt[3]{2}$.

19. 当 $n = 1$ 时, 有 $a + b > c$; 当 $n = 2$ 时, 有 $a^2 + b^2 = c^2$; 当 $n \geq 3$ 时, $a^n + b^n < c^n$, 证明如下: $\therefore \sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $0 < \sin A < 1$, $0 < \cos A < 1$, 当 $n \geq 3$ 时, $\sin^n A < \sin^2 A$, $\cos^n A < \cos^2 A$, $\therefore \sin^n A + \cos^n A < \sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 即 $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n < 1$, 亦即 $\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$, 故 $a^n + b^n < c^n$.

20. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=6, AC=8, BC=10, \frac{V_P}{V_Q} = \frac{8}{6+10} = \frac{1}{2}$, 设点 P 移动的路程为 x , 则点 Q 移动的路程为 $2x$, 有 $CP=8-x, BQ=2x-6, CQ=16-2x$, 作 $QH \perp AC$ 于 H , 则 $\frac{QH}{AB} = \frac{CQ}{CB} = \frac{CH}{AC}$, 于是 $QH = \frac{6}{5}(8-x), CH = \frac{8}{5}(8-x), PH = CH - CP = \frac{3}{5}(8-x), \therefore \text{tg}\angle QPA = \frac{QH}{PH} = 2, \text{tg}\angle QCA = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}, \text{tg}\angle QPA + \text{tg}\angle QCA = \frac{11}{4}, \text{tg}\angle QPA \cdot \text{tg}\angle QCA = \frac{3}{2}$, 故所求作的方程为 $y^2 - \frac{11}{4}y + \frac{3}{2} = 0$, 即 $4y^2 - 11y + 6 = 0$.



17 解直角三角形

【例题求解】

例 1 $10\sqrt{3}$ 设 $CD = x$, 则 $AD = \text{tg}60^\circ \cdot CD = \sqrt{3}x, \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}x}{10+x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $x = 5$.

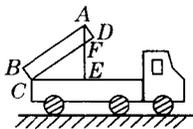
例 2 选 B 过 A 作 $AE \perp CD$ 于 E , 过 B 作 $BF \perp AE$ 于 F .

例 3 解方程得 $x + \frac{1}{x} = \frac{8}{3}, (x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 舍去})$, 进而得 $x = 4 + \sqrt{13}, CD = \text{ctg}\angle ADC \cdot AC = \text{ctg}\angle ADC \cdot \text{ctg}30^\circ \cdot$

$$BC = \frac{1}{4 + \sqrt{13}} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{39}}{3}.$$

例 4 本例解法甚多, 以下解法仅供参考, 过点 A 作 $AE \perp CE$ 于 E , 交 CD 于 F , 则 $AF =$

$$\frac{AD}{\cos 60^\circ} = 1, DF = AD \cdot \text{tg}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, CF = CD - DF = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, EF = CF \cdot \sin 60^\circ = (3 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \text{ 于是 } A \text{ 点离地面的高度为 } 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + 1.2 \approx 4 \text{ (米)}.$$



例 5 如图, 设 $\angle AOB$ 为正常视力观察长城所形成的夹角, 则 $AB = 10 \text{ m}, \angle AOB =$

$$1', OD' \perp A'B', \text{ 由 } \text{tg}\angle AOD = \frac{AD}{OD}, \text{ 得 } OD = \frac{AD}{\text{tg}\angle AOD} = \frac{5}{\text{tg}0.5'} \approx \frac{5}{\text{tg}0.0087^\circ} \approx \frac{5}{0.0001449} \approx 34506.556 \text{ (米)} \approx 34.5 \text{ (千米)}, \text{ 这就是说, 按照人的最小视角 } 1 \text{ 分}$$



观察地球上长城的厚度, 最远的距离只能是 34.5 千米, 可是, 月球和地球之间的距离为 380000 千米, 这个数字很大, 它相当于 34.5 千米的 11014 倍, 从这么远看长城, 根本无法看见.

【学力训练】

1. 6, 3 2. 120° 3. $(5 + 5\sqrt{3})\text{m}$ 4. C 5. D 6. C

7. $AD \cdot BD = CD^2 = 1, \text{tg}A - \text{tg}B = \frac{CD}{AD} - \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{AD \cdot BD} (BD - AD) = BD - AD = 2, (BD + AD)^2 = (BD - AD)^2 + 4BD \cdot AD = 8, \therefore BD + AD = 2\sqrt{2}, \therefore -p = AD + BD = 2\sqrt{2}, q = AD \cdot BD = 1, \text{ 即 } p = -2\sqrt{2}, q = 1.$

8. 过 C 作 $CD \perp AB$ 交 AB 的延长线于 D 点, $CD = \frac{20}{\text{ctg}30^\circ - \text{ctg}60^\circ} = 10\sqrt{3} > 10$, 所以这艘渔船继续向东追赶鱼群不会进入危险区域.

9. $a \text{ctg}\theta, 2a \sin\theta$ 10. 5.5 11. 30° 12. B $b = \sqrt{3}a$

13. C 过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , 计算 $\text{tg}\angle 1, \text{tg}\angle 2$.

14. A $0 < \cos 48^\circ < 1, 0 < \sin 48^\circ < 1, \sin 48^\circ + \cos 48^\circ < \frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ} + \frac{\cos 48^\circ}{\sin 48^\circ} = \text{tg}48^\circ + \text{ctg}48^\circ.$

15. (1) 先证 $\text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AEB$, 得 $DF = BE$, 再证 $\text{Rt}\triangle EBG \cong \text{Rt}\triangle ECF$, $\therefore DF \cdot FC = BG \cdot EC$.

(2) 当 $\text{tg}\angle DAF = \frac{1}{3}$ 时, 设 $DF = x$, 则 $AD = 3x, AF = \sqrt{10}x$, 由 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = 5x^2 = 10$, 得 $x = \sqrt{2}, AD$

$$= 3\sqrt{2}, \text{当 } \operatorname{tg} \angle DAF = \frac{2}{3} \text{ 时, } DF = 2\sqrt{2}, AF = \sqrt{26}, S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF^2 = 13.$$

16. 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 设 $BE = x$, 则 $AE = \sqrt{3}x$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AE}{CE} = \frac{\sqrt{3}x}{x+30}$, 解得 $x = 15$, $AE = 15\sqrt{3}$, $BE = 15$, $AD = 30\sqrt{13}$.

17. (1) 如图, 由点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D .

$$\because AB = 220, \angle B = 30^\circ, \therefore AD = 110 \text{ (千米)}$$

由题意, 当 A 点距台风中心不超过 160 千米时, 将会受到台风的影响, 故该城市会受到这次台风的影响.

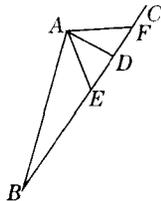
(2) 由题意, 当 A 点距台风中心不超过 160 千米时, 将会受到台风的影响, 则 $AE = AF = 160$, 当台风中心从 E 处移到 F 处时, 该城市都会受到这次台风的影响.

$$\text{由勾股定理得: } DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{160^2 - 110^2} = \sqrt{270 \times 50} = 30\sqrt{15}.$$

$$\therefore EF = 60\sqrt{15} \text{ (千米)} \quad \because \text{该台风中心以 15 千米/时的速度移动,}$$

$$\therefore \text{这次台风影响该城市的持续时间为 } \frac{60\sqrt{15}}{15} = 4\sqrt{15} \text{ (小时).}$$

(3) 当台风中心位于 D 处时, A 市所受这次台风的风力最大, 其最大风力为 $12 - \frac{110}{20} = 6.5$ (级).



18 圆的基本性质

【例题求解】

例 1 15° 或 75° 分 AB, AC 在圆心 O 同侧、异侧两种情况讨论.

例 2 选 B 连 AC, BC , 可以证明 $\angle ACP = \angle BCP$.

例 3 延长 DC 至 N , 使 $CN = CM$, 连结 BN , 则 $\angle BCN = \angle BAD = \angle BDA = \angle BCA$, 可证得 $\triangle BCN \cong \triangle BCM$, $\text{Rt} \triangle BAM \cong \text{Rt} \triangle BDN$.

例 4 $\because \cos \angle APB = \frac{1}{3}, \therefore \angle APB \neq 90^\circ$, AB 不是直径, AB 为定值, 当点 P 为优弧中点时, PD 最长, $\triangle APB$ 的面积最大, 作 $AC \perp BC$, $\cos \angle APC = \frac{1}{3}$, 设 $PC = x$, 则 $PA = 3x$, $AC = 2\sqrt{2}x$, $BC = 2x$, 在 $\text{Rt} \triangle ACB$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 即 $(2\sqrt{2}x)^2 + (2x)^2 = 16$. 解得 $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, 进而得 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} PB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{2}$.

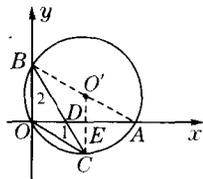
例 5 (1) $OA + OB = -k, OA \cdot OB = 60, OA^2 + OB^2 = AB^2 = 13^2$. 解得 $k = -17, OA = 12, OB = 5$.

(2) 连结 $O'C$, 交 AO 于 E , 可证明 $\triangle OCB \sim \triangle DCO, \widehat{OC} = \widehat{AC}, O'C \perp OA, OE = AE = 6, CE = 4, \therefore C(6, -4)$.

(3) 假设在 $\odot O'$ 上存在点 P , 使 $S_{\triangle POD} = S_{\triangle ABD}$.

$$\because OB \parallel EC, \therefore \triangle OBD \sim \triangle ECD, \therefore \frac{OB}{EC} = \frac{OD}{ED}, \text{即 } \frac{5}{4} = \frac{OD}{6-OD},$$

解得 $OD = \frac{10}{3}, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BO = \frac{65}{3}, \therefore S_{\triangle POD} = \frac{65}{3}, \triangle POD$ 中 OD 边上的高为 13, 即点 P 到 x 轴距离为 13, $\therefore \odot O'$ 上的点到 x 轴的最大距离为 9, \therefore 点 P 不在 $\odot O'$ 上, 即在 $\odot O'$ 上不存在点 P , 使 $S_{\triangle POD} = S_{\triangle ABD}$.



【学力训练】

1. 8 2. $3 \leq OP \leq 5$ 3. (1) $a, b, c; a, c$; (2) 略 4. D 5. D 6. B

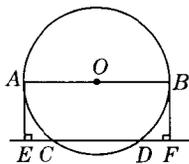
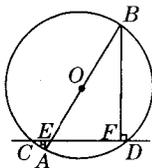
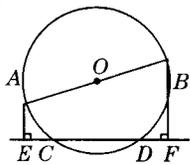
7. (1) $\widehat{AC} = \widehat{BF}, \widehat{BE} = \widehat{AD}$, 从而得 $\widehat{BEC} = \widehat{ADF}$.

(2) 连结 AD, BE , 可证明 $\triangle ADC \cong \triangle BEF$, 进而可证明 $\triangle AMC \cong \triangle BNF$.

8. (1) 连结 OA , 交 BC 于 E , 连结 BO , 则 $OA \perp BC, \tan B = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}$, 设 $AE = x$, 则 $BE = 3x, OE = 5 - x, BC = 6$;

(2) 由面积法求得 AB 边上的高为 $\frac{3}{5}\sqrt{10}$.

9. (1)



(2) $EC = FD$ (或 $ED = FC$);

(3) 证明略

10. 15° 或 75° 11. $\frac{10}{3}$ 12. 4 连 DO 并延长交 MC 于 $P, OD = OP, MC - ND = MC - MP = CP$. 13.

$\frac{1}{2}$

14. (1) $\because A, B$ 的反演点分别是 A', B' , $\therefore OA \cdot OA' = r^2, OB \cdot OB' = r^2$

$\therefore OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, 即 $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$, 又 $\angle O = \angle O, \therefore \triangle ABO \sim \triangle B'A'O$,

$\therefore \angle A' = \angle B$. (2) ① A ; ② 圆; 内切.

15. 连结 AM , 过 M 作 $MD \perp AC$, 交直线 AC 于 D 点, 则 $\text{Rt}\triangle AMH \cong \text{Rt}\triangle AMD, \text{Rt}\triangle MHB \cong \text{Rt}\triangle MDC$.

16. $BD^2 - AD^2 = (BE^2 + ED^2) - (AE^2 + ED^2) = (BE + AE)(BE - AE) = AB \cdot (BE - AE)$.

只需证明 $AC = BE - AE$ 即可, 在 BA 上截取 $BF = AC$, 连 DF 可证明 $\triangle DBF \cong \triangle DCA$, 则 $DF = AC, AE = EF$.

17. (1) $A(2, 0), B(0, -6), C(-3, 0), D(0, 3a)$, 易证 $\text{Rt}\triangle CDO \sim \text{Rt}\triangle BAO$, 得 $\frac{OD}{OA} =$

$\frac{OC}{OB}$.

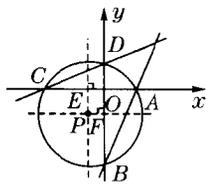
$\therefore OA \cdot OC = OB \cdot OD, 6 \times 3a = 2 \times 3$, 解得 $a = \frac{1}{3}$.

(2) 线段 AC, BD 的垂直平分线 EP, FD 相交于点 P, E, F 为垂足.

$\therefore E, F$ 分别是弦 AC, BD 的中点

$\therefore PF = EO = OC - CE = OC - \frac{AC}{2} = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, PE = FO = BO - BF = BO - \frac{BD}{2} = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$.

\therefore 圆心 P 的坐标为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$.



19 转化灵活的圆中角

【例题求解】

例 1 $40^\circ \angle E = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(120^\circ - 40^\circ) = 40^\circ$

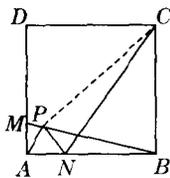
例 2 选 C 结论④不成立

例 3 由 $AB^2 = AE \cdot AC$, 得 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$, 又 $\angle BAE = \angle CAB, \therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB, \angle ABE = \angle ACB = \angle ADB, \therefore AB = AD$, 连结 AO , 交 BD 于 F , 则 $BF = DF = 4$, 连 OB , 由勾股定理得 $OF = 3, AF = OA - OF = 2$, 故 $S_{\triangle ABD}$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AF = 8.$$

例 4 由 $\triangle ABE \sim \triangle ACD, \triangle ADE \sim \triangle ACB$, 分别得 $AB \cdot DC = AC \cdot BE, AD \cdot BC = AC \cdot DE$, 两式相加得 $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

例 5 由 $\frac{AP}{AN} = \frac{AP}{AM} = \frac{BP}{AB} = \frac{BP}{BC}$, 又 $\angle PAN = \angle PBC$,
 $\therefore \triangle PAN \sim \triangle PCB$, 有 $\angle PNA = \angle PCB$,
 因此 P, N, B, C 四点共圆
 有 $\angle BNC = \angle BPC = \angle APN$.



【学力训练】

1. 72° 或 108°

2. ① AD 垂直平分 BC , ② AD 是直径, ③ AE 是切线, ④ $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, ⑤ $\angle B = \angle C$, ⑥ $BF^2 = AF \cdot FD$ 等

3. $5\sqrt{5}$ 4. $-\frac{1}{4}x^2 + x$ 5. C 6. B 7. D 8. C $AE > BD, BD = AE$ 不正确

9. (1) 连结 CF , 由 $\triangle ABC \sim \triangle CFG$, 得 $\frac{AC}{CG} = \frac{BC}{FG}$, 即 $AC \cdot FG = BC \cdot CG$

(2) 连结 DF , $\angle A = \angle ADE = \angle ACB$, 即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

10. (1) $\because \angle EAD = \angle FCB = \angle FBC, \therefore FB = FC$.

(2) $\because \angle FAB = \angle FCB = \angle FBC, \angle AFB = \angle BFD, \therefore \triangle AFB \sim \triangle BFD$

$$\therefore \frac{FA}{FB} = \frac{FB}{FD}, \text{ 即 } FB^2 = FA \cdot FD.$$

(3) $\angle D = 30^\circ, \angle BAC = 60^\circ, AC = BC \cdot \text{ctg} \angle BAC = 2\sqrt{3}, AD = 2AC = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

11. 15° 设 $\angle B = x^\circ, \angle A = y^\circ$, 则 $\widehat{AD} = (2x)^\circ, \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = (2y)^\circ$

12. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $BC + CD = AC$ 13. $\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ 延长 DC, AB 交于 F 14. D 15. D 16. C

17. $AB^2 = 2AE^2 = AE \cdot AC$, 有 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$, 又 $\angle EAB = \angle BAC$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB$

有 $\angle ABE = \angle ACB$, 知 $AB = AD$, 连 AO , 交 BD 于 H , 则 $BH = HD = \sqrt{3}, OH = 1, AH = OA$

$- OH = 1$. 故 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AH = \sqrt{3}$, 又 E 是 AC 的中点

则 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCE}, S_{\triangle ADE} = S_{\triangle CDE}$, 有 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}$ 故 $S_{\text{四边形}ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2\sqrt{3}$.

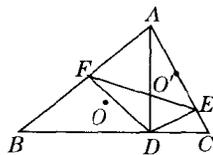
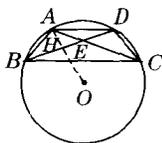
18. A, F, D, E 四点共圆, $\therefore \angle AEF = \angle ADF = 90^\circ - \angle BDF = \angle B$.

又 $\angle A = \angle A, \therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC$.

由 $\triangle AEF$ 的外接圆圆心为 AD 的中点 O' ,

$\therefore \angle BAO = \angle EAO'$, 又 $\angle AFE = \angle ADE$.

$\therefore \angle BAO + \angle AFE = \angle EAO' + \angle ADE = 180^\circ - \angle AED = 90^\circ$ 故 $AO \perp EF$.



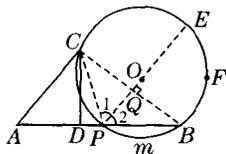
19. (1) 连结 PC, BC, BC 交 EP 于 Q .

由 $\widehat{CE} = \widehat{BE}, CQ = BQ, PC = PB, EB \perp BC$, 得 $\angle 1 = \angle 2$.

$\therefore \frac{AC}{PE} = \frac{CD}{CE}, \angle ECP = \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \sim \text{Rt}\triangle PEC$, 得 $\angle A = \angle 1$.

$\therefore \angle A = \angle 2$, 得 $PE \parallel AC$, 而 $CQ = QB$, 故 $AP = PB$.



(2) 由 $\text{Rt}\triangle ABC \sim \text{Rt}\triangle PEC$, 得 $\frac{AC}{PC} = \frac{AB}{PE}$.

$\therefore AB = 2PB = 2x, AC = y, PE = 2, \therefore y = x^2$. 其中 $0 < x < \sqrt{2}$.

20 直线与圆

【例题求解】

例 1 3 连结 OD 先由切割线定理求出 $AB = 3, OD = \frac{3}{2}$.

例 2 选 C , 连 ED , 可证明 $EF \parallel BC$ 则 $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{BE} = \frac{BD}{BE}$, 又 $\triangle BED \sim \triangle BDA$, 得 $BD^2 = BE \cdot AB = BE(BD + BE)$, 即

$$BD^2 - BD \cdot a - a^2 = 0, \text{解得 } BD = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a, \therefore AF = \frac{BD}{BE} \cdot CF = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a \times b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} b.$$

例 3 (1) 上述结论仍然成立, 连 OD , 证明 $OD \parallel AC$, 得 $\angle ODE = 90^\circ$.

(2) 设切点为 M , 连 OM , 设 $\odot O$ 的半径为 R , 则 $\sin A = \frac{OM}{AO}$, 即 $\frac{R}{5 - R} = \frac{3}{5}$, 解得 $R = \frac{15}{8}$ 故当圆心 O 距 B 点 $\frac{15}{8}$ cm 时, $\odot O$ 与 AC 相切.

例 4 (1) 连结 BD , 易证 CB 为 $\odot O$ 切线, 则 $OC \perp BD$, 又 $DE \perp BD$, 故 $DE \parallel OC$.

(2) 由 $DE \parallel OC$, 得 $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EO}$, 设 $AE = 2k, EO = 3k (k > 0)$, 则 $AB = 8k$.

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AB. \therefore 2^2 = 2k \cdot 8k, \text{解得 } k = \frac{1}{2}, AB = 4.$$

$$\text{由 } \triangle ADE \sim \triangle ABD, \text{得 } \frac{DE}{BD} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}. \therefore \text{tg} \angle ADE = \text{tg} \angle ABD = \frac{1}{2}.$$

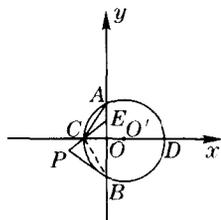
例 5 (1) 连 BC , 易证 $\triangle ACE \sim \triangle ABC$, 得 $AC^2 = AE \cdot AB$

(2) 连 $O'B$, $\angle CO'B = 2\angle CAB$, 由 $PE = PB$, 得 $\angle PBE = \angle PEB = 2\angle CAB = \angle CO'B, \therefore \angle PBO' = \angle PBE + \angle EBO' = \angle CO'B + \angle EBO' = 90^\circ$, 故 PB 与 $\odot O'$ 相切.

(3) 可证明 $\triangle PBE, \triangle CBO'$ 都是等边三角形, 它们的高分别为 $BC = 4, OB = 2$

$$\sqrt{3}. \therefore B(0, -2\sqrt{3}), P(-4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}), \text{由待定系数法可求得直线 } PB \text{ 为 } y =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}.$$



【学力训练】

1. $m = \pm 2, -2 < m < 2$ 2. 51° 或 129° 3. 55° 4. $\alpha = \beta$

5. B 只有①②③ \Rightarrow ④和②③④ \Rightarrow ①正确 6. C 7. D 8. D

9. (1) $AC = \sqrt{3}, AB = \sqrt{2}$.

(2) 若 PA 是 $\odot O$ 的切线, 则 $PA \perp AO$, 又 $BO \perp AO$, 得 $PA \parallel BO$, $\therefore \frac{PB}{PC} = \frac{AD}{AC}$,

$\therefore \angle AOD = 90^\circ, \angle OAC = 30^\circ, \angle AOC = 120^\circ, \therefore AD = 2OD = 2OC, \therefore PB = 2BC$, 即当 $PB = 2BC$ 时, PA 是 $\odot O$ 的切线.

10. (1) 连 OE , 则 $OE \parallel AD$, 由 $OE \parallel CD$ 得, $\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC}$, 那 $\frac{R}{6} = \frac{10 - R}{10}$, 得 $R = \frac{15}{4}$.

(2) $\angle EFB = \angle EGC = 90^\circ + \beta$, 即 $\alpha = 90^\circ + \beta$.

11. $R = 2.4$ 或 $3 < R \leq 4$ 12. $\frac{ab}{a+b}$ 13. $2\sqrt{3}$ 14. B 15. A 16. C

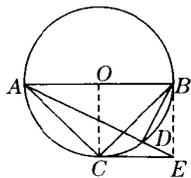
17. (1) 可证明四边形 $DAEC$ 为矩形, $\therefore CE \parallel AD, \frac{EF}{AD} = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2}$, 即 $EF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}EC, F$ 为 EC 的中点, $CF = EF$.

(2) $CF = EF$ 仍然成立, 连 BC 并延长 BC 交于 AP 于 G 点, 连结 AC 可以证明 $\angle G = \angle DCG, \therefore GD = DC$, 又 $DC = DA, \therefore GD = DA, \therefore AP \perp AB, CE \perp AB, \therefore CE \parallel AP, \therefore \frac{CF}{GD} = \frac{BF}{BD} = \frac{EF}{AD}$, 又 $GD = AD$, 故 $CF = EF$.

18. 连结 BD, BE , 则 $\angle ADB = 90^\circ, \angle DAB = 30^\circ, \therefore BD = \frac{1}{2}AB = r$, 连结 OC , 则 $OC \perp AB$,

且 $OC \perp CE, \therefore AB \parallel CE$, 得 $S_{\triangle AEB} = S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \times 2r \times r = r^2, \therefore S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}AE \cdot BD$,

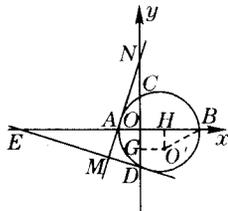
$$\therefore r^2 = \frac{1}{2}AE \cdot r, AE = 2r.$$



19. (1) 连结 $O'B$, 过点 O' 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足分别为 H, G , 可求得 A, B, C, D 四点坐标分别为 $A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 1), D(0, -3)$.

(2) 设过点 D 的切线交 x 轴于点 $E, EA = x^2$, 则 $DE^2 = EA \cdot EB = x(x+4)$, 解得 $x = 5$, 即 $E(-6, 0)$, 由待定系数法求得所求直线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

(3) 过点 A 的切线与过点 D 的切线互相垂直, 证明如下: 设过点 A 的切线与 DE 相交于点 M , 与 y 轴相交于点 $N. \because AB = CD = 4$, 即有 $\widehat{AB} = \widehat{CD}, \therefore \angle NAO = \angle MDO, \therefore \angle NAO + \angle ANO = 90^\circ, \therefore \angle MND + \angle MDN = 90^\circ$.



21 从三角形的内切圆谈起

【例题求解】

例 1 30 设 $AD = x$, 则 $AF = AD = x, CF = CE = 2, BE = BD = 3, (x+3)^2 = (x+2)^2 + 5^2$, 得 $x = 10$

例 2 选 A $PC = PA = 4\text{cm}$, 设 $OD = x, \odot O$ 的半径为 r , 由 $OD \parallel AC$, 得 $\frac{OD}{PC} = \frac{BD}{DC}$, 即 $\frac{x}{4} = \frac{6-r}{6}; x = 4 - \frac{2}{3}r$, 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB}$, 得 $\frac{1}{2} \times 10r + \frac{1}{2} \times 8r + \frac{1}{2} \times 6x = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$, 即 $5r + 4r + 3(4 - \frac{2}{3}r) = 24$, 解得 $r = \frac{12}{7}$.

例 3 连 PO 交 AB 于 H , 设 $DE = x$, 则 $PA^2 = PE \cdot PC = 2(x+3)$, 在 $\text{Rt}\triangle APH$ 中, $AP^2 = AH^2 + PH^2$, 即 $AH^2 + PH^2 = 2(x+3)$, ① 在 $\text{Rt}\triangle PHD$ 中, $PH^2 + DH^2 = (x+2)^2$, ②, 又 $AD \cdot DB = ED \cdot DC$, 而 $AD \cdot DB = (AH - DH)(AH + DH) = AH^2 - DH^2, \therefore AH^2 - DH^2 = x \cdot 1$ ③, 由①②③得 $(x+2)^2 + x = 2(x+3)$, 解得 $DE = x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

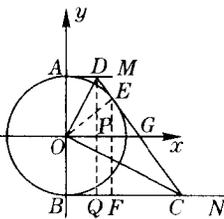
例 4 连结 $AD, CF, DF, EF, \angle EDF = \angle CDF = 45^\circ, \angle CFD = 180^\circ - \angle CAD = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - \angle CFA = \angle CFB, \angle DCF = 180^\circ - \angle CFD - \angle CDF = 180^\circ - \angle CFB - \angle CBF = \angle BCF$.

例 5 (1) 由 $\triangle AOD \sim \triangle BCO$, 得 $\frac{AD}{BO} = \frac{AO}{BC}$, 即 $AD \cdot BC = AO \cdot BO = 36$, 即 $m \cdot n = 36$

(2) ① 连结 $OE, m+n=15$, 即 $CD=15, S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}CD \cdot OE = 45$.

② $m=3, n=12, \therefore C(12, -6), D(3, 6), CD$ 所在直线解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 10$.

③ $\text{Rt}\triangle OEG \sim \text{Rt}\triangle EFC, \frac{OE}{EF} = \frac{OG}{EC}, EF = \frac{48}{5}, \therefore EP = \frac{48}{5} - 6 = \frac{18}{5}, E$ 点坐



标为 $(\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$.

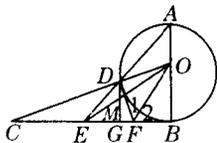
【学力训练】

1. 60 2. (1, 1) 3. 1 4. A 5. D 6. D 7. (1) 略; (2) $m = 5$

8. (1) $r = 1$

(2) 连结 OF , $OF \parallel AE$, $\angle BOD = 2\angle A$, $\angle 1 = \angle 2$, $\triangle OBF \cong \triangle ODF$, $\therefore \angle ODF = \angle OBF = 90^\circ$, FD 是 $\odot O$ 的切线;

(3) $\because DG \parallel AB$, $\therefore \frac{DM}{AO} = \frac{EM}{EO} = \frac{MG}{OB}$, $AO = BO$, $\therefore DM = GM$.



9. $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2}$, $R = \frac{1}{2}$, $r = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{2}$.

10. 3 $r = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{13})$, $AE = \frac{1}{2}(\sqrt{13} + 1)$, $BE = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)$.

11. $2\sqrt{6}$, 连 $MQ, BP, PC, QN, P, Q, C, N; P, Q, B, N$ 四点共圆, $\angle MPQ = 180^\circ - \angle MBQ = 180^\circ - \angle NCQ = \angle NPQ$, $\angle MQP = \angle MBP = \angle BCP = \angle QNP$, $\therefore \triangle MPQ \sim \triangle QPN$, $PQ = \sqrt{MP \cdot NP}$.

12. A 借助面积证明. 13. C

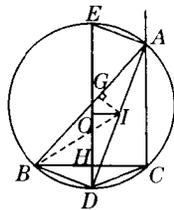
14. A 连 OH , $OH = CF$, $\angle OGH = \angle FGC$, $\therefore \text{Rt}\triangle OHG \cong \text{Rt}\triangle GFC$, 同理 $\text{Rt}\triangle OHP \cong \text{Rt}\triangle PEA$, 则 $S_{\square OFDE} = S_{\square PGFDE} + S_{\triangle GFC} + S_{\triangle PEA} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$, 故 $\frac{S_{\square OFDE}}{S_{\square ABCD}} = \frac{1}{2}$.

15. 可利用特殊位置及对运动变化趋势的观察, 从反面将不可能的情况排除, 或从正面得到 $BE = BF$ 的猜想.

(1) $0 < x < 90^\circ$;

(2) 连结 BD , 可证 $\triangle BDF \sim \triangle ADB$, 得 $\frac{BF}{AB} = \frac{BD}{AD}$, $\therefore \angle DBE = \angle DAC$, $\therefore \angle BDE = \angle ADC$, ($= 90^\circ - \angle ADE$), $\therefore \triangle BDE \sim \triangle ADC$, 得 $\frac{BE}{AC} = \frac{BD}{AD}$, $\therefore \frac{BF}{AB} = \frac{BE}{AC}$, $\therefore BE = BF$.

16. (1) 作 $IG \perp AB$, 连结 BI , 有 $AG = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, $\therefore BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$, $\therefore AG = \frac{1}{2}BC$, 由 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, $BD = DC$, 且 DE 为 $\odot O$ 的直径, 得 $DE \perp BC$, $BH = \frac{1}{2}BC$, $\therefore AG = BH$, 易证 $\text{Rt}\triangle AGI \cong \text{Rt}\triangle BHD$, 故 $AI = BD$;



(2) $\because \angle IBD = \angle IBH + \angle HBD = \angle ABI + \angle BAI = \angle BID$, $\therefore BD = DI$, 由中位线定理得 $OI = \frac{1}{2}AE$.

17. (1) 延长 HG 交 OP 于 E , 延长 PG 交 AO 于 D , $\therefore G$ 是 $\triangle OPH$ 的重心, 且 $\angle PHO = 90^\circ$, $\therefore GH = \frac{2}{3}HE = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times OP = \frac{1}{3} \times 6 = 2$, 故在线段 GO, GP, GH 中, 有长度保持不变的线段, 就是 GH .

(2) $OH = \sqrt{OP^2 - PH^2} = \sqrt{36 - x^2}$, $DH = \frac{1}{2}OH = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$, $DP = \sqrt{DH^2 + PH^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(36 - x^2) + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 3x^2}$, $\therefore y = GP = \frac{2}{3}DP = \frac{1}{3}\sqrt{36 + 3x^2} (0 < x < 6)$;

(3) $\triangle PGH$ 是等腰三角形, 有三种可能情况:

① $GP = GH$, 即 $\frac{1}{3}\sqrt{36 + 3x^2} = x$, 解得 $x = \sqrt{6}$, 经检验是原方程的根且符合题意;

② $GP = GH$, 即 $\frac{1}{3}\sqrt{36 + 3x^2} = 2$, 解得 $x = 0$, 经检验是原方程的根, 但不符合题意;

③ $PH = GH$, 即 $PH = 2$,

综上所述, 如果 $\triangle PGH$ 是等腰三角形, 那么, 线段 PH 的长等于 $\sqrt{6}$ 或 2.

22 圆幂定理

【例题求解】

例1 15 由 $CD \cdot DT = AB \cdot DB$, 得 $DT = 9$, 由 $PT^2 = PB \cdot PA = PD^2 - DT^2$, 即 $PB(PB + BA) = (PB + BD)^2 = DT^2$, 得 $PB = 15$.

例2 选 B, 可证明 $DE = GF$, 由 $BD \cdot DC = DE \cdot DF = DE(DG + GF) = DE(DG + DE)$ 得 $DE^2 + DE - 1 = 0$, 解得 $DE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例3 (1) $\angle PAC + \angle CAB = \angle B + \angle CAB = 90^\circ$, 故 PA 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 设 $CE = 6k, ED = 5k, AE = 2x, EB = 3x (k > 0, x > 0)$, 由 $CE \cdot DE = AE \cdot BE$, 得 $30k^2 = 6x^2, \therefore x = \sqrt{5}k, AE = 2\sqrt{5}k, BE = 3\sqrt{5}k$, 又 $FA^2 = DF \cdot CF = EF^2 - AE^2$, 即 $DF(DF + 11k) = (DF + 5k)^2 - (2\sqrt{5}k)^2$, 解得 $DF = 5k, \therefore DF = DE$, 即 D 为 EF 的中点, 连结 AD , 则 $AD = DF = DE$, 推得 $AF = AC$, 由 $FA^2 = DF \cdot CF$ 得 $8^2 = 5k(5k + 5k + 6k)$, 解得 $k = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \therefore AB = AE + BE = 5\sqrt{5}k = 10, \text{tg} \angle ECB = \text{tg} \angle AEF = \frac{AF}{AE} = 2$.

例4 $CD^2 = AC \cdot CF, DE^2 = AE \cdot EB$, 连结 AD, OD , 则 $OD \perp PC$, 可证得 $CD = DE$, 故 $AE \cdot EB = AC \cdot CF$.

例5 (1) $PN^2 = NB \cdot NA$, 又 $NB \cdot NA = NM \cdot NQ, \therefore PN^2 = NM \cdot NQ$.

(2) $\because PM = MQ = x, MN = y, PN^2 = NM \cdot NQ, \therefore (x - y)^2 = y(x + y)$, 整理得, $x^2 = 3xy, \because x \neq 0, \therefore x = 3y$

(3) 在图 2、图 3、图 4 中(1)题结论都成立, 在图 2 中(2)题结论成立, 在图 3、图 4 中, 按题意改变条件后, $x = 3y$ 的结论仍然成立, 理由是: $PM = MN = y, MQ = x$, 依①的结论有 $(2y)^2 = y(x + y)$, 故得 $x = 3y$.

【学力训练】

1. $2, \frac{3}{5}, \frac{24}{5}$ 2. 1:3 3. 6 4. A 5. B 6. A

7. (1) $r = 4.5$; (2) 证明 $\triangle PAB \sim \triangle PCA$; (3) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

8. (1) 连结 AE , 则 $BE^2 = BC \cdot BA$, 而 $BD^2 = BC \cdot BA, \therefore BE = BD$.

(2) 连结 $O'D$, 设 $O'A = O'D = 2k, OA = \frac{1}{2}AB = 3k$, 则 $BC = 2k, O'B = 4k, \therefore \sin \angle O'BD = \frac{O'D}{O'B} = \frac{1}{2}, \angle O'$

$BD = 30^\circ$, 又 $\because EC^2 = AC \cdot CB, EC = 2\sqrt{2}k, \therefore \text{tg} \angle EBC = \frac{EC}{BC} = \sqrt{2} < \text{tg} 60^\circ, \therefore \angle EBC < 60^\circ, \therefore \angle EBD = \angle CBD + \angle EBC < 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, 故 $\angle EBD$ 为锐角.

9. (1) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$;

(2) $PE \cdot PF$ 的值是定值, ①如图(1)、(2)、(3), 当 P 点在 $\odot O$ 内时, 过 P 点作直径 CD , 则 $PE \cdot PF = PD \cdot PC = (r + OP)(r - OP) = r^2 - OP^2$ 为定值; ②如图(4)、(5)、(6), 当点 p 在 $\odot O$ 外时, 设直线 OP 交 $\odot O$ 于点 C, D , 则 $PE \cdot PF = PD \cdot PC = (OP + r)(OP - r) = OP^2 - r^2$ 为定值, 故 P 是不在 $\odot O$ 上的一个定点时, $PE \cdot PF$ 为定值 $|OP^2 - r^2|$.

10. $\frac{12}{5}$

11. 7 $BD = CD = 4$, 由 $\triangle BCE \sim \triangle ACB$ 得 $BC^2 = CE \cdot AC, AE = 6, CE = 2$. 由 $BE \cdot DE = AE \cdot EC = 12. BD = BE + ED < BC + CD = 8, \therefore BE + ED \leq 7, DE = 6, BE = \frac{12}{DE}$, 可推得符合条件的是 $DE = 3, BE = 4$ 或 $DE = 4, BE = 3$.

12. A 13. D

14. (1) 略;

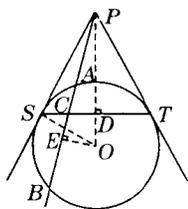
(2) 由 $\triangle ABC \sim \triangle BFC$ 得 $BC^2 = AC \cdot FC$, $\therefore AC = AF + FC$, $\therefore BC^2 = (AF + FC)FC = AF \cdot FC + FC^2$, $\therefore CB^2 - CF^2 = AF \cdot FC = BF \cdot FE$.

15. (1) 略

(2) 线段 AB 与 OF 是平行的, 不妨设 $AB = BC = 2a$, 连 BP, BF , 则 $EA^2 = EP \cdot EC$, $EB^2 = EP \cdot EC$, $\therefore EB = EA = a$, 又 $EC = \sqrt{5}a$, $\therefore BF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$, 由 $\triangle AEP \sim \triangle CEA$, 得 $\frac{AE}{EC} = \frac{AP}{AC}$, $\therefore AP = \frac{2\sqrt{10}}{5}a$, 又 $AB^2 = AP \cdot AF$, $\therefore AF = \sqrt{10}a$, 又 $\triangle ABP \sim \triangle AFB$, $\therefore \frac{AB}{AF} = \frac{BP}{BF}$, 得 $BF = \sqrt{2}a$, 在 $\triangle OBF$ 中, $OB = OF = a$, $BF = \sqrt{2}a$, $\therefore \angle FOB = 90^\circ$, 又 $AB \perp OB$, $\therefore AB \parallel OF$;

(3) $\because AB \parallel OF$, $\therefore \frac{OF}{AB} = \frac{OH}{BH} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, 又 $OH + BH = a$, $\therefore BH = \frac{2}{3}a$, $CH = a + \frac{1}{3}a = \frac{4a}{3}$, $\therefore BH:CH = \frac{1}{2}$.

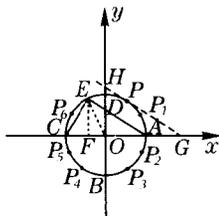
16. 连 PO 交 TS 于点 D , 则 $PO \perp ST$, 连 SO , 作 $OE \perp PB$ 于 E , 则 E 为 AB 中点, 于是 $PE = \frac{PA + PB}{2}$, $\therefore C, E, O, D$ 四点共圆, $\therefore PC \cdot PE = PD \cdot PO$, 又 $\text{Rt}\triangle SPD \sim \text{Rt}\triangle OPS$, $\therefore \frac{PS}{PD} = \frac{OP}{PS}$, 即 $PS^2 = PD \cdot PO$, 又 $PS^2 = PA \cdot PB$, 则 $PC \cdot \frac{PA + PB}{2} = PA \cdot PB$, 即 $\frac{1}{PC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} \right)$.



17. (1) $\because \widehat{CE} = \frac{2}{3}\widehat{CD}$, $\therefore \angle COE = 60^\circ$, 过 E 作 $EF \perp x$ 轴于 F , 在 $\text{Rt}\triangle EOF$ 中, $|OF| = \frac{1}{2}$, $|EF| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore E(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;

(2) 满足要求的抛物线的一个解析式为 $y = 2\sqrt{3}x^2$;

(3) 存在这样的点, 过 O 作 $OP \parallel CE$ 交 \widehat{AD} 于 P , 过 P 作 $\odot O$ 的切线 GH 分别交 x 轴, y 轴于 G, H , $\therefore \angle AEC = \angle GPC = 90^\circ$, 由 $\angle ECA = \angle POG$ 得 $\angle EAC = \angle OGH$, $\therefore \triangle GOH \sim \triangle AEC$, 同理(1)可得 P 点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, P 点为所求



满足条件的点, 同理过 \widehat{AP} 的中点 P_1 作圆的切线与两坐标轴的交点与原点 O 构成的三角形与 $\triangle ACE$ 相似, 可求得 P_1 点坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 由圆的对称性知满足题设条件要求的点还有: $P_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_3(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_5(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_6(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 故除 E 点外满足题设要求的点共有 7 个点, 除这 7 个点外不存在其它的点满足题设要求.

23 圆与圆

【例题求解】

例 1 67.5 连 O_1O_2 必过 A 点, 连 AD , 解得 $\angle O_2AD = 45^\circ$

例 2 选 C 连 O_1C, O_1O_2, O_2D, O_1B , 过 O_1 作 $O_1E \perp O_2D$ 于 E , 由 $AB \parallel CD, CO_1 \perp CD$, 得 $CO_1 \perp AB$, $\therefore \angle CO_1B = \angle CO_1A$, 又由对称性知 $\angle CO_1A = \angle BO_1A = \angle AO_1B = 120^\circ$, 故 $\angle O_2O_1E = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

例 3 (1) 连结 AB , 由 $\triangle ACB \sim \triangle FED$, 得 $\frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DE}$, 即 $EF \cdot BC = AC \cdot DE$.

(2) $\because EF \parallel BC$, $\therefore \frac{DA}{DC} = \frac{AF}{BC}$, 得 $BC = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $\therefore \angle DAE = \angle C = \angle E$, $\therefore DA = DE = 3$, 由(1)得 $EF =$

$$\frac{DE \times AC}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

例4 (1) 设计方案如图所示.

(2) 由原码放方案的图形知 $AD = 6 \times 6 = 36$, $AB = 6 \times 4 = 24$,

$S_1 = 2(36 \times 24 + 36 \times 10 + 24 \times 10) = 2928(\text{cm}^2)$, 设计方案

如图①, $AD = 6 \times 6 + 3 = 39$, $O_3E = 3\sqrt{3}$, $AB = 3 \times 3\sqrt{3} + 6$

$= 6 + 9\sqrt{3}$, $S_2 = 2 \times [39(6 + 9\sqrt{3}) + 39 \times 10 + (6 + 9\sqrt{3}) \times 10] = 882\sqrt{3} + 1368 \approx 2867.4(\text{cm}^2)$, $6 \times 10^4 \div 24 = 2.5 \times 10^3$,

第一种方案可节约 $(2928 - 2867.4) \times 2.5 \times 10^3 = 1.515 \times 10^5(\text{cm}^2)$, 设计方案如图2, $AB = 4 \times 6 + 3 = 27$,

$AD = 5 \times 3\sqrt{3} + 6 = 15\sqrt{3} + 6$, $S_3 = 2 \times [(6 + 15\sqrt{3}) \times 27 + (6 + 15\sqrt{3}) \times 10 + 27 \times 10] = 1110\sqrt{3} + 984$

$\approx 2871(\text{cm}^2)$, 第二种方案可节约 $(2928 - 2871) \times 2.5 \times 10^3 = 1.425 \times 10^5(\text{cm}^2)$

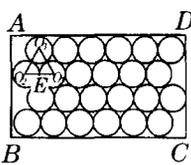


图1

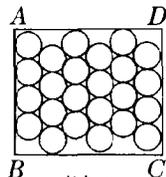


图2

例5 (1) 设 $\odot O_1$ 的半径为 R , $\odot O_2$ 的半径为 r , $y = \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2) = \frac{1}{2}\pi[(R+r)^2 -$

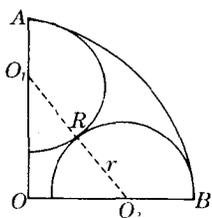
$2Rr]$, 连 O_1O_2 , 则 $(R+r)^2 = (1-R)^2 + (1-r)^2$, 即 $R+r+Rr=1$, $\therefore y = \frac{1}{2}$

$\pi\{(R+r)^2 - 2[1-(R+r)]\} = \frac{\pi}{2}(x^2 + 2x - 2)$

(2) $\because R+r \geq 2\sqrt{Rr}$, $\therefore \frac{(R+r)^2}{4} \geq Rr$, $Rr = 1 - (R+r)$, $\therefore (R+r)^2 + 4(R+$

$r) - 4 \geq 0$, $\therefore R+r > 0$, $\therefore R+r \geq 2(\sqrt{2}-1)$, 即 $x \geq 2(\sqrt{2}-1)$, 故函数 $y = \frac{1}{2}$

$\pi(x^2 + 2x - 2)$, 当 $x = (\sqrt{2}-1)$ 时, $y_{\min} = (3-2\sqrt{2})\pi$



【学力训练】

1. 135° 或 45° 2. 6 3. $\sqrt{5}:2$ 作 $\odot O_1, \odot O_2$ 直径, 构造相似直角三角形

4. $2\sqrt{3}$ 连 O_1T, O_2T , 则 $PT_2 = O_1P \cdot O_2P$ 5. D 6. D 7. B 8. D

9. (1) 过 P 作两圆的公切线 PT ;

(2) $AC \cdot DC = PC \cdot CF$, $PC^2 + AC \cdot DC = PC^2 + PC \cdot CF = PC(PC + CF) = PC \cdot PF$, 即要证 $PC \cdot PE = PD \cdot PA$, 由 $\triangle PDC \sim \triangle PFA$ 可得;

(3) 由 $\triangle PCA \sim \triangle PEC$, 得 $\frac{PC}{PE} = \frac{PA}{PC}$, 即 $PC^2 = PA \cdot PE$, 得 $PC = 3\sqrt{2}$.

10. (1) 过点 A 作两圆内公切线交 BC 于 G , 连 AC , $GA = GB = GC$, $AB \perp AC$.

(2) 连结 AE , 由 $\angle BDE = \angle BEA$, $\angle EBD$ 公共可证明 $\triangle BAE \sim \triangle BED$, $\therefore \frac{BA}{BE} = \frac{BE}{BD}$, 即 $BE^2 = BA \cdot BD$, 又 $BC^2 = BA \cdot BD$, $\therefore BE = BC$, 故 $BE = BF = BC$

11. 75° 或 150° 12. $\frac{4}{3}$ 13. $2(\pi+6)r$ 14. D 15. C 16. D

17. 设 $\odot O$ 分别与 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 内切于点 A, B, C , $\odot O_2, \odot O_3$ 外切于点 D , 则

$O_2D \perp O_1D$, $O_1D = 12$, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OD = AO_1 + O_1D - AO = 8 + 12 - r$,

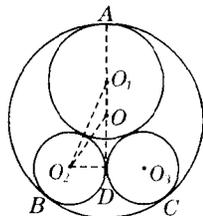
$OO_2 = OB - O_2B = r - 5$, $OO_2^2 = OD^2 + O_2D^2$, 即 $(r-5)^2 = (8+12-r)^2 + 5^2$, 解得 $r = \frac{40}{3}$.

18. (1) $\angle ACB, \angle APB, \angle CBP$ 的大小没有变化;

(2) $\triangle BCP$ 是等腰三角形. (3) 连结 O_2O_1 , 并延长交 AB 于 E , 交 $\odot O_1$ 于 F , 设

$\odot O_1, \odot O_2$ 的半径分别为 r, R , $PD \cdot PB = PO_2 \cdot PA = 2R^2$, $PB \cdot PD = 10 = PB^2 -$

10 , $PB^2 = PA^2 - AB^2 = 4R^2 - 16$, 解得 $R = \sqrt{13}$, $O_2E = 3$, $EF \cdot EO_2 = AE \cdot BE$, $EF = \frac{4}{3}$, $\therefore r = \frac{1}{2}(3 + \frac{4}{3})$



$$= \frac{13}{6}$$

19. (1) 两圆外切, 作 $\odot ABD$ 的切线 l , 则 $\angle 1 = \angle B$. $\therefore \angle 3 = \angle B + \angle C$, $\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle C$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 = \angle 1 + \angle C$, $\therefore \angle 2 = \angle C$

过 A 作 $AP \perp l$, 交 $\odot AEC$ 于点 P , 连 PE .

$\therefore \angle P = \angle ACE$, 则 $\angle 2 = \angle P$. $\therefore \angle PAE + \angle P = 90^\circ$

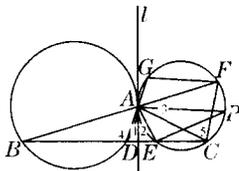
于是, $\angle AEP = 90^\circ$, 从而 AP 是 $\odot AEC$ 的切线, 即二圆相切于点 A .

(2) 延长 DA 交 $\odot AEC$ 于 G (不妨设 F 在 $\odot AEC$ 上), 连 GF .

由 $\angle 4 = \angle DAE + \angle AED = \angle 3 + \angle AFC$.

有 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$, 则 $\angle 4 = \angle AGF$, $\therefore \triangle ADB \sim \triangle AGF$. $\therefore AB : AF = 2$ (即等于两圆半径比).

但 $AB = 4$, $\therefore AF = 2$. (这里可用正弦定理做) $\therefore BA \cdot BF = BE \cdot BC$, $\therefore BE = 4$.



20. (1) $AD = 100$;

(2) $AE = 4a = 80$, $AC = 2AE = 160$, 作 $MF \perp AD$, $MG \perp DC$, 垂足分别是 F, G , 设 $\odot M, \odot N$ 的半径分别为 r_M ,

$$r_N, r_M = \frac{3}{5}t, NC = \frac{5}{3}r_N, MN = r_M + r_N, \therefore t + \frac{3}{5}t + r_N + \frac{5}{3}r_N = 160, r_N = 60 - \frac{3}{5}t. \therefore S = \pi \cdot \left(\frac{3}{5}t\right)^2 + \pi \cdot \left(60 - \frac{3}{5}t\right)^2 = \frac{18\pi}{25}t^2 - 72\pi t + 3600\pi.$$

(3) 菱形的高线长为 $h = \frac{160 \times 120 \times \frac{1}{2}}{100} = 96$ (mm). \therefore 加工一个圆形零件的最大直径为 96mm, 直径为 48mm

的圆形零件可以加工 4 个, 若加工 2 个直径最大的圆形零件, 那么这 2 个圆必定是 $\triangle ADB$ 和 $\triangle DBC$ 的内切圆, 其半径为 $\frac{2S_{\triangle ADB}}{AD + BD + AB} = 30$ (mm), 那么加工 2 个圆形零件的最大直径为 60mm, 因此, 在一张

这种菱形铁片上, 直径分别为 90mm, 60mm, 48mm 的圆形零件分别可加工 1 个、2 个、4 个 $\dots 2\pi \cdot \left(\frac{60}{2}\right)^2 < \pi \cdot \left(\frac{90}{2}\right)^2 < 4\pi \cdot \left(\frac{48}{2}\right)^2$. \therefore 加工直径为 48mm 的圆形零件, 能最充分地利用这块材料.

24 几何的定值与最值

【例题求解】

例 1 $5 \quad CD^2 = DQ^2 + CQ^2$, 当 $CQ = 0$ 时: 即 P 为 AB 的中点时, CD 的值最小为 5.

例 2 选 D 当圆心在正三角形的顶点 C 时, 其弧为 60°

例 3 (1) $\therefore \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \therefore \triangle A'B'C \sim \triangle ABC$;

(2) 由 (1) 知 $S_{\triangle A'B'C} = \frac{CA'^2}{CA^2} \cdot S_{\triangle ABC}$, 当 CA' 取最大值, 即为 $\odot O_1$ 的直径时, $S_{\triangle A'B'C}$ 的值最大;

(3) $A'C$ 为 $\odot O_1$ 的直径, $\therefore \angle A'DC = \angle B'DC = 90^\circ$, $B'C$ 为 $\odot O_2$ 直径, $\odot O_2 \parallel \frac{1}{2} A'B'$, $O_1 O_2 \perp CD$,

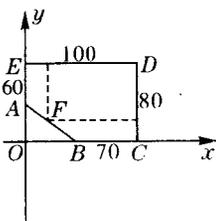
$$\therefore S_{\triangle A'B'C} = \frac{1}{2} A'B' \cdot CD = O_1 O_2 \times CD = 11 \times 9 = 99.$$

例 4 $\therefore \angle AMK = \angle C = \angle CAB = \angle K + \angle ABK, \angle AMK = \angle MAB + \angle ABK, \therefore \angle K = \angle BAM = \angle BAN$, 同理 $\angle ABK = \angle N$, 则 $\triangle ABK \sim \triangle BNA$, 有 $\frac{AB}{BN} = \frac{AK}{AB}$, 故 $AK \cdot BN = AB^2$ (常量), 即 AK 与 BN 的乘积与点 M 的选择无关.

例 5 如图, 以直线 BC, AE 分别为 x 轴、 y 轴建立直角坐标系, BC, AE 为正方向, 长度单位为米, 直线 AB 的方程为 $y = -\frac{2}{3}x + 20$, 首先考虑与 D 不相邻的顶点 F 在 AB 上的情况, 则 $F(x, 20 - \frac{2}{3}x)$. ($0 \leq x \leq 30$), S

$$= (100 - x)[80 - (20 - \frac{2}{3}x)] = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{20}{3}x + 6000 = -\frac{2}{3}(x - 5)^2 + 6016$$

$\frac{2}{3}$. 所以, 当 $x = 5, y = 20 - \frac{2}{3}x \approx 17$ 时, $S_{max} \approx 6017m^2$, 其次考虑 F 在 AE 或 BC 上的情形, 此时最大矩形面积是 $6000m^2$ 和 $5600m^2$, 故选定 $F(5, 17)$ 点, 最大面积是 $6017m^2$.



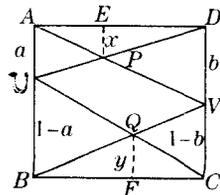
【学力训练】

1. $2\sqrt{2}$ 当 P 点与点 B 重合时, $CC' = DD' = 1$ 最大, $BB' = 0$. 当 P 点与 C 点重合时, $BD \perp AC, BB' + DD' = BD = \sqrt{2}$ 最小, $CC' = 0$.
2. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 设矩形的长宽分别为 a, b , 则圆的直径为 $\sqrt{a^2 + b^2}$, (周长的比) $^2 = \frac{4(a+b)^2}{\pi^2(a^2 + b^2)} \leq \frac{8(a^2 + b^2)}{\pi^2(a^2 + b^2)} = \frac{8}{\pi^2}$.
3. C 作 A 关于 MN 的对称点 A' , 连 $A'B$ 交 MN 于点 P' , 此时的 P' 即为所求 $AP + PB$ 最小值的点“ P ”; $\angle BOA' = 90^\circ, A'B = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{2}$.
4. D 过 P 的弦中, 最大的弦心距为 OP , 即作垂直于 OP 的弦为最短, AB 与其所对劣弧 \widehat{AB} 所构成的弓形面积最小.
5. (1) 略;

(2) PE 总过 AC 的中点; (3) 当 $BP = AP$, 即 P, Q, E, F 分别是各边中点时, PQ' 为最小, 其最小值为 $\frac{1}{2}AB^2$; 当 P, Q, E, F 在顶点 B, C, D, A 时, PQ^2 最大, 其最大值为 AB^2 .
6. 连结 OS, OT, OM , 则 $\angle SPO + \angle SMO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ, \therefore S, P, O, M$ 四点共圆, $\therefore \angle SPM = \angle SOM = \frac{1}{2}\angle SOT$, 因弦 ST 为定值, 则弧 \widehat{ST} 也为定值, 故 $\angle SOT$ 为定值, $\frac{1}{2}\angle SOT$ 也为定值, 即 $\angle SPM$ 为一定角.
7. (1) 证明 $\triangle PFA \sim \triangle PBE$; (2) 当 P 为 BA 延长线上一点时, 第(1)题的结论 AB 成立.
8. (1) $AC = 6, DE = \frac{3}{4}x, CD = 8 - x, y = \frac{1}{2}DE \cdot CD = -\frac{3}{8}x^2 + 3x (0 < x < 8)$

(2) 当 $x = 4$ 时, $y_{max} = 6$.

(3) $\text{tg}\angle ECA = \text{tg}\angle CED = 4$, 即 $\frac{CD}{DE} = 4, \frac{8-x}{\frac{3}{4}x} = 4$, 解得 $x = 2$, 此时 $y = \frac{9}{2}$.
9. B 参见例 5.
10. A 连 CD , 梯形 $ABCD$ 的面积一定, 若要封闭图形面积最大, 就要 $\triangle CPD$ 的面积最小, 而 DC 一定, DC 上的高须最小, 过 O 作 $OE \perp DC$ 交半圆于 P_1, P_1E 长而为 $\triangle CPD$ 中 CD 边上高的最小值, $S_{\triangle COD} = 2, OE = \frac{2S_{\triangle COD}}{CD} = \sqrt{2}, P_1E = OE - P_1O = \sqrt{2} - 1, S_{\triangle CP_1D} = 2 - \sqrt{2}$.
11. $\triangle ABC$ 为 $Rt\triangle, S_{\triangle ABC} = 30$, 过 D 作 $DF \perp AC$ 于 F , 设 $DF = x, \frac{x}{5} = \frac{AF}{12}, \therefore AF = \frac{12}{5}x, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AE \cdot x, \therefore AE = \frac{30}{x}, EF = \frac{30}{x} - \frac{12}{5}x, DE^2 = DF^2 + EF^2 = x^2 + (\frac{30}{x} - \frac{12}{5}x)^2 = (\frac{30}{x} - \frac{13}{5}x)^2 + 12 \geq 12$, 即 $DE \geq 2\sqrt{3}$, 故满足条件的 DE 最小长度为 $2\sqrt{3}$.
12. 如图, 连 $UV, \therefore AU \parallel DV, \therefore S_{\triangle UPV} = S_{\triangle ADP}, S_{\triangle UQV} = S_{\triangle BQC}, \therefore S_{PUQV} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle BQC}$, 作 $PE \perp AD$ 于 $E, QF \perp BC$ 于 F , 设 $PE = x, QF = y, S_{\text{四边形}PUQV} = \frac{1}{2}(x + y)$, 设 $AU = a, DV = b$, 则 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = DE + AE = 1$, 故 $x = \frac{ab}{a+b}$, 同理 $y = \frac{(1-a)(1-b)}{(1-a) + (1-b)} = \frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}, S_{\text{四边形}PUQV} = \frac{1}{2}[\frac{ab}{a+b} + \frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}] =$



$$\frac{(a+b)-(a^2+b^2)}{2(a+b)(2-a-b)} = \frac{2(a+b)-a^2-b^2-(a^2+b^2)}{4(a+b)(2-a-b)} \leq \frac{2(a+b)-a^2-b^2-2ab}{4(a+b)(2-a-b)} = \frac{(a+b)(2-a-b)}{4(a+b)(2-a-b)} = \frac{1}{4},$$

等号当且仅当 $a=b$ 时成立;故四边形 $PUQV$ 面积的最大值是 $\frac{1}{4}$.

13. (1) $\triangle AGC \sim \triangle AFG, \frac{AG}{GC} = \frac{AF}{FG} = 2\sqrt{2}, \therefore AG = 4\sqrt{2}, GC = 2 = \frac{1}{2}OG.$

(2) 连结 CE 交 AO_1 于点 H , 作 $EK \perp CD$ 于 $K, E(\frac{22}{5}, \frac{24}{5}).$

(3) $\triangle EMN \sim \triangle EBA, MN = \frac{EN}{EA} \cdot AB,$ 连结 AN , 则 $AN \perp BE, \frac{EN}{AE} = \cos \angle E, MN = AB \cdot \cos \angle E = 8\cos \angle E,$ 当点 E 在 \widehat{ADB} 上运动时, $\angle E$ 的大小不变, $8\cos \angle E$ 是常量, 故 MN 的长度不变.

14. (1) $y = \frac{800-x^2}{4x} (0 < x < 20\sqrt{2});$

(2) ① $S = 2100x^2 + 105 \times 4xy + 40 \times 4 \times \frac{1}{2}y^2 = 2000x^2 + \frac{3200000}{x^2} + 76000 (0 < x < 20$

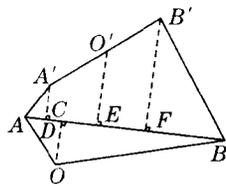
$\sqrt{2}),$ ② $S = 2000(x^2 + \frac{1600}{x^2} - 80) + 76000 + 2000 \times 80 = 2000(x - \frac{40}{x})^2 + 236000 >$

$235000, \therefore$ 仅靠银行贷款不能完成该工程的建设任务. ③ 由 $S = 235000 + 73000$

$= 308000,$ 得 $2000x^2 + \frac{3200000}{x^2} + 76000 = 308000,$ 解得 $x = 10$ 或 $x = 4,$ 对应的 y 值分别为 $y = 17.5, y = 49.$

故设计方案为: 1° 正方形区域的边长为 10 米, 四个相同的矩形区域的长和宽分别为 17.5 米和 10 米, 四个相同的三角形区域的直角边长均为 17.5 米.

2° 正方形区域的边长为 4 米, 四个相同的矩形区域的长和宽分别为 49 米和 4 米, 四个相同的三角形区域的直角边长均为 49 米.



15. (1) 取 O 点的几个特殊位置, 可以看出 O' 点的位置将不随 O 点的变化而变化, 即无论 O 点怎样移动, 点 O' 位置保持不变.

(2) 过 O, A', O', B' 点分别作 AB 的垂线, 垂足依次为 $C, D, E, F,$ 易证 $Rt\triangle OAC \cong Rt\triangle AA'D, Rt\triangle OCB \cong Rt\triangle BFB', \therefore AD = OC = BF, A'D = AC, B'F = BC,$ 点 E 既是 DF 的中点, 又是 AB 的中点, $O'E$ 是梯形 $A'DFB'$ 的中位线, $\therefore O'E = \frac{1}{2}(A'D + B'F) = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB,$ 这就是说, 无论 O 点在何处, O' 点必在线段 AB 的垂直平分线上距线段 AB 为 $\frac{1}{2}AB$ 处, 即 $A'B'$ 的中点 O' 始终保持不变.

25 简单的数学建模

【例题求解】

例 1 作过 M, B, N 三点的圆弧, 点 A 在圆外. 连 MA 交圆弧于 C 点, 由 $\angle MBN = \angle MCN, \angle MCN > \angle MAN$ 得: $\angle MBN > \angle MAN,$ 即 B 点对球门张角最大, 故甲应将球回传给乙, 让乙射门.

例 2 在直角坐标系中描点 $(0, 8.6), (5, 10.4), (10, 12.9),$ 用图象或代数方法易见不适合用一次函数(直线)对数据拟合, 试用二次函数拟合, 设此二次函数为 $y = ax^2 + bx + c,$ 将上述三组数据代入此函数式求得: $a = 0.014, b = 0.29, c = 8.6, \therefore y = 0.014x^2 + 0.29x + 0.86,$ 取 $x = 15$ 代入, 得 $y = 16.1,$ 与专家预测值相同

例 3 设楼房应建成 x 层, 则每平方米的购地费用为 $\frac{1000000}{1000x} = \frac{1000}{x}$ (元), 每平方米的建筑费用为: $400 + 400(x - 5) \times 5\%$ (元), \therefore 每平方米的综合费用均为 $y = 400 + 400(x - 5) \times 5\% + \frac{1000}{x} = \frac{1000}{x} + 20x + 300 = 20$

$(x + \frac{50}{x} + 15) = 20[(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{50}{x}})^2 + 15 + 10\sqrt{2}] = 20(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{50}{x}})^2 + 300 + 200\sqrt{2}$, 当 $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{50}{x}} = 0$, 即该楼每平方米的平均综合费用最少为 $(200\sqrt{2} + 300)$ 元/平方米, 此时 $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{50}{x}}$, $x \approx 7$, 因此应把楼层建成 7 层.

例 4 (1) 可算得两个组的人均分都是 80 分, 两组成绩的方差 $S_{甲}^2 = 172, S_{乙}^2 = 256, \therefore S_{甲}^2 < S_{乙}^2, \therefore$ 甲组成绩较乙组波动要小, 即甲组成绩较为稳定;

(2) 甲组成绩的众数为 90 分, 乙组成绩的众数为 70 分, 从成绩的众数比较看, 甲组成绩好些;

(3) 甲、乙两组成绩的中位数, 平均分都是 80 分, 进而可以从高分人数的多少去比较, 甲组成绩在 80 分以上的有 33 人; 乙组成绩在 80 分以上的有 26 人, 从这一角度看甲组成绩总体较好, 但从高于 80 分以及获得满分人数看, 乙组的成绩较好.

例 5 (1) 由 $m \cdot \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = 360^\circ$, 得 $mn - 2m - 2n = 0$, 即 $(m-2)$

$(n-2) = 4$, 可求得 $(m, n) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$, 这说明, 只用一种正多边形来铺成平整无空隙的地面, 只存在如右图所示的三种情况.

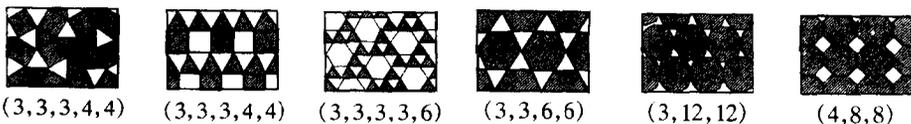


①由六个正三角形铺设, 用符号 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 表示;

②由四个正方形铺设, 用符号 $(4, 4, 4, 4)$ 表示;

③由三个正六边形铺设, 用符号 $(6, 6, 6)$ 表示.

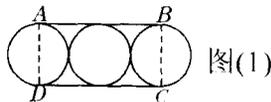
(2) 由 $\frac{x_1-2}{x_1} \times 180^\circ + \frac{x_2-2}{x_2} \times 180^\circ + \dots + \frac{x_k-2}{x_k} \times 180^\circ = 360^\circ$, 得 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = \frac{k-2}{2}, (x_i \geq 3, i = 1, 2, \dots, k), k-2 > 0, \therefore k \geq 3$, 于是 $\frac{k-2}{2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} \leq \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{k \text{ 个}} = \frac{k}{3}$, 解得 $k \leq 6, \therefore 3 \leq k \leq 6$, 即若若干种正多边形铺设平面时, 在每个顶点周围地板砖的块数至少有 3 块, 最多 6 块, 这意味着不超过 6 种不同类型的正多边形地板砖组合拼设, 如果用两种正多边形来铺设平面, 有以下五种情况: $(3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 6, 6), (3, 12, 12), (4, 8, 8)$ 如图所示:



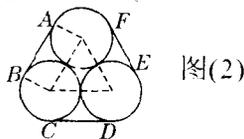
【学力训练】

1. 有两种捆法: 图(1)绳长 $= 2a \times 2 + \frac{1}{2}\pi a \times 2 = (\pi + 4)a$; 图(2), 绳长分为 6

段, $AB = CD = EF = a, \widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{DE} = \frac{\pi}{3} \cdot a, \therefore$ 绳长 $= 3a + 3 \times \frac{\pi}{3} a = (\pi + 3)a$, 故最少要用 $(\pi + 3)a$ 的细绳.



2. 设明年生产 x 台, 则 $\begin{cases} x \geq 10000 \\ 12x \leq 80 \times 2400 \\ 5x \leq 2000 + 80000, \end{cases}$ 解得 $10000 \leq x \leq 16000$.

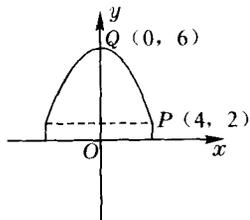


3. 建立如图所示直角坐标系, 此抛物线过点 $P(4, 2), Q(0, 6)$, 设所求方程为

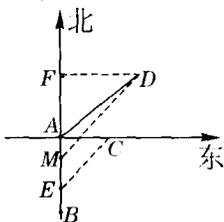
$y = ax^2 + b$, 代入 P, Q 点坐标, 得 $a = -\frac{1}{4}, b = 6, \therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + 6, (-4 \leq x \leq 4)$, 令 $x = 3$, 得 $y = 3.75$,

$3.75 - 0.5 = 3.25 \approx 3.2$ (米), 故货车的限高为 3.2 米.

4. 由题意得 $10 + \frac{A}{100}(80 - A) = 25$, 解得 $A = 50, A = 30$ (舍去).
5. 由图象知, 直线 $y = kx + b$ 过点 $(600, 400), (700, 300)$, 代入解得 $k = 1, b = 1000$,
 $\therefore y = -x + 1000 (500 \leq x \leq 800), S = (x - 500)(-x + 1000) = -x^2 + 1500x - 500000 = -(x - 750)^2 + 62500$, 当 $x = 750$ 时, $S_{\max} = 62500$, 即当销售单价定为 750 元/件时, 该公司可获得最大毛利润为 62500 元, 此时的销售量为 $y = -750 + 1000 = 250$ (件).

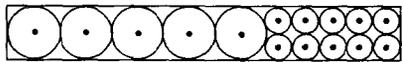


6. (1) 设轮船会遇到台风, 需 t 小时, 此时轮船位于 C 处, 台风中心移到 E 处, 则 $AC = 20t, AE = 100 - 40t$, 由 $AC^2 + AE^2 = EC^2$, 得 $(20t)^2 + (100 - 4t)^2 = (20\sqrt{10})^2$, 解得 $t_1 = 1, t_2 = 3$, 故最初遇到台风时间为 1 小时.
- (2) 设台风抵达 D 港的时间为 t 小时, 此时台风中心到达 M 处, 过 D 作 $DF \perp AB$, 连 $DM, DF = AD \cdot \cos 30^\circ = 30\sqrt{3}, AF = 30, FM = FA + (AB - MB) = 130 - 40t, MD = 20\sqrt{10}$, 由 $FD^2 + FM^2 = MD^2$ 得 $(30\sqrt{3})^2 + (130 - 40t)^2 = (20\sqrt{10})^2$, 解得 $t = \frac{13 \pm \sqrt{13}}{4}$, \therefore 台风到达 D 港的时间为 $\frac{13 - \sqrt{13}}{4}$ 小时, 故轮船从 A 处到 D 港的速度是 $60 \div \frac{13 - \sqrt{13}}{4} \approx 25.5$, 船至少应提速 6 海里/时.

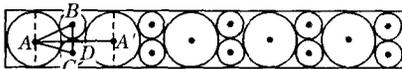


7. 设 $MG = x$, 则 $GH = 200 - x, \therefore MG \parallel AE, \therefore \triangle FMG \sim \triangle FAE, \therefore \frac{FM}{FA} = \frac{MG}{AE}$, 得 $FM = \frac{2}{3}x, MF = FA - FM = 40 - \frac{2x}{3} (0 \leq x \leq 6), S_{\text{矩形}HGKC} = HG \cdot KG = (200 - x)[160 - (40 - \frac{2x}{3})] = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{40}{3}x + 200 \times 120 = -\frac{2}{3}(x - 10)^2 + 24066 \frac{2}{3}$, 当 $x = 10$ (米) 时, $S_{\text{矩形}HGKC}$ 最大, $S_{\max} = 24066 \frac{2}{3}$ (米)².

8. 第一种排料法: 把两种规格的圆形钢片分开排料, 按 2:1 的比例尺生产 (图 a), 这时生产 2 片小的 1 片大的圆形钢片, 用料长度合计为 $20 + 10 = 30$ (cm), 第二种排料方法: 把 2 片小的和 1 片大的圆形钢片相互间隔排列, 用料长度 $AA' \approx 2AD = 2\sqrt{AB^2 - BD^2} = 2\sqrt{(10+5)^2 - 5^2} = 20\sqrt{2}$, 比较两种排法: $\frac{30 - 20\sqrt{2}}{30} \approx 5.72\%$, 故排法 (b) 要比排法 (a) 节约用料 5.72%.



图(a)



图(b)

9. 在直角坐标系中描出由表中所给出的 10 个对应点, 从图中看出, 10 个点近似在一条直线上, 在所画的直线上选取两点, 如选取 $(1949, 541.67), (1984, 1034.75)$ 可确定函数关系式为 $y = 14.088x - 26915.842$, 将 $x = 1999$ 代入, 得 $y = 1246.07 \approx 12.46$ (亿), 即我国 1999 年的人口数大约为 12.46 亿, 上述解法虽然简单, 但精确度不高, 为提高精确度, 可多取几组点对, 确定几条直线方程, 代入 $x = 1999$, 分别求出人口数, 再取算术平均值.

26 开放性问题评说

【例题求解】

例 1 现按写出的结论的难易程度, 给出的评分标准如下:

- (1) 写出以下结论, 并给予证明的给 6 分: ① $PA = PT$; ② $\angle PAT = \angle PTA$; ③ $\angle OAP = \angle OTP = 90^\circ$.

(2) 写出以下结论并给予证明的给 8 分: ① $PA = PB = PT$; ② $\angle ATB = 60^\circ$; ③ $\angle AOT + \angle APT = 180^\circ$; ④ $OA \parallel O_1B$.

(3) 写出以下结论, 并给予证明的给 10 分: $\triangle OAT \sim \triangle PTB$.

(4) 写出以下结论, 并给予证明的给 12 分: $PA \cdot PB = OT \cdot O_1T$.

例 2 (1) 由 $\triangle ABE \sim \triangle CDA$ 得, $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DA}$, 即 $AB \cdot DA = CD \cdot BE$.

(2) 只要 $\angle BAE = \angle ACD$, 即只需 $\widehat{AD} = \widehat{BF}$ (或 $\widehat{AB} = \widehat{DF}$, 或 $AF \parallel BD$, 或 $\angle BCF = \angle ACD$, 或 $\angle BAF = \angle ABD$ 等) 即可.

例 3 (1) 连 $O_1B, O_2C, \angle ABC + \angle ACB = \frac{1}{2}(\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$, 即 $AB \perp AC$;

(2) BP 与 CP 是垂直的, 仿(1)的证法证明;

(3) BP 与 CP 是不垂直的, 连 $O_1B, O_2C, CN, BM, \angle CNM + \angle BMN = 90^\circ, \angle BQO_1 + \angle CQO_2 > \angle BMN + \angle CNM = 90^\circ$, 故 $\angle BQC = 180^\circ - (\angle BQO_1 + \angle CQO_2) < 90^\circ$.

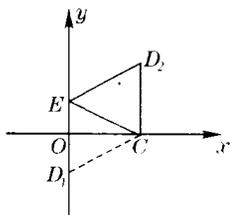
例 4 (1) $C(\sqrt{3}m, 0), E(0, m)$, 若要 $\triangle CDE$ 为等边三角形, 则 D 点有如图所示中的位置 D_1, D_2 , 但过 E 且顶点为 D_1 的抛物线不可能存在, 故 D_1 舍去.

$CE = 2m, D_2(\sqrt{3}m, 2m)$, 设抛物线为 $y = a(x - \sqrt{3}m)^2 + 2m$, 把 $(0, m)$ 代入得 $a = -\frac{1}{3m}$, 即 $y = -\frac{1}{3m}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + m, \therefore b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 要 $\angle AEC = 90^\circ$, 且 A 在 x 轴上, $\angle AEO = 30^\circ, OE = m, OA = \frac{\sqrt{3}}{3}m, \therefore A$

$(-\frac{\sqrt{3}}{3}m, 0)$, 把 A 代入抛物线解析式, 有 $y = \frac{2}{9}m \neq 0$, 这说明, 当

$\angle AEC = 90^\circ$ 时, 点 A 不在抛物线上, 换句话说, 当 A 是抛物线与 x 轴的交点, 则 $\angle AEC \neq 90^\circ$, 从而这种实数 m 不存在.



例 5 (1) 连 CH , 则 $CH \perp EF$, 可证明 $\angle CNM = \angle CAB$, 由直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 经过 A, C 得 $OC = 3, AO = 4$, 故 tg

$$\angle CNM = \text{tg} \angle CAB = \frac{3}{4}.$$

(2) $\because GD \cdot GC = GE \cdot GF, GO \cdot GQ = GE \cdot GF, \therefore GO \cdot GQ = GD \cdot GC$, 可得 $GO = GC. \therefore \angle CNG = \angle CAB = \angle BCO, \angle CMG = \angle CBA = \angle ACO, \therefore GO = GC = GM = GN$, 故四边形 $OMCN$ 是矩形.

(3) 连结 CR , 过 C 作 $\odot H$ 的直径 CL , 连结 ST , 则 $\angle CSL = \angle CRT = 90^\circ$, 又 $\angle CLS = \angle CTR, \therefore \triangle CLS \sim \triangle CTR, \therefore \frac{CL}{CT} = \frac{CS}{CR}, \therefore CS \cdot CT = CL \cdot CR = AB \cdot OC = (4 + \frac{9}{4}) \times 3 = \frac{75}{4}$.

【学力训练】

1. 略

2. 以下答案仅供参考:

(1) ① $y_{DC} = \frac{4}{3}x$; ② $y_{CC} = \frac{5}{3}x$; ③ $y_{AG} = -\frac{5}{3}x + 10$; ④ $y_{AE} = \frac{5}{3}(6-x) = -\frac{5}{3}x + 10$

(2) ① $S_{\triangle AEC} = \frac{4}{3}(6-x)^2 = \frac{4}{3}x^2 - 16x + 48$; ② $S_{\triangle BDE} = \frac{2}{3}(12-x)^2 = \frac{2}{3}x^2 - 16x + 96$

3. $m = 4$ 由勾股定理, $\cos B = \frac{3}{5}$ 以及 $b - a = 3$, 可求得 $a = 9, b = 12, c = 15$, 由根与系数关系得 $x_1^2 + x_2^2 = 7m^2 + 36m - 31 = c^2 = 225, m_1 = 4, m_2 = -\frac{64}{7}$ (舍去).

4. 下列结论可供选择:

(1) ① DE 是 $\odot O$ 的切线; ② $AB = BC$; ③ $\angle A = \angle C$; ④ $DE^2 = BE \cdot CD$; ⑤ $CD^2 = CE \cdot CB$; ⑥ $\angle C + \angle CDE = 90^\circ$; ⑦ $CE^2 + DE^2 = CD^2$.

数值.

27 动态几何问题透视

【例题求解】

例 1 (1) $BP = t, CQ = 2t, PC = t - 2, \therefore EC \parallel AB, \therefore \frac{EC}{AB} = \frac{PC}{PB}$, 得 $EC = \frac{4(t-2)}{t}, QE = QC - EC = 2t - \frac{4(t-2)}{t} = \frac{2(t^2 - 2t + 4)}{t}$

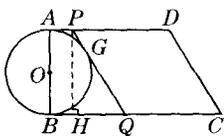
$$(2) S = \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - 2t + 4).$$

(3) 当 QE 平分 $\triangle APQ$ 的面积时, 则 $AE = PE, \therefore EC \parallel AB, \therefore PC = CB$, 即 $t - 2 = 2, t = 4. \therefore QE = \frac{2(t^2 - 2t + 4)}{t} = 6(\text{cm})$.

例 2 (1) 只要 $QC = PD$, 即当 $t = 6$ 秒时, 四边形 $PQCD$ 为平行四边形; 只要 $PQ = CD, PD \neq QC$, 即当 $t = 7$ 秒时, 四边形 $PQCD$ 为等腰梯形.

(2) 设运动 t 秒时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切于点 G , 过 P 作 $PH \perp BC$ 于 H , 即 $PH = AB = 8, BH = AP, HQ = 26 - 3t - t = 26 - 4t, PQ = AP + BQ = 26 - 2t$, 由 $PQ^2 = PH^2 + HQ^2$ 得 $(26 - 2t)^2 = 8^2 + (26 - 4t)^2$, 解得 $t_1 = \frac{2}{3}$ 或 $t_2 = 8$, 故当 $t =$

$\frac{2}{3}$ 秒或 $t = 8$ 秒时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相切; 当 $0 \leq t < \frac{2}{3}$ 或 $8 < t \leq 8\frac{2}{3}$ 时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相交; 当 $\frac{2}{3} < t < 8$ 时, 直线 PQ 与 $\odot O$ 相离.



例 3 (1) 分别连结 OD, AC 交于点 E , 则 $OD \perp AC, PD \parallel AC$, 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $AC = 4\sqrt{5}, AE = CE = 2\sqrt{5}, AB = 10, OA = 5$, 又 $DE \cdot (10 - DE) = (2\sqrt{5})^2$, 解得 $DE = 5 - \sqrt{5}, DE = 5 + \sqrt{5}$ (舍去).

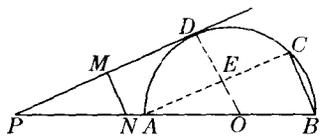
$\therefore BC \perp AC, OD \perp AC, \therefore OD \parallel BC, \angle AOD = \angle B, PD = 10$.

$\therefore S_{\text{四边形}PBCD} = S_{\text{梯形}PACD} + S_{\triangle ABC} = 35 + 5\sqrt{5}$.

(2) $PA \cdot PB = PD^2$, 得 $PA = -5 + 5\sqrt{5}, PO = 5\sqrt{5}, \therefore MN \parallel BC, DO \parallel BC$,

$\therefore MN \parallel DO, \therefore \frac{PN}{PO} = \frac{PM}{PD} = \frac{MN}{DO}$, 得 $PM = \frac{2\sqrt{5}}{5}x, MN = \frac{\sqrt{5}}{5}x, S_{\triangle PMN} = \frac{1}{5}x^2$

$\therefore y = -\frac{1}{5}x^2 + 35 + 5\sqrt{5}. (0 < x < 5\sqrt{5})$.



例 4 (1) 设 E, F 出发后运动了 t 秒时, $EF \parallel BC$, 如图(a), 则 $BE = t, CF = 4 - 2t$, 由 $t = 4 - 2t$, 得 $t = \frac{4}{3}$, 即当 $t = \frac{4}{3}$ 秒时, $EF \parallel BC$.

(2) 设 E, F 出发后运动了 t 秒时, EF 与半圆相切, $\therefore 1 < t < 2, \therefore E, F$ 分别在 BA, CD 上, 如图(b), 过点 F 作 $FG \perp AB$ 于 G , 则 $FG = BC = 2, BE = t, CF = 4 - 2t, EG = t - (4 - 2t) = 3t - 4, EF = BE + CF = 4 - t$, 又 $EF^2 = EG^2 + FG^2$, 即 $(4 - t)^2 = (3t - 4)^2 + 2^2$, 解得 $t = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, 故当 $t = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ 秒时, EF 与半圆相切.

(3) 设 E, F 出发后运动了 t 秒时, 因 $1 \leq t < 2$, 所以 EF 的位置如图(c), 则 $AE = 2 - t, CF = 4 - 2t$, 由 $AB \parallel DC$, 有 $\frac{AP}{PC} = \frac{AE}{CF} = \frac{2 - t}{4 - 2t} = \frac{1}{2}$, 即点 P 的位置与 t 的取值无关, 即 P 点的位置不会发生变化.

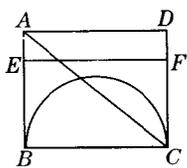


图 (a)

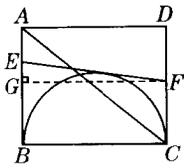


图 (b)

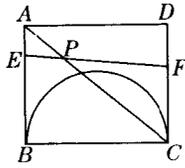


图 (c)

【学力训练】

1. (1) 连 AB, O_1A, O_1B, O_1O_2 , 则 $AB \perp O_1O_2, \angle C + \angle D = \angle AO_1O_2 + \angle O_1AB = 90^\circ$, 故 $DO_1 \perp AC$;

(2) 结论仍成立, 且辅助线连法不变, 证法不变.

2. (1) $A(4, 0); y = 3x + 3$.

(2) 假设直线 BE 与 $\odot O'$ 相切于 F, BF 交 y 轴于 $E'(0, h)$, 连 $O'F$, 由 $\triangle OBE' \sim \triangle FBO'$, 得 $OE' = h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故当 $0 < b < \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, BE 与 $\odot O'$ 相交; 当 $b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, BE 与 $\odot O'$ 相切; 当 $\frac{2\sqrt{5}}{5} < b < 3$ 时, BE 与 $\odot O'$ 相离.

3. (1) 连 OD , 则 $\triangle BFG \sim \triangle BDO, \frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BDO}} = \left(\frac{BF}{BD}\right)^2, S_{\triangle BFG} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2, \therefore y = S_{\text{四边形}EDGF} = S_{\triangle BFG} - S_{\triangle BDE} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{12}, x \geq 0$.

(2) 要使 ED 将 $\triangle BGF$ 的周长平分, 即 $EF + FG + DG = BE + BD = 1 + \sqrt{3}$, 而 $EF = 1 + x$, 在 $\text{Rt}\triangle BFG$ 中, $FG = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2), BG = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2), DG = BG - BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2) - \sqrt{3}. \therefore 1 + x + \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2) - \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$, 解得 $x = 0$.

(3) 若 $S_{\text{四边形}EDGF} = 5S_{\triangle BED}$, 则有 $\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$, 解得 $x = 1, \therefore OF = OD = 1$, 又 $FG \perp AB, \therefore FG$ 所在的直线与 $\odot O$ 相切.

4. (1) $\angle POQ = 2\alpha$;

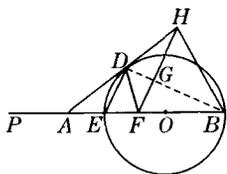
(2) $\angle DOE$ 的大小保持不变, 理由是: 连结 OM , 则 $EM = EQ$, 又 $OM = OQ, OE = OE, \therefore \triangle OEM \cong \triangle OEQ, \therefore \angle MOE = \angle QOE$, 同理 $\angle MOD = \angle POD, \therefore \angle DOE = \frac{1}{2}(\angle POM + \angle QOM) = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle POQ) = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$.

(3) $y = x + \frac{m^2}{4x} + \frac{3}{5}m (x > 0)$.

5. (1) $AD^2 = AE \cdot AB = 2 \times (2+6)$, 得 $AD = 4$.

(2) ① 无论点 A 在 EP 上怎么移动 (与点 E 不重合), 总有 $\frac{AD}{AH} = \frac{ED}{FH}$, 证明如下: 连结 DB 交 FH 于 $G. \therefore \angle DFB = \angle DHB = 90^\circ, DB = DB, \angle DBE = 90^\circ - \angle DEB = 90^\circ - \angle HDG = \angle DBH, \therefore \triangle DFB \cong \triangle DHB, BH = BH, \therefore BD \perp FH, ED \parallel FH$, 故 $\frac{AD}{AH} = \frac{ED}{FB}$, ② $ED = x, BH = y, BE = 6, BF = BH, \therefore EF = 6 - y, \therefore DE^2$

$= EF \cdot EB \therefore x^2 = 6(6 - y)$, 即 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$. 当点 A 从 E 向左移动, ED 逐渐增大, 当 A 和 P 重合时, ED 最大. 这时连结 $OD, OD \parallel BH, PO = 9, PB = 12, \frac{OD}{BH} = \frac{PO}{PB}, \therefore BH = 4, BF = BH = 4, EF = EB - BF = 2$, 由 $ED^2 = EF \cdot EB$ 得, $x^2 = 2 \times 6 = 12, \therefore x = 2\sqrt{3}$, 故 x 的取值范围是 $0 < x < 2\sqrt{3}$.



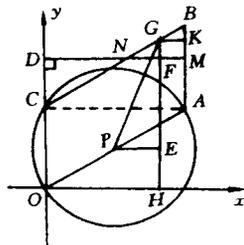
6. (1) 经过 $\frac{2}{5}$ 分钟, $PQ = 2$; (2) $y = 20t^2 - 8t + 4 (0 \leq t \leq 1)$

(3) 若 $PQ \perp MN$, 则 $OP = 2t$, $PM = 2 - 2t$, $MQ = 4t$, 由 $\triangle MNO \sim \triangle QPM$, 有 $\frac{4}{2-2t} = \frac{2}{4t}$, 解得 $t = \frac{1}{5}$, 即当 $t = \frac{1}{5}$ 分钟时, $PQ \perp MN$.

(4) 若 $\triangle PMQ \sim \triangle MON$, 则 $\frac{PM}{MO} = \frac{MQ}{ON}$, 即 $\frac{2-2t}{2} = \frac{4t}{t}$, 解得 $t = \frac{1}{2}$; 若 $\triangle QMP \sim \triangle MON$, 则 $\frac{QM}{MO} = \frac{MP}{ON}$, 即 $\frac{4t}{2} = \frac{2-2t}{4}$, 解得 $t = \frac{1}{5}$. 故当 t 为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{5}$ 分钟时, 点 P, Q, M 构成的三角形与 $\triangle MON$ 相似.

7. (1) 连结 AC , 则 $\angle ACO = 90^\circ$, 又 $OA = 2$, $\angle AOC = 60^\circ$, $\therefore OC = 1$, $AC = \sqrt{3}$, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$, $AB \parallel OC$, $\therefore B(\sqrt{3}, 2)$.

(2) $\angle NMB = 90^\circ$, $\odot G$ 的圆心 G 为 BN 的中点, $\angle B = \angle AOC = 60^\circ$, $BM = \frac{1}{2}BN = R$, $BM = 2 - t$, $R = 2 - t$, 过点 G 作 $GH \parallel y$ 轴交 x 轴于点 H , 交 DM 于点 F , 过点 G 作 $GK \parallel x$ 轴, 交 AB 于点 K , 则 $FM = \frac{1}{2}MN$, $KM = \frac{1}{2}BM$, 设 G 点坐标为 (x, y) , $\therefore NM = \sqrt{3}(2 - t)$, $\therefore x = DM - \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, $y = OD + \frac{1}{2}BM = 1 + \frac{1}{2}t$, $\therefore G$ 点坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}t, 1 + \frac{1}{2}t)$.



(3) 连结 GP , 过 P 作 $PE \parallel x$ 轴交 GH 于点 E , $GP = \sqrt{PE^2 + GE^2} = \sqrt{t^2 - t + 1}$, 当 $\odot G$ 与 $\odot P$ 外切时, $PG = R + 1$, $\therefore \sqrt{t^2 - t + 1} = 3 - t$, 得 $t = \frac{8}{5}$, 此时 $OD = t = \frac{8}{5}$, $AM = 1 - MB = \frac{3}{5}$, $DM = AC = \sqrt{3}$, $S_{\text{梯形}OAMD} = \frac{(OD + AM)}{2} \cdot DM = \frac{11}{10}\sqrt{3}$.

28 避免漏解的奥秘

【例题求解】

例 1 $15\sqrt{3}$ 或 $25\sqrt{3}$.

例 2 选 C.

例 3 若 $r = 0$, 得 $x = 1$; 若 $r \neq 0$, 设方程的两根为 $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$ 则 $x_1 + x_2 = -\frac{r+2}{r}$, $x_1 x_2 = \frac{3r-2}{r}$. $\therefore x_1 x_2$

$-(x_1 + x_2) = \frac{3r-2}{r} + \frac{r+2}{r} = 4$, 故 $(x_1 - 1)(x_2 - 2) = 5$, 又 $x_1 \leq x_2$, 且 x_1, x_2 为整数.

$\therefore \begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 - 1 = -5 \\ x_2 - 1 = -1 \end{cases}$, 分别求得 $r = -\frac{2}{9}$ 或 $r = \frac{2}{3}$.

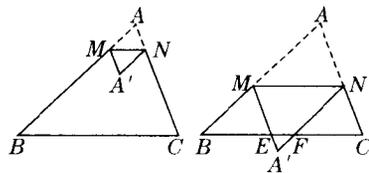
故所求的一切有理数 r 为 $0, -\frac{2}{9}, \frac{2}{3}$.

例 4 (1) $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4}x^2$;

(2) ① 当点 A' 在四边形 $BCNM$ 内或在 BC 边上时, 即 $0 < x \leq 5$ 时, $y = \frac{1}{4}x^2$;

② 当点 A' 在四边形 $BCNM$ 外, 即 $5 < x < 10$ 时, $y = S_{\triangle A'MN} - S_{\triangle A'EF} = \frac{1}{4}x^2 - (x-5)^2 = -\frac{3}{4}x^2 + 10x - 25$;

(3) 当 $0 < x \leq 5$ 时, 取 $x = 5$, $y_{\max} = 6.25$; 当 $5 < x < 10$ 时, $y = -\frac{3}{4}(x - \frac{20}{3})^2 + \frac{25}{3}$, 取 $x = \frac{20}{3}$, $y_{\max} = \frac{25}{3}$



> 6.25.

例 5 (1) $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$;

(2) $A(-6,0), B(4,0)$;

(3) 设在 x 轴上方抛物线存在点 P , 使以 A, B, P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, $P(x, y), \tan \angle 1 = \tan \angle 2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{y}{x+6} = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}(x+6)$, 又 $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$, 得 $x = 8, \therefore P(8, 7)$, 而 $AP = 7\sqrt{5}$, 由 $AP \cdot AC = 7\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 105 \neq 100 = AB^2$, 故此时 $\triangle PAB$ 与 $\triangle ABC$ 不能相似. 当 $\angle 1 = \angle 3, \tan \angle 1 = \frac{y}{x+6}, \tan \angle 3 = \frac{3}{4}$, 得 $x = 10, \therefore P(10, 12)$, 恰好有 $AP \cdot BC = 100 = AB^2$, 而 $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AC}$, 又 $\angle 1 = \angle 2$, 故 $\triangle APB \sim \triangle BAC$, 同理在抛物线对称轴左侧 x 轴上方的抛物线上, 可求得 $P(-10, 7)$ 不合题意, 求得 $P(-12, 12)$ 适合题意, 综上所述, 使 $\triangle ABC$ 与以 A, B, P 为顶点的三角形相似的点 P 有两个 $P_1(10, 12)$ 和 $P_2(-12, 12)$.

【学力训练】

1. -4, 3, 4 2. 2 或 -20 3. 7 或 1 4. $4 + \sqrt{7}$ 或 $4 - \sqrt{7}$ 5. C 6. D 7. D 8. C

9. (1) $\Delta = (k-1)^2 \geq 0, \therefore$ 无论 k 取何实数值, 方程总有实数根.

(2) ① 若 $b = c, \Delta = (k-1)^2 = 0, k = 1, b + c = 4, a = 6, b + c < a$, 不合题意;

② 若 b, c 中有一条边与 a 相等, 不妨设 $a = b = 6$, 得 $k_1 = 3, k_2 = 5$, 当 $k = 3$ 时, $a + b + c = 16$; 当 $k = 5$ 时, $a + b + c = 22$.

10. (1) 当 $m = 0$ 时, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$; 当 $m = -\frac{15}{16}$ 时, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}$.

(2) 当 $m = 0$ 时, $OA = x_1 = 1, OB = x_2 = 4, OC = 2, \therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$, 而 $\angle AOC = \angle COB = 90^\circ, \therefore \triangle AOC \sim \triangle OCB$; 当 $m = -\frac{15}{16}$ 时, $OA = x_1 = \frac{1}{4}, OB = x_2 = 1, OC = \frac{1}{8}, \therefore \frac{OA}{OC} = 2, \frac{OC}{OB} = \frac{1}{8}, \therefore \frac{OA}{OC} \neq \frac{OC}{OB}$, 且 $\frac{OC}{OA} \neq \frac{OC}{OB}$, 又 $\angle AOC = \angle COB = 90^\circ, \therefore \triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 不相似.

11. 2 cm 或 7 cm 12. 70° 或 20° 13. $y = \frac{5}{4}x - \frac{15}{4}$ 或 $y = -\frac{5}{4}x + \frac{15}{4}$ 14. $m = 1$ 或 $m = -4$

15. (1) 当 $k = 0$ 时, $x = -1$;

(2) 当 $k \neq 0$, 则 $\Delta = (k-1)^2 - 4k = k^2 - 6k + 1$ 必为完全平方数, 即存在非负整数 m , 使 $k^2 - 6k + 1 = m^2$, 配方得 $(k-3)^2 - m^2 = 8$, 即 $(k-3+m)(k-3-m) = 8$, 由于 $k-3+m$ 与 $k-3-m$ 是奇偶性相同的整数, 又 $k-3+m \geq k-3-m$, 从而有

$$\begin{cases} k-3+m=4 \\ k-3-m=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k-3+m=-2 \\ k-3-m=-4 \end{cases} \text{ 解得 } k=6 \text{ 或 } k=0 \text{ (舍去).}$$

综合, 原方程有有理根时, $k = 6$ 或 $k = 0$.

16. (1) ①略; ② $AP = 1$ 或 4 ;

(2) ① $\triangle ABP \sim \triangle DPQ, y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 21 (1 < x < 4)$. ② $AP = 2$ 或 $AP = 3 - \sqrt{5}$.

17. (1) $CP = 2\sqrt{2}$; (2) $CP = \frac{24}{7}$;

(3) ① 当 $\angle MPQ = 90^\circ, PM = PQ$ 时, 由 $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$, 得 $PQ = \frac{60}{37}$; 当 $\angle M'QP = 90^\circ, PQ = QM'$ 时, 仍可得

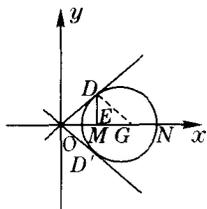
$PQ = \frac{60}{37}$; ② 当 $\angle PMQ = 90^\circ, PM = QM$ 时, 由 $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$, 得 $PQ = \frac{120}{49}$.

18. (1) $y = -x^2 + 4x - 3, M(1,0), (3,0)$ (2) $OD = \sqrt{3}$;

(3) $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 直线 OD 的解析式为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

(4) 在直线 OD 上存在点 P , 使 $\triangle MNP$ 是直角三角形. 所求 P 点的坐标为

$$\left(1, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 或 } (3, \pm \sqrt{3}) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$



19. (1) $P = \begin{cases} 300 - t & (0 \leq t \leq 200) \\ 2t - 300 & (200 < t \leq 300) \end{cases}, Q = \frac{1}{2}(t - 150)^2 + 100 (0 \leq t \leq 300)$

(2) $y = f(t) - g(t)$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2} = -\frac{1}{200}(t - 50)^2 + 100 & (0 \leq t \leq 200) \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{1025}{2} = -\frac{1}{200}(t - 350)^2 + 87.5 & (200 < t \leq 300) \end{cases}$$

y 在 $0 \leq t \leq 300$ 上, 可以取得最大值为 100, 此时 $t = 50$, 即从 2 月 1 日开始的第 50 天时, 上市的西红柿纯收益最大.

29 由正难则反切入

【例题求解】

例 1 原式 = $\frac{\sqrt{x^2+a^2} - (\sqrt{x^2+a^2} - x)}{\sqrt{x^2+a^2}(\sqrt{x^2+a^2} - x)} + \frac{x + (x - \sqrt{x^2+a^2})}{x(x - \sqrt{x^2+a^2})} + \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2} - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{2}.$

例 2 $\because a \neq b, \therefore$ 可得到关于 x 的一元二次方程: $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0.$

$\because (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0, \therefore$ 方程必有一根为 1, 设另一根为 $\sqrt{2002}$, 则由韦达定理得

$$\begin{cases} \sqrt{2002} + 1 = \frac{c-b}{a-b} \\ \sqrt{2002} \times 1 = \frac{c-a}{a-b} \end{cases} \therefore \text{原式} = \frac{(c-b)}{a-b} \cdot \frac{c-a}{a-b} = \sqrt{2002}(\sqrt{2002} + 1) = 2002 + \sqrt{2002}.$$

例 3 设三个二次方程都没有不等实根, 则

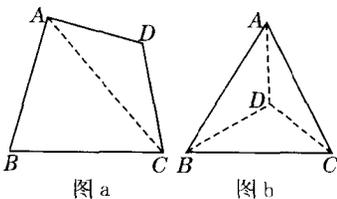
$$\begin{cases} 4b^2 - 4ca \leq 0 \\ 4c^2 - 4ab \leq 0 \\ 4a^2 - 4bc \leq 0 \end{cases} \text{三式相加, 得 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \leq 0 \therefore (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0$$

又 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0, \therefore (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0.$

$\therefore a = b, b = c, c = a$, 这表明, 若三个方程都没有不等的实根, 则 $a = b = c$, 因此当 a, b, c 为不全相等的非零实数时, 三个方程至少有一个方程有不等的实数根.

例 4 能

(1) 如图 a, 若四点 A, B, C, D 构成凸四边形, 则必有一个内角 $\leq 90^\circ$, 不妨设为 $\angle A$, 这是因为, 假设四个内角都大于 90° , 则 $360^\circ = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D > 4 \times 90^\circ = 360^\circ$, 矛盾. 又 $\angle A = \angle BAC + \angle CAD \leq 90^\circ$, 则 $\angle BAC$ 与 $\angle CAD$ 中必有一个 $\leq \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$, 故结论成立.



(2) 如图 b, 若四点 A, B, C, D 构成凹四边形, 则 $\triangle ABC$ 中必有一个内角 $\leq \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$, 不妨设 $\angle A \leq 60^\circ$, 又 $\angle A = \angle BAD + \angle CAD \leq 60^\circ$, 则 $\angle BAD$ 与 $\angle CAD$ 之中必有一个 $\leq \frac{1}{2} \times 60^\circ < 45^\circ$, 故结论成立.

例 5 设 6 张卡片正面写的数是 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 反面写的数对应为 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$. (a_i, b_i 分别取值

为 $1, 2, 3, 4, 5, 6, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.)

则这 6 张卡片正面写的数与反面写的数的差的绝对值分别为

$$|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|, |a_4 - b_4|, |a_5 - b_5|, |a_6 - b_6|.$$

设这 6 个数两两都不相等, 则它们只能取 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 这 6 个值.

于是 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + |a_4 - b_4| + |a_5 - b_5| + |a_6 - b_6| = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 是个奇数. (*)

另一方面, $|a_i - b_i|$ 与 $a_i - b_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 的奇偶性相同,

所以 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + |a_4 - b_4| + |a_5 - b_5| + |a_6 - b_6|$ 与 $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + (a_4 - b_4) + (a_5 - b_5) + (a_6 - b_6) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 0$ 的奇偶性相同, 是个偶数, 与 (*) 矛盾.

所以 $|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|, |a_4 - b_4|, |a_5 - b_5|, |a_6 - b_6|$ 这 6 个数中至少有两个是相同的.

【学力训练】

- $\frac{6}{11} < \frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23} < \frac{60}{91}$ 2. $(a-x)(a-x-x^2)$
- 先解方程: $a^2 + (4x - 3x^2)a + (2x^4 - 7x^3 + 3x^2) = 0$ 得 $a = x^2 - 3x$, 或 $a = 2x^2 - x$, 进一步解得 $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4a+9}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{8a+1}}{4}$. 4. $\frac{9}{10}$
- 当 $m \neq 1$ 时且三个方程均无实根, 则 $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{4}$; 当 $m = 1$ 时, 第三个方程根为 $x = 0$, 故当 $m \leq -\frac{3}{2}$ 或 $m \geq -\frac{1}{4}$ 时, 三个方程至少有一个方程有实根. 6. 逆推
- 把原方程改为关于 a 的一次方程 $(x+2)^2 a = 2x + 7 (x \neq -2)$, $a = \frac{2x+7}{(x+2)^2}$ *
 $\because a \geq 1, \therefore \frac{2x+7}{(x+2)^2} \leq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 1, \therefore x = -3, -1, 0, 1$, 把 $x = -3, -1, 0, 1$ 分别代入 (*) 得 $a = 1, a = 5, a = \frac{7}{4}, a = 1$. 故 $a = 1$ 或 $a = 5$ 时, 原方程至少有一个整数解.
- 在圆周上按逆时针顺序以 1 号为起点记运动服号的数为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{18}, a_{19}$, 显然 $a_1 = 1$, 而 $a_2, a_3, \dots, a_{18}, a_{19}$ 就是 $2, 3, 4, 5, \dots, 18, 19$ 的一个排列, 令 $A_1 = a_2 + a_3 + a_4, A_2 = a_5 + a_6 + a_7, A_3 = a_8 + a_9 + a_{10}, \dots, A_6 = a_{17} + a_{18} + a_{19}$, 则 $A_1 + A_2 + \dots + A_6 = 2 + 3 + 4 + \dots + 17 + 18 + 19 = 189$, 若 $A_1, A_2, \dots, A_5, A_6$ 中每一个都 ≤ 31 , 则 $A_1 + A_2 + \dots + A_6 \leq 6 \times 31 = 186$ 与上式矛盾.
- 逆向推算, $2001 = 3 \times 667$, 由 $3 + 667 = 670$, 得到 $670 = 10 \times 67$, 由 $10 + 67 = 77$ 得到; $77 = 7 \times 11$ 由 $7 + 11 = 18$ 得到, 从任意 $n = 1 + (n-1)$ 可得到 $(n-1) = 1 \times (n-1)$, 因此, 从 22 开始, 可依次得到 21, 20, 19, 18, 77, 670 和 2001.
- 假设 a, b, c 全是奇数, 且 $\frac{m}{n}$ 是方程的一个有理根, 且 $(m, n) = 1$, 则 $a\left(\frac{m}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{m}{n} + c = 0$ 即 $am^2 + bmn + cn^2 = 0$, 分别就 m, n 都为奇数; m 为奇数, n 为偶数; m 为偶数, n 为奇数三种情况讨论, 推导矛盾.
- 假设存在点 P 满足条件, 连 AP 并延长交 BC 于 D , 连 BP 并延长交 AC 于 E , 则 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$, 故 $BD = CD$, 同理 $AE = CE$, 则 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 故 $\frac{AP}{AD} = \frac{2}{3}$, 过 P 作 $BH \parallel BC$, 分别交 AB, AC 于 G, H , 由 $\triangle ACH \sim \triangle ABC$ 有, $\frac{S_{\triangle ACH}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AG}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AP}{AD}\right)^2 = \frac{4}{9}$, 则 $S_{\triangle ACH} : S_{\text{四边形}BCHG} = 4 : 5$, 即 $S_{\triangle ACH} \neq S_{\text{四边形}BCHG}$, 故点 P 不能满足条件, 即不存在这样的点 P .
- 假设 $P = 4n + 3 = a^2 + b^2 (a, b$ 为整数), 则 a 与 b 必为一个奇数, 一个偶数, 不妨设 $a = 2s + 1, b = 2t (s, t$ 为整数), 则 $P = 4n + 3 = a^2 + b^2 = (2s + 1)^2 + (2t)^2 = 4(s^2 + s + t^2) + 1$, 即 P 既是 $4n + 3$ 型的数, 又是 $4m + 1$ 型的数, 出现矛盾.

13. 假设 $a_1 a_2 \cdots a_7 = c \neq 0$, 则 $b_1 b_2 \cdots b_7 = c$, 于是 $(a_1 a_2 \cdots a_7)(b_1 b_2 \cdots b_7) = c^2 > 0$ ①

假设 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + b_1 + b_2 + \cdots + b_7 = 0$, 而 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots, 7)$ 为 $+1$ 或 -1 , 所以这 14 个数中必有 7 个是 $+1$, 7 个是 -1 , 因而 $(a_1 a_2 \cdots a_7)(b_1 b_2 \cdots b_7) = (+1)^7 \cdot (-1)^7 = -1$ ②, 这样①与②矛盾.

14. 不妨假设开始时手中持有鲜花的同学不足 7 位, 我们以 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{12}$ 按逆时针方向依次分别标记这 12 位同学.

(1) 在分花游戏过程中, 任何相邻的两位同学一旦其中一位手中持有鲜花, 那么, 在此后的每次分花之后, 他们两人中始终至少有一人手中持有鲜花.

事实上, 每次分花, 如果分花的同学不是这两位同学中的一位, 那么他们俩手中的鲜花只会增加, 不会减少. 如果他们俩中的一位是分花者, 那么, 分花后另一位同学一定持有鲜花.

(2) 任何一位同学不可能手中始终无花, 可用反证法证明这一点.

不妨假设 A_1 手中始终无花, 这意味着 A_2 始终没作为分花者, A_2 手中鲜花只能增加, 不会减少. 因总共只有 13 束鲜花, 所以经过有限次分花之后, A_2 不再接受鲜花. 这又意味着经过有限次分花之后, A_3 不再为分花者. 同理可知, 再经过有限次分花后, A_4 不再为分花者. 依此类推, 经有限次分花之后, 全部 12 位同学无一人作为分花者, 活动终止. 这就与 13 束鲜花分置于 12 位同学手中, 无论何种情况总能找到可能分花的同学的事实相矛盾.

由(1)、(2)可知, 经若干次分花之后, 可使任何相邻的两位同学中至少有一位同学手中有花, 因此至少有 6 位同学手中有花.

若仅有 6 位同学手中有花, 则手中有花的同学不可能相邻, 否则就会有两位手中无花的同学相邻. 因此, 只要再进行一次分花, 至少增加一位手中持花的同学, 即至少有 7 位同学手中持有鲜花.

30 从创新构造入手

【例题求解】

例 1 $-1, a_1, a_2$ 是方程 $(x + b_1)(x + b_2) - 1 = 0$ 的两根, $\therefore (x + b_1)(x + b_2) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)$, 令 $x = -b_1$, 得 $(a_1 + b_1)(a_2 + b_1) = -1$; 令 $x = -b_2$, 得 $(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) = -1$.

例 2 5 作出 B 点关于 x 轴的对称点 $B'(2, -3)$, 连 AB' 交 x 轴于 C , 则 $AB' = AC + CB'$ 为所要求的最小值.

例 3 根据函数 $y = 5x^2 + bx + c$ 的图象和题设条件知

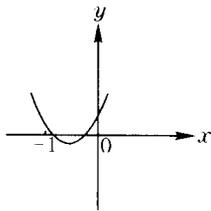
当 $x = 0$ 时, $5x^2 + bx + c > 0$, $\therefore c > 0$

当 $x = -1$ 时, $5x^2 + bx + c > 0$, $\therefore b < 5 + c$

抛物线顶点的横坐标 $-\frac{b}{2 \times 5}$ 满足 $-1 < -\frac{b}{2 \times 5} < 0$

$\therefore 0 < b < 10$

又由 $\Delta \geq 0$, 即 $100 > b^2 \geq 20c$, 得 $c < 5$, 分别就 $c = 1, 2, 3, 4, 5$, 讨论得 $b = 5, c = 1$.



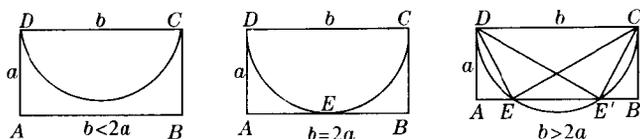
例 4 假设在 AB 边上存在点 E , 使 $\text{Rt}\triangle ADE \sim \text{Rt}\triangle BEC \sim \text{Rt}\triangle ECD$, 则 $\frac{a}{x} = \frac{b-x}{a}$, 即得 $x^2 - bx + a^2 = 0$

因为 $\Delta = b^2 - 4a^2 = (b + 2a)(b - 2a)$, 所以有

(1) 若 $b + 2a > 0, b - 2a < 0$, 则当 $b < 2a$ 时, $\Delta < 0$, 方程无解, E 点不存在;

(2) 若 $b + 2a > 0$, 当 $b = 2a$ 时, $\Delta = 0$, 方程有等根, 满足条件的 E 点有且只有一个;

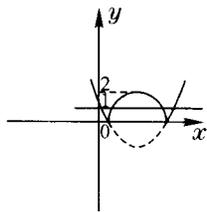
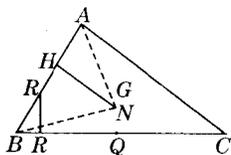
(3) 若 $b + 2a > 0, b - 2a > 0$, 则当 $b > 2a$ 时, $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的正根, 满足条件的 E 点有两个.



例 5 考虑其中一个点, 设为 A , 从 A 点连出的 5 条线段染了两种颜色, 则必有三条线段同色, 设 AB 、 AC 、 AD 同为红色, 若 BC 、 CD 、 BD 三线段中有一条红色, 则必出现三边都是红色的三角形; 若 BC 、 CD 、 BD 三线段中没有一条红色, 则这三线段均为蓝色, 这时 $\triangle BCD$ 就是一个三边都是蓝色的三角形, 因而必出现三边都是同色的三角形.

【学力训练】

- $\sqrt{2}+1$ 2. -1 参见例 1 3. 13 4. E
- $-3 \leq t \leq -\frac{1}{3}$, t 的代数式表示 $a+b$, ab , 构造一元二次方程.
- $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 99\left(\frac{1}{s}\right) + 19 = 0$, 因 $st \neq 1$, 故 $\frac{1}{s}$, t 是一元二次方程 $x^2 + 99x + 19 = 0$ 的两个不同实根, 则 $\frac{1}{s} + t = -99$, $\frac{1}{s} \cdot t = 19$, 即 $st + 1 = -99s$, $t = 19s$, 原式 $= \frac{st + 4s + 1}{t} = \frac{-99s + 4s}{19s} = -5$.
- 令 $y = x^2 + (b-c)x + a(a+b+c)$, $\therefore (a+c)(a+b+c) < 0$, $\therefore a+c$ 与 $a+b+c$ 均非零且非负. 因为当 $x = -(a+b+c)$ 时, $y = 2(a+b+c)(a+c) < 0$, 所以抛物线 $y = x^2 + (b-c)x + a(a+b+c)$ 与 x 轴有两个不同的交点.
 $\therefore \Delta = (b-c)^2 - 4a(a+b+c) > 0$, 即 $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.
- 3 个自然数 1, 2, 3, 它们中的每一个都是这 3 个数和的一个约数, 若已有 $k (\geq 3)$ 个自然数 a_1, a_2, \dots, a_k , 它们中的每个是这 k 个数和 (记为 P) 的一个约数, 则 $(k+1)$ 个自然数 a_1, a_2, \dots, a_k, P , 它们中的每一个也是这 $(k+1)$ 个自然数和一个约数, 按照这个想法, 可得 1, 2, 3 扩展到下列 10 个自然数 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 389, 它们中的每一个是它们和的一个约数.
- $\because BC > AB, BR > BP, \therefore AH = \frac{1}{2}(AB - BR) < \frac{1}{2}(BC - BP) = CQ$, 故以 A 为中心, CQ 为半径的圆必交 HN 上一点 G , 即有 $AG = CQ$, 连 BG , 因 $\angle RAC = \angle BPC = 90^\circ$, 故 P, A 都在以 RC 为直径的圆上, $\therefore BR \cdot BA = BP \cdot BC$, 而 $CQ = QP$, $AH = HR$, $\therefore (BH - AH) \cdot (BH + AH) = (BQ - CQ)(BQ + CQ)$, 即 $BH^2 - AH^2 = BQ^2 - CQ^2$.
 但 $CQ^2 = AG^2 = AH^2 + HG^2$, $\therefore BH^2 = BQ^2 - (CQ^2 - AH^2) = BQ^2 - HG^2$,
 $\therefore BG^2 = BH^2 + HG^2 = BQ^2$, $\therefore BG = BQ$.
 故 HN 上存在一点 G , 使 $AG = CQ, BG = BQ$.
- 此命题为假命题, 可构造一反例.
- 令 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$, 关于 x 的方程 $|x^2 - 2\sqrt{3}x + 1| = k$ 有四个不同的实根, 即函数 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 与函数 $y = k$ 的图象有四个不同交点, 如图作出 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 的图象, 再作出 $y = k$ 的图象, 从图象可以看出当 $0 < k < 2$ 时, 直线 $y = k$ 与 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 的图象才有四个不同交点, 也即原方程有四个不同的实根.
- 如图, 构造边长为 1 的正 $\triangle PQR$, 分别在边上取点 L, M, N , 使 $LR = y, MP = z, NQ = x$, 则 $QL = 1 - y, RM = 1 - z, PN = 1 - x$,



$$\because S_{\triangle NQL} + S_{\triangle LMR} + S_{\triangle PMN} < S_{\triangle PQR},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}(1-y) + \frac{\sqrt{3}}{4}y(1-z) + \frac{\sqrt{3}}{4}z(1-x) < \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1 \times 1.$$

$$\text{即 } x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1.$$

13. 两数差为 177 的数必成对出现: (1, 178), (2, 179), (3, 180) …, (177, 354), 从 1, 2, …, 354 中任取 178 个数, 即是从这 177 个数组(抽屉)中任取 178 个数, 由抽屉原理有, 必有两数同数组(抽屉), 这两数之差恰为 177.

14. 令 $f(t) = (t-a)^2 + (t-b)^2 + (t-c)^2 + (t-d)^2$, 则 $f(t) = 4t^2 - 2(a+b+c+d)t + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 0$, 即 $f(t) = 4t^2 - 2(8-e)t + (16-e^2) \geq 0$,

$$\because t^2 \text{ 的系数 } 4 > 0 \quad \therefore \Delta = 4(8-e)^2 - 16(16-e^2) \leq 0, \text{ 解得 } 0 \leq e \leq \frac{16}{5}, \text{ 故 } e_{\max} = \frac{16}{5}.$$

15. (1) 以 CD 为直径作半圆交 MN 于点 P , 即为所求.

(2) 设 P 到 BC 的距离 $PN = x$,

$$\text{则 } CD^2 = PD^2 + PC^2 = (MD^2 + MP^2) + (PN^2 + NC^2) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h-x)^2 + x^2 +$$

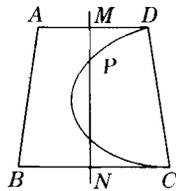
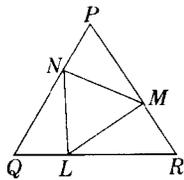
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{又 } CD^2 = MN^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h-x)^2 + x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad *$$

$$\text{整理得 } 4x^2 - 4hx + ab = 0, \text{ 解得 } PM = x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{2}.$$

- (3) 求作 P 点的作图是否可以实现, 显然取决于方程 * 是否有实数根, 即取决于 $\Delta = 16(h^2 - ab)$

当 $h^2 > ab, \Delta > 0$, 即可以作出两点, 当 $h^2 = ab, \Delta = 0$, 即可以作出一点; 当 $h^2 < ab, \Delta < 0$, 即作图不能实现.



云中漫步

——迷人的数学

认识黄东坡老师是参加湖北省教育厅组织的一次选派优秀教师赴西藏参加“西藏山南地区教学研讨日”活动。

时隔几年,当时参加示范讲课的6位老师(湖北4名、西藏2名),课堂上热烈动人的场景仍历历在目,他们几位老师堪称优秀。我离开课堂十多年也为中国教育发展到今天感到吃惊,整个的新教育方法从他们的身上就体现出来,不再是填鸭式的灌输和死记硬背公式。比如黄老师当时讲课运用日本 PLUS 公司的数码投影机来播放他制作的全等三角形课件,当讲到完全重合时,投影屏幕上同时出现了两个运动着并重合到一起的一模一样的可爱的小狗,三百多人的大课堂爆发一阵开心的大笑,大家当时的想法恐怕也与我一样,数学竟也如此有趣!然后黄老师又引导学生举出尽可能多的全等形,课堂气氛十分活跃。

好了,不说课堂了,还是来说说我们的黄老师吧。

从西藏回来后,我与湖北同去的几位老师都成了好朋友,大家经常一起坐坐,聊聊天。于是我们知道黄老师居然堪称“著作等身”(一家长言),写了十几本书,其中的《初中数学一题多解》一书,获得1998年湖北省“优秀畅销书奖”,《数学培优竞赛新帮手》被评为“2001年湖北最有影响的10本书”,更有一位儒雅的书商说:“书上只要署上黄老师的名,我卖起来就没有问题”,他的话令我们对黄老师不得不刮目相看了。许多书商、出版社都慕名来找他,恨不得出钱让他同意在自己组稿的书上署上他的名,他拒绝得很干脆:“我要对读者负责,我署名的就一定是精品,才对得起这么多关心我的读者。著书,是我对数学、数学教育的一点感悟的激情表达,对教学的总结,对学生学习过程的优化设计。”书是一座桥,联系着作者与教师、学生、家长,有时候读到许多读者给他写的信,我们都为读者们感到快乐,有这样一位勤勉和智慧的数学教育工作者在为你们笔耕不辍,伴随你们的学习和成长,堪称幸事啊。

作为朋友,我对他的评价:敬业勤奋的黄老师,一个数学的狂人,一个不谙世事的人,一个博爱善良心计无多的人。希望有更多的朋友理解和支持他,一起为更多更好的新书可以交到读者的手中而帮助他。

我想,如果让我来为这本充满人文气息的初中数学新著取名的话,我会用“云中漫步”这样的字眼,一个遨游在数学世界的人,沉醉在数学推理、逻辑演绎的状态,是不是很像在云中漫步,那般洒脱、那般轻灵。他说,只有在他热爱的数学中他才会找到灵感,数学教育是“把火热的思考化为冰冷的美丽”,数学这个学科亦是如此迷人啊!

魏 红

2002年6月于武昌

[General Information]

书名=数学培优竞赛新方法 初三年级

作者=黄东坡著

页数=221

SS号=10855880

出版日期=2002年07月第1版

封面页

书名页

版权页

前言页

目录页

代数篇

- 1 追问求根公式
- 2 判别式——二次方程的根的检测器
- 3 充满活力的韦达定理
- 4 明快简捷——构造方程的妙用
- 5 一元二次方程的整数解
- 6 转化——可化为一元二次方程的方程
- 7 化归——解方程组的基本思想
- 8 由常量数学到变量数学
- 9 坐标平面上的直线
- 10 抛物线
- 11 双曲线
- 12 方程与函数
- 13 怎样求最值
- 14 图表信息问题
- 15 统计的思想方法

几何篇

- 16 锐角三角函数
- 17 解直角三角形
- 18 圆的基本性质
- 19 转化灵活的圆中角
- 20 直线与圆
- 21 从三角形的内切圆谈起
- 22 圆幂定理
- 23 圆与圆
- 24 几何的定值与最值

综合篇

- 25 简单的数学建模
- 26 开放性问题评说
- 27 动态几何问题透视
- 28 避免漏解的奥秘
- 29 由正难则反切入
- 30 从创新构造入手

参考答案

附录页