

前 言

近年来,在国际数学奥林匹克竞赛(IMO)中,我国选手频频取得优异成绩,在国内外产生了极大反响。国际数学奥林匹克竞赛吸引着越来越多的师生参与,全国各种层次的数学竞赛活动空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要,我们编写了这套初中数学竞赛培优教程丛书,包括基础知识、专题讲座和全真模拟三个分册。

本套丛书就是为了提高学生数学能力,为学生适应初中数学奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助读物。其主要优点:一是“竞赛”,二是“同步”。所谓“竞赛”是指在内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性,并特别注重创新能力的培养;所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度基本一致,使用时可灵活取舍其中的内容,也可提前或错后讲解使用。

本丛书博采众长,独具匠心,有的放矢,注重实效,值得学生认真读,认真用,认真练。

考试和竞赛命题的核心是理解和驾驭知识的能力。近年来,加强理解和驾驭知识能力的考查,正是中考、高考、竞赛命题展示给人们的一条清晰的思路。本丛书则把这条思路具体化为一条清晰的分析训练思路,这样的编写指导思想是产生精品的保障。

仔细品味,这套丛书还具有以下几个突出的特点:

第一、知识体例新

首先是赛题目标和知识编排新,本丛书以最新教改精神为依据,以现行初中新课标为蓝本编写;其次是对赛题体例编排新,紧扣教材和初中数学竞赛大纲,步步推进、设题解题、释疑解难、迁移延伸、逐层深入;其三是题型(材料)新,书中选用题型(材料)都是按中考、竞赛要求精心设计的,令读者耳目一新。

第二、解题方法细

首先是对赛题讲解细致入微;其次是重点、难点详细讲析,既有解题过程又有思路点拨;再次是解题方法细,一题多解,多题一法变通训练,总结规律;最后从基本知识入手,能力训练序列化。

第三、内容讲解精

首先是对竞赛内容讲解精,真正体现围绕重点,突破难点,引发思考,启迪思维,根据赛点要求,巧设问题,精讲精练,使学生举一反三,触类旁通;其次是练习配置精,注重典型性,避免随意性,注重迁移性,避免孤立性,实现由知识到能力的过渡。

第四、大纲研究透

首先是对竞赛大纲研究透彻,居高临下把握知识,立足于教材,又不拘泥于教材;其次是对学生知识储备研究得透,学习目标科学可行,注重知识“点”与“面”的联系,“教”与“学”的联系;再次是对问题讲解透彻,一题多问,一题多解,培养求异思维和创新思维能力。

第五、课外知识全

首先是知识分布全面,真正体现了“一套在手,学习内容全有”的编写指导思想;其次是本丛书的信息量大,涵盖了初中数学课程全部内容和教与学的全部过程,内容丰富,题量充足,融入各种新颖题型,补充了各类具有知识性和人文性的课外知识;再次是适用对象全面,着眼于全国重点、普通中学的所有初中学生,内容由浅入深,由易到难。

只有适合的,才是最好的,您的关注是我们的期盼,您的满意是我们的欣慰。尽管我们在成书过程中,本着近乎苛刻的态度,题题推敲,层层把关,力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华,但丛书中也难免有疏忽和纰漏之处。检验本丛书质量的惟一标准是广大师生使用本丛书的实践,作为教研领域的最新成果,我们期盼它的社会效益,也诚挚地希望广大师生的批评指正。

数学竞赛虽然有一定难度,但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的,也许本丛书会为你摘取金牌作好铺垫。让我们共同努力,在数学的奇妙天地中去体味数学,学习数学,开垦数学。

本书由全国数学奥林匹克竞赛总领队李胜宏教授和金牌教练马茂年主编。



目 录

一、丰富的图形世界	(1)
二、图形的拼拼与凑凑	(10)
三、有理数及其运算	(17)
四、一元一次方程	(23)
五、二元一次方程组	(30)
六、线段、角的有关计算	(37)
七、相交线、平行线	(44)
八、整式的运算	(51)
九、因式分解	(57)
十、分式	(63)
十一、全等三角形	(70)
十二、等腰三角形	(78)
十三、勾股定理与直角三角形	(86)
十四、实数	(93)
十五、一元二次方程	(99)
十六、分式方程	(107)
十七、一元一次不等式	(115)
十八、四边形及特殊四边形	(121)
十九、三角形、梯形的中位线	(131)
二十、圆的基本性质	(139)
二十一、圆柱、圆锥、圆台	(148)
二十二、正、反比例函数与一次函数	(154)
二十三、统计和概率	(162)
二十四、二次根式	(170)
二十五、二次方程	(177)
二十六、二次函数	(185)
二十七、相似三角形	(195)



二十八、解直角三角形	(205)
二十九、直线与圆的位置关系	(214)
三十、圆与圆的位置关系	(224)
附录 参考答案	(234)



一、丰富的图形世界



【赛点目标】

1. 了解和掌握几何概念,抓住定义中的关键词语,确切地理解几何概念的本质属性.
2. 掌握概念之间的区别与联系,注意把概念的文字语言、符号语言和图形有机地结合起来,全方位地掌握几何概念.
3. 掌握识图和画图的基本技能,能用几何语言准确、简练地表述.
4. 认识几何图形的研究对象及研究方法,从对数、式的运算逐步转变到用逻辑推理的方法对几何图形的性质进行论证.
5. 了解几何图形的展开与折叠,以及从不同方向看几何图形.



【方法述要】

1. 掌握求线段的总条数的方法.
2. 掌握求三角形的总个数的方法.
3. 掌握求正方形的总个数的方法.
4. 掌握求一些特殊图形的总个数的方法.
5. 掌握立体图形的视图方法,以及展开和折叠.



【赛题精讲】

例 1 数出下图1-1中线段的总条数.

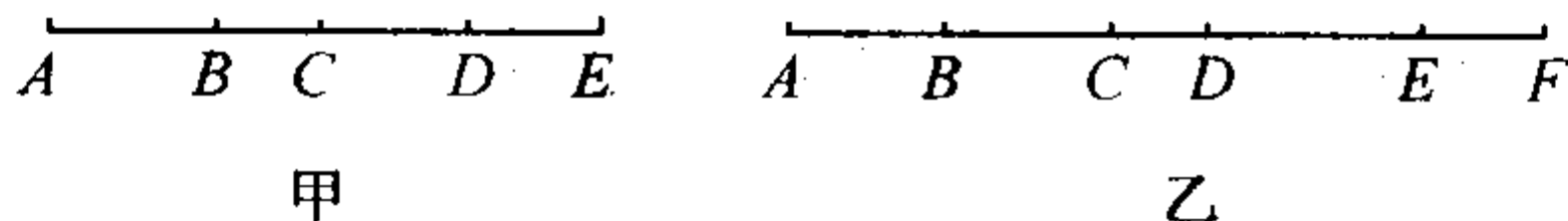


图 1-1

解 图甲中的线段上共有 4 条基本线段 AB, BC, CD, DE ;
 由两条基本线段组成的线段有 3 条: AC, BD, CE ;
 由三条基本线段组成的线段有 2 条: AD, BE ;
 由四条基本线段组成的线段有 1 条: AE .

所以,图甲中线段的总条数是 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

用同样的方法,我们可以求得图乙中线段的总条数是



$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$$

说明 从上面的例子,不难发现,线段的总条数与线段上的点数有关,正好等于从1开始的几个连续自然数的和,最后一个加数是线段上总点数减1.如果线段上的点数是 n ,那么线段的总条数是 $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)$.

我们利用公式 $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (n 是自然数),求前 n 个自然数的和,令 $n = 1, 2, 3, \cdots, n$,则

$$2^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$$

$$3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$$

$$4^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$$

$$5^2 = 4^2 + 2 \times 4 + 1$$

.....

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

以上各式左右分别相加可得 $(n+1)^2 = 1 + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) + n$.

所以 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

显然 $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

例2 数出下图1-2中三角形的总个数.

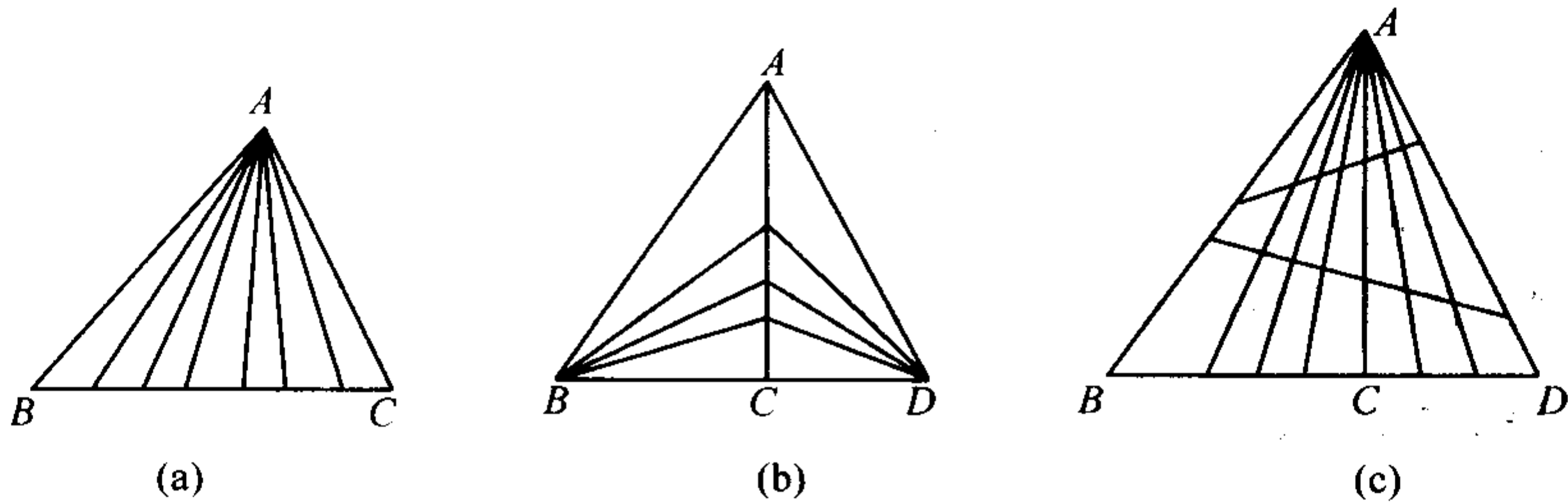


图 1-2

解 数三角形的总个数的规律与数线段方法类似,如图 1-2(a),三角形的总个数为 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 7 = \frac{7(7+1)}{2} = 28$.

图 1-2(b)是一个复合图形,可采用分类的方法去数:

先看在 $\triangle ABC$ 中三角形的个数,应为 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 个,显然在 $\triangle ACD$ 中也应有10个三角形.另外,以 BD 为底边的三角形有4个.因此共有 $10 + 10 + 4 = 24$ 个三角形.

请读者数出图 1-2(c)中三角形的个数.

例3 数出下图1-3中正方形的总个数.

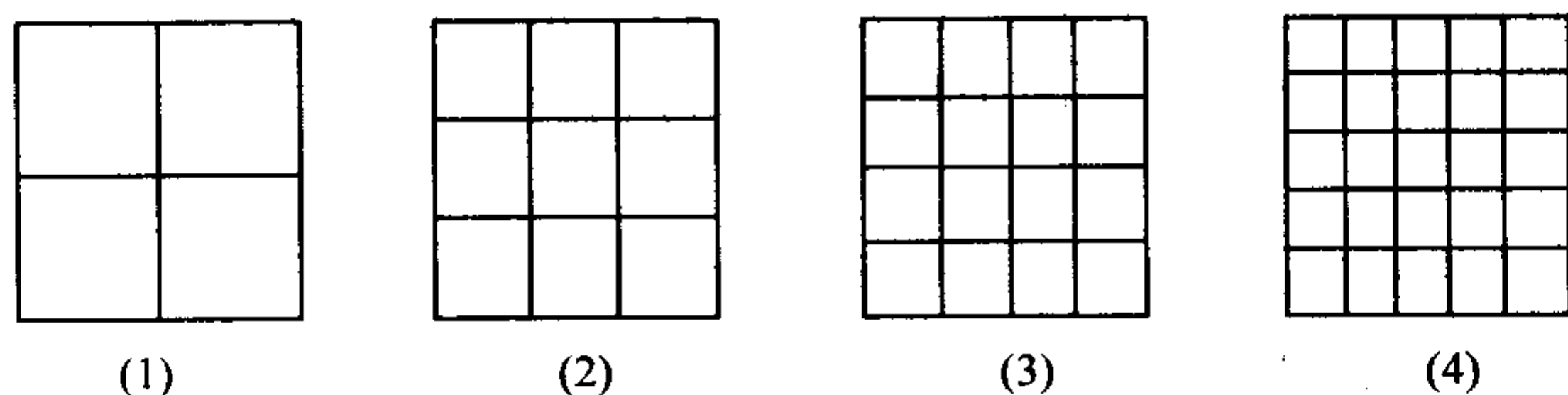


图 1-3

解 为方便起见,假设每个小方格的边长为 1 个单位,并称为基本线段.

在(1)中,每边有两条基本线段,所以长为 1 个长度单位的正方形有 $2 \times 2 = 4$ (个),边长为 2 个长度单位的正方形有 $1 \times 1 = 1$ (个),即 $1 \times 1 + 2 \times 2 = 1^2 + 2^2 = 5$ (个).

在(2)中,每边有 3 条基本线段,有 2 条 2 个长度单位的线段,有 1 条 3 个长度单位的线段,所以边长为 1 个长度单位的正方形有 $3 \times 3 = 9$ (个),边长为 2 个长度单位的正方形有 $2 \times 2 = 4$ (个),边长为 3 个长度单位的正方形有 $1 \times 1 = 1$ (个),即 $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ (个).

在(3)中, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ (个).

在(4)中, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ (个).

说明 如果一个正方形各边上都有 n 个相等的小格,那么正方形总数为 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$.

我们利用乘法公式 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ 来计算前 n 个自然数的平方和,令 $n = 1, 2, 3, \cdots, n$, 则

$$2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

$$5^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$$

.....

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

以上各式分别左右相加可得

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n,$$

$$\text{所以 } (n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

$$\text{因此 } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

例 4 图1-4所示,平面上有 16 个点,在每个点上钉上钉子,如以这些钉子为顶点,用线把它们围起来,你能围出几个正方形?

解 这个问题与前面数正方形个数是不同的.这个问题的正方形的边不是先画好



的,而是要我们自己去定.我们知道,正方形是四个角都是直角,四条边都相等的四边形.所以,只要四个顶点选得好,就可用线围出一个正方形来.

很明显,我们能围出 14 个图 1-5 甲那样的正向的正方形.

除此以外,我们还能围出如图 1-5 乙和图 1-5 丙所示的斜向正方形来,但不能围出更小或更大的斜向正方形.

图 1-5 乙中所示的斜向正方形有 4 个;

图 1-5 丙中所示的斜向正方形有 2 个.

即可围出 $4 + 2$ 个斜向正方形,因此,在图 1-4 中共可围出 $14 + 6 = 20$ 个正方形.

图 1-4

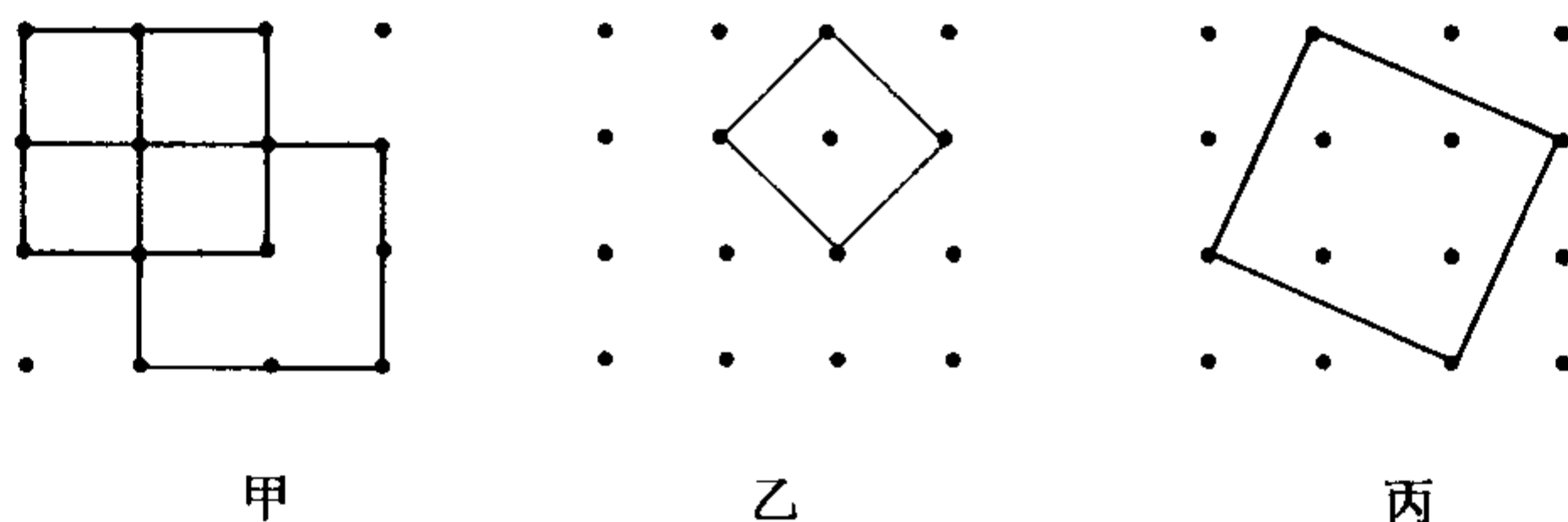


图 1-5

说明 我们可以知道,有以下结果.

顶 点 数	2×2	3×3	4×4	5×5
正向正方形	1	5	14	30
斜向正方形	0	1	6	20
正方形总数	1	6	20	50

细心的同学不难从表中发现如下规律,对于 $n \times n$ 个顶点,可作出斜向正方形的个数恰好等于 $(n-1) \times (n-1)$ 个顶点时的正方形总数.

一般地,对于 $n \times n$ 个顶点可围出多少个正方形的问题,我们可以分别计算出正方形和斜向正方形的个数,再求其总和.

例 5 请数出图 1-6 所示的正五边形 $ABCDE$ 中三角形的个数.

解 在正五边形 $ABCDE$ 中,根据三角形的形状和大小可分如下六类:

如 $\triangle ABE$ 的有 5 个;

如 $\triangle ABP$ 的有 10 个;

如 $\triangle ABF$ 的有 5 个;

如 $\triangle AFP$ 的有 5 个;

如 $\triangle ACD$ 的有 5 个;

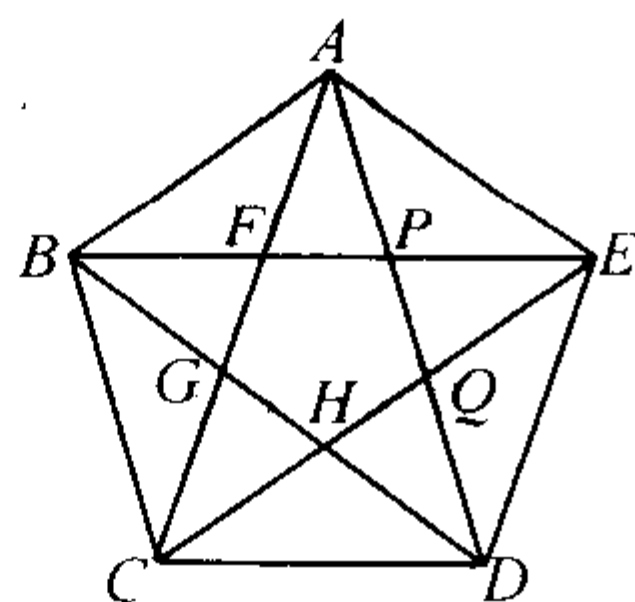


图 1-6



如 $\triangle AGD$ 的有5个.

所以,图中共有35个三角形.

数几何图形的个数,关键是不要遗漏,也不要重数.

例6 在三个圆 A, B, C 中分别有13,17,18个点,同时在圆 A 和 B 中有4个点,同时在圆 A 和 C 中有7个点,同时在圆 B 和 C 中有5个点,同时在三个圆中有2个点.你能回答在三个圆中共有几个点吗?

解 要正确回答这个问题,必须注意那些同时在两个圆和同时三个圆中的点.

如图1-7,如果把 A, B, C 三圆内的点数相加,那么,同时在两圆内的点数重复计算了一次,应当减去,但减去后,同时在三圆的那些点数又被多减了一次,应加回去.因此,例6的解法应该是:

点的总数 = A 中的点数 + B 中的点数 + C 中的点数 - 同时在 A 和 B 中的点数 - 同时在 A 和 C 中的点数 - 同时在 B 和 C 中的点数 + 同时在三个圆中的点数

$$= 13 + 17 + 18 - 4 - 7 - 5 + 2 = 34(\text{个}).$$

说明 这种方法叫做“容斥原理”,这也是几何计数时常用的一种方法,它也常常被应用在求几何图形的面积.

例7 如图1-8所示,哪些图形经过折叠可以围成一个棱柱? 先想一想,再折一折.

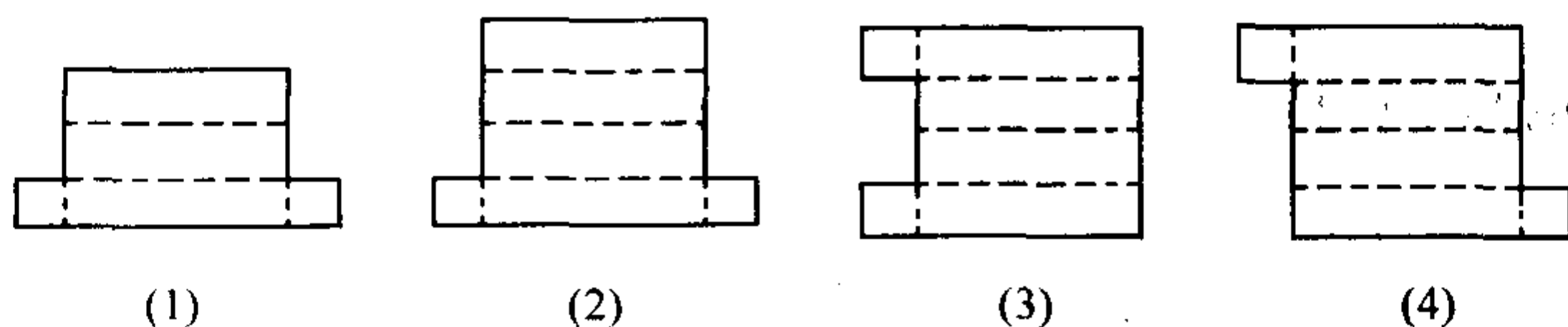


图1-8

分析 先想一想,是对学生空间想像能力的更高要求.但也不能忽视折一折的作用,它可以作为验证想像或辅助发现结论的方法.

解 (2)、(4)可以围成一个棱柱.

说明 先想像一下,再动手操作,再回想一下操作的过程,是培养学生空间观念的重要环节.

例8 圆周上6点中的任意3点为顶点连成三角形,问一共可以连成几个不同的三角形.

解 如图1-9所示,一共可连成的三角形有 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ABE, \triangle ABF, \triangle ACD, \triangle ACE, \triangle ACF, \triangle ADE, \triangle ADF, \triangle AEF, \triangle BCD, \triangle BCE, \triangle BCF, \triangle BDE, \triangle BDF, \triangle BEF, \triangle CDE, \triangle CDF, \triangle CEF, \triangle DEF$.



所以共有 20 个不同的三角形.

例 9 一块 2×2 的方格由 1×1 的方格构成, 每个小方格涂上红、绿两种颜色之一, 如果要求绿色方格的上方和右方不能与红色方格邻接, 且上述四个小方格可以全部不涂绿色, 也可全部涂上绿色, 则可能的涂色方法有几种.

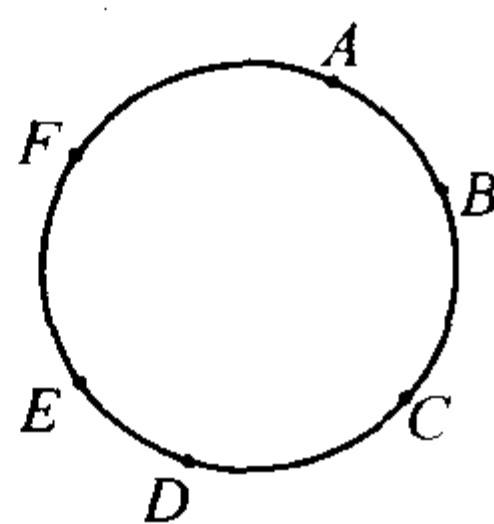


图 1-9

解 如果某方格被涂上绿色, 那么, 它的上方和右方方格也只能涂上绿色, 因此, 符合题目要求的涂色方法有:

- (1) $\begin{bmatrix} \text{红} & \text{红} \\ \text{绿} & \text{绿} \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} \text{红} & \text{绿} \\ \text{红} & \text{红} \end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix} \text{红} & \text{绿} \\ \text{红} & \text{绿} \end{bmatrix}$;
 (4) $\begin{bmatrix} \text{绿} & \text{绿} \\ \text{红} & \text{红} \end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix} \text{绿} & \text{绿} \\ \text{红} & \text{绿} \end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix} \text{绿} & \text{绿} \\ \text{绿} & \text{绿} \end{bmatrix}$.

所以, 共有 6 种涂色方法.

说明 这里用到的方法叫枚举法. 枚举法是最简单、最原始的一种计数方法, 在计算时要求把计数的所有对象一一列举出来, 以求得总数, 在计数时要做到准确, 即不重复, 又不遗漏.

例 10 数出图 1-10 中长方体 (包括正方体) 的个数.

解 长方体的长 AB 棱上共有线段: $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ 条.

长方体的宽 BC 棱上共有线段: $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ 条.

而长方体的高 BD 棱上共有线段: $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 条.

$15 \times 3 \times 6 = 270$ 个.

因此, 图中共有长方体 270 个.

例 11 如图 1-11, 一只甲虫从 A 点出发, 沿图中线段爬到 F 点, 如果爬行时, 同一个点或同一条线段只能经过一次, 那么这只甲虫最多有多少种不同的爬行方法?

解 从 A 点出发, 有三条路可走: AB , AE , AD . 因此, 可以分成三类计算不同的爬法数:

沿 AB 出发: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$, 共有 3 种爬法;
 $C \rightarrow F$

沿 AE 出发: $A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F$, 共有 3 种爬法;
 $C \rightarrow F$

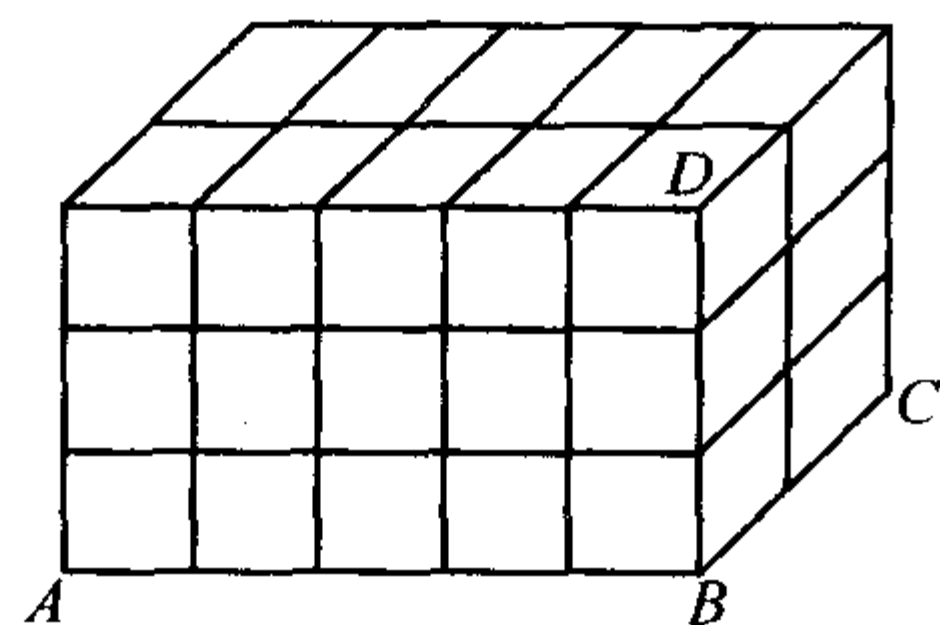


图 1-10

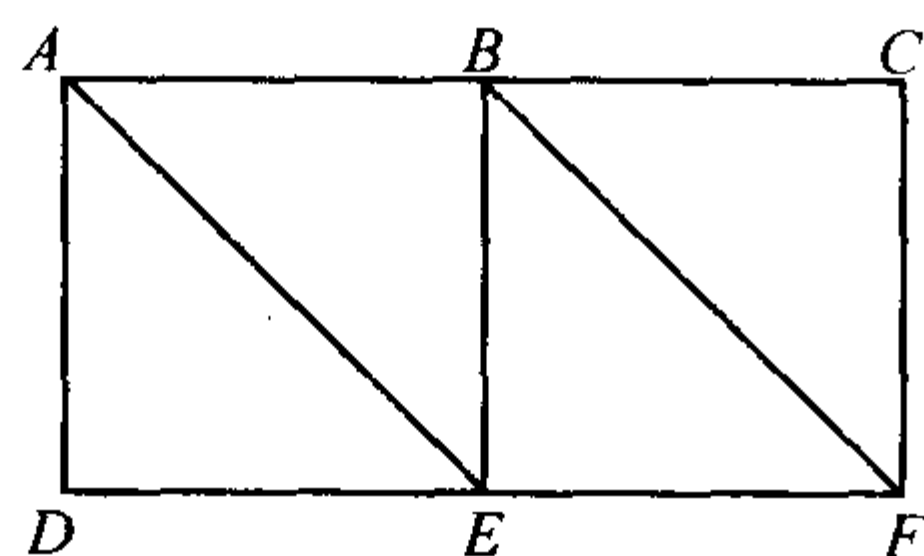


图 1-11



沿 AD 出发: $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F$, 共有 3 种爬法.
 $C \rightarrow F$

所以, 最多有 9 种不同的爬法.

说明 本例中所用的图叫树形图, 运用这种方法, 形象直观, 有条理, 不易重复或遗漏, 使人一目了然.

例 12 如图 1-12(a), 将 8 个相同的正方形, 重叠拼合在一起 (要求 8 个正方形各有一对角线重合在一直线上), 问能否使出现的正方形总数超过 100 个?

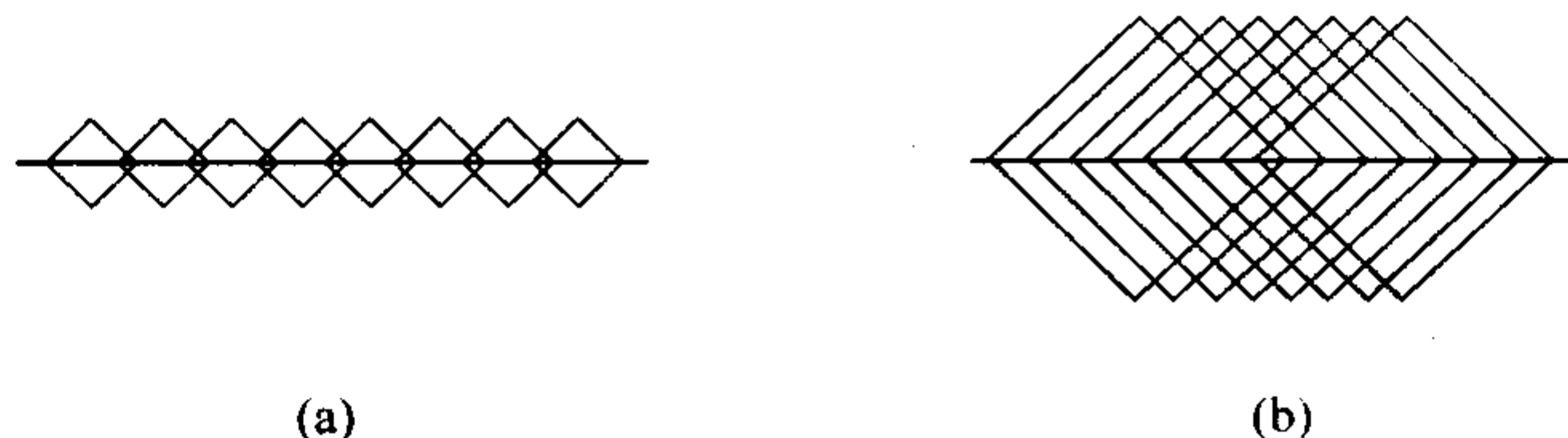


图 1-12

解 如图 1-12(b) 所示, 把 7 个正方形左侧的一个顶点摆在第一个正方形对角线八等分点上, 且不妨设该正方形对角线的长为 1.

(1) 上下两方的正方形:

以 $\frac{1}{8}$ 为边长的有 $(1+2+3+4+5+6) \times 2 = 42$ 个;

以 $\frac{2}{8}$ 为边长的有 $(1+2+3+4) \times 2 = 20$ 个;

以 $\frac{3}{8}$ 为边长的有 $(1+2) \times 2 = 6$ (个);

(2) 对角线位于同一直线上的正方形:

以 $\frac{1}{8}$ 为边长的有 1 个; 以 $\frac{2}{8}$ 为边长的有 2 个; 以 $\frac{3}{8}$ 为边长的有 3 个; 以 $\frac{4}{8}$ 为边长的有 4 个; 以 $\frac{5}{8}$ 为边长的有 5 个; 以 $\frac{6}{8}$ 为边长的有 6 个; 以 $\frac{7}{8}$ 为边长的有 7 个; 以 1 为边长的有 8 个;

综合 (1), (2) 图中共有正方形

$42 + 20 + 6 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 104$ 个超过 100 个, 故满足题设要求的正方形超过 100 个.



【能力训练】

1. 下列图形中经折叠后可以变为一个棱柱的有 ()

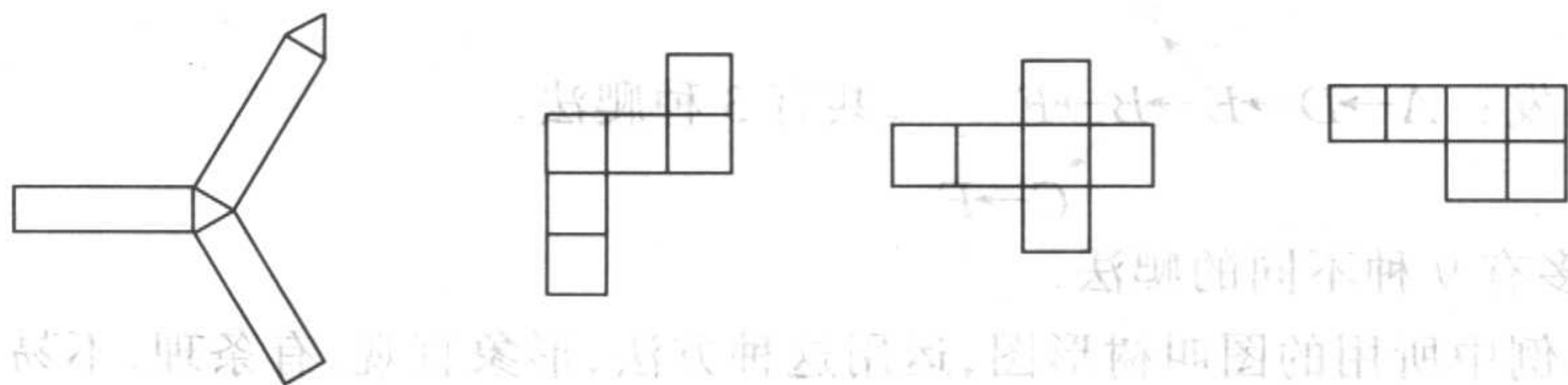
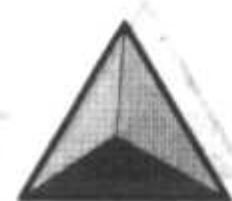


图 1-13

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 如图 1-14 所示的立方体, 如果把它展开, 可以是下列图形中的()

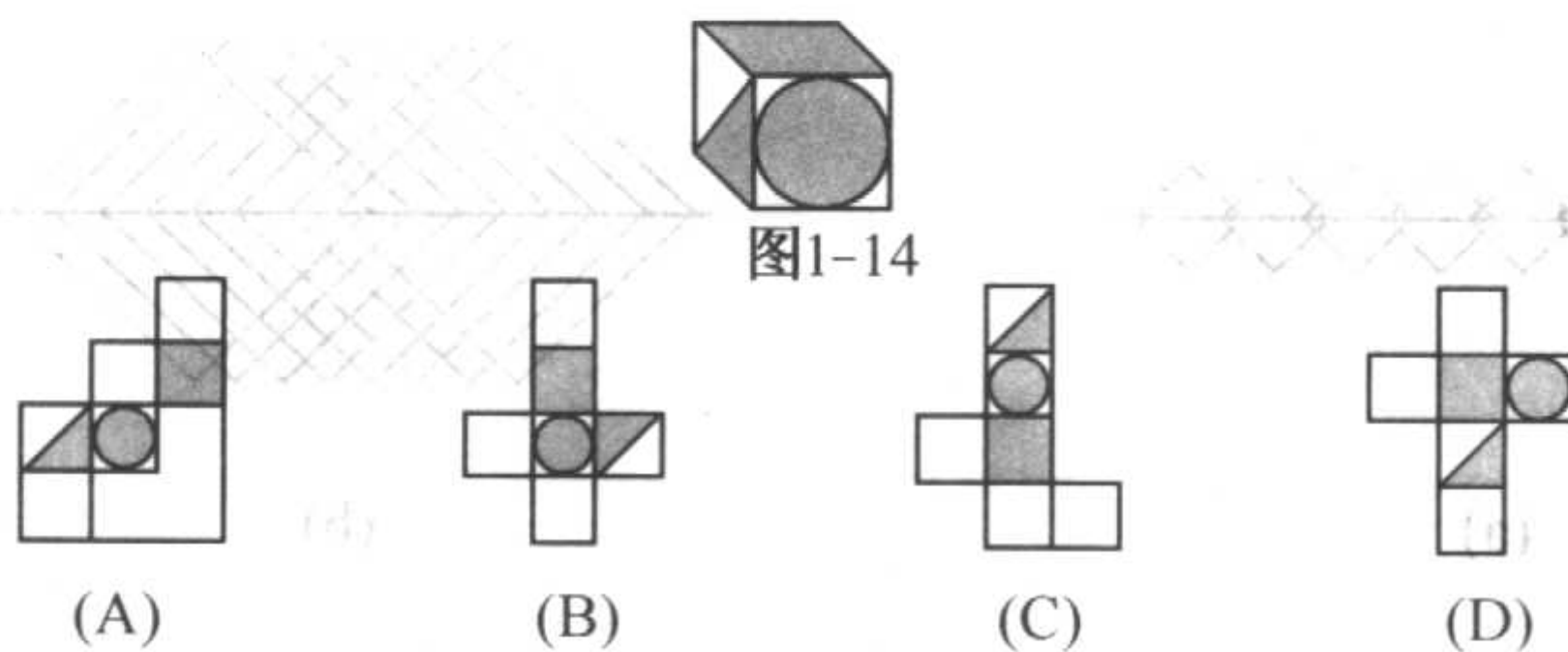


图 1-14

3. 图 1-15 中有多少个立方体?

4. 图 1-16 是由小立方块搭成的几何体的俯视图, 小正方形的数字表示在该位置的小立方块的个数, 再根据左视图所提供的信息, 确定 x 和 y 的值, 并画出主视图.

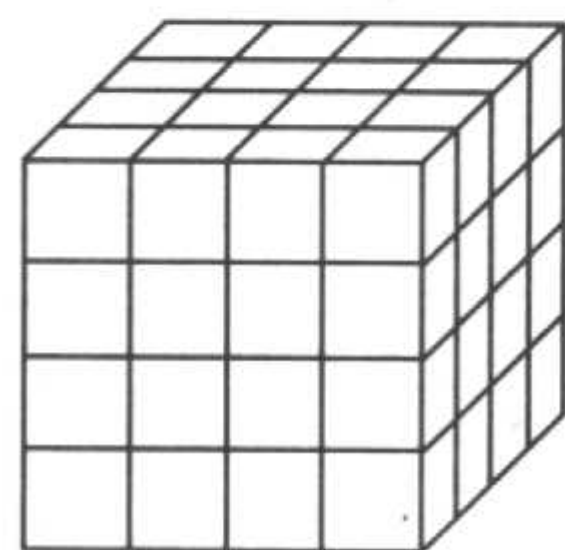
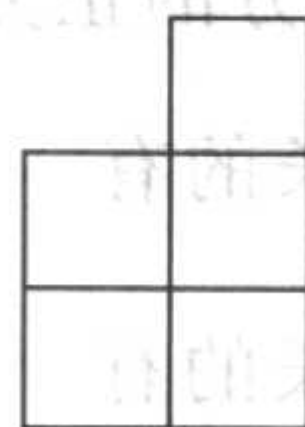


图 1-15

x	2	
1	y	2

俯视图



左视图

图 1-16

5. 在正方形方格纸上有 20 个点, 其分布如图 1-17 所示, 现用 4 个点作为正方形的 4 个顶点, 这样共可作出多少个正方形?

6. A, B, C 三个正方形纸片放在桌子, 共占面积 48 平方厘米, 已知 A 的面积为 25 平方厘米, B 的面积为 15 平方厘米, C 的面积为 30 平方厘米, A 与 B, B 与 C, C 与 A 的公共部分的面积分别为 8, 6, 10 平方厘米, 求 A, B, C 公共部分的面积.

图 1-17

7. 有 9 个小块堆成如图 1-18 所示的样子, 这个堆的表面包含小方块表面的数目有几个?

8. 图 1-19 中一共能数出几个长方形(正方形也算长方形).

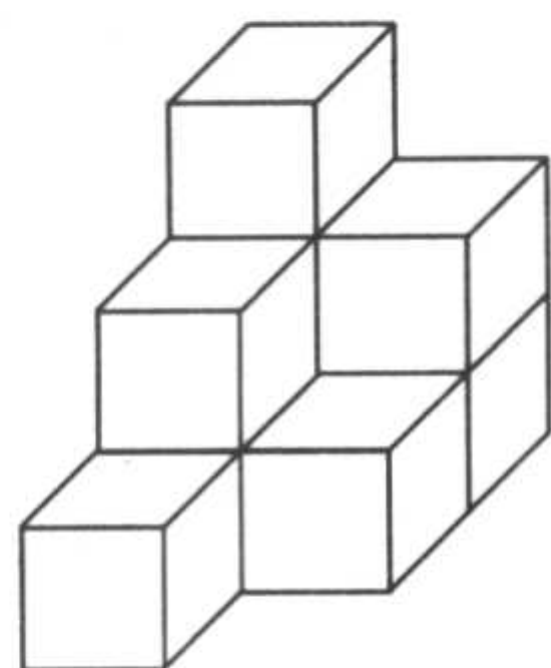


图 1-18

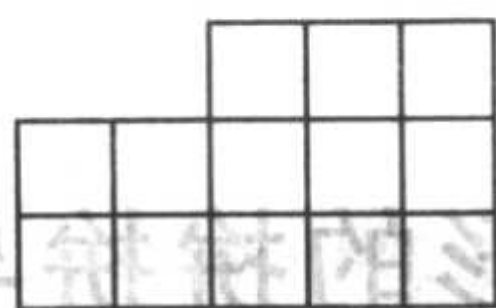


图 1-19

【科目点赛】

9. 如图 1-20 是一个立方块所搭几何体的俯视图, 正方形中的数字表示在该位置小立方块的个数, 请你画出它的正视图和左视图.

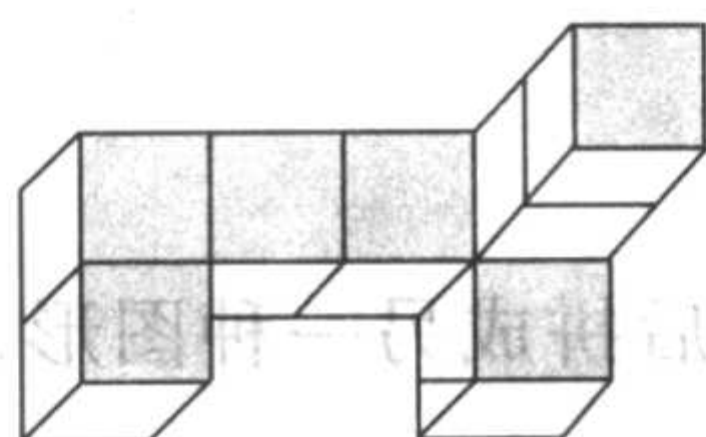


图 1-20

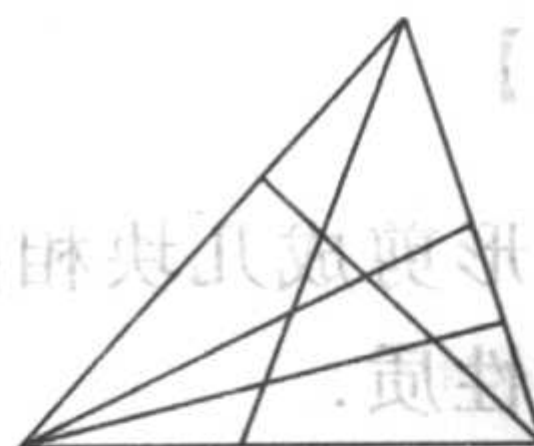
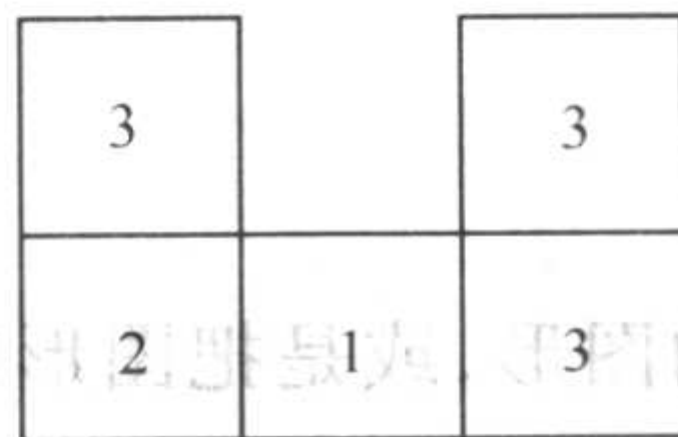


图 1-21

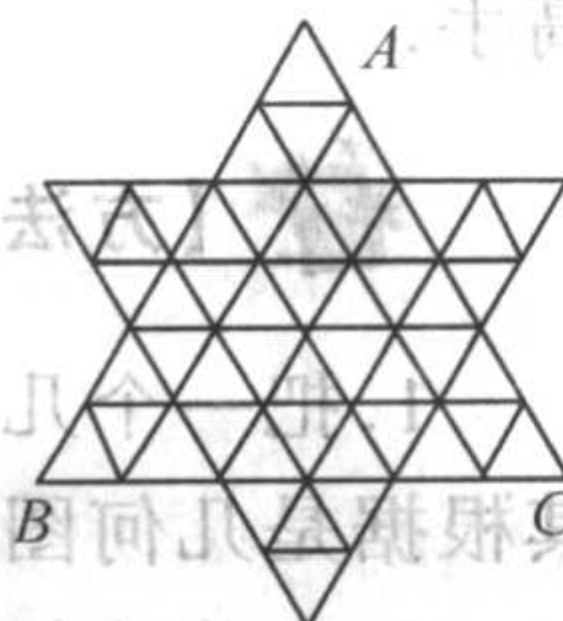


图 1-22

10. 图 1-22 中共有多少个三角形?

11. (1) 图 1-23 中 8 条直线最多能把平面分成多少部分?

(2) 图 1-24 中平面上 5 个圆最多能把平面分成多少个部分?

12. 如图 1-25 中从 A 到 B (往东, 北或东北三种方向) 有几条不同路径 (阴影部分不能进入).

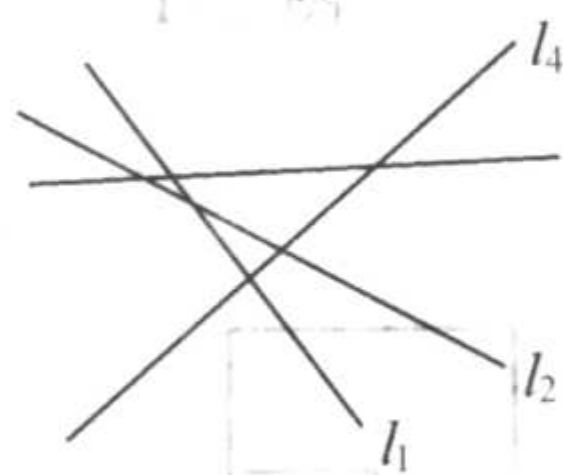


图 1-23

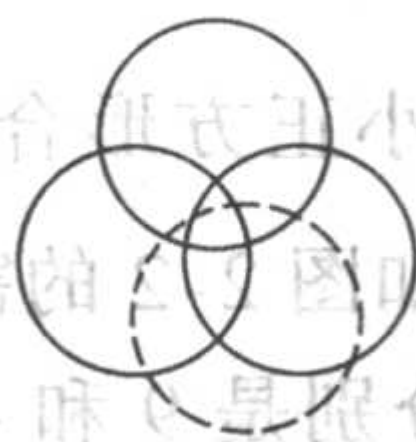


图 1-24

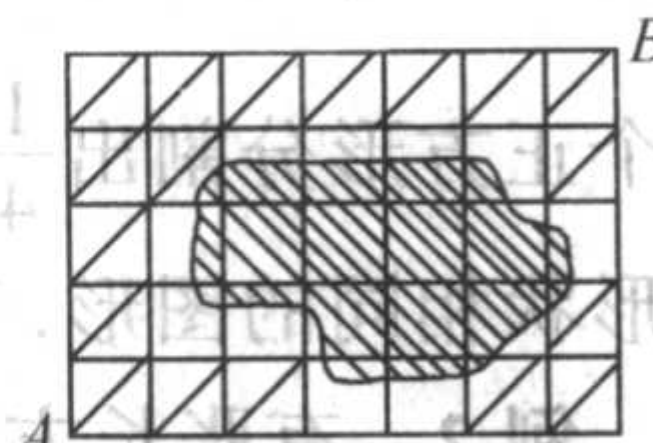


图 1-25



二、图形的拼拼与凑凑



【赛点目标】

1. 拼图游戏历史悠久,它可以拼成各种各样的有趣几何图形,例如大家熟悉的七巧板.
2. 图形中拼拼凑凑,画画做做有着广泛的应用,例如裁缝师傅便是这种拼拼凑凑的高手.



【方法述要】

1. 把一个几何图形剪成几块相同形状的图形,或是把图形剪开后拼成另一种图形.其根据是几何图形的性质.
2. 有些几何问题,看上去似乎很复杂,如果我们动手去做一做,用笔去画一画,发现并不困难.几何图形问题需要我们去动手操作.



【赛题精讲】

例 1 图2-1所示是由三个正方形组成的图形,请把它们分成四个形状、大小都相同的图形.

解 可以先不考虑形状,而考虑面积,要把三个正方形“分”成四个面积相等的部分,每部分面积应是正方形的面积的 $\frac{3}{4}$,这就需要将每个正方形分割出 $\frac{1}{4}$ 来,再把三个 $\frac{1}{4}$ 小正方形合成一个与 $\frac{3}{4}$ 个正方形形状相同的图形.于是我们就有了如图2-2的割法.

例 2 有张长方形纸片,长和宽分别是9和4厘米,请将它剪成两个形状、大小都相同的部分,并拼成一个正方形.

解 已知长方形的面积为 $9 \times 4 = 36$ (平方厘米),所以正方形的边长为6厘米,因此可以把长方形上半部剪下6厘米下半部剪下3厘米,分成相等的两块,合起来正好拼成边长为6厘米的正方形,如图2-3.

说明 我们看到,要正确地剪、拼,除了注意图形的特点外,还要根据已知条件去计算、去分析.

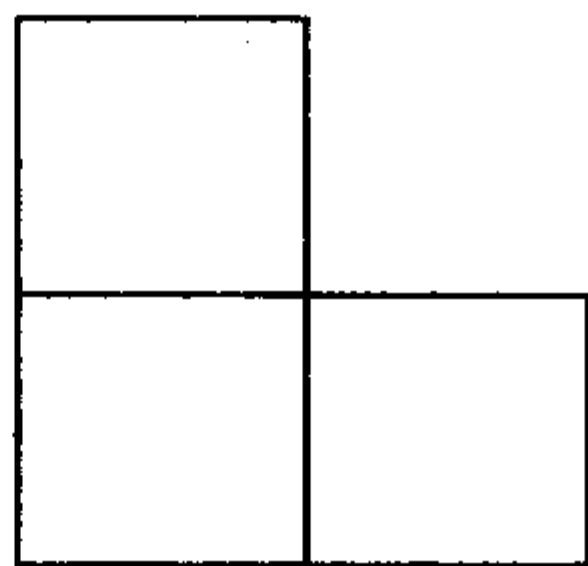


图 2-1

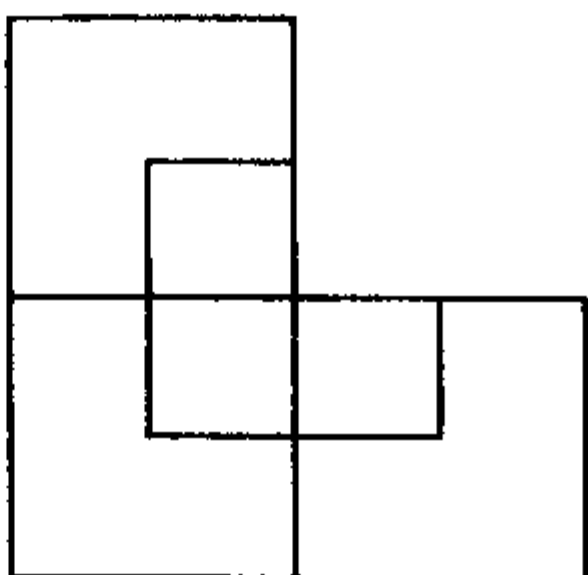


图 2-2



例 3 把一张正方形纸片分成8块,再把它们拼成一个正方形和一个长方形,并使这个正方形和长方形的面积相等.

解 先考虑要拼成小正方形和长方形应出现 8 个直角,再考虑这两个图形面积相等.

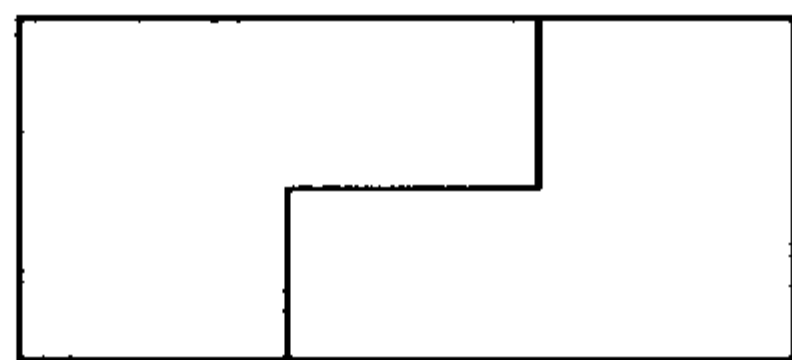


图 2-3

合成一个正方形和长方形,要利用原有的直角或等腰直角三角形.由于已知是正方形,所以可连对角线得到 4 个等腰直角三角形,按照这个想法再把对角线四等分,连分点把大三角形分为 4 个小的直角三角形和 4 个梯形,共 8 块,如图 2-4.

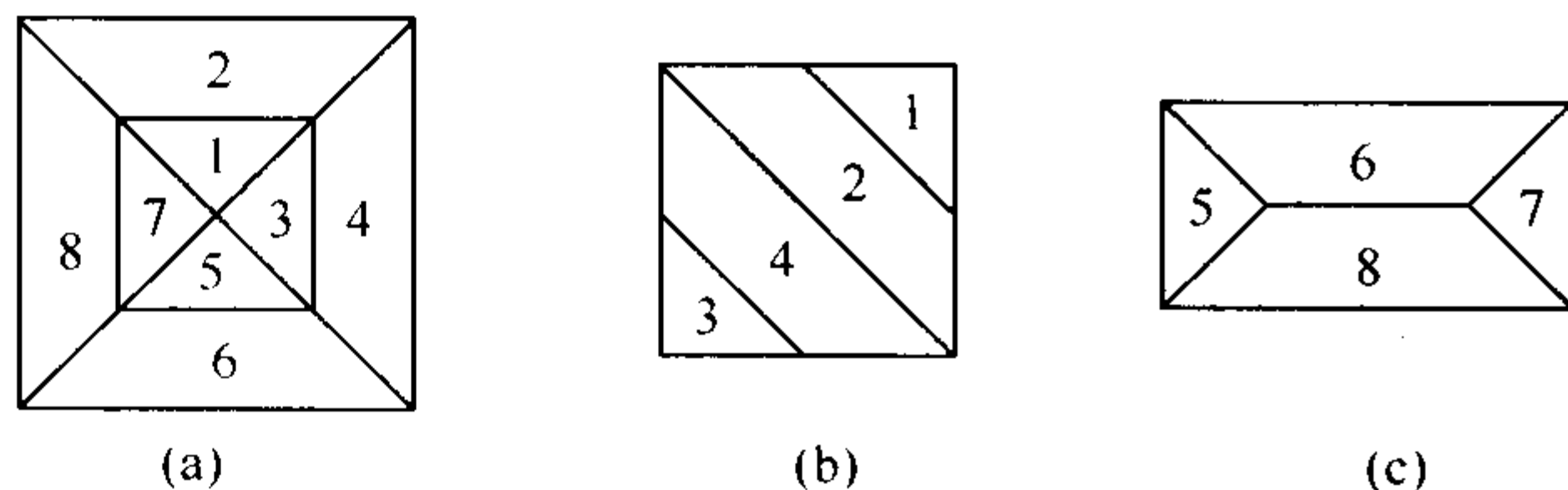


图 2-4

最后考虑分得的两部分面积要相等,则应各取大正方形的一半.分法与拼法如图 2-4.

说明 能够灵活地剪和拼,分和合,常常能使解题简单、迅速.

例 4 有两个厚度相同、大小不同的圆饼,分给两个小孩,为了不委屈到小饼的小孩,要从大饼上切下一块给分到小饼的孩子,使两个孩子分得的饼一样多,怎样切才好?

解 将小饼叠到大饼上,切下剩余部分的一半,如图 2-5 所示的阴影部分.

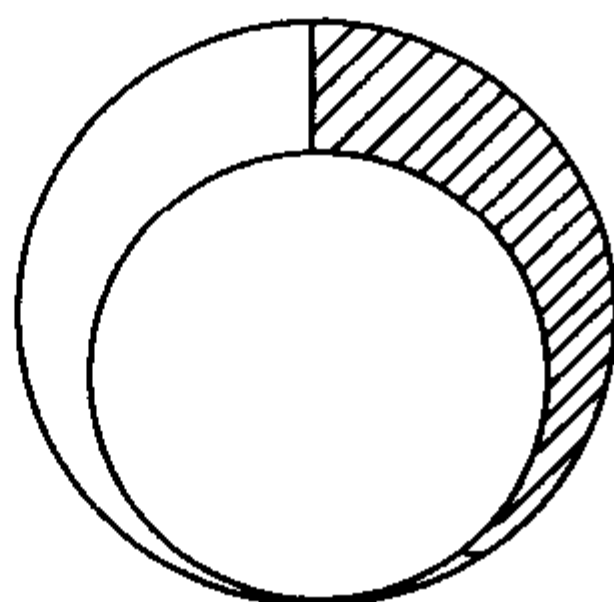


图 2-5

例 5 如图2-6图中空白部分的面积是正方形面积的几分之几?

解 空白部分的面积直接计算有困难,可以先求阴影部分的面积,采用割补法,将图中阴影部分的半圆以正方形中心为中心逆时针方向旋转 90° ,便得如图 2-7 所示的图形.此时,阴影部分与空白部分的形状、大小都相同,面积各占正方形面积的 $\frac{1}{2}$.

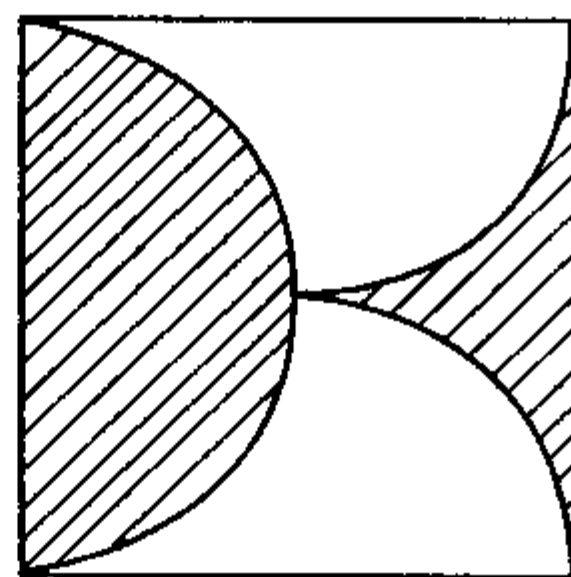


图 2-6

说明 这种拼拼凑凑、割割补补的方法常常能解决一些难度比较大的问题.

例 6 用两根同样长的绳子,一根围成正三角形,一根围成正六边形,这两个图形的面积哪个大? 大的面积是小的面积的几倍?

解 如果根据周长、面积公式去直接计算,那是比较麻烦的.我们可以根据图形看出边长为 1 的正六边形与边长为 2 的正三角形周

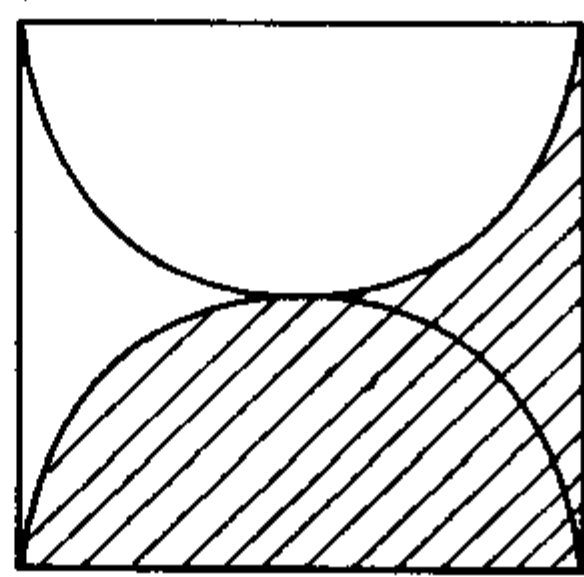


图 2-7



长相等,如图 2-8,2-9.连结正三角形各边中点,把原三角形分成边长为 1 的 4 个小正三角形;连结正六边形中心和各顶点,把正六边形分成边长为 1 的 6 个小正三角形.答案立即出来了.正六边形面积大,正六边形面积是正三角形面积的 1.5 倍.

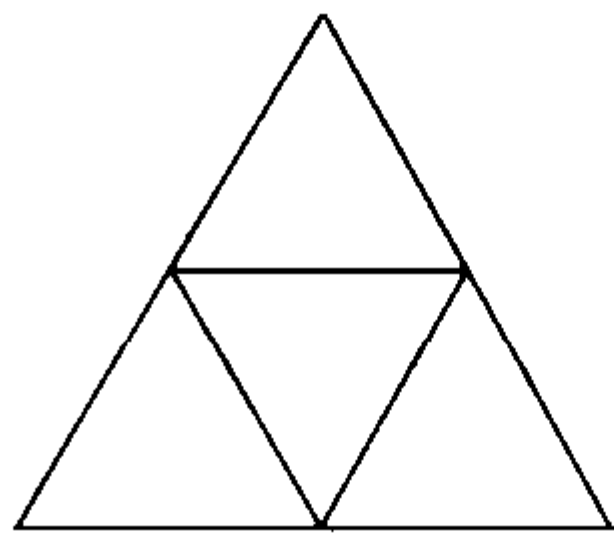


图 2-8

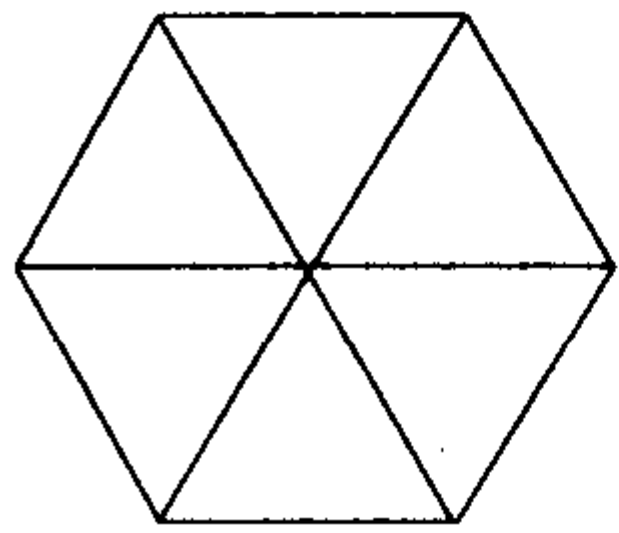


图 2-9

例 7 如图 2-10,将一个圆形纸片用直线划分成大小不限的若干小纸片,如果要分成不少于 50 个小纸片,至少要画多少条直线?请说明.

解 设 n 条直线最多将圆面分成 a_n 块.显然 $a_1 = 2$, $n-1$ 条直线将圆面积分成 a_{n-1} 块的基础上,添加第 n 条直线,该直线被前面 $n-1$ 条直线至多分为 n 部分(线段或射线),每一部分都将所在的圆面块一分为二,从而增加了 n 块.所以,有 $a_n = a_{n-1} + n$. 因此,可算得

$$a_9 = a_1 + (2 + 3 + \cdots + 9) = 46, a_{10} = a_9 + 10 = 56.$$

所以,至少要画 10 条直线才可将圆纸片分成不少于 50 个小纸片.

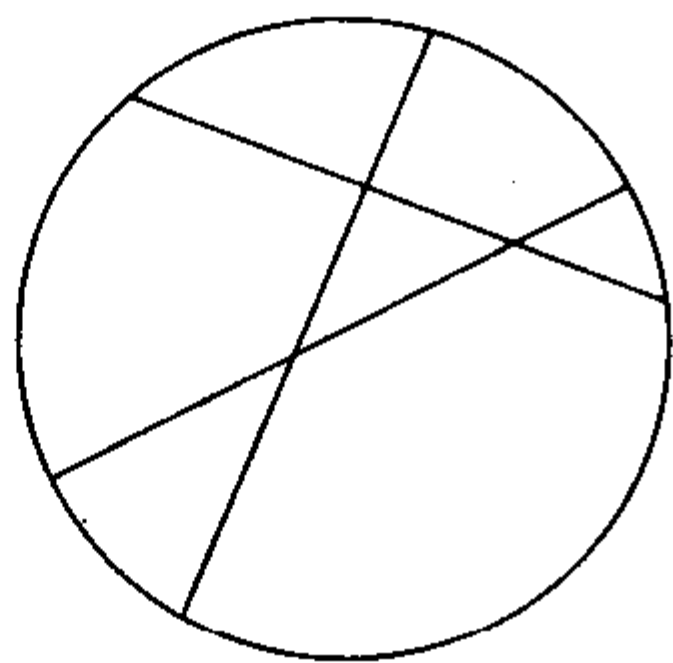


图 2-10

例 8 如图 2-11 把 $\triangle ABC$ 的 AB 边延长到 D ,使 BD 为 AB 的 3 倍,把 BC 边延长到 E ,使 CE 为 BC 的 2 倍,把 CA 边延长到 F ,使 AF 等于 CA .问 $\triangle DEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的几倍?

分析 三角形的面积由三角形的底与高决定.根据等底等高三角形面积相等;两个三角形如果底(高)相等,而其中一个三角形的高(底)是另一个三角形的高(底)的几倍,那么这个三角形的面积是另一个三角形面积的几倍.因此可以考虑添辅助线,将三角形分割成与已知三角形等底或等高的三角形.

解 如图 2-12,连结 CD , AE . $BD = 3AB$, $CE = 2BC$, $AF = CA$,所以三角形 BCD , CED , CEA , AEF , ADF 的面积分别等于 $\triangle ABC$ 面积的 3, 6, 2, 2, 4 倍.因此 $\triangle DEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $(3 + 6 + 2 + 2 + 4 + 1)$ 倍,即 18 倍.

说明 这种把三角形割成若干个与已知三角形等底或等高的小三角形的方法在求三角形面积中是最常用的一种方法.在求几何图周长和面积时,我们还常常把一个几何图形割成几块,并移动其中若干块补到其他地方,使原来的几何图形变为规则的或是周

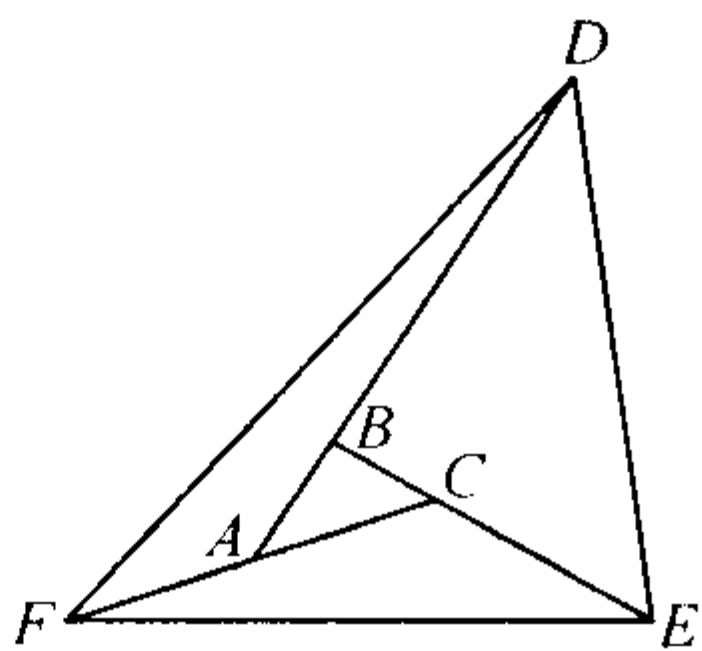


图 2-11



长、面积已知的图形,然后应用条件,公式求解.这种割割补补的方法就是我们常说的“割补法”.

例 9 如图2-13,从一块正方形木板上锯下宽为 $\frac{1}{2}$ 米的一条木板,剩下部分的面积是 $\frac{65}{18}$ 平方米,问锯下的木板的面积是多少平方米?

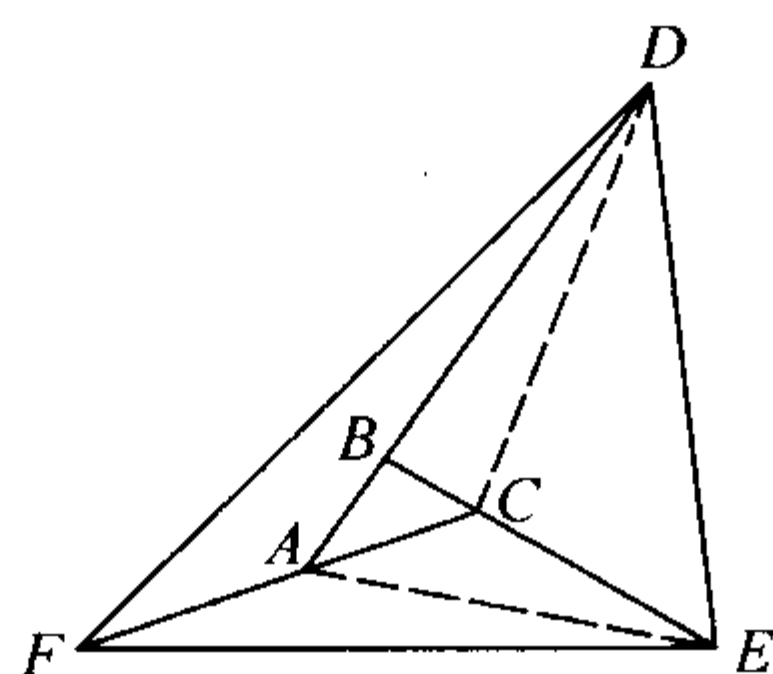


图 2-12

解 把锯去后剩下的 $\frac{65}{18}$ 平方米的木板,用四块就可拼成如图2-14的正方形.中间空下的部分正方形,它的边长正好是木板的长与宽的差,即等于锯下木块的宽度 $\frac{1}{2}$ 米,所以大正方形的面积是 $\frac{1}{4} + 4 \times \frac{65}{18} = \frac{529}{36}$ (平方米).可见,大正方形边长是 $\frac{23}{6}$ 米,而大正方形边长等于剩下的长方形的长和宽的和,得到长方形木板:长 + 宽 = $\frac{23}{6}$

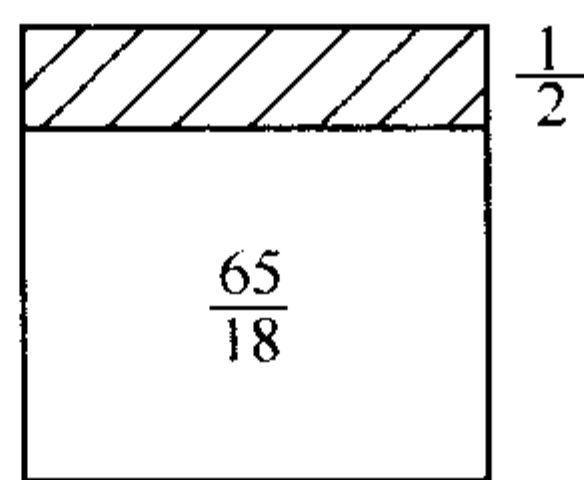


图 2-13

(米),长 - 宽 = $\frac{1}{2}$ (米).从而可求出长方形的长 = $\frac{1}{2} \times \left(\frac{23}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{6}$ (米).因此,锯下的木板的面积是 $\frac{1}{2} \times \frac{13}{6} = \frac{13}{12}$ (平方米).

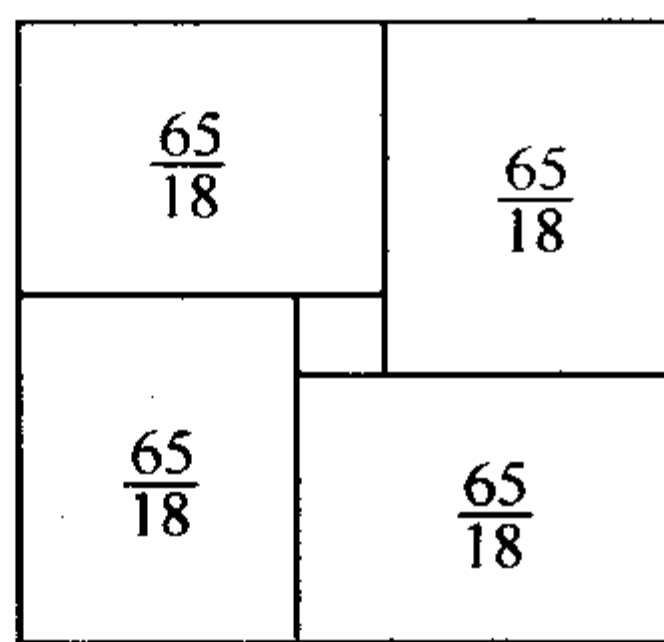


图 2-14

例 10 如图2-15,剪一块硬纸片,可以粘成一个多面体(沿虚线折).这个多面体的面数、棱数、顶点数各是多少?

解 纸片中 12 个正方形,8 个三角形都是多面体的一个面,所以共有 20 个面.

正方形共有 $4 \times 12 = 48$ 条边,三角形共有 $3 \times 8 = 24$ 条边,共有 72 条边,每两边重合成为多面体的一条棱,所以共有 $72 \div 2 = 36$ 条棱.

正方形共有 $4 \times 12 = 48$ 个顶点,三角形共有 $3 \times 8 = 24$ 个顶点,共有 $48 + 24 = 72$ 个顶点.在这里,每四个顶点构成多面体的一个顶点,所以共有 18 个顶点.

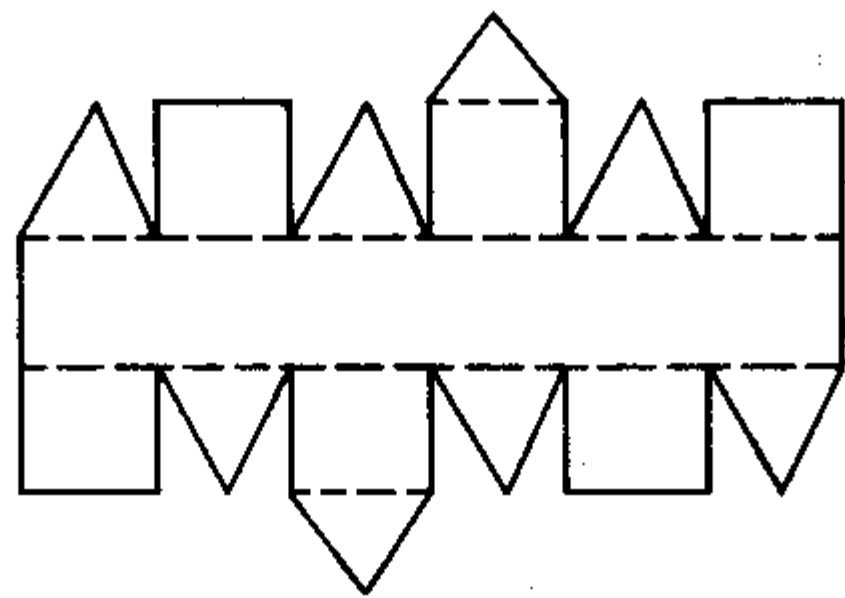


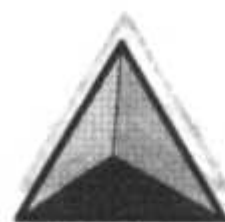
图 2-15

说明 一般地,多面体的顶点数 + 面数 = 棱数 + 2.这称为欧拉定理.用它去验证答案,有时是很有效的.

例 11 你能把一张纸折几层后,一刀剪出个五角星吗?

解 不会剪五角星的中学生不多,但要剪成顶角为 36° 的标准五角星却使不少中学生为难了.

五角星有五个角,十条边,所以想一刀剪成,必须把纸折成十层.另外,五角星的每个顶角都是 36° ,将纸折成 10 层后,每一层要剪出的只是半个顶角,为 18° ,因此还要折



出 18° 的角. 折法如下:

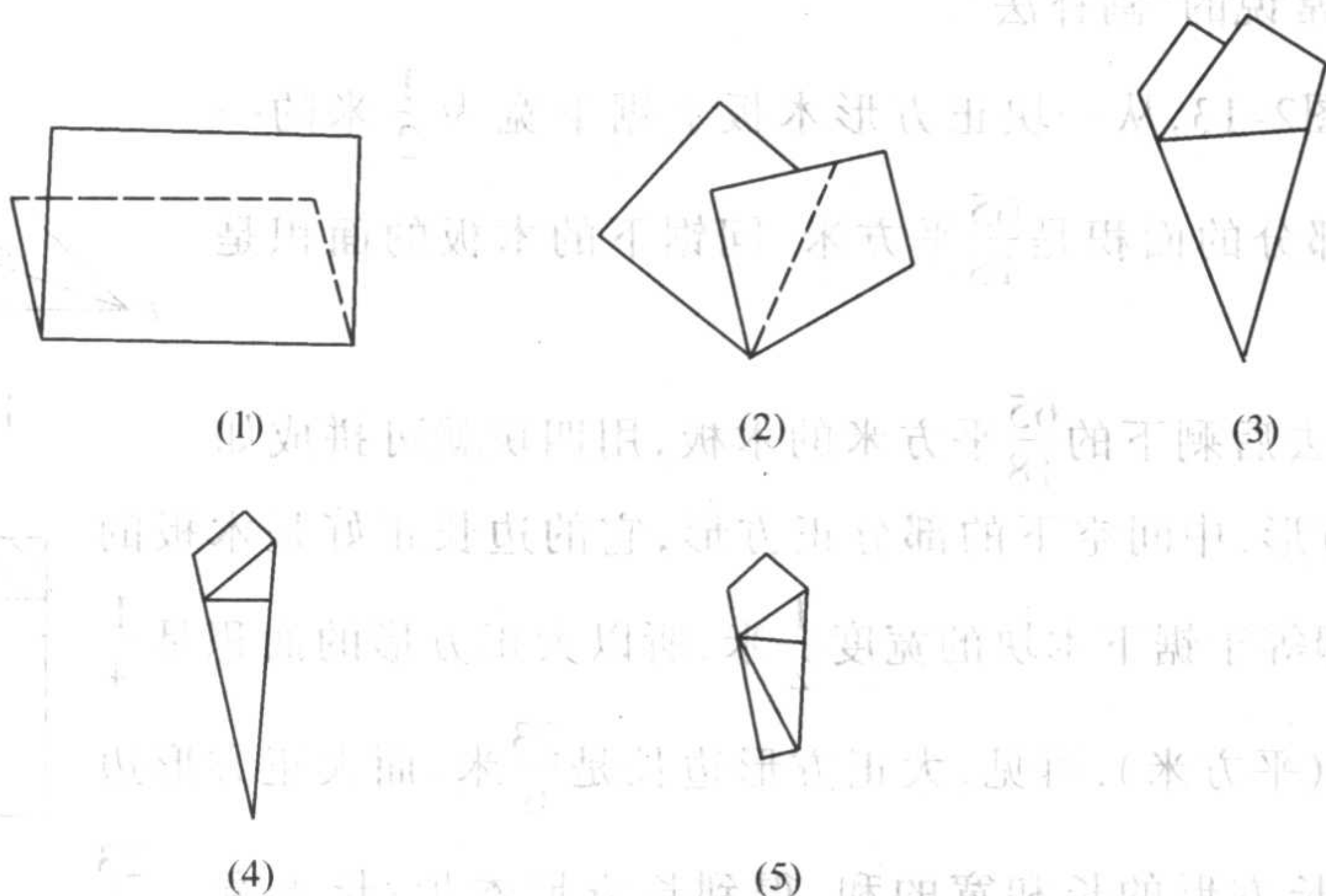


图 2-16

按图 2-16 的(1)、(2)、(3)先把纸对折,再把对折后的纸折成 5 等份,这时已折成 10 层且顶角为 36° (顶点是五角星的中心). 把(3)对折成(4)得 18° , 然后按(5)所示,把顶角折上去,沿尖角的边画直线,这条直线即为剪切线,再把(5)还原成(3). 剪下的五角星便是标准的五角星了.

例 12 某玩具厂生产大小一样的正方体形状的积木,每个面分别涂上红、黄、蓝 3 种颜色中的 1 种,每色各涂 2 个面,当两个积木经过适当的翻动后,能使各种颜色的面所在位置相同时,它们就被看作是同一种积木块. 试说明:最多能涂成多少种不同的积木块?

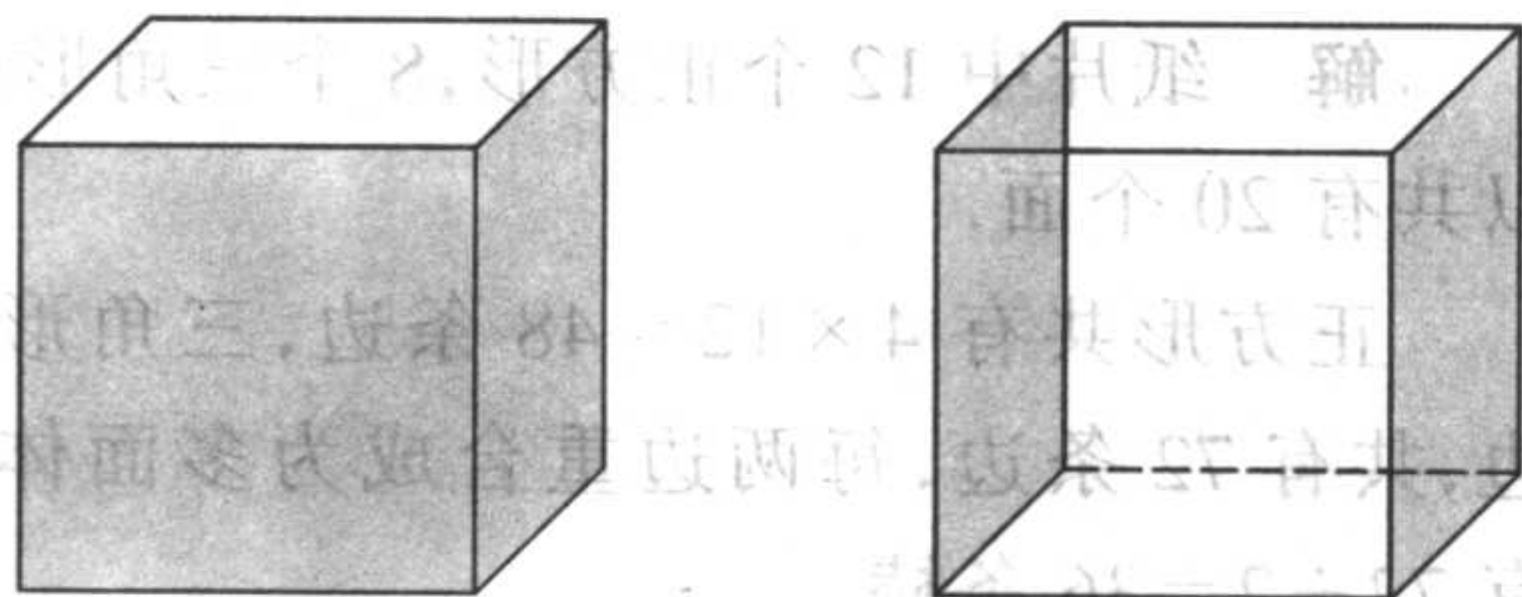


图 2-17

解 经过翻动,总可以积木涂红的一面成为下底面. 这时有两种情况:

(I) 另一个涂红的面是上底面.

四个侧面上,两个涂黄,两个涂蓝. 有两种不同的积木块,一种是黄色的两个面相邻,另一种是黄色的两个面不相邻,如 2-18,其中涂黑的面表示黄色的面.

(II) 另一个涂红的表面是侧面.

总可假定这个涂红的面是后面的面. 有 4 种不同的积木块,第一种与两个涂红的面相对的是两个涂黄的面,第二种与两个涂红的面相对的是两个涂蓝的面,第三个上底面与右侧面涂黄,第四种上底面与左侧面涂黄. 如图 2-19,其中涂黑的面表示黄色的面. 这后两种积木是不同的. 你无法通过翻转,使它们相同颜色的面位置都相同. 而下面的

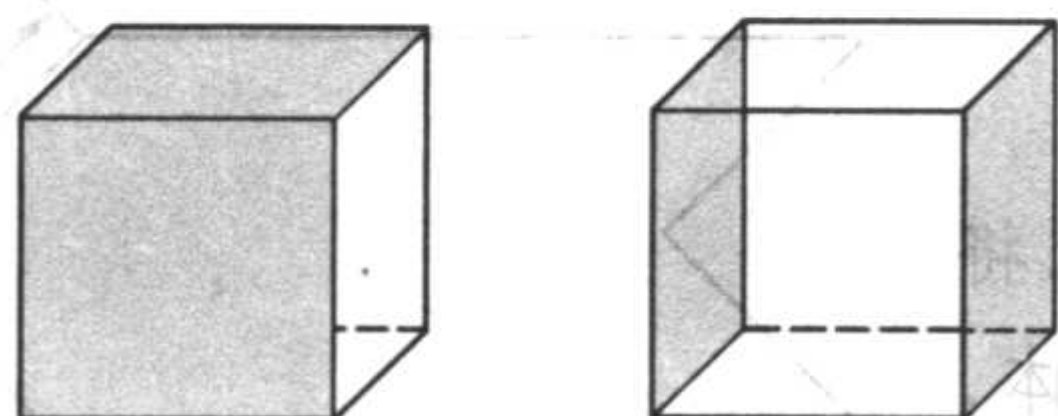


图 2-18

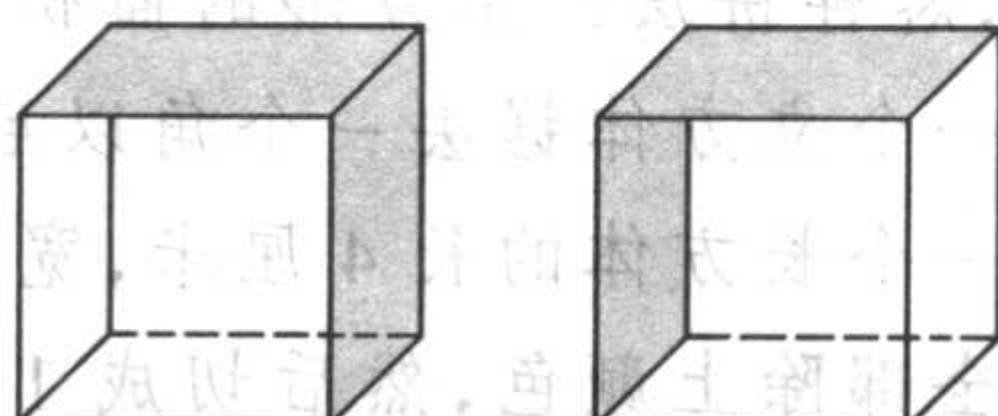


图 2-19

两种,一种是上底面与右侧面涂蓝,另一种是上底面与左侧面涂蓝.如图 2-20,不难看出它们分别与图 2-19 相同.

因此,最多能涂成 6 种不同的积木块.



【能力训练】

1. 分别将图 2-21 中的三个图形,用相连的几条直线段,分成两个形状完全一样的图形.

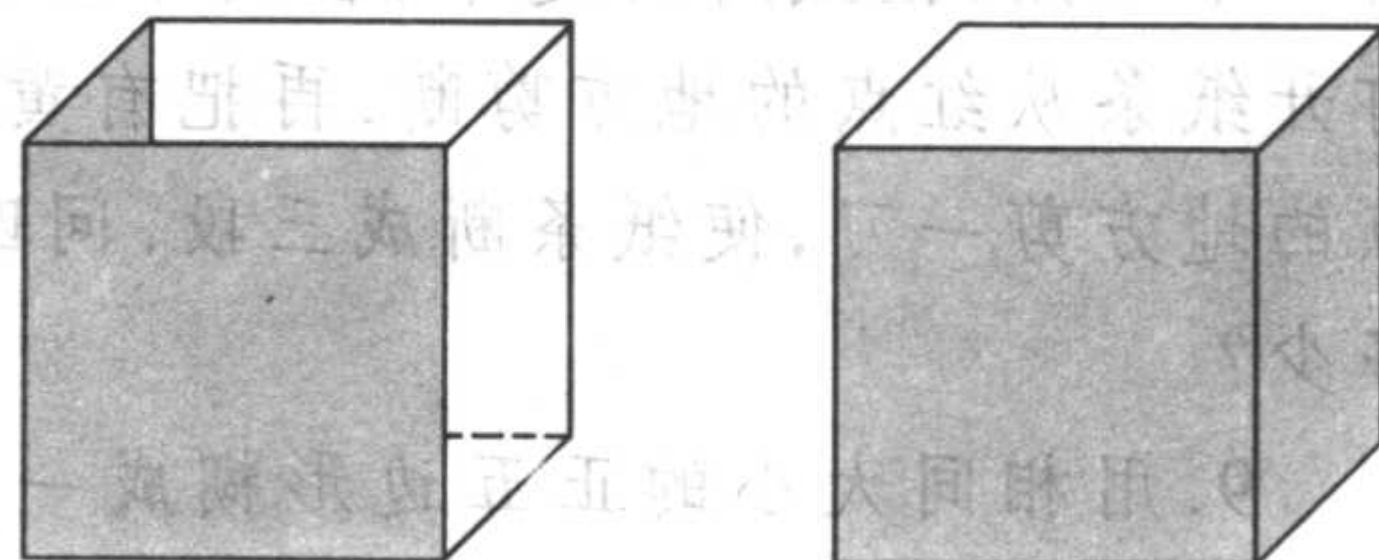


图 2-20

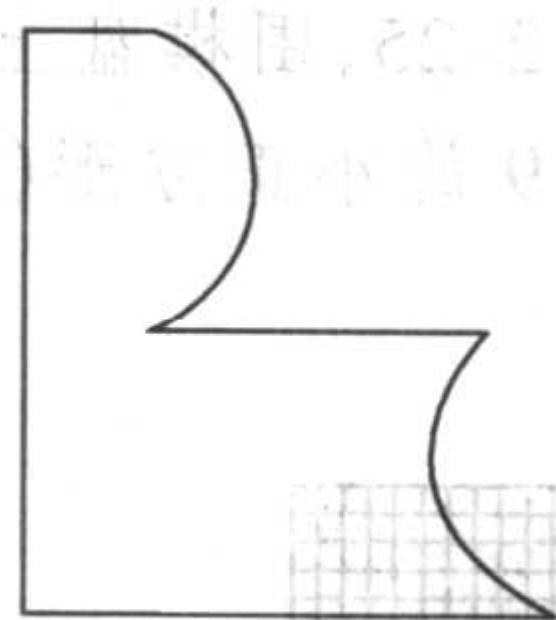
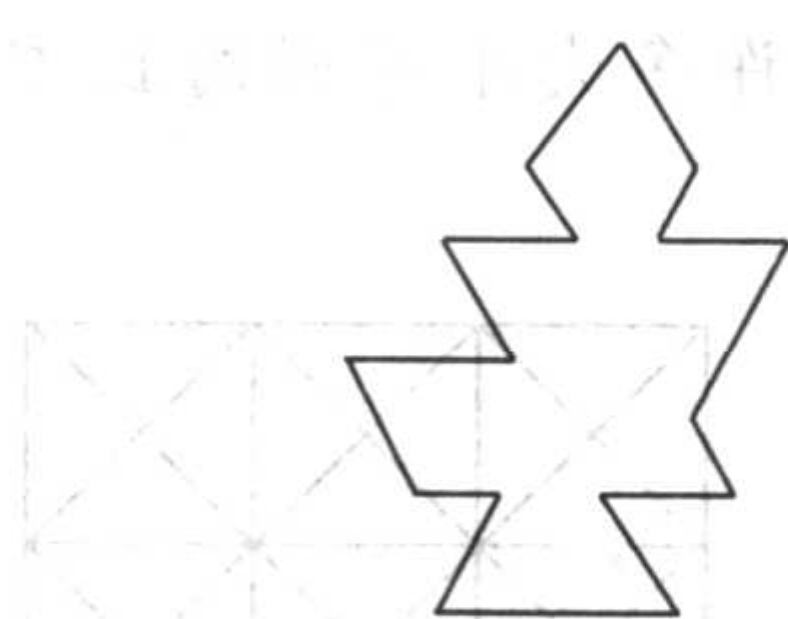


图 2-21

2. 分别将图中的两个图形,分成八个形状相同,面积相等的图形.

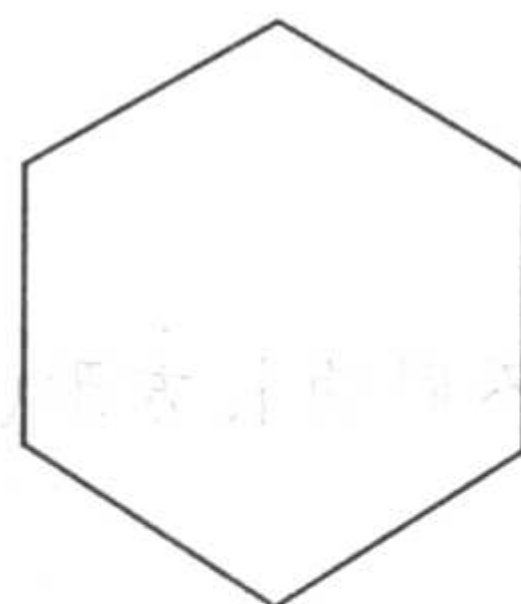
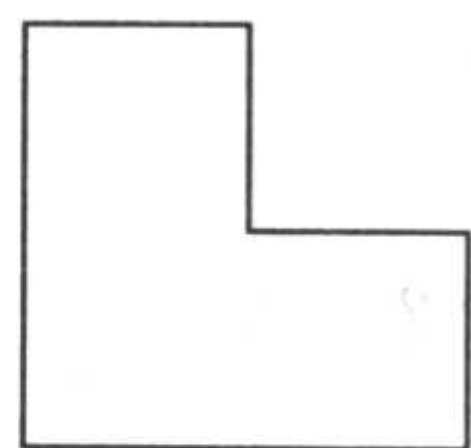


图 2-22

3. 一块木板如 2-23,把它锯成三块,再拼成一个正方形,应如何锯法? 正方形的面积是多少?

4. 有一块每边长为 1 米的立方体木材,剖成每边长为 1 毫米的小立方体,这些小立方体一个接一个地连起来,可以排多少长?

5. 如图 2-24,方框外面的边长为 5,内孔边长为 3,把方框锯成四块,拼成一个正方



形桌面,怎样拼法?正方形的面积是多少?

6. 一个立方体锯去一个角以后,还剩下几个角?

7. 一个长方体的长4厘米,宽3厘米,高2厘米,将它外表全部涂上颜色,然后切成1立方厘米的正方体,问一面、两面、三面有颜色的正方体各有多少个?

8. 一条长1米的纸条,在距离一端0.618米的地方

有一个红点,把纸对折起来,在对准红点的地方涂上一个黄点,然后打开纸条从红点的地方剪断.再把有黄点的一段地折起来,在对准黄点的地方剪一刀,使纸条断成三段.问四段纸条中最短的一段长度是多少?

9. 用相同大小的正五边形糊成一个多面体,它的顶点数、面数、棱数各为多少?

10. 内部底面边长为1分米的正方形、高为1厘米的长方体盒内,放进直径是1厘米的球.问最多能放进多少个球?

11. 如图2-25,围棋盘上有横竖各19条线,在棋盘上组成许多大小不同的正方形,问其中有 9×9 的小正方形(图2-26)多少个?

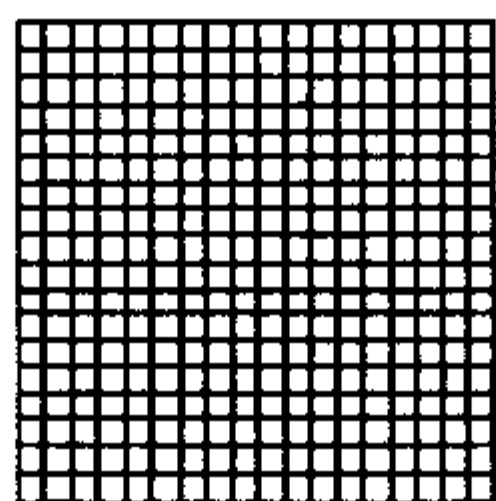


图 2-25

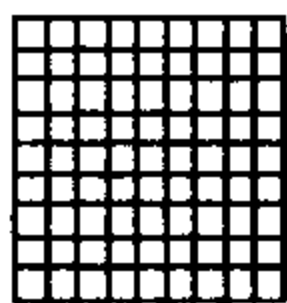


图 2-26

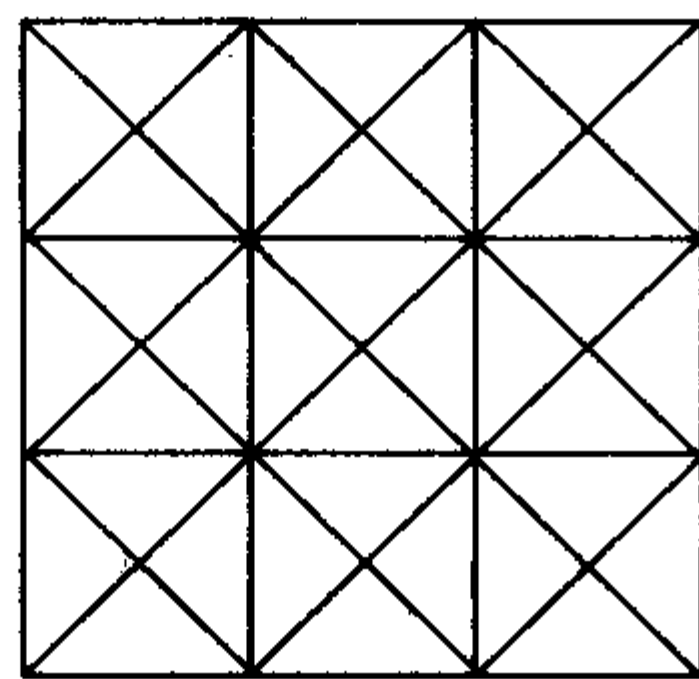


图 2-27

12. 图2-27中不同的长方形(包括正方形)有多少个?

图 2-23

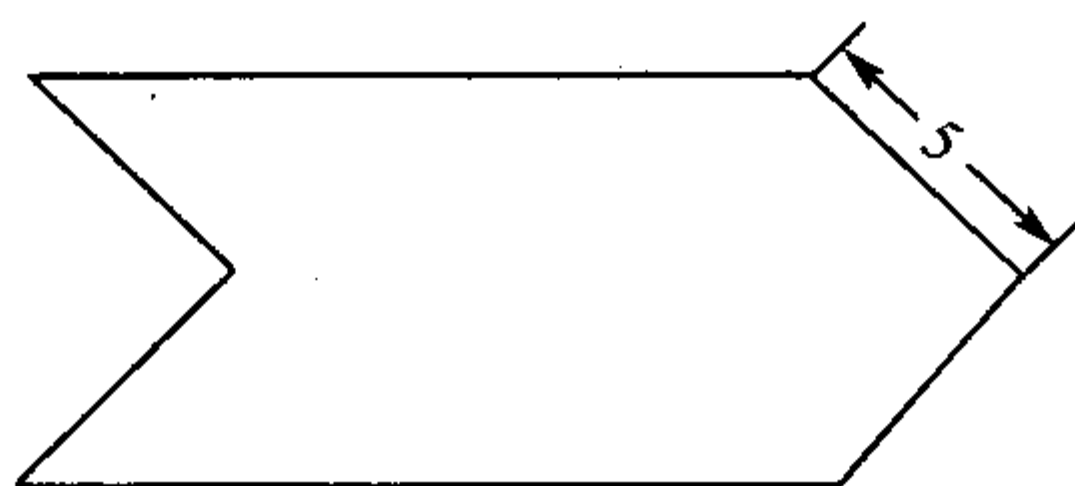
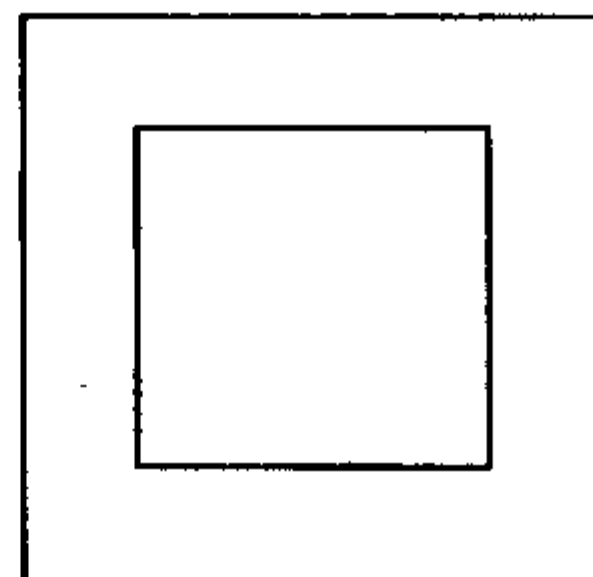


图 2-24





三、有理数及其运算



【赛点目标】

1. 了解有理数的概念,理解数轴、相反数和绝对值等有关概念,并会利用这些概念进行有理数的大小比较,解决绝对值的有关问题.
2. 理解并掌握有理数的加、减、乘、除和乘方的运算法则,熟练进行有理数的混合运算,了解近似数和有效数字的概念,会使用计算器进行有理数的运算.



【方法述要】

1. 明确有理数的分类,理解符号“-”的意义和作用,理解数轴的意义和作用.
2. 理解绝对值的概念及几何意义,并会求一个数的绝对值.
3. 掌握有理数的大小比较方法和有理数的加、减、乘、除和乘方的运算法则,关键是比较两个负数的大小,及相反数和倒数的意义.
4. 理解近似数的意义,掌握四舍五入的方法,在实际问题中能正确运用有效数字、精确度、科学记数法.
5. 有理数的计算技巧(简便运算)会用到以下知识点:
 - (1) 运算律:交换律、结合律、分配律;
 - (2) 分离整数法:带分数和假分数可以写成一个整数和一个真分数的和;
 - (3) 数列求和技巧:如裂项法、公式法等;
 - (4) 用字母表示数:用字母表示数进行计算,可简化计算过程.



【赛题精讲】

例 1 已知 $b < 0, a + b > 0$, 试比较 $a, b, -a, -b$ 这四个有理数的大小.

解 (1) 数轴法, 此法简单直观.

$b < 0, a + b > 0$, 可见 $a > 0$, 且 $|a| > |b|$, 即 a, b 各在原点的两侧, 且 a 离原点的距离比 b 离原点的距离要远. 由对称性又可得 $-a, -b$ 的大致位置如图 3-1. 易得: $-a < b < -b < a$.

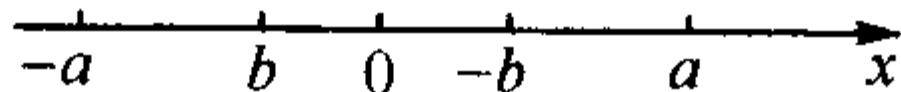


图 3-1

(2) 特殊值法. 不妨取 $b = -1, a = 2$, 也易得结论. 此法常用于解填空、选择题.

例 2 计算: (1) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2003$;



$$(2) \left(\frac{1}{2004} - 1 \right) \times \left(\frac{1}{2003} - 1 \right) \times \left(\frac{1}{2002} - 1 \right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{1001} - 1 \right) \times \left(\frac{1}{1000} - 1 \right).$$

解 (1) 原式 $= 1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \cdots + (2003 - 2002)$

$$= 1 + 1 \times 1001 = 1002.$$

$$(2) \text{原式} = \left(-\frac{2003}{2004} \right) \times \left(-\frac{2002}{2003} \right) \times \left(-\frac{2001}{2002} \right) \times \cdots \times \left(-\frac{999}{1000} \right)$$

$$= (-1)^{1005} \times \frac{999}{2004} = -\frac{333}{668}.$$

例 3 计算: (1) $2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - \cdots - 2^9 + 2^{10}$;

$$(2) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{72}.$$

解 (1) 原式 $= 2^{10} - 2^9 - 2^8 - \cdots - 2^2 + 2 = 2^9(2 - 1) - 2^8 - \cdots - 2^2 + 2$

$$= 2^9 - 2^8 - \cdots - 2^2 + 2 = 2^8 - 2^7 - \cdots - 2^2 + 2$$

$$= \cdots$$

$$= 2^2 + 2 = 6.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{8 \times 9}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

说明 数列求和与求积常用到裂项和邻项相消的方法.

例 4 已知 a, b 均为有理数, 比较 $(a - b), a, (a + b)$ 的大小.

解 题中涉及两个字母 a, b , 而 $(a - b), a, (a + b)$ 的大小关系实际上与 a 无关, 仅与 b 的性质有关, 因此, 只需对 b 进行讨论.

答案: 当 $b > 0$ 时, $a - b < a < a + b$; 当 $b = 0$ 时, $a - b = a = a + b$; 当 $b < 0$ 时, $a - b > a > a + b$.

例 5 “二十四点”游戏的规则是这样的: 任取四个 1 至 13 之间的自然数, 将这四个数(用且只用一次)进行加减乘除运算, 使其结果等于 24. 例如对 1, 2, 3, 4, 可作运算: $(1 + 2 + 3) \times 4 = 24$. [注意上述运算与 $4 \times (2 + 3 + 1)$ 应视作相同方法的运算] 现有四个有理数 3, 4, -6, 10, 运用上述规则至少写出三种不同方法的运算式, 使其结果等于 24.

解 此题的求解方法可以多样, 思考余地较大. 整数运算结果为 24, 从乘法考虑有 $24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ 等; 从除法有: $48 \div 2 = 72 \div 3 = 24$ 等; 从加减运算有: $30 - 6 = 28 - 4 = 20 + 4 = 24$ 等. 结合给定数据, 运用有理数运算法则, 可“凑”为以下几种方案:

$$(1) [10 + 4 + (-6)] \times 3 = 24; \quad (2) (10 - 4) \times 3 - (-6) = 24;$$

$$(3) 4 - 10 \times (-6) \div 3 = 24; \quad (4) 4 - (-6 \div 3) \times 10 = 24.$$

若你有其他方案就更好了.



例6 (1)据调查统计,北京在所有申奥城市中享有最高程度的民众支持率,支持申奥的北京市民约有 1299 万人,用四舍五入法保留两个有效数字的近似值为()

(A) 1.3×10^3 万人 (B) 1300 万人 (C) 1.30×10^3 万人 (D) 0.13×10^4 万人

(2)据测算,我国每天因土地沙漠化造成的经济损失为 1.5 亿元,若一年按 365 天计算,用科学记数法表示我国一年因土地沙漠化造成的经济损失为()

(A) 5.475×10^{11} (元)

(B) 5.475×10^{10} (元)

(C) 0.5475×10^{11} (元)

(D) 0.5475×10^8 (元)

解 (1)要注意两点:一是会四舍五入,二是保留两个有效数字,(B)、(C)都在有效数字个数上错了,而(D)是表示法不符合科学记数法要求,所以应选择(A).

(2)(A)、(D)是经济损失的总值错了,而(C)是科学记数法表示不正确.所以,应选择(B).

例7 计算: $\left| \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right| + \left| \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} \right| - \left| \frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} \right|$.

解 先去绝对值符号,再进行计算.

因为 $\frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} < 0$, $\frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} < 0$, $\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} > 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 原式} &= -\left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2003}\right) - \left(\frac{1}{2005} - \frac{1}{2004}\right) - \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right) \\ &= -\frac{1}{2004} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} + \frac{1}{2005} = 0. \end{aligned}$$

例8 计算:① $\frac{979797}{989898} - \frac{9797}{9898}$; ② $\underbrace{99 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}} \times \underbrace{99 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}} + \underbrace{199 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}}$.

解 ① $\frac{979797}{989898} - \frac{9797}{9898}$

$$\begin{aligned} &= \frac{97 \times 10000 + 97 \times 100 + 97}{98 \times 10000 + 98 \times 100 + 98} - \frac{97 \times 100 + 97}{98 \times 100 + 98} \\ &= \frac{97 \times (10000 + 100 + 1)}{98 \times (10000 + 100 + 1)} - \frac{97 \times (100 + 1)}{98 \times (100 + 1)} = \frac{97}{98} - \frac{97}{98} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② 原式} &= (\underbrace{1000 \cdots 0}_{2004 \text{ 个}} - 1) \times \underbrace{99 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}} + \underbrace{199 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}} \\ &= \underbrace{99 \cdots 900 \cdots 0}_{2004 \text{ 个 } 2004 \text{ 个}} - \underbrace{99 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}} + \underbrace{99 \cdots 9}_{2004 \text{ 个}} + \underbrace{100 \cdots 0}_{2004 \text{ 个}} \\ &= \underbrace{99 \cdots 900 \cdots 0}_{2004 \text{ 个 } 2004 \text{ 个}} + \underbrace{100 \cdots 0}_{2004 \text{ 个}} = \underbrace{100 \cdots 0}_{2 \times 2004 \text{ 个}}. \end{aligned}$$

例9 (1)已知 $x < 0$, 化简: $\frac{||x| - 2x|}{3}$;

(2)已知 $1 < x < 2$, 化简: $|x + |2 - x| - 2|1 - x||$.

解 (1)由 $x < 0$, 得 $3x < 0$.



$$\text{原式} = \frac{|-x-2x|}{3} = \frac{|-3x|}{3} = \frac{|3x|}{3} = \frac{-3x}{3} = -x.$$

(2) 由 $1 < x < 2$, 得 $2 - x > 0, 1 - x < 0, 4 - 2x > 0$.

$$\text{原式} = |x + 2 - x - 2(x - 1)| = |4 - 2x| = 4 - 2x.$$

说明 化简含有多层绝对值的式子时, 应从里面展开, 逐层去掉绝对值符号.

例 10 设 a 为有理数, 化简下列代数式:

$$(1) |a + 1| + |a - 2|; \quad (2) |a + 1| + |a - 2| + |a - 3|.$$

解 (1) 当 $a \geq 2$ 时, $a + 1 > 0, a - 2 \geq 0$,

$$\text{原式} = (a + 1) + (a - 2) = 2a - 1.$$

当 $-1 \leq a < 2$ 时, $a + 1 \geq 0, a - 2 < 0$,

$$\text{原式} = (a + 1) - (a - 2) = 3.$$

当 $a < -1$ 时, $a + 1 < 0, a - 2 < 0$,

$$\text{原式} = -(a + 1) - (a - 2) = -2a + 1.$$

$$\text{所以 } |a + 1| + |a - 2| = \begin{cases} 2a - 1 (a \geq 2), \\ 3 (-1 \leq a < 2), \\ -2a + 1 (a < -1). \end{cases}$$

(2) 当 $a \geq 3$ 时, $a + 1 > 0, a - 2 > 0, a - 3 \geq 0$,

$$\text{原式} = (a + 1) + (a - 2) + (a - 3) = 3a - 4.$$

当 $2 \leq a < 3$ 时, $a + 1 > 0, a - 2 \geq 0, a - 3 < 0$,

$$\text{原式} = (a + 1) + (a - 2) - (a - 3) = a + 2.$$

当 $-1 \leq a < 2$ 时, $a + 1 \geq 0, a - 2 < 0, a - 3 < 0$,

$$\text{原式} = (a + 1) - (a - 2) - (a - 3) = -a + 6.$$

当 $a < -1$ 时, $a + 1 < 0, a - 2 < 0, a - 3 < 0$,

$$\text{原式} = -(a + 1) - (a - 2) - (a - 3) = -3a + 4.$$

$$\text{所以 原式} = \begin{cases} 3a - 4 (a \geq 3), \\ a + 2 (2 \leq a < 3), \\ -a + 6 (-1 \leq a < 2), \\ -3a + 4 (a < -1). \end{cases}$$

说明 若不能确定绝对值符号内的式子的符号, 化简时要进行讨论, 讨论时要先确定字母的取值区间, 其方法是: 求出各绝对值符号内式子的值为 0 时字母的取值, 再将这些值在数轴上表示出来, 这样数轴就被分成了若干区间, 在每一区间内可以确定绝对值符号内式子的正负.

例 11 计算: $3 \times 8.0103 \times 1.2411 - 8.0202 \times 1.2312 + 8.0301 \times 1.2213$, 保留两位有效数字, 结果是_____.

分析 本题可直接计算, 但很麻烦. 可根据下面原理: 当两个正数之和不变时, 两数



越接近(即差越小),它们的积越大.从而用不等式进行估算.

解 因为 $8.0301 \times 1.2213 < 8.0202 \times 1.2312 < 8.0103 \times 1.2411$,

所以 原式 $< 3 \times 8.0103 \times 1.2411 < 3 \times 8 \times 1.2514 = 30.0336$.

原式 $> 2 \times 8.0103 \times 1.2411 + 8.0301 \times 1.2213$

$> 8 \times (2 \times 1.2411 + 1.2213) = 8 \times 3.7035 = 29.628$.

所以 原式两位有效数字的近似值应为 30.

例 12 两个1999位整数相乘: $\underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} \times \underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1}$,问乘积的各位数字之和是多少?

解 $\underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} \times \underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} = 9 \times \underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} \times \underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} \div 9$

$= \underbrace{(1 \ 000 \cdots 00 - 1)}_{1999 \text{个} 0} \times \underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} \div 9$

$= \underbrace{(11 \cdots 11 \ 00 \cdots 00)}_{1999 \text{个} 1 \ 1999 \text{个} 0} - \underbrace{11 \cdots 11}_{1999 \text{个} 1} \div 9,$

$= \underbrace{11 \cdots 110}_{1998 \text{个} 1} \underbrace{88 \cdots 89}_{1998 \text{个} 8} \div 9$

因为 $\underbrace{111111111}_{9 \text{个} 1} \div 9 = 12345679,$

$\underbrace{888888888}_{9 \text{个} 8} \div 9 = 98765432,$

所以 $\underbrace{11 \cdots 110}_{1998 \text{个} 1} \underbrace{88 \cdots 89}_{1998 \text{个} 8} \div 9$

$= \underbrace{123456790}_{\text{一段}} \underbrace{123456790 \cdots 123456790}_{\text{共} 222 \text{段}}$

$\underbrace{987654320}_{\text{一段}} \underbrace{987654320 \cdots 987654320}_{\text{共} 221 \text{段}} \underbrace{987654321}_{\text{一段}}$

因为 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 = 37,$

$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44,$

所以乘积的各位数字之和是: $37 \times 222 + 44 \times 221 + 45 = 17983$.



【能力训练】

一、选择题

1. 对任意有理数 a , 式子 $1 - |a|, |a + 1|, |-1| + a, |a| + 1$ 中, 取值不为 0 的是 ().

(A) $|a| + 1$ (B) $1 - |a|$ (C) $|a + 1|$ (D) $|-1| + a$

2. 有理数 a, b, c 的对应点在数轴上的位置如图 3-2, 则下列关系正确的是 ().

(A) $\frac{a-b}{a+b} < \frac{a+b}{a-b} < \frac{a+cb}{a-cb}$



$$(B) \frac{a+b}{a-b} < \frac{a-b}{a+b} < \frac{a-cb}{a+cb}$$

$$(C) \frac{a-b}{a+b} < \frac{a+cb}{a-cb} < \frac{a+b}{a-b}$$

$$(D) \frac{a-cb}{a+cb} < \frac{a+b}{a-b} < \frac{a-b}{a+b}$$

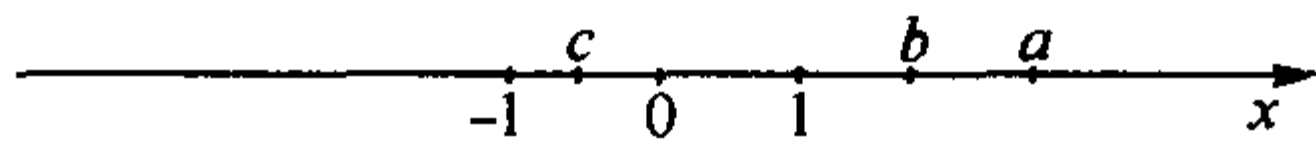


图 3-2

3. 若 $a = \left(\frac{-3.14}{3.13}\right) \div 3.12$, $b = \left(\frac{2.14}{-2.13}\right) \div 2.12$, $c = \frac{1.14}{1.13} \div (-1.12)$, 则 a, b, c 的大小顺序是().

(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$

4. 如果 a, b 均为有理数, 且 $b < 0$, 则 $a, a-b, a+b$ 的大小关系是().

(A) $a < a+b < a-b$ (B) $a < a-b < a+b$

(C) $a+b < a < a-b$ (D) $a-b < a+b < a$

二、填空题

5. 有理数 a, b, c 的对应点在数轴上的位置如图 3-3, 则在 $-\frac{1}{a}, -a, c-b, c+a$ 中最大的一个是_____.

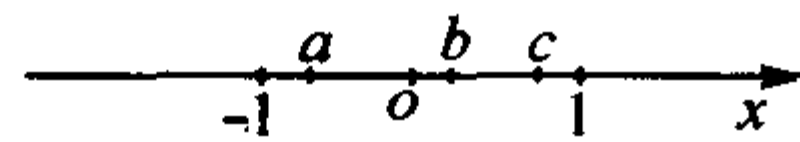


图 3-3

6. 如果 $x < 0$, 则 $\frac{||x| - 2x|}{3} =$ _____.

7. 已知 $b < a < 1$, $ab < 0$, $a+b < -1$, 那么 $a, b, \frac{1}{a}, a + \frac{1}{b}$ 之间的大小关系是_____ (用“<”号连接).

8. 三个有理数 a, b, c 其积是负数, 其和是正数, 当 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ 时, 代数式 $x^{2004} - 2x^{2003} + 3$ 的值是_____.

三、解答题

9. 计算: $\frac{1^2+2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2+3^2}{2 \times 3} + \frac{3^2+4^2}{3 \times 4} + \dots + \frac{2003^2+2004^2}{2003 \times 2004}$.

10. 计算: $\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} + \frac{1}{69}\right) \times \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53}\right) - \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} + \frac{1}{69}\right) \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53}\right)$.

11. 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$, $abc > 0$, 且 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$, $y = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, 求 $x^{20} - 20xy + y^3$ 的值.

12. 设 a, b 为有理数, 且 $|a| > 0$, 方程 $||x-a| - b| = 3$ 有三个不相等的解, 求 b 的值.



四、一元一次方程



【赛点目标】

1. 了解并能区分方程、方程的解和解方程的概念.
2. 掌握一元一次方程的解法.
3. 能分析文字题和应用题中的已知量和未知量,找出等量关系,列一元一次方程解具体问题.



【方法述要】

1. 解一元一次方程,其基本步骤是:(1)将方程化为标准形式 $ax = b$; (2)当 $a \neq 0$ 时,方程的解为 $x = \frac{b}{a}$; 当 $a = 0$ 时,若 $b = 0$,方程的解是全体实数,若 $b \neq 0$ 方程无解; 当 a 不能确定时要对 a 进行分类讨论.
2. 解一次方程组的基本方法是消元,转化为一元一次方程求解.消元的方法有代入消元法和加减消元法.
3. 含绝对值符号的一元一次方程,主要是去绝对值符号,转化为一元一次方程.去绝对值符号一般需要对未知数进行分类讨论.
4. 解方程实质上是一个由未知向已知转化的过程,转化的方法是通过等式变形,分离已知数和未知数.这种转化的思想和等式变形的方在初中代数中非常重要.
5. 掌握列方程解应用题的一般步骤,列方程解应用题的关键在于找等量关系,建立方程.除了会在审清题意的基础上,找出有关数量关系的关键词,还要记住一些基本数量关系,如:速度 \times 时间 = 路程,工作效率 \times 工作时间 = 总工作量,单价 \times 数量 = 总价,溶液质量 \times 溶液的质量分数 = 溶质质量,等等.



【赛题精讲】

例 1 解方程:

$$(1) \frac{1.8 - 8x}{1.2} - \frac{1.3 - 3x}{2} = \frac{5x - 0.4}{0.3};$$

$$(2) \frac{9}{16} \left\{ \frac{5}{12} \left[\frac{7}{8} \left(\frac{3}{4}x + 5 \right) - 10 \right] + 3 \right\} - 10 = 5 \frac{3}{4}.$$

解 方程(1)中因为分子、分母中都含有小数,所以先用分数的基本性质将系数“化



整”.其中 $\frac{1.8-8x}{1.2}$ 以分子、分母同乘以5较为合适,而 $\frac{1.3-3x}{2}$ 和 $\frac{5x-0.4}{0.3}$ 以分子、分母同乘以10较为合适.方程的解为 $x=\frac{1}{10}$.

另外要注意,这里系数“化整”的依据是分数的基本性质,而不是等式性质,不应采取“方程两边都乘以10”的方法,这样不能化去分母的小数.

若方程中含有多重括号,一般是从里向外去括号,有时也可以根据方程的某些特点从外向里去括号.在方程(2)中,若先把 -10 移到等号的右边与 $5\frac{3}{4}$ 合并得 $15\frac{3}{4}$,再去大括号,然后,再把 $+3$ 移到等号右边,去中括号,依次类推,可显得更加灵活,更加简捷.方程(2)的解为: $x=100$.

例2 解关于 x 的方程:

$$(1) 11(a+3b)-2(5a-5x)-4(3a+8x)=0;$$

$$(2) a^2(1-x)=ax+1.$$

解 (1) $11a+33b-10a+10x-12a-32x=0$, $-11a+33b-22x=0$, 即 $22x=33b-11a$, 即 $x=\frac{33b-11a}{22}$.

$$(2) a^2(1-x)=ax+1, \text{ 即 } a^2-a^2x=ax+1$$

$$a^2x+ax=a^2-1, \text{ 即 } a(a+1)x=(a+1)(a-1).$$

所以 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq -1$ 时,方程的解为 $x=\frac{a-1}{a}$;当 $a=0$ 时,原方程化为 $0 \cdot x=-1$,方程无解;当 $a=-1$ 时,原方程化为 $0 \cdot x=0$,方程的解为任何数.

例3 当 k 取何值时,关于 x 的方程 $\frac{kx}{3}+k=\frac{kx}{2}-\frac{x-6}{6}$ 有无数个解?

解 原方程化为 $2kx+6k=3kx-x+6$, 即 $(k-1)x=6(k-1)$.

当 $k-1=0$, 即 $k=1$ 时,原方程化为 $0 \cdot x=0$, 它的解是任何数;而当 $k-1 \neq 0$ 时,原方程有惟一解 $x=6$.

所以 当 $k=1$ 时,原方程有无数个解.

例4 解关于 x 的方程 $\frac{m+x}{n}+3=\frac{x-n}{m}$.

解 显然,要使这个方程有意义,有 $n \neq 0, m \neq 0$. $\frac{m}{n}+\frac{x}{n}+3=\frac{x}{m}-\frac{n}{m}$, 即

$$\frac{x}{n}-\frac{x}{m}=-\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-3, \text{ 即 } \frac{(n-m)}{m \cdot n} \cdot x = \frac{m^2+n^2+3m \cdot n}{m \cdot n}.$$

$$(n-m) \cdot x = m^2+n^2+3m \cdot n.$$

当 $n-m \neq 0$ 时, 即 $n \neq m$ 时 $x = \frac{m^2+n^2+3m \cdot n}{(n-m)} (m \neq 0, n \neq 0)$.

当 $n-m=0$ 时, 即 $n=m$ 时 $m^2+n^2+3mn=2n^2+3n^2=5n^2$.



因为 n 不能为零, 所以 $m^2 + n^2 + 3mn = 5n^2 \neq 0$, 原方程无解.

故当 m, n 均为非零实数, 并且 m 和 n 不相等时, 原方程有惟一解 $\frac{m^2 + n^2 + 3mn}{(n - m)}$; 当 m, n 相等时, 原方程无解.

例 5 已知关于 y 的方程 $2 - \frac{1}{3}(m - y) = 2y$ 的解为 $y = 1$, 那么关于 x 的方程 $m(x - 3) - 2 = m(2x - 5)$ 的解是多少?

解 由方程的解的定义, 把 $y = 1$ 代入等式 $2 - \frac{1}{3}(m - y) = 2y$ 后必能使等式成立, 由此得 m 的一元一次方程. 从中解出 m 后代入方程 $m(x - 3) - 2 = m(2x - 5)$ 即可解得 x . 此题主要掌握两个概念: “方程的解”和“解方程”. 答案是: $x = 0$.

例 6 关于 x 的方程 $\frac{2kx + a}{3} = 2 + \frac{x - bk}{6}$ 中, a, b 为定值, 无论 k 为任何值, 方程的根总是 1, 求 a, b 的值.

分析 $x = 1$ 总是满足方程, 将 $x = 1$ 和 k 的不同取值分别代入原方程中, 得到关于 a, b 的方程, 解方程求 a, b 的值.

解 当 $k = 0$ 时, $x = 1$ 仍是方程的根;

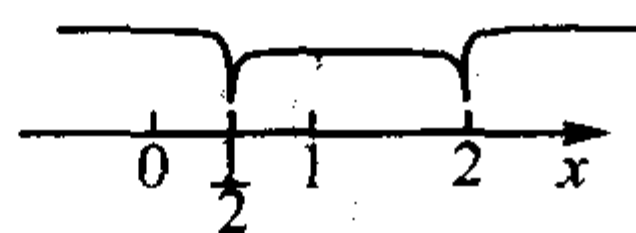
将 $k = 0, x = 1$ 代入原方程中, 得 $\frac{0 + a}{3} = 2 + \frac{1 - 0}{6}$, 解得 $a = \frac{13}{2}$;

当 $k = 1$ 时, $x = 1$ 仍是方程的根, 将 $k = 1, x = 1, a = \frac{13}{2}$ 代入原方程中得 $\frac{2 + \frac{13}{2}}{3} = 2 + \frac{1 - b}{6}$, 解得 $b = -4$.

故 $a = \frac{13}{2}, b = -4$.

例 7 解方程 $|2x - 1| - |x - 2| = 9$.

分析 要解这个方程, 需要设法去掉方程中的两个绝对值符号,



可采用零点分段法, 先求出零点 $\frac{1}{2}, 2$, 两个零点将数轴分成三部分:

图 4-1

$x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x < 2, x \geq 2$, 分别就上述三个范围去掉原方程中的绝对值符号, 将原方程变为一般的一元一次方程, 分别在 x 的上述三个范围内解一元一次方程求解.

解 令 $2x - 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$.

令 $x - 2 = 0$, 解得 $x = 2$. $\frac{1}{2}, 2$ 两个数将数轴分成三个部分 $x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x < 2, x \geq 2$, 如图 4-1 所示, 下面分别讨论.



①当 $x < \frac{1}{2}$ 时, 原方程可变形为: $-(2x-1) + (x-2) = 9$, 整理得: $-x-1=9$, 解得 $x = -10$. 因为 $-10 < \frac{1}{2}$, 所以方程有解 $x = -10$.

②当 $\frac{1}{2} \leq x < 2$ 时, 原方程可变形为: $(2x-1) + (x-2) = 9$, 整理得: $3x-3=9$, 解得 $x = 4$. 因为 $4 > 2$, 所以方程无解.

③当 $x \geq 2$ 时, 原方程可变形为: $(2x-1) - (x-2) = 9$, 整理得: $x+1=9$, 解得 $x = 8$. 因为 $8 > 2$, 所以方程有解 $x = 8$.

故原方程的解是 $x = -10$ 或 $x = 8$.

例 8 解方程 $2|x| + |x+1| - |3-x| = 2x+4$.

解 令 $x=0, x+1=0, 3-x=0$.

解得 $x=0, x=-1, x=3$.

在数轴上标出表示 $0, -1, 3$ 的三个点, 这三个点将数轴分成四部分: $x \leq -1, -1 < x \leq 0, 0 < x \leq 3, x > 3$. 如图 4-2 所示.

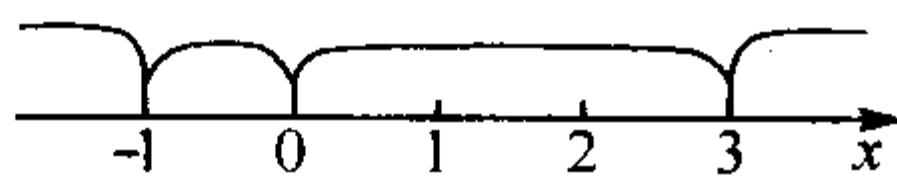


图 4-2

(1) 当 $x \leq -1$ 时, 原方程可变形为 $-2x - (x+1) - (3-x) = 2x+4$, 整理得: $-2x-4=2x+4$, 解得 $x = -2$.

由于 $-2 < -1$, 所以 $x = -2$ 是方程的解;

(2) 当 $-1 < x \leq 0$ 时, 原方程可变形为 $2 \times (-x) + (x+1) - (3-x) = 2x+4$, 整理得: $-2=2x+4$, 解得 $x = -3$.

由于 $-3 < -1$, 所以 方程无解;

(3) 当 $0 < x \leq 3$ 时, 原方程可变形为 $2x + (x+1) - (3-x) = 2x+4$, 整理得: $4x-2=2x+4$, 解得 $x = 3$. 故 $x = 3$ 是方程的解;

(4) 当 $x > 3$ 时, 原方程可变形为 $2x + (x+1) + (3-x) = 2x+4$, 整理得: $2x+4=2x+4, 0 \cdot x = 0$.

这说明满足 $x > 3$ 的一切实数 x 都是方程的解.

综上所述可知: 原方程的解为 $x = -2$ 或 $x \geq 3$.

例 9 甲、乙两人练习短距离赛跑, 甲每秒跑 7 米, 乙每秒跑 6.5 米, 如果甲让乙先跑 1 秒, 甲经过几秒可以追上乙?

分析 乙跑 1 秒的路程为 6.5 米, 这就是甲的追及路程, 从甲起跑到追上的时间里有关系: 甲跑的路程 - 乙跑的路程 = 6.5 米. 根据此等量关系就可解题.

解 设甲经过 x 秒追上乙. 由题意得: $7x - 6.5x = 6.5$. 解得 $x = 13$.

答: 甲经过 13 秒追上乙.

例 10 一个游泳者沿河逆流而上, 在 A 处将携带的物品遗失, 在继续向前游了



30min 后,发现物品丢失,立即返回寻找,结果在距 A 处 3km 的 B 处找到物品,求水流的速度.

解 设水流的速度为 x km/h,游泳者在静水中的速度为 y km/h,游泳者从 A 处经过 30min 到达 C 处时,物品从 A 处到达 D 处,游泳者从 C 处返回到

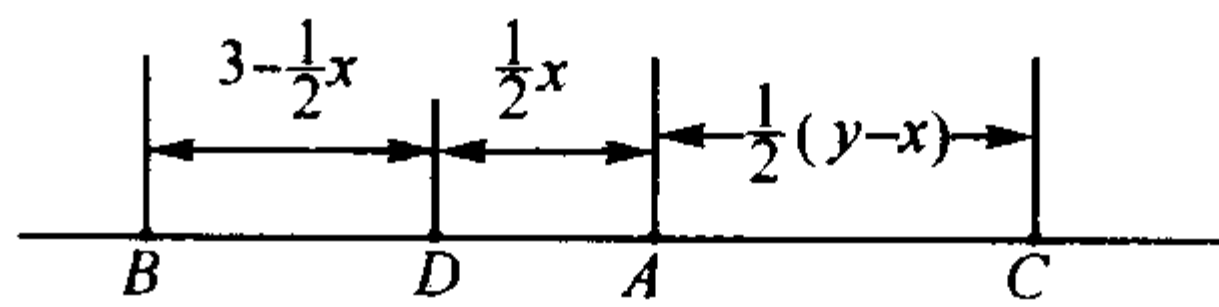


图 4-3

B 处追上物品,如图 4-3 所示,则 $AC = \frac{1}{2}(y - x)$,

$$AD = \frac{1}{2}x, BD = \left(3 - \frac{1}{2}x\right), \text{由时间关系可得 } \frac{3 - \frac{1}{2}x}{x} = \frac{3 + \frac{1}{2}(y - x)}{x + y}.$$

化简得 $yx = 3y$. 即 $x = 3$.

答:水流的速度为 3km/h.

例 11 某人骑自行车从甲地到乙地,先以 12km/h 的速度下山,再以 9km/h 的速度通过平路到达乙地,共用 55min;他返回时,先以 8km/h 的速度通过平路,再以 4km/h 的速度上山回到甲地,用了 1.5h. 求甲、乙两地之间的距离.

解法一 设平路长 x km,则从甲地到乙地时通过平路的时间为 $\frac{x}{9}$ h,返回时通过平路的时间为 $\frac{x}{8}$ h;下山共需 $\left(\frac{11}{12} - \frac{x}{9}\right)$ h,上山共需 $\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{8}\right)$ h,山路长为 $12\left(\frac{11}{12} - \frac{x}{9}\right)$ km 或 $4\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{8}\right)$ km,则 $12\left(\frac{11}{12} - \frac{x}{9}\right) = 4\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{8}\right)$. 解得 $x = 6$.

$$\text{所以 } 12\left(\frac{11}{12} - \frac{x}{9}\right) = 12\left(\frac{11}{12} - \frac{6}{9}\right) = 9(\text{km}).$$

答:甲、乙两地之间的距离为 9km.

解法二 设山路长为 x km,平路长为 y km,则甲、乙两地之间的距离为 $(x + y)$

$$\text{km,依题意,得} \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{9} = \frac{11}{12}, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

解得: $x = 3, y = 6$. 所以 $x + y = 9(\text{km})$.

答:甲、乙两地之间的距离为 9km.

例 12 现有含葡萄糖 4% 的糖水 60g,含葡萄糖 12% 的糖水 500g,另有足够多的纯葡萄糖和水.要配制成含葡萄糖 10% 的糖水 600g,试尽可能设计多种配制方案.

解 仅就足够多的纯葡萄糖与水,同学们就可创造出多种配制方案,如配制成各种浓度的葡萄糖水,然后加水稀释或加糖变浓.现就给定的四种物质考虑搭配方案,其方案也有多种.这是一题条件和结论给定,方法多样的开放题.当我们确定一个方案后,可设未知数列方程来解决.如:用水和纯葡萄糖混合,或在 12% 的糖水中加水稀释,或在



4%的葡萄糖水中加糖等等.下面仅就这三种方案设未知数列方程来解决.

(1)设用纯葡萄糖 x g,则用水 $(600 - x)$ g,由题意得 $x = 600 \times 10\%$,

解得 $x = 60$, $600 - x = 600 - 60 = 540$.

答:用纯葡萄糖 60g 水,540g 可配制所需糖水.

(2)设用 12%的葡萄糖水 x g,则用水 $(600 - x)$ g,

由题意得 $12\% x = 600 \times 10\%$,解得 $x = 500$, $600 - x = 600 - 500 = 100$.

答:用 12% 葡萄糖水 500g,水 100g 可配制所需糖水.

(3)设在 60g 的 4%的葡萄糖水中加 x g 葡萄糖,

由题意得 $4\% \times 60 + x = 600 \times 10\%$,

解得 $x = 57.6$, $600 - 60 - 57.6 = 482.4$.

答:4% 葡萄糖水 60g,并加纯葡萄糖 57.6g 和水 482.4g 可配制所需糖水.

其他的方案留给同学们自己思考,如果你和你周围的同学每人至少想出一种方案,那么请交流一下,比较哪种方案较实用合理.



【能力训练】

一、选择题

1.若方程 $(2a + 1)x^2 + bx + c = 0$ 表示关于字母 x 的一元一次方程,则必须 ().

(A) $a = \frac{1}{2}$, $b \neq 0$, c 为任意数

(B) $a \neq \frac{1}{2}$, $b \neq 0$, $c = 0$

(C) $a = -\frac{1}{2}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

(D) $a = -\frac{1}{2}$, $b \neq 0$, c 为任意数

3.如果实数 x 满足方程: $|2 - x| = 2 + |x|$,那么 $|2 - x|$ 等于 ().

(A) $\pm(x - 2)$

(B) 1

(C) $2 - x$

(D) $x - 2$

4.已知青铜含有80%的铜,4%的锌和 16%的锡,而黄铜是铜和锌的合金,今有黄铜和青铜的混合物一块,其中含有 74%的铜,16%的锌和 10%的锡,则黄铜含有铜和锌的比为 ().

(A) 13:7

(B) 15:8

(C) 16:9

(D) 17:10

4.某裁缝做一件童装、一条裤子、一件上衣,所用时间之比为 1:2:3,他一天共能做 2 件童装、3 条裤子、4 件上衣,则他做 2 件上衣、10 条裤子、14 件童装,需 ().

(A) 2 天

(B) 3 天

(C) 4 天

(D) 5 天

二、填空题

5.若关于 x 的方程 $||x - 2| - 1| = a$ 有三个整数解,则 a 等于_____.

6.已知 a, b 为整数,如果关于 x 的一元一次方程 $2x - [2 - (2b - 1)x] = a - 2$ 与



$(2b-1)x+3=7-[(2-b)x+3]$ 的解相同,那么 $ab=$ _____.

7. 把含盐 12% 的盐水和含盐 18% 的盐水混合,配制成含盐 14% 的盐水 300 克,那么应取 12% 的盐水 _____ 克,18% 的盐水 _____ 克.

8. 两个缸内共有 48 桶水,甲缸给乙缸加水一倍,然后乙缸给甲缸加甲缸剩余水的一倍,使两缸内的水量相等,则最初两缸内各有水 _____ 桶.

三、解答题

9. 解关于 x 的方程 $\frac{m+x}{n} = \frac{n+x}{m}$ ($mn \neq 0$).

10. 解方程 $\frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} + \frac{x-a-b}{c} = 3$, (其中 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0$).

11. 一辆大车与一辆小车在一段狭路上相遇,必须倒车,才能各自继续通行.如果小车正常行驶的速度是 90 千米/小时,大车正常行驶的速度是小车的 $\frac{1}{3}$,两车倒车时速度是各自正常速度的 $\frac{1}{5}$,小车需要倒车的路程是大车需要倒车路程的 4 倍,为了使后通过狭路的那辆车尽早地通过这段狭路,问哪辆车倒车较省时间?

12. 有甲、乙两容量均为 20 升的容器,甲盛满纯酒精,而乙为空容器.第一次从甲容器内倒出若干升于乙容器内,再将乙容器用水填满;第二次再将乙容器内的混合液,填满甲容器,第三次再将甲容器回倒乙容器 $6\frac{2}{3}$ 升,则这时两容器内所含纯酒精量恰好相等,问第一次从甲容器倒出酒精多少升?



五、二元一次方程组



【赛点目标】

1. 了解二元一次方程、二元一次方程组的有关概念.
2. 掌握解二元一次方程组的方法.
3. 能列二元一次方程组解应用题.



【方法述要】

1. 熟练掌握解二元一次方程组的方法,解二元一次方程组的基本思路是用“代入法”或“加减法”消元,把二元的方程转化为一元一次方程来解.

2. 二元一次方程组的消元技巧:一般而言,可以由方程组中的某个方程,将某一个未知数用关于另一个未知数的代数式表示,用代入法消元.但如果根据给定的方程组所具有的某些特点,则可灵活选用某种消元法,以简化计算.特别是方程组中关于两个未知数的代数式的系数对应相等或成比例,则可作整体消元,如方程组

$$\begin{cases} (3x - 5y) + 7(2x + 4y) = 1, \\ \frac{3x - 5y}{2} - \frac{2x + 4y}{3} = 2 \end{cases} \quad \text{中可把 } 3x - 5y \text{ 和 } 2x + 4y \text{ 看成一个整体进行消元.}$$

3. 二元一次方程的几何意义是平面直角坐标系中的一条直线,所以也可以用图像法解二元一次方程组.同时,两条直线的交点个数与方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解的个

数一致,并可用系数比进行判断,即当 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ 时,方程组有惟一的一组解;当 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq$

$\frac{c_1}{c_2}$ 时,方程组无解;当 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 时,方程组有无穷多组解.

4. 三元(或三元以上)一次方程组,同样可以通过代入消元法或加减消元法,转化为二元一次方程组,进而转化为一元一次方程,从而求出原方程组的解.但要注意,若含有三个未知数的方程组是由两个相互独立的方程组成,则只能求出三个未知数的关系,而不能求出各未知数的值.

5. 列方程组解应用题的一般步骤与列一元一次方程解应用题的步骤相仿.有所区别的是,在设未知数时,为了方便,设了两个(或三个)未知数,则需找出两个(或三个)等



量关系,列方程组求解.



【赛题精讲】

例1 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x - 2.6 = 9.8y, \\ \frac{1}{3}x - 3y = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x + y - \frac{1}{2}}{5} - \frac{x - y + 2}{2} + 1 = 0, \\ 4(x - y) - 3\left(2x - \frac{y}{3}\right) = 16. \end{cases}$$

解 第(1)题用代入法,把 $x = 2.6 + 9.8y$, 代入另一个方程 $\frac{1}{3}x - 3y = 1$ 中的 x , 从而消去 x , 将方程组转化为关于 y 的一元一次方程并解之. 答案 $\begin{cases} x = 7.5, \\ y = 0.5. \end{cases}$

第(2)题用加减法,把原方程组化简成二元一次方程组的标准形式得:

$$\begin{cases} 3x - 7y = -1, \\ 2x + 3y = -16, \end{cases} \text{ 然后再用加减消元法解. 答案: } \begin{cases} x = -5, \\ y = -2. \end{cases}$$

例2 解下列各方程组:

$$(1) \begin{cases} 5\left(\frac{2}{3} + y\right) - 8(x - 3) = 20, \\ 20(x - 3) + 5\left(\frac{2}{3} + y\right) = 27; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x = 8y, \\ 3x = 4z, \\ 2x - 3y + z = 21. \end{cases}$$

解 第(1)题用换元法,设 $x - 3 = m$, $\frac{2}{3} + y = n$ (*), 则原方程组为:

$$\begin{cases} 5n - 8m = 20, \\ 20m + 5n = 27. \end{cases} \text{ 由于 } n \text{ 的系数相同,用加减消元法解,得 } \begin{cases} m = \frac{1}{4}, \\ n = 4\frac{2}{5}. \end{cases} \text{ 回代(*)式,得原}$$

$$\text{方程组的解为: } \begin{cases} x = 3\frac{1}{4}, \\ y = 3\frac{11}{15}. \end{cases}$$

第(2)题需灵活解题,可以先由前两个方程得 $y = \frac{5}{8}x$ ①, $z = \frac{3}{4}x$ ②,进而代入第三个方程,消去 y 和 z ,得 x 的一元一次方程,解得 x 后,再回代①、②,求得 y 和 z .

也可以从前两个方程求得 $x:y:z = 8:5:6$,于是设 $x = 8k$, $y = 5k$, $z = 6k$,代入第三个方程消去 x, y, z 三个未知数,转化为关于 k 的一元一次方程.求得 k ,则 x, y, z

$$\text{也随之求出答案: } \begin{cases} x = 24, \\ y = 15, \\ z = 18. \end{cases}$$



例3 解关于 x, y 的方程组: $\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0, \\ (a-1)x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$

解 因为 y 的系数相等, 故用加减消元法解. 消去 y 得 x 的一元一次最简方程: $(a-4)x = 2$. 要注意, 不能主观臆定 x 的系数 $a-4$ 一定不为零, 得 $x = \frac{2}{a-4}$, 而要对 $a-4$ 的性质进行讨论. 答案: 当 $a \neq 4$ 时, 方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{2}{a-4}, \\ y = \frac{5a-26}{4(a-4)} \end{cases}$ 当 $a = 4$ 时, 方程组无解.

例4 已知方程组 $\begin{cases} x + y = 7, & \text{①} \\ ax + 2y = c. & \text{②} \end{cases}$ 选择 a 和 c 的值, 使方程组: (1) 有惟一解; (2) 有无数解; (3) 无解.

解 由①得 $y = 7 - x$. 把 $y = 7 - x$ 代入②得 $ax + 2(7 - x) = c$.

整理得 $(a-2)x = c-14$. ③

当方程③分别有惟一解、无数解、无解时, 原方程组也有惟一解、无数解、无解.

所以 (1) 当 $a \neq 2, c$ 为任何数时, 原方程组有惟一解;

(2) 当 $a = 2, c = 14$ 时, 原方程组有无数解;

(3) 当 $a = 2, c \neq 14$ 时, 原方程组无解.

例5 已知方程组 $\begin{cases} x + 2y = n, \\ 4x - y = 8 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 5x + 3y = 27, \\ 3x - 4y = m \end{cases}$ 有相同的解, 求 m, n 的值.

分析 本题可以分别求出两个方程组的解, 从而得出关于 m, n 的方程组, 但计算量较大. 由于题中第二个方程和第三个方程不含 m, n , 因此可以先由这两个方程解出 x, y 的值, 再代入另外两个方程求 m, n 的值.

解 解方程组 $\begin{cases} 4x - y = 8, \\ 5x + 3y = 27, \end{cases}$ 得 $x = 3, y = 4$.

把 $x = 3, y = 4$ 代入第一和第四个方程得

$n = x + 2y = 3 + 2 \times 4 = 11, m = 3x - 4y = 3 \times 3 - 4 \times 4 = -7$.

所以 $m = -7, n = 11$.

例6 已知 $4x - 3y - 6z = 0, x + 2y - 7z = 0$ (x, y, z 均不为 0), 求 $\frac{2x^2 + 3y^2 + 6z^2}{x^2 + 5y^2 + 7z^2}$ 的值.

解 解关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 4x - 3y = 6z, \\ x + 2y = 7z, \end{cases}$ 得

$x = 3z, y = 2z$.

所以 原式 $= \frac{2(3z)^2 + 3(2z)^2 + 6z^2}{(3z)^2 + 5(2z)^2 + 7z^2} = \frac{36z^2}{36z^2} = 1$.



例7 若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足以下方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, & \text{①} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, & \text{②} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24, & \text{③} \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48, & \text{④} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96, & \text{⑤} \end{cases}$$

求 $3x_4 + 2x_5$ 的值.

解 将以上5个方程两边相加得

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186.$$

$$\text{即 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31. \quad \text{⑥}$$

$$\text{④} - \text{⑥} \text{ 得 } x_4 = 17.$$

$$\text{⑤} - \text{⑥} \text{ 得 } x_5 = 65.$$

$$\text{所以 } 3x_4 + 2x_5 = 3 \times 17 + 2 \times 65 = 181.$$

例8 已知等式 $3p = d$ 和 $a = dp$ (a, d, p 均不为零), 试用尽可能多的方法从这两个等式中得到 a 和 d 的关系.

解 把这两个等式用方程组形式表示得 $\begin{cases} 3p = d, & \text{①} \\ a = dp. & \text{②} \end{cases}$ 只要消去 p , 就可得 a 和 d 的关系. 因此, 问题也就转化为消去 p 的方法尽可能多. 以下仅举四种方法, 同学们可通过这四种方法打开思路, 再另想几种.

方法一 由①得 $p = \frac{d}{3}$ ③, 把③代入②得 $a = d \times \frac{d}{3}$, 即 $3a = d^2$;

方法二 由①得 $\frac{3}{d} = \frac{1}{p}$ ③, 把③ \times ②得 $\frac{3a}{d} = d$, 即 $3a = d^2$;

方法三 由①得 $d = 3p$ ③, 把③ \div ②得 $\frac{d}{a} = \frac{3p}{dp}$, 即 $3a = d^2$;

方法四 由①得 $p = \frac{d}{3}$ ③, 由②得 $p = \frac{a}{d}$ ④, 把③ $-$ ④得 $\frac{d}{3} - \frac{a}{d} = 0$, 即 $3a = d^2$.

同学们从以上方法可以看出, 消元除了用加减和代入方法外, 还可以用乘除法, 当然, 这要在同除的数不为零的前提下.

例9 现有甲、乙、丙三种货物, 若购买甲3件、乙7件、丙1件共需315元; 若购买甲4件、乙10件、丙1件共需420元. 问要购买甲、乙、丙各1件共需多少元?

解 设甲、乙、丙三种货物每件分别为 x, y, z 元, 依题意, 得

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 315, & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 10y + z = 420. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } x + 3y = 105. \quad \text{③}$$



$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \times 2 \text{ 得 } x + y + z = 105.$$

所以要购买甲、乙、丙各 1 件共需 105 元.

例 10 已知青铜含 80% 的铜、4% 的锌和 16% 的锡, 而黄铜是铜和锌的合金, 现有黄铜和青铜的混合物一块, 其中含有 74% 的铜、16% 的锌和 10% 的锡, 求黄铜含有铜和锌之比.

解 设黄铜中含铜为 $x\%$, 则含锌为 $1 - x\%$, 又设混合物分别含青铜和黄铜的重量为 a, b , 依题意, 得

$$\begin{cases} 80\%a + x\%b = 74\%(a + b), & \textcircled{1} \\ 4\%a + (1 - x\%)b = 16\%(a + b), & \textcircled{2} \\ 16\%a = 10\%(a + b). & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\text{由 } \textcircled{3} \text{ 得, } a = \frac{5}{3}b. \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得, } 80\% \times \frac{5}{3}b + x\%b = 74\% \left(\frac{8}{3}b \right), x = 64.$$

那么 $1 - x\% = 36\%$. 又 $64\% : 36\% = 16 : 9$, 所以 黄铜中含铜与锌的比为 16:9.

例 11 某牛奶加工厂现有鲜奶 9 吨, 若在市场上直接销售鲜奶, 每吨可获取利润 500 元. 制成酸奶销售, 每吨可获取利润 1200 元; 制成奶片销售, 每吨可获取利润 2000 元.

该工厂的生产能力是: 如制成酸奶, 每天可加工 3 吨; 制成奶片每天可加工 1 吨. 受人员限制, 两种加工方式不可同时进行; 另受气温条件限制, 这批牛奶必须在 4 天内全部销售或加工完毕. 为此, 该厂设计了两种可行方案:

方案一: 尽可能多的制成奶片, 其余直接销售鲜牛奶;

方案二: 将一部分制成奶片, 其余制成酸奶销售, 并恰好 4 天完成.

你认为选择哪种方案获利最多, 为什么?

解 选择方案一: 总利润 $= 4 \times 2000 + (9 - 4) \times 500 = 10500$ 元;

方案二: 设 4 天内加工酸奶 x 吨, 加工奶片 y 吨, 则

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 4. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 7.5, \\ y = 1.5. \end{cases}$$

所以 总利润 $= 1200 \times 7.5 + 2000 \times 1.5 = 12000$ 元.

所以 选择第二种方案获利最多.

例 12 某校运动会在 400m 环形跑道上进行 10000m 比赛. 甲、乙两位运动员同时起跑后, 乙的速度超过甲的速度. 乙的速度不变, 在第 15 分时甲加快速度, 在第 18 分时甲追上乙并且开始超过乙; 在第 23 分时甲再次追上乙, 而在第 23 分 50 秒时甲到达终点. 问乙跑完全程所用的时间是多少分钟?



解 设出发时甲的速度为 $a\text{m/min}$, 乙的速度为 $b\text{m/min}$, 第 15 分甲提高的速度为 $x\text{m/min}$, 所以第 15 分后甲的速度为 $(a+x)\text{m/min}$, 依题意, 到第 15 分时, 乙比甲多跑 $15(b-a)\text{m}$, 甲提速后 3 分(第 18 分)追上乙, 则

$$(a+x-b) \times 3 = 15(b-a). \quad ①$$

接着甲又跑了 5 分(第 23 分), 再次追上乙即超过乙一圈, 则

$$(a+x-b) \times 5 = 400. \quad ②$$

到了第 23 分 50 秒时, 甲跑完全程 10000m , 其中前 15 分是以速度 a 跑完, 后面 $8\frac{5}{6}$ 分是以速度 $(a+x)$ 跑完, 则 $15a + 8\frac{5}{6}(a+x) = 10000$. ③

由①、②得 $b-a = 16\text{m/min}$, $x = 96\text{m/min}$.

代入③得 $a = 384\text{m/min}$, $b = 400\text{m/min}$.

乙是一直以 400m/min 的速度跑完全程, 因此乙跑完全程所用时间为: $10000 \div 400 = 25(\text{min})$.



【能力训练】

一、选择题

1. 已知方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ y = (3k-1)x + 2 \end{cases}$ 有无穷多组解, 则 $2k + b^2$ 的值为().
 (A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 10

2. 方程组 $\begin{cases} |x-1| - y = 0, \\ |x+1| + |y| = 4 \end{cases}$ 的解有().
 (A) 1 组 (B) 2 组 (C) 3 组 (D) 0 组

3. 如果一个两位正整数的十位上的数字与个位上的数字的和为 6, 那么符合这个条件的两位数的个数有()个.

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

4. 某班学生分苹果, 若每人分 6 个则差 6 个, 若每人分 5 个则多 5 个, 那么这个班有()个学生?

(A) 8 (B) 10 (C) 11 (D) 22

二、填空题

5. 已知方程组 $\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -2 \end{cases}$ 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $x = 0$ 时, $y = 5$; $x = 1$ 时, $y = 1$; $x = -1$ 时, $y = 13$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若 p 使方程组 $\begin{cases} 3x + 5y = p + 2, \\ 2x + 3y = p \end{cases}$ 的解 $x + y = 2$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$, $p = \underline{\hspace{2cm}}$.



8. 若 $|3x + 3y + 5| + (3x + 2y - 25)^2 = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

9. 求值:

(1) 已知 x, y, z 满足方程组 $\begin{cases} x - 2y + z = 0, & \text{①} \\ 7x + 4y - 5z = 0. & \text{②} \end{cases}$, 求 $x:y:z$;

(2) 已知 $\begin{cases} 4x - 3y - 6z = 0, & \text{①} \\ x + 2y - 7z = 0. & \text{②} \end{cases}$, 且 $z \neq 0$, 求 $\frac{2x^2 + 3y^2 + 6z^2}{x^2 + 5y^2 + 7z^2}$.

10. 解方程组:

$$(1) \begin{cases} x(x+y+z) = 6, & \text{①} \\ y(x+y+z) = 12, & \text{②} \\ z(x+y+z) = 18. & \text{③} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 3, & \text{①} \\ \frac{yz}{y+z} = 4, & \text{②} \\ \frac{zx}{z+x} = 6. & \text{③} \end{cases}$$

11. 求 a, b 的值:

(1) 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x - y = 5, & \text{①} \\ ax - by = 8. & \text{②} \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2x + 3y = -4, & \text{③} \\ 4ax + 5by = -22. & \text{④} \end{cases}$ 同解;

(2) 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + ay = 7, & \text{①} \\ 2x + y = 2b. & \text{②} \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x + ay = 13, & \text{③} \\ 2y - x = 5. & \text{④} \end{cases}$ 同解;

(3) 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x + 2ay = 4, & \text{①} \\ bx - 3y = 5. & \text{②} \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2x - 3ay = 7, & \text{③} \\ 2bx + 2y = b + 1. & \text{④} \end{cases}$ 同解.

12. 已知关于 x, y 的二元一次方程 $(a-3)x + (2a-5)y + 6-a = 0$, 当 a 每取一个值时就有一个方程, 这些方程有一个公共解, 求出这个公共解, 并证明这对任何 a 值它都能使方程成立.



六、线段、角的有关计算



【赛点目标】

1. 了解线段、射线和直线的意义,了解角和角平分线的概念,会比较线段大小,会表示角.
2. 理解两点确定一条直线的意义,理解余角和补角的概念,学会角的度量和角的计算方法.学会两线段的和、差的画法,学会两角和、差的画法及角平分线的画法,学会用直尺和圆规画线段的中点.
3. 掌握“两点间线段最短”公理的简单应用.
4. 掌握三角形内角和定理及三角形的外角性质,在三角形中能应用这些关系进行有关角的计算和证明.
5. 理解三角形中两边之和大于第三边的性质.理解三角形的角平分线、中线、高线的概念,并能应用它们解有关问题.



【方法述要】

1. 明确线段、直线、射线之间的联系和区别,理解直线的两个性质和两点之间线段最短的公理.
2. 连结两点的线段的长度叫做两点间的距离.注意线段和距离是两个不同的概念,前者是形,后者是数.比较线段大小的方法有两种:度量法和叠合法.两线段的和仍是线段,两线段的差也仍是线段.
3. 了解角的两种定义,从角的顶点引出且把此角分为相等的两部分的射线叫做这个角的平分线.
4. 角的度量单位是度、分、秒. $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$. 角按大小可分为锐角、直角、钝角、平角及周角.
两角之和等于 90° , 称这两个角互为余角; 两角之和等于 180° , 称这两个角互为补角.
两个性质: 同角(或等角)的余角相等; 同角(或等角)的补角相等.
5. 了解三角形的定义,并能把三角形按角(或按边)分类,掌握三角形中三边之间的关系和内角和、外角和及一个外角与两个不相邻的内角和之间的关系.
6. 明确三角形的角平分线、中线、高线都是线段,三角形的角平分线、中线均在三角



形的内部;三角形的高线可能在三角形内部,也可能在外部,也可能与边重合.

7. 用直尺和圆规可以作线段的中点、两线段的和、两线段的差、角的平分线、两角和及两角差,也可作三角形的角平分线、中线和高线.一般“尺规作图”不要求写作法,但须保留作图痕迹.

8. 线段和角是平面几何中最基本的两类几何图形,线段和角的有关计算也是平面几何中最基本的计算,因为平面几何中大部分计算如求长度、角度、周长、面积等,实质上都是线段和角的计算.对于求线段的长度和角的度数的计算,通常有两种思路:一是根据各个量之间的关系,用已知量来表示未知量,直接求出未知量;二是列方程或方程组.线段和角的有关计算,要注意结合图形,寻找各个量之间隐含的等量关系(如和差关系等).



【赛题精讲】

例1 如图6-1所示,点 A, B, C, D, E 都在同一条直线上,若 $AB = a, AD = b, CD = c, CE = d$,试用 a, b, c, d 来表示线段 BE 的长.

解 $\because BC = AD - AB - CD$

$$= b - a - c,$$

$$\therefore BE = BC + CE = b - a - c + d.$$

说明 线段的计算关键是找出各线段之间的联系,用已知的线段来表示所求线段.

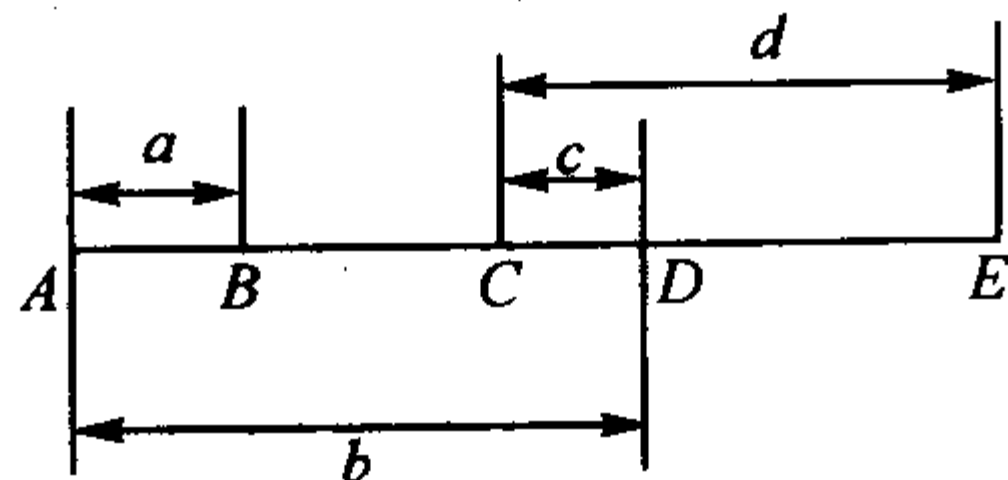


图 6-1

例2 如图6-2所示,点 C, D 是线段 AB 上两点,且 $AC:CB = 1:4, AD:DB = 3:2$,若 $CD = 1$,求 AB 的长.

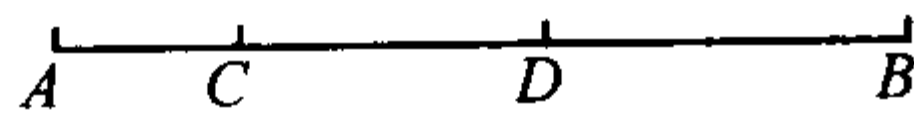


图 6-2

解法一 $\because AC:CB = 1:4, \therefore AC = \frac{1}{5}AB.$

又 $\because AD:DB = 3:2, \therefore AD = \frac{3}{5}AB.$

$$\therefore CD = AD - AC = \frac{2}{5}AB = 1. \therefore AB = 2.5.$$

解法二 设 $AC = x, DB = y$,依题意,得

$$\begin{cases} x:(y+1) = 1:4, \\ (x+1):y = 3:2. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 4x = y+1, \\ 2(x+1) = 3y. \end{cases}$$

解得 $x = 0.5, y = 1. \therefore AB = x + 1 + y = 2.5.$

例3 如图6-3所示,点 C 是线段 AB 上任意一点,点 M, N 分别是线段 AC, BC 的中点,已知 $AB = 12$,求 MN 的长.



解 \because 点 M 是线段 AC 的中点, $\therefore MC = \frac{1}{2}AC$.

又 \because 点 N 是线段 BC 的中点,

$$\therefore CN = \frac{1}{2}BC.$$

$$\begin{aligned}\therefore MN &= MC + CN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC \\ &= \frac{1}{2}(AC + BC) = \frac{1}{2}AB = 6.\end{aligned}$$

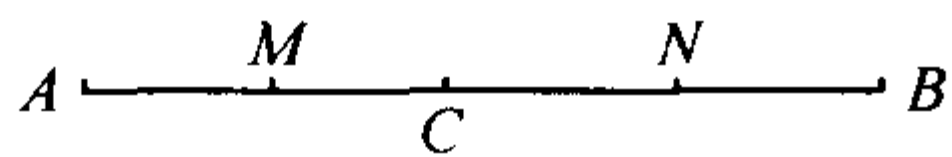


图 6-3

说明 计算线段的长度时所用到的等量关系,主要是线段的和差关系.因此,要注意观察各点的位置.

例 4 (1)点 A, B 是线段 MN 上的任意两点, $AM = a$, $BN = b$, $MN = c$, 点 O 是 AN 的中点. 求线段 BO, MO 的长度.

(2)计算 10 点 15 分时,时钟上时针和分针所成的角度.

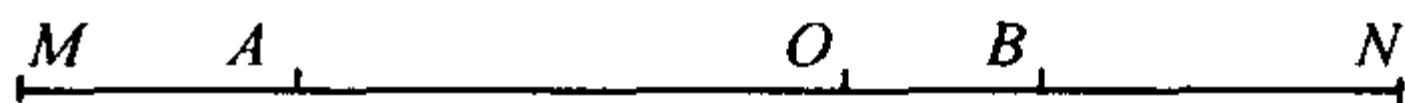


图 6-4

解 (1)画图 6-4, 复习线段的和、差、倍、分的计算.

$$\therefore AN = c - a,$$

$$\therefore BO = ON - BN = \frac{1}{2}AN - BN = \frac{c-a}{2} - b,$$

$$MO = \frac{c-a}{2} + a.$$

(2)如图 6-5, 钟面上相邻两个数字间的角度(圆心角度数)是 30° , 即分针走一圈(360°), 时针走 30° . 10 点 15 分时, 分针走四分之一圈(90°), 时针走了 $7^\circ 30'$, 所以此时时针和分针所成的角是 $142^\circ 30'$.

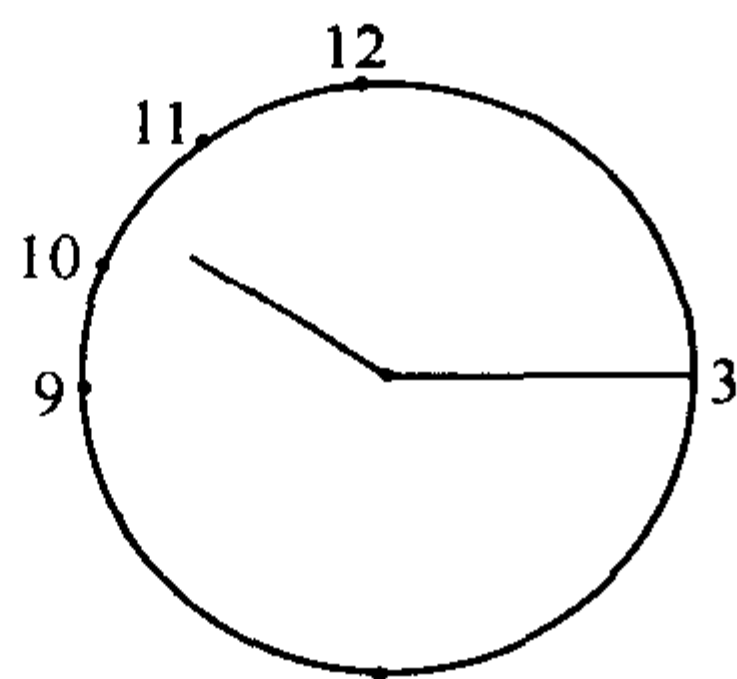


图 6-5

例 5 A, B, C, D 为同一平面内的 4 个点, 通过这 4 个点可以确定几条直线?

解 平面内两点确定一条直线, 当平面内 4 个点中任何 3 点都不在同一直线上时, 每 2 点可确定一条直线, 但当题中的 4 个点中有 3 点共线或 4 点共线时情况就不同了. 所以本题在解答时必须分几种情况进行讨论.

如图 6-6 所示, (1)当 4 点中任何 3 点不在同一直线上时, 确定 6 条直线(甲); (2)当 4 点中有某 3 点在同一直线上时, 确定 4 条直线(乙); (3)当 4 点共线时, 确定一条直线(丙).

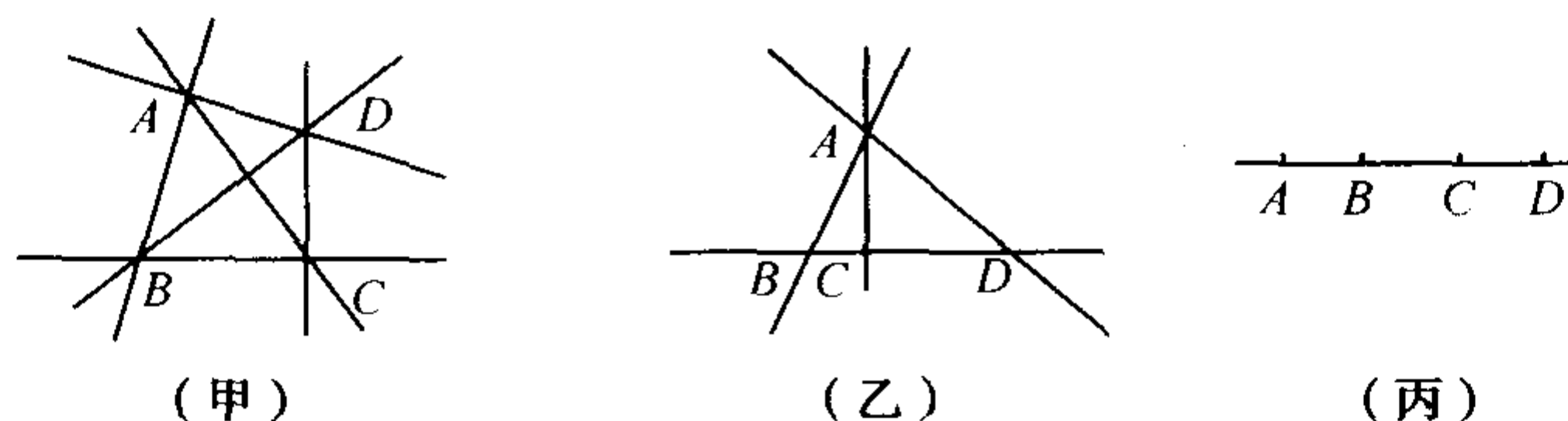


图 6-6

例 6 如图 6-7, D 是三角形 ABC 内任意一点, 求证: $AB + AC > DB + DC$.

解 三角形的三边数量关系是研究几何图形中线段大小关系的基础之一, 题中的四条线段分别在两个三角形中, 最好能用三角形使它们彼此联系起来, 添加辅助线是常用的方法.

延长 BD 交 AC 于点 E , 在三角形 ABE 和三角形 EDC 中分别应用“三角形中两边之和大于第三边”, 再累加即得.

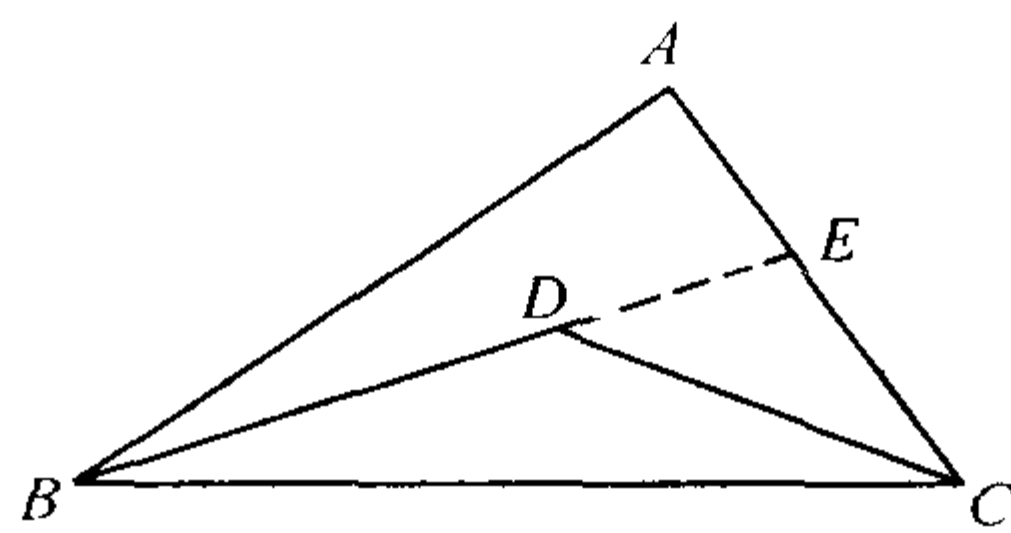


图 6-7

例 7 在某张高度一定的桌子上放置两块相同的木块, 如图 4-8 所示, 在图(1)中, $R = 77\text{cm}$, 在图(2)中, $S = 63\text{cm}$, 求桌子的高度.

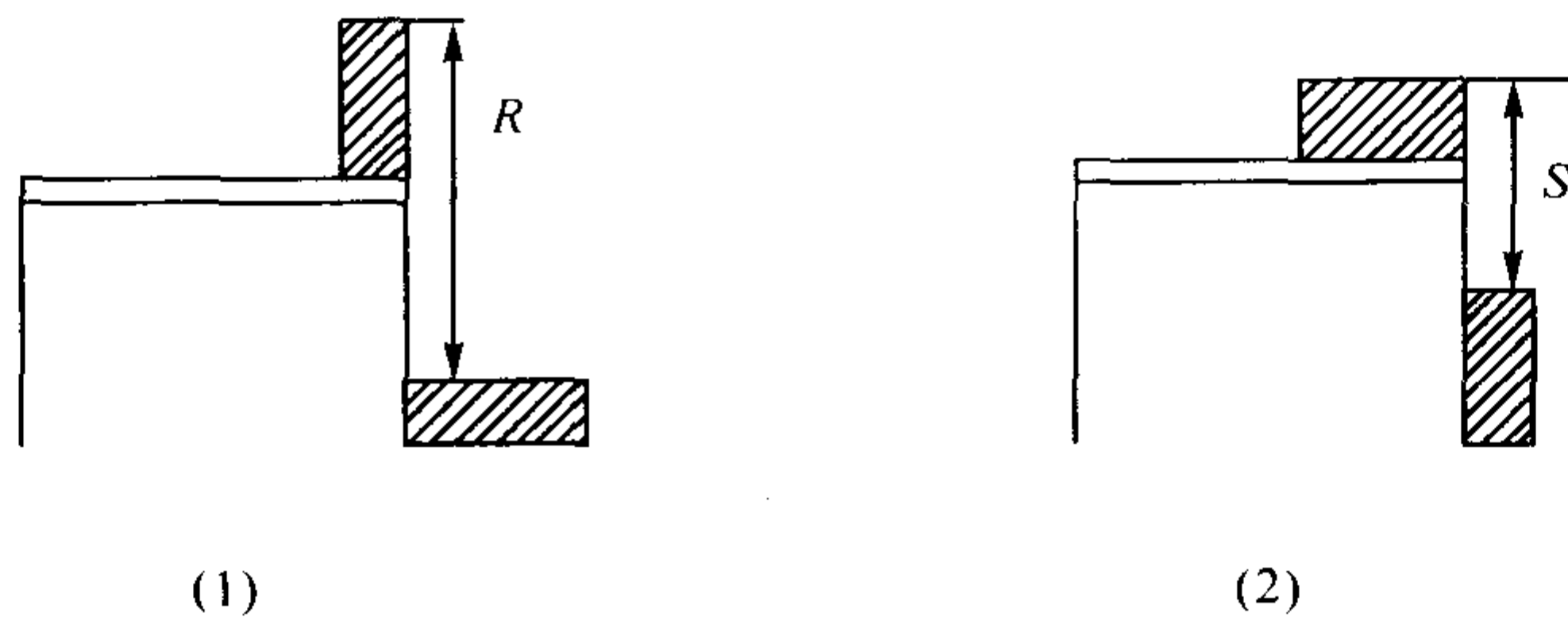


图 6-8

解 设桌子的高为 $x\text{cm}$, 木块的长为 $a\text{cm}$, 宽为 $b\text{cm}$, 依题意, 得

$$\begin{cases} x + a - b = 77, \\ x + b - a = 63. \end{cases}$$

两式相加得 $2x = 140$. 即 $x = 70$.

答: 桌子的高度为 70cm .

例 8 如图 6-9 所示, 点 A, O, B 在同一条直线上, OC 平分 $\angle AOD$, OE 平分 $\angle BOC$, 若 $\angle EOD = 20^\circ$, 求 $\angle COD$ 的度数.

解 $\because OE$ 平分 $\angle BOC, \therefore \angle COE = \angle BOE$.

又 $\because \angle AOE + \angle BOE = 180^\circ$,

$\therefore \angle AOE + \angle COE = 180^\circ$.

①



又 \because OC 平分 $\angle AOD$,

$$\therefore \angle AOD = 2\angle COD = 2(\angle COE + 20^\circ).$$

$$\therefore \angle AOE = \angle AOD - 20^\circ = 2\angle COE + 20^\circ. \quad ②$$

②代入①得

$$2\angle COE + 20^\circ + \angle COE = 180^\circ.$$

$$\therefore 3\angle COE = 160^\circ.$$

$$\therefore \angle COE = \left(53 \frac{1}{3}\right)^\circ.$$

说明 本题列方程或方程组将会更简便.

例 9 时钟从3时到时针与分针第一次重合时,时针和分针转过的角分别是多少度?

解 设时钟从3时到时针与分针重合时,时针转过的角度为 α° , (如图 6-10 中的 $\angle BOC$), 则分针转过的角度为 $(\alpha + 90)^\circ$ (图中 $\angle AOC$). 因为时针转 30° (钟面 1 格) 时, 分针转 360° (钟面 12 格), 根据比例列方程 $\frac{\alpha}{\alpha + 90} = \frac{30}{360}$. 解得 $\alpha = 7.5$.

$$\text{则 } \alpha + 90 = 97.5.$$

$$\therefore \text{时针转过 } 7.5^\circ, \text{分针转过 } 97.5^\circ.$$

例 10 仅有一副三角板,能够画出多少个小于平角的角? 它们各是多少度?

分析 一副三角板共有 6 个角, 分别是 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 和 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, 用一副三角板能够画出的角是以上的角以及它们的和、差.

解 分三种情况考虑:

(1) 单独画出的角有: $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

(2) 通过求和画出的角有:

$$30^\circ + 45^\circ = 75^\circ,$$

$$30^\circ + 90^\circ = 120^\circ,$$

$$45^\circ + 60^\circ = 105^\circ,$$

$$45^\circ + 90^\circ = 135^\circ,$$

$$60^\circ + 90^\circ = 150^\circ,$$

$$30^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 165^\circ.$$

(3) 通过求差画出的角有:

$$45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

\therefore 用一副三角板可以画出 11 个小于平角的角, 它们分别是: $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ$.

例 11 过平面内点 O 任意作 9 条直线, 求证: 以点 O 为顶点的角中, 必有一个小于 26° .

证明 以点 O 为顶点的角中, 相邻两条射线可组成一个角, 这样的角共有 18 个, 记为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{18}$.

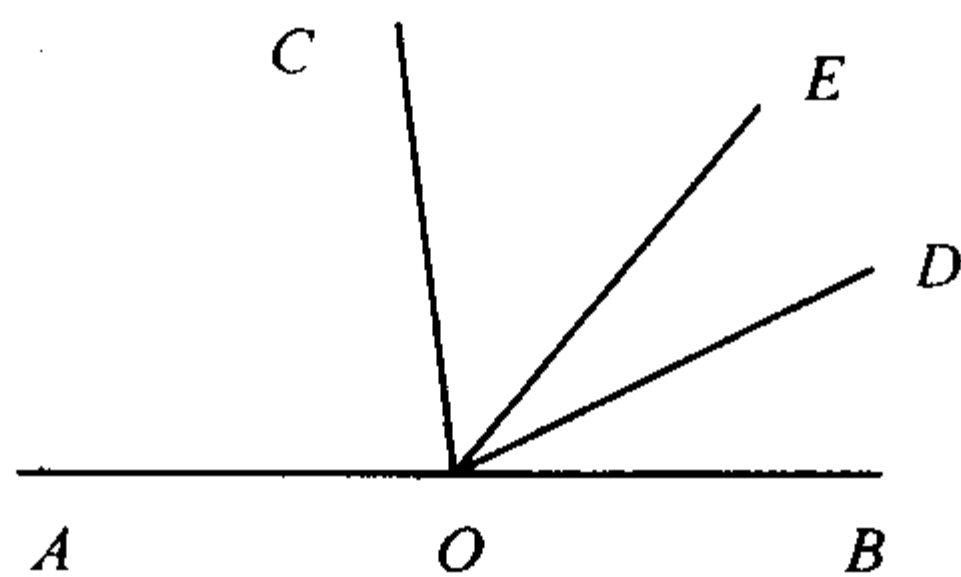


图 6-9

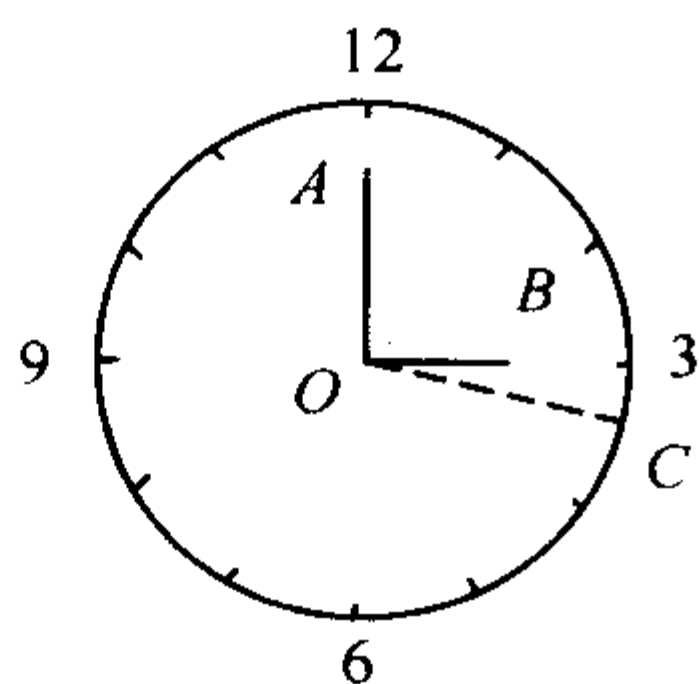


图 6-10



假设 $\alpha_1 \geq 21^\circ, \alpha_2 \geq 21^\circ, \dots, \alpha_{18} \geq 21^\circ$, 则 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{18} \geq 21^\circ \times 18 = 378^\circ$.

又 \because 这 18 个角刚好构成一个周角,

$$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{18} = 360^\circ.$$

两者矛盾. 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18}$ 中, 必有一个角小于 21° .

例 12 在线段 AB 上任取 198 个点, 连同 A, B 两点共有 200 个点, 问以这 200 个点中的两点为端点的线段有多少条?

分析 本例中线段数量较多, 若采用穷举法会很麻烦, 也容易漏. 因此可以考虑用分类穷举法, 按分类标准不同, 有不同解法.

解法一 设这 198 个点依次为 P_1, P_2, \dots, P_{198} , 如图 6-11 所示.

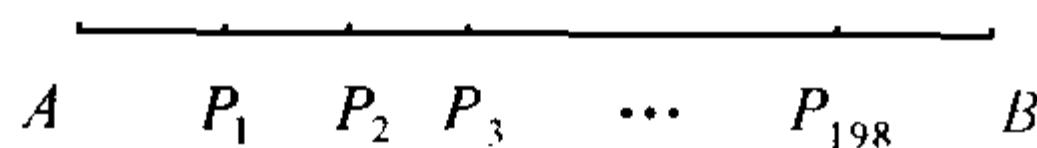


图 6-11

\because 以 A 为始点的线段共有 $200 - 1 = 199$ 条,

以 P_1 为始点的线段共有 $199 - 1 = 198$ 条,

以 P_2 为始点的线段有 197 条,

...

以 P_{198} 为始点的线段共有 1 条,

\therefore 满足条件的线段有 $1 + 2 + 3 + \dots + 199 = 19900$ 条.

解法二 线段上不含其他点的线段共有 199 条, 线段上含有 1 个点的线段共有 198 条, 线段上含有 2 个点的线段共有 197 条, 依此类推, 满足条件的线段共有 $1 + 2 + 3 + \dots + 199 = 19900$ 条.

解法三 因为两点确定一条线段, 由组合知识可知: 从 200 个点中选取 2 个点, 共有 $\frac{200 \times 199}{2} = 19900$ 种选法, 于是满足条件的线段共有 19900 条.



【能力训练】

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, 若 $\triangle ABC$ 的最短边与三角形周长的比为 k , 则 k 的取值范围是().

- (A) $\frac{1}{5} < k < \frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{5} < k < \frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{6} < k < \frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6} < k < \frac{1}{5}$

2. 直线上分布着 99 个点, 我们来标出以这些点为端点的一切可能的线段的中点, 那么互不重合的中点至少有().

- (A) 4851 个 (B) 1617 个 (C) 199 个 (D) 195 个

3. 一昼夜(0 点到 24 点)时针和分针互相垂直的次数是().

- (A) 48 次 (B) 46 次 (C) 44 次 (D) 42 次

4. 已知 $\angle MON = 40^\circ$, P 为 $\angle MON$ 内一点, 现在 OM 上取点 A , 在 ON 上取点 B ,



则当 $\triangle PAB$ 的周长取最小值时, $\angle APB$ 的度数是().

- (A) 80° (B) 90° (C) 100° (D) 120°

二、填空题

5. 三角形的三条边互不相等且均为整数,最长边与最短边之和为8,第三条边为偶数,那么这个三角形的周长是_____厘米.

6. 不等边三角形的三条边长都是自然数,其中两条边长是3、4、5中的某两个数,那么符合条件的三角形的周长有_____个不同的数值.

7. 如图6-12, $\angle AOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOB = \alpha$,若以 OA, OB, OC, OD, OE 为边的所有角之和等于 380° ,则 $\angle AOB =$ _____.

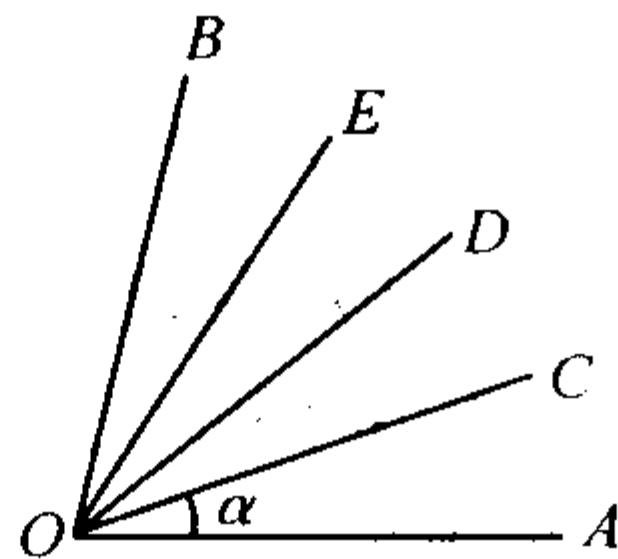


图 6-12

8. 以 O 为顶点,以 $OA_1, OA_2, \dots, OA_{10}$ 为边作若干个角,那么至少可以作出_____条互不重合的角平分线.

三、解答题

9. 试证凸 n 边形的内角中,锐角最多有三个.

10. 过点 O 任意作七条直线,求证:以 O 为顶点的角中必有一个小于 26° .

11. 已知平面上有 $2n+2$ 个点($n \geq 1$),其中任意三点均不共线,求证:在该平面上至少存在一条直线通过它们之中的两个点,而使其余的 $2n$ 个点各有一半落在这条直线的两侧.

12. 一直线从左到右顺次排列着2004个点: $P_1, P_2, \dots, P_{2004}$,已知 P_k 点是线段 $P_{k-1}P_{k+1}$ 的 k 等分点中最靠近 P_{k+1} 的那个分点($2 \leq k \leq 2003$).例如, P_5 点就是线段 P_4P_6 的五等分点中最靠近 P_6 的那个点,如果线段 P_1P_2 的长度是1,线段 $P_{2003}P_{2004}$ 的长度为 l ,求证: $2l < \frac{1}{3^{2000}}$.



七、相交线、平行线



【赛点目标】

1. 理解对顶角的概念和性质,了解平行线的定义、平行公理的意义,理解同位角、内错角、同旁内角的意义及正确理解两直线被第三条直线所截构成的各种角.
2. 掌握平行线的性质和判定方法,应用有关平行线的知识进行推理论证,增强逻辑思维能力.
3. 了解平面的意义,了解不在同一直线上的三点确定一个平面,会表示平面.
4. 记住线面垂直、线面平行、面面垂直、面面平行的判定方法并能直接应用这些知识进行简单的判定.
5. 会画水平放置的平面图形的直观图,会画立方体和长方体的直观图.



【方法述要】

1. 理解对顶角的概念,能应用对顶角相等的性质.
2. 理解和掌握平行公理、平行线的性质和判定,并能简单应用.
3. 平面的性质:不在同一条直线上的三点确定一个平面.
4. 理解和掌握线面垂直和平行的判定方法,面面垂直和平行的判定方法.
5. 画水平放置的平面图形的直观图的要点:(1)横向的线段长度保持不变;(2)纵向的线段缩短到原来的二分之一;(3)纵向射线与横向射线所成的直角画成 45° 角.只要理解这三个要点并分清纵向线段和横向线段,画立方体和长方体的直观图就不难.
6. 平行线具有以下性质:两直线平行,则同位角相等,内错角相等,同旁内角互补.
7. 判定两直线平行常用以下方法:
 - (1) 根据同位角、内错角和同旁内角来判定;
 - (2) 平行于同一直线的两条直线平行;
 - (3) 垂直于同一直线的两条直线平行.



【赛题精讲】

例 1 判断下列说法是否正确.

- (1) 相等的两个角,一定是对顶角;
- (2) 过直线外一点,有一条且只有一条直线和这条直线平行;



(3)过直线上一点,有一条且只有一条直线和这条直线垂直;

(4)在同一个平面内垂直于同一条直线的两条直线平行;

(5)垂直于同一条直线的两条直线平行;

(6)如果平面 α 内有两条直线和平面 β 平行,那么 $\alpha // \beta$;

(7)如果直线 m 与平面 α 上的一条直线平行,那么 $m // \alpha$;

(8)如果直线 l 与平面 α 内的两条直线垂直,那么 $l \perp \alpha$.

解 (1)错.对顶角应符合两个条件:顶点相同,角的边互为反向延长线;

(2)对.平行公理;

(3)错.由于这句话中没有在同一平面内的前提,在空间就不对;

(4)对.复习平行线的判定公理;

(5)错.对此(1)缺少“在同一个平面内”这一条件,平面几何中的平行线判定公理在空间图形中不适用.可举反例印证;

(6)错.正确的说法是:如果平面 α 内有两条相交直线都和平面 β 平行,那么 $\alpha // \beta$;

(7)错.正确的说法是:如果直线 m 不在平面 α 内且与平面 α 上的一条直线平行,那么 $m // \alpha$;

(8)错.正确的说法是:如果直线 l 与平面 α 内的两条相交直线垂直,那么 $l \perp \alpha$.

例 2 如图7-1,直线 AB 与 CD 不平行,点 P 在 AB 上, $PQ \perp CD$ 于 Q . 指出下列说法哪些是正确的,哪些是不正确的.

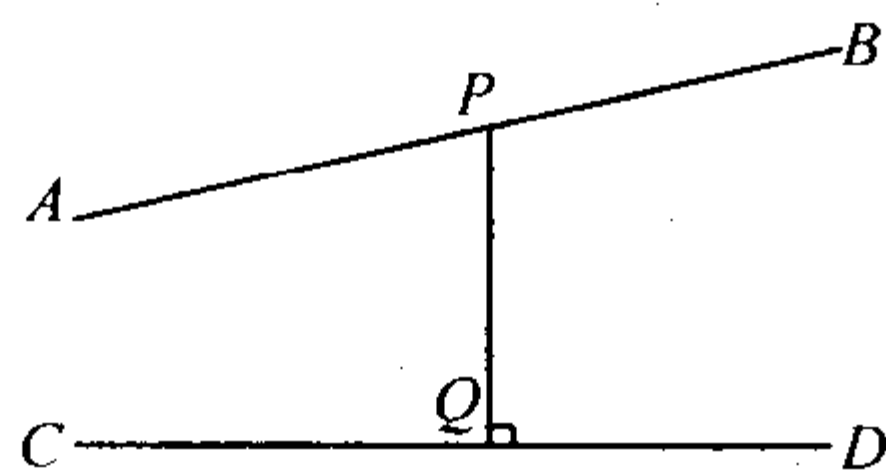


图 7-1

(1)线段 PQ 的长度叫做直线 AB 到 CD 之间的距离;

(2)线段 PQ 的长度叫做点 P 到直线 CD 的距离;

(3)线段 PQ 的长度叫做点 Q 到直线 AB 的距离;

(4)线段 PQ 的长度叫做点 P 与点 Q 间的距离.

解 平面几何中的距离一般指:点到点之间的距离;点到直线之间的距离;两平行直线之间的距离.

(1)因为 AB 与 CD 不平行,所以说法不正确;

(2)点到直线的距离指从直线外一点到这条直线的垂线段的长度,所以正确;

(3)因为 PQ 不垂直于 AB , PQ 不是点 Q 到直线 AB 的垂线段,所以不正确;

(4)连结两点的线段的长度叫做这两点间的距离,所以是正确的.

例 3 如图7-2所示,已知 $AB // CD$, $\angle 1 = 40^\circ$, $\angle 2 = 55^\circ$, 求 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的度数.

解 $\because AB // CD, \therefore \angle 1 = \angle 5$.

又 $\because \angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$,

$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 5$



$$= 180^\circ - \angle 2 - \angle 1 = 85^\circ.$$

又 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle 4 = \angle 2 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 5 = 55^\circ + 40^\circ = 95^\circ.$$

例 4 如图 7-3 所示, $BD \parallel AG \parallel EC$, $\angle DBA = 62^\circ$, $\angle ACE = 36^\circ$, PA 平分 $\angle BAC$, 求 $\angle PAG$ 的度数.

解 $\because BD \parallel AG \parallel EC$,

$$\therefore \angle BAG = \angle DBA = 62^\circ.$$

$$\angle GAC = \angle ECA = 36^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 62^\circ + 36^\circ = 98^\circ.$$

又 $\because PA$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle PAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 49^\circ. \therefore \angle PAG = \angle PAC - \angle GAC = 49^\circ - 36^\circ = 13^\circ.$$

例 5 求证: 平行于同一直线的两条直线平行.

证明 如图 7-4 所示, 设 $a \parallel c, b \parallel c$, 作任一条直线 l 与 a, b, c 相交.

$$\because a \parallel c, b \parallel c, \therefore \angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 3.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2. \therefore a \parallel b.$$

例 6 求证: 如果两条平行线被第三条直线所截, 那么一对同位角的平分线互相平行.

先根据题意画图, 写出已知和求证.

如图 7-5, 已知 $AB \parallel CD$, 直线 MN 与 AB, CD 交于 E, F , EG, FH 分别平分 $\angle MEB, \angle MFD$. 求证: $EG \parallel FH$.

解 证明两直线平行的方法一般是: (1) 应用定义证明平面内的两直线没有交点; (2) 应用判定定理证明这两条直线与第三条直线相交产生的同位角或内错角相等.

在应用平行线的性质定理时, 要正确地判定一对同位角 $\angle MEB$ 和 $\angle EFD$. 而在应用判定定理时, EG, FH 和第三条直线 MN 相交, 产生的同位角理应是 $\angle MEG$ 和 $\angle EFH$ 等, 不要把 $\angle GEB$ 和 $\angle HFD$ 看成是同位角.

证明 $\because AB \parallel CD, \therefore \angle MEB = \angle EFD$.

$$\because EG \text{ 平分 } \angle MEB, FH \text{ 平分 } \angle EFD, \therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle MEB, \angle 2 = \frac{1}{2} \angle EFD.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2. \therefore EG \parallel FH.$$

例 7 由空间的四个点可以确定几个平面?

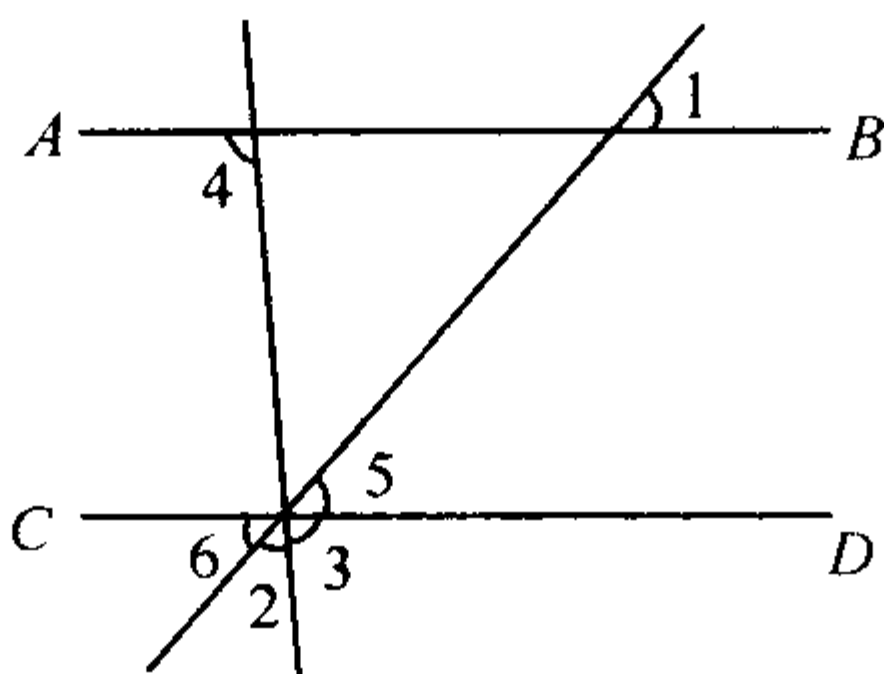


图 7-2

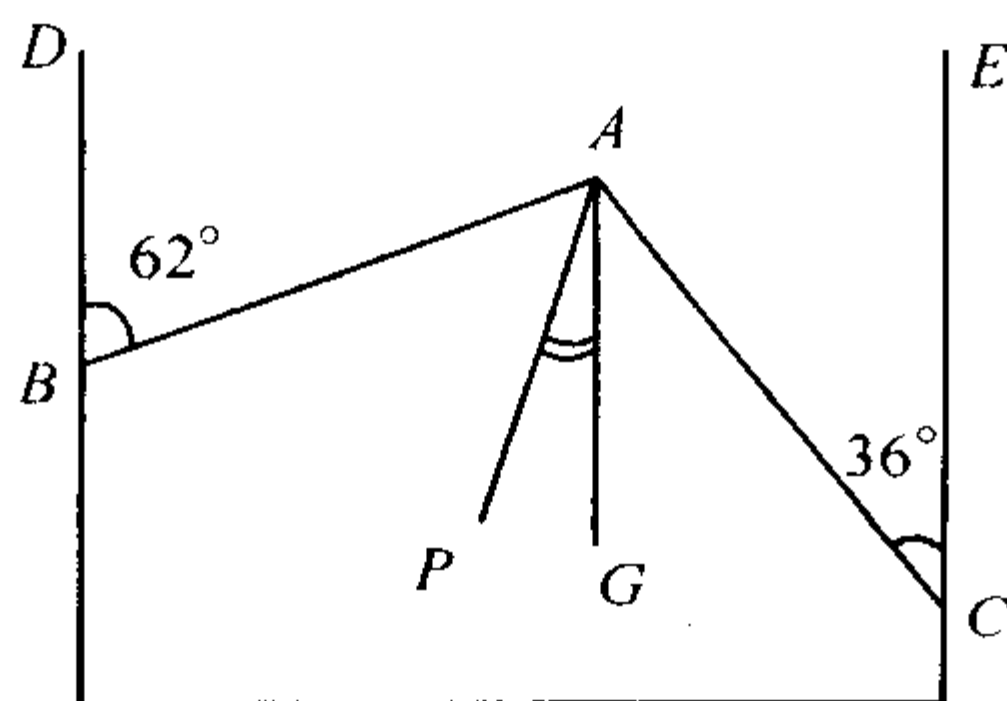


图 7-3

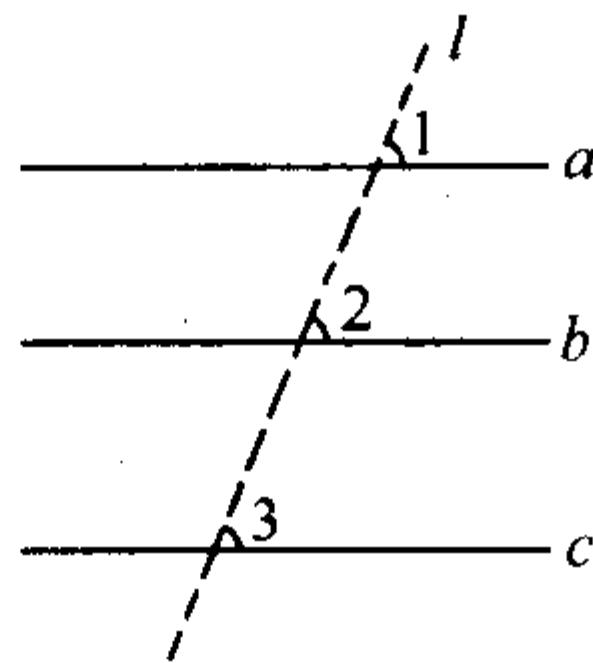


图 7-4

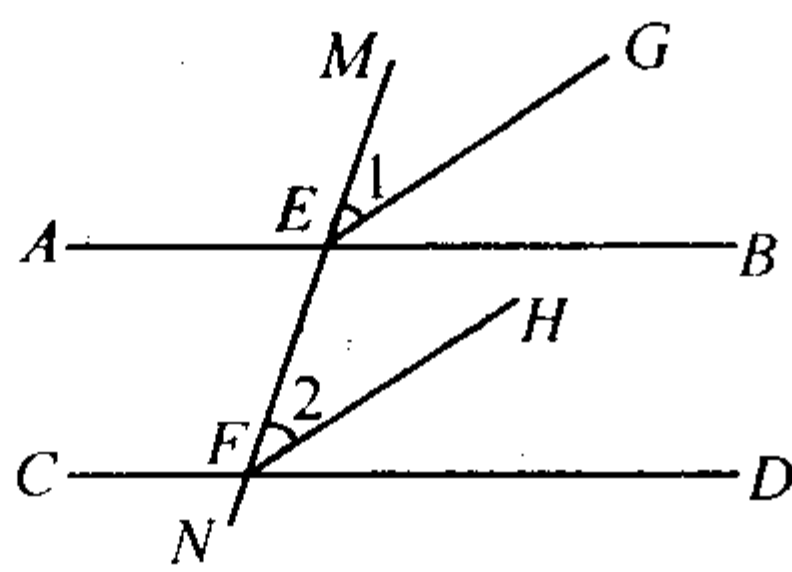


图 7-5



解 不在同一直线上的三个点可以确定一个平面.

空间四个点确定几个平面的问题应分若干种情况考虑. ①四点都在一直线上, 无法确定平面; ②有三点在一直线上, 另一点不在这直线上, 可以确定一个平面; ③无三点在一直线上, 可以确定四个平面(如三棱锥); ④虽无三点在同一直线上, 若四点两两连线, 有一组平行线, 则只可确定一个平面.

本题培养空间想像能力和分类讨论思想, 是一个结论不惟一的开放性问题.

例 8 画一个水平放置的长、宽、高分别为 3.5cm, 3cm, 2cm 的长方体的直观图.

解 先复习水平放置的平面图形的直观图的画法: 横线段, 水平放, 长不变; 纵线段, 45° 放, 长度取半.

画法 如图 7-6 所示. (黑板上演示时把长、宽、高改为 35cm, 30cm, 20cm.)

①画此长方体的底面长方形的直观图, 其中 $AB = 3.5\text{cm}$, $AD = 1.5\text{cm}$, $\angle DAB = 45^\circ$. (甲)

②画线段 $AA_1 \perp AB$, 使 $AA_1 = 2\text{cm}$. (乙)

③分别过 B, C, D 各点, 画 AA_1 的平行线, 并且在这些平行线上分别截取 BB_1, CC_1, DD_1 都等于 2cm. (乙)

④连结 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$, 并将被遮挡的部分改为虚线. 图形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 就是所求长方体的直观图. (丙)

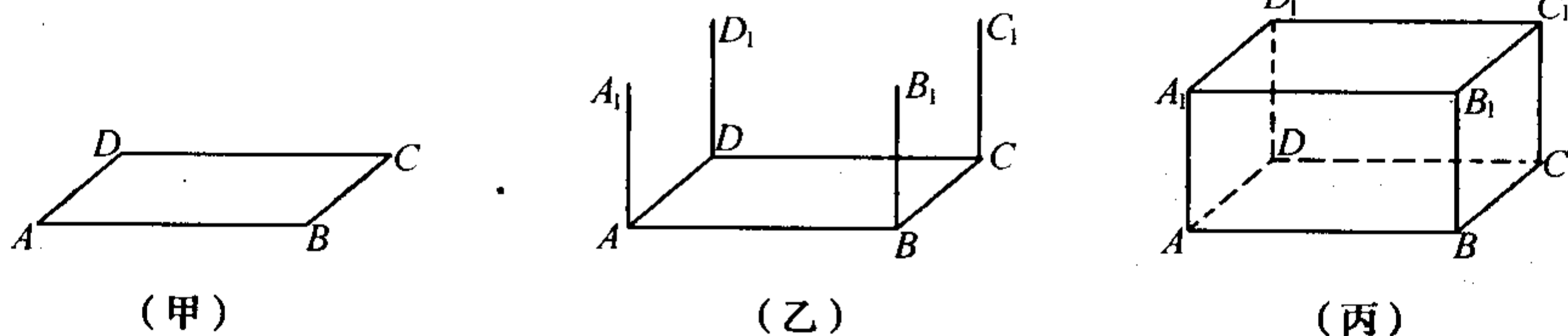


图 7-6

例 9 如图 7-7 所示, $\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ$, 求证: $AB \parallel EF$.

证明 分别过点 C, D 作 $CM \parallel AB, DN \parallel EF$.

$\because CM \parallel AB, DN \parallel EF, \therefore \angle B + \angle 1 = 180^\circ, \angle E + \angle 4 = 180^\circ$.

又 $\because \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ$,

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 540^\circ - 180^\circ \times 2 = 180^\circ$.

$\therefore CM \parallel DN$.

$\therefore AB \parallel CM \parallel DN \parallel EF. \therefore AB \parallel EF$.

例 10 如图 7-8 所示, 已知 $DE \parallel BC$, 求证: $\angle AED = \angle A + \angle B$.

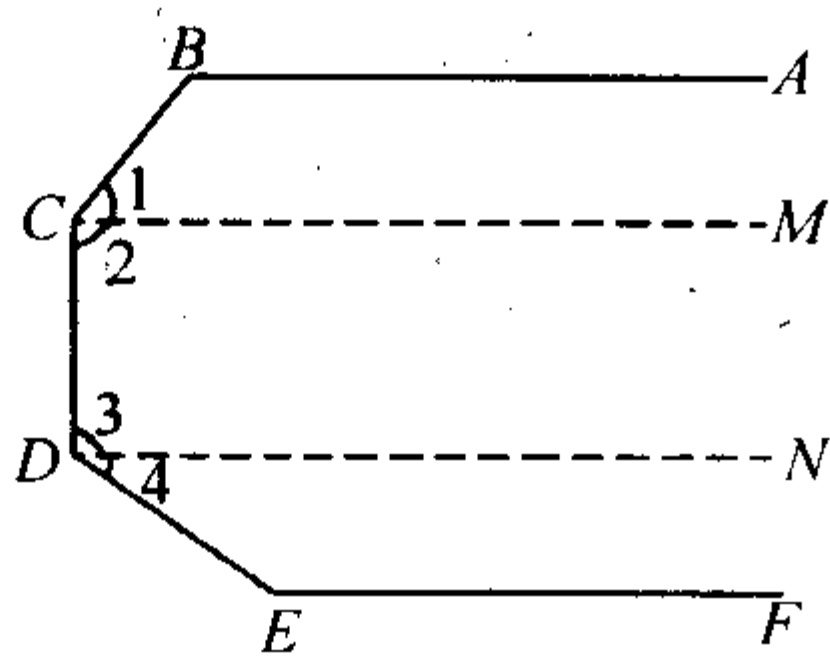


图 7-7



证明 过点 E 作 $GF \parallel AB$ 交 BC 于点 F .

$\because GF \parallel AB$,

$\therefore \angle 1 = \angle A, \angle 3 = \angle B$.

又 $\because DE \parallel CB, \therefore \angle 2 = \angle 3$.

$\therefore \angle AED = \angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B$.

例 11 平面内有 12 条直线, 无任意三条交于一点, 欲使它们出现 47 个交点, 怎样安排才能办到?

分析 平面内有 12 条直线, 如果两两相交, 且无任意三条交于一点, 则最多会出现 66 个交点, 如果其中有两条直线平行, 则可减少一个交点. 为了使 12 条直线出现 47 个交点, 应增加平行线的数量.

解 如图 7-9 所示, 取 3 组平行线, 其中第一组有 5 条, 第二组有 4 条, 第三组有 3 条, 则可出现 47 个交点.

例 12 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中:

- (1) 指出与棱 AB 平行的棱;
- (2) 指出与平面 BDD_1 垂直的平面;
- (3) 判断直线 A_1C_1 与平面 BDD_1 是否垂直, 并说明理由;
- (4) 证明: $BD_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

解 长方体内的线、面的关系是立体几何中经常研究的, 本题讨论长方体内一些简单的线、面关系. 在观察长方体内的面面垂直和线面垂直图形时, 应先明确有关的判定方法. 平面与平面垂直的判定是: 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直. 直线与平面垂直的判定是: 如果一条直线和平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线和这个平面垂直.

(1) 与棱 AB 平行的棱有 DC, A_1B_1, D_1C_1 ;

(2) 由于棱 D_1D 垂直底平面 AC , 而平面 BDD_1 又经过 D_1D , 所以平面 BDD_1 垂直平面 AC , 即平面 $AC \perp$ 平面 BDD_1 . 同理可证平面 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1 ;

(3) 直线 A_1C_1 与平面 BDD_1 不一定垂直. 可以用反证法, 如果它们垂直, 那么 $A_1C_1 \perp B_1D_1$, 即上底面长方形的对角线互相垂直. 但事实上长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 A_1C_1 与 B_1D_1 不一定垂直.

(4) 在直角三角形 BDD_1 中, $DD_1 = AA_1, BD^2 = AB^2 + AD^2, BD_1^2 = DD_1^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

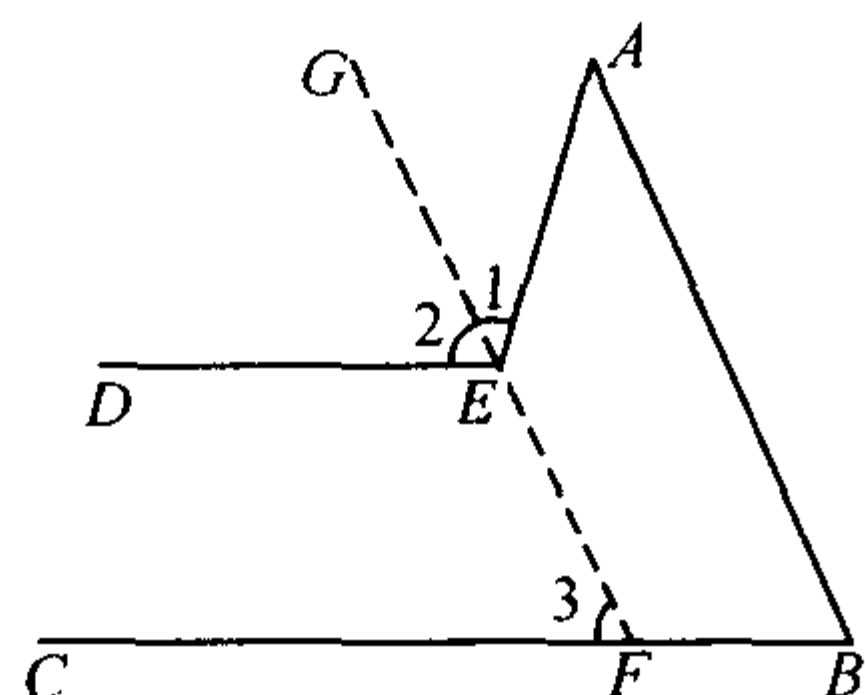


图 7-8

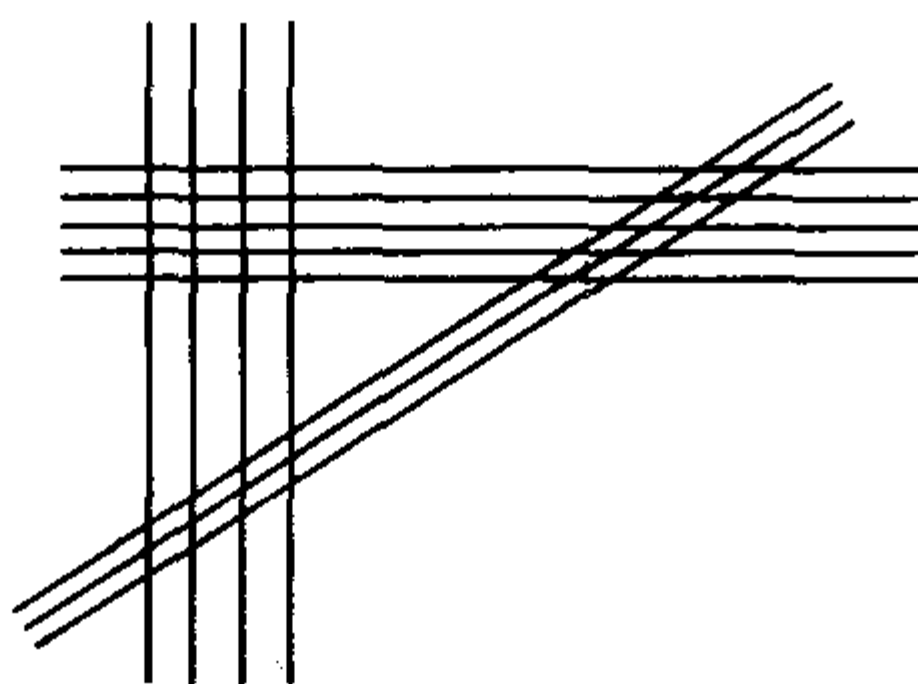


图 7-9



【能力训练】

一、选择题

1. P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 连 AP, BP, CP 并延长交对边于 F, D, E , 已知 $PA = x, PB = y, PC = z$, 且 $x + y + z = 43, PF = PD = PE = 3$, 则 $xyz = (\quad)$.
(A) 432 (B) 441 (C) 228 (D) 525
2. 有一个 5×5 的方格棋盘, 由 25 个 1×1 的单位正方形格组成, 在每个单位正方形格子的中心处染上一个红点, 现在棋盘上画若干条不通过红点的直线, 分棋盘为若干小块 (形状大小未必一样), 使得每一小块中至多有一个红点. 则至少要画直线 (\quad) .
(A) 6 条 (B) 7 条 (C) 8 条 (D) 10 条
3. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上取一点, 在 BC 上取两点, 在 AC 上取三点, 再在 $\triangle ABC$ 内取四点, 所取十点加上 A, B, C 三点, 共十三个点, 以这十三个点为顶点最多可画不重叠的三角形 (\quad) .
(A) 13 个 (B) 14 个 (C) 15 个 (D) 16 个
4. 把一个凸六边形沿对角线剪成三角形, 不同的剪法有 (\quad) .
(A) 8 种 (B) 10 种 (C) 12 种 (D) 14 种

二、填空题

5. 如图 7-10, 直线 a, b 相交, 直线 c, d 平行, 则图中的内错角有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 对.
6. 正方形 $ABCD$, 边长为 21, 它被分成四个矩形, 如图 7-11, 其中: $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 2 : 3 : 4$, 且阴影部分是一个正方形, 则这个阴影部分面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 100 条边的凸多边形, 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 条对角线.

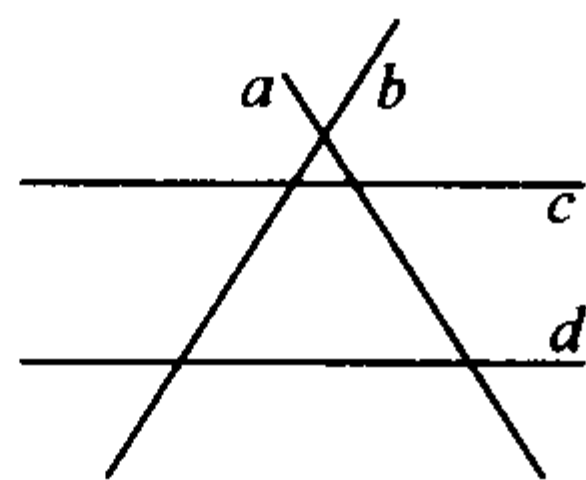


图 7-10

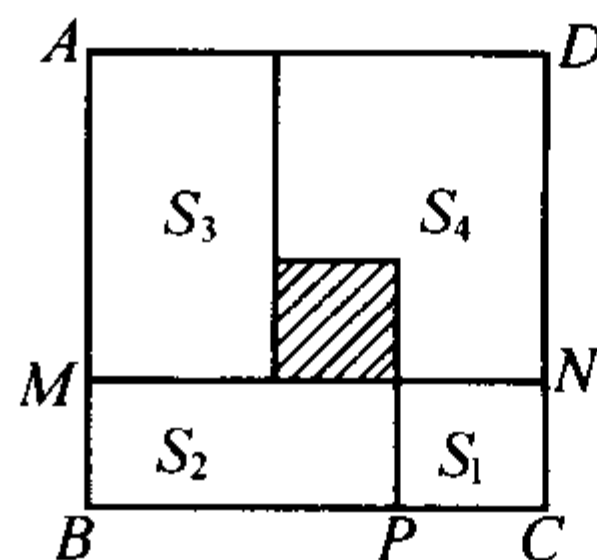


图 7-11

8. 平面上有 2000 条直线, 它们每两条都不平行, 每三条都不交于一点, 则它们彼此相交而成的线段有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 条.

三、解答题

9. 平面内有六条直线, 求证: 其中至少存在两条直线, 它们所成角小于或等于 30° .
10. 平面上有 10 条直线, 无任何三条交于一点, 欲使它们出现 31 个交点, 怎样安排才能办到?



11. 在同一平面内的三条直线 l_1 与 l_2 相交, l_3 与 l_1 平行, 找出与这三条直线等距离的点.

12. 已知三角形的两角之和为 n° , 最大角比最小角大 24° , 求 n 的取值范围.



八、整式的运算



【赛点目标】

1. 了解代数式、代数式的值的概念,并能正确、迅速地求代数式的值.
2. 了解整式、单项式、多项式的概念.
3. 掌握进行整式加减法的步骤、方法,提高计算能力.
4. 掌握同底数幂的乘除法的运算法则,单项式除以单项式,多项式除以单项式的运算法则.
5. 在理解零指数幂、负整数指数幂的概念的基础上,能进行幂的乘方、积的乘方运算.
6. 能熟练进行整式的加、减、乘、除、乘方等简单的混合运算.
7. 熟练掌握乘法公式,能利用乘法公式灵活地进行乘法运算.
8. 会用科学记数法表示较大与较小的数.



【方法述要】

1. 求代数式的值时书写要规范,并能正确求值.
2. 能正确认识整式,整式是只含有加、减、乘、乘方运算,或虽有除法运算,但除式(或分母)中不含字母的代数式.
3. 整式的加、减运算可归结为去括号和合并同类项.
4. 在培养和提高运算能力的同时,也应注意培养逻辑思维能力和解决问题的能力.
5. 乘法与除法互为逆运算,在引入了负整数指数幂的概念后,可以更深刻地理解这一点.
6. 乘方运算是乘法运算的延伸与拓展,特别在用字母表示数以后,其运算法则便可更简洁地用符号语言表示出来.
7. 在进行整式的混合运算时,着重注意的还是运算顺序与符号问题.
8. 乘法公式是指某些特殊形式的多项式相乘时的结论,熟记以后,计算时可以省时省事.整式的运算是整式的恒等变形与化简求值的基础,整式的运算除了用到相关运算法则之外,还需要掌握相关的运算公式和技巧,其中包括以下最常用的乘法公式:

(1) 平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

(2) 完全平方公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab +$



$$2bc + 2ca;$$

(3)立方和(差)公式: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$;

(4)和(差)的立方公式: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

此外,交换律、结合律和分配律等运算律在运算过程中也会经常用到.



【赛题精讲】

例 1 设有理数 a, b 满足 $a = 2b + 4$, 问 $6a - 3b$ 与 $8a + b - 1$ 哪个大? 大多少?

分析 要比较两个数的大小, 可以用求差的方法.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \text{因为 } (6a - 3b) - (8a + b - 1) \\ &= 6a - 3b - 8a - b + 1 \\ &= -2a - 4b + 1 \\ &= -2(a + 2b) + 1 = -2 \times 4 + 1 = -7. \end{aligned}$$

所以 $8a + b - 1$ 比 $6a - 3b$ 大, 大 7.

例 2 化简下列各式:

$$(1) (2x - 3y)^2(2x + 3y) - (3y - 2x)(3y + 2x)^2;$$

$$(2) (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 + x + 2)(x^3 - x^2 + x - 2).$$

$$\begin{aligned} \text{解} (1) \text{原式} &= (2x - 3y)(2x + 3y)[(2x - 3y) + (2x + 3y)] \\ &= (4x^2 - 9y^2) \times 4x = 16x^3 - 36xy^2. \end{aligned}$$

$$(2) \text{设 } x^3 + x^2 + x + 1 = A, x^3 - x^2 + x - 1 = B$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= AB - (A + 1)(B - 1) \\ &= AB - (AB - A + B - 1) = A - B + 1 \\ &= (x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 - x^2 + x - 1) + 1 \\ &= 2x^2 + 3. \end{aligned}$$

例 3 已知 $|x + y - 9|$ 与 $(2x - y + 3)^2$ 互为相反数, 求 $x - 2y$ 的值.

解 初中阶段遇到三个非负数: $|a|$, a^2 和 \sqrt{a} ($a \geq 0$), 其中的每一个数, 不仅自身有着重要的意义, 而且与数学的其他知识有着广泛的联系. 非负数的一个重要的性质是: 如果几个非负数的和等于零, 那么每一个非负数必定都等于零. 这一性质在解题中经常应用.

$$\text{本例因为 } |x + y - 9| + (2x - y + 3)^2 = 0, \text{ 所以只有 } \begin{cases} x + y - 9 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases} \text{ 两式相减即得}$$

$$x - 2y = -12.$$

例 4 已知 $x + y = a$, $xy = b$, 试用 a, b 的代数式表示下列各式:

$$(1) x^2 + y^2; (2) (x - y)^2; (3) x^3 + y^3.$$

解 这是典型的一元二次方程中有关“根与系数关系”的应用, 通过适当的练习应



熟悉这类问题.

$$(1) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b;$$

$$(2) (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x + y)^2 - 4xy = a^2 - 4b;$$

$$(3) x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab.$$

例 5 已知 $a = m + \frac{1}{2}$, $b = m - \frac{1}{2}$, $c = m + \frac{1}{2}$, 求 $a^2 + 2b^2 + c^2 - ab - 3bc$ 的值.

解法一 (代入求值)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - 3\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) + 2\left(m^2 - m + \frac{1}{4}\right) - 4\left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2. \end{aligned}$$

解法二 (变形求值)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (ab - bc) \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + b(a - c) \end{aligned}$$

$$\text{又 } a - b = 1, b - c = -1, a - c = 0,$$

$$\text{原式} = 1^2 + (-1)^2 + 0 = 2.$$

解法三 (变形求值)

$$\text{因为 } a = m + \frac{1}{2} = c,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 原式} &= a^2 + 2b^2 + a^2 - ab - 3ab \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 4ab \\ &= 2(a - b)^2 = 2 \times 1^2 = 2. \end{aligned}$$

例 6 已知 $x - y = m$, $y - z = n$, 试求多项式 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ 的值.

解 本例的结论是一个关于 x, y, z 的轮换对称式, 而且变形后的结果是一个重要的恒等式, 在进行变形前, 考虑到条件中有 $x - y$ 与 $y - z$, 但缺 $z - x$, 所以应设法得到 $z - x$ 的表达形式, 然后将结论也表示为与 $x - y, y - z, z - x$ 有关的形式.

在这过程中用到添项、配凑与配方等方法技巧, 这在恒等变形中是十分重要的, 应给以充分的注意.

$$\text{因为 } x - y = m, y - z = n, \text{ 所以 } (x - y) + (y - z) = x - z = m + n,$$

$$\text{即 } z - x = -(m + n).$$

$$\text{而 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}[(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)] \\
 &= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[m^2 + n^2 + (m + n)^2] \\
 &= \frac{1}{2}(m^2 + n^2 + m^2 + 2mn + n^2) = m^2 + mn + n^2.
 \end{aligned}$$

例 7 已知 $x^2 - 4x + 1 = 0$, 求 $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x$ 的值.

解法一 由 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 得 $x^2 = 4x - 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (4x - 1)^2 - 5x(4x - 1) + 6(4x - 1) - 5x \\
 &= -4x^2 + 16x - 5 \\
 &= -4(4x - 1) + 16x - 5 = -1.
 \end{aligned}$$

解法二 由 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 得 $x^2 - 4x = -1$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (x^4 - 4x^3) - (x^3 - 4x^2) + 2(x^2 - 4x) + 3x \\
 &= x^2(-1) - x(-1) + 2(-1) + 3x \\
 &= -x^2 + 4x - 2 = -(-1) - 2 = -1.
 \end{aligned}$$

解法三 由多项式的竖式除法可得: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x$ 除以 $x^2 - 4x + 1$ 所得的商式为 $x^2 - x + 1$, 余式为 -1 , 则

$$\text{原式} = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - x + 1) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

例 8 若 $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, 且 $xy + yz + zx = 99$, 求 $2x^2 + 12y^2 + 9z^2$ 的值.

解 本题中有三个未知数, 也有三个条件, 从理论上是可以解出三个未知数 x, y, z 的值的, 但是过程太繁琐且没有必要. 一般当条件是一个连等式或连比式时, 可以通过设比例系数的方法, 再利用相应技巧进行适当变形, 这在以后高中阶段的学习中称为“设参引参”.

设 $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} = k$, 则 $x = 3k, y = k, z = 2k$, $xy + yz + zx = 99$, 即 $3k^2 + 2k^2 + 6k^2 = 99$, 可得 $k^2 = 9 = y^2$. 所以 $2x^2 + 12y^2 + 9z^2 = 18y^2 + 12y^2 + 36y^2 = 66y^2 = 594$.

例 9 已知多项式 $x^3 - 3x^2 + 5x + a$ 能被多项式 $x^2 - x + 3$ 整除, 求常数 a 的值.

解 解决本例有两条思路: 一是利用直式除法, 其余式中应是含有 a 的代数式, 令其为零可求得 a 的值; 二是可根据两个多项式相等的定义, 利用待定系数法求解如下. 注意待定系数法是解决数学问题的一种重要的方法.

$$\text{设 } x^3 - 3x^2 + 5x + a = (x^2 - x + 3)(x + m) = x^3 + (m - 1)x^2 + (3 - m)x + 3m.$$

$$\text{根据两个多项式相等的定义, 有 } \begin{cases} m - 1 = -3, \\ 3 - m = 5, \\ 3m = a. \end{cases} \text{ 解得 } m = -2, \text{ 故 } a = -6.$$



例 10 已知: $a^2 + b^2 = 2, c^2 + d^2 = 2, ac = bd$, 求证: $a^2 + c^2 = 2, b^2 + d^2 = 2, ab = cd$.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad & \text{因为 } (a^2 + b^2 - 2)^2 + (c^2 + d^2 - 2)^2 + 2(ac - bd)^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 + 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4a^2 - 4b^2 \\ &\quad - 4c^2 - 4d^2 - 4abcd + 8 \\ &= (a^2 + c^2 - 2)^2 + (b^2 + d^2 - 2)^2 + 2(ab - cd)^2, \end{aligned}$$

由已知条件可知

$$(a^2 + b^2 - 2)^2 + (c^2 + d^2 - 2)^2 + 2(ac - bd)^2 = 0,$$

$$\text{所以 } (a^2 + c^2 - 2)^2 + (b^2 + d^2 - 2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0.$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 - 2 = 0, b^2 + d^2 - 2 = 0, ab - cd = 0,$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 = 2, b^2 + d^2 = 2, ab = cd.$$

例 11 求证: 不论 x 取什么有理数, 多项式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 的值是非负数.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad & \text{因为 } (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1 \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1 \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+4+2)+1 \\ &= (x^2+5x+4)^2 + 2(x^2+5x+4)+1 \\ &= (x^2+5x+4+1)^2 = (x^2+5x+5)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

所以 不论 x 取何值时, 原多项式的值为非负数.

例 12 已知 x, y, z 为自然数, 且 $x < y, x + y = 1999, z - x = 2000$, 求 $x + y + z$ 的最大值.

解 依题意, 得 $y = 1999 - x, z = 2000 + x$.

$$\text{所以 } x + y + z = x + (1999 - x) + (2000 + x) = 3999 + x.$$

当 x 的值最大时, $x + y + z$ 的值也最大.

$$\text{由于 } x, y, z \text{ 为自然数, } x < y, \text{ 因此 } \begin{cases} 1999 - x \geq 1, \\ 1999 - x > x, \\ 2000 + x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{解得 } 1 \leq x < 999 \frac{1}{2}.$$

所以 x 的最大值为 999, 此时 $y = 1000, z = 2999$.

即 $x + y + z$ 的最大值为 $3999 + 999 = 4998$.



【能力训练】

一、选择题

1. 已知 $(2a + b + 3)^2 + |b - 1| = 0$, 则 $5a + \{-2a - 3[2b - 8 + (3a - 2b - 1) - a] + 1\}$ 的值为().
(A)20 (B)23 (C)28 (D)34
2. 若 $2x + 5y + 4z = 6, 3x + y - 7z = -4$, 那么 $x + y - z$ 的值是().
(A)-2 (B)0 (C)2 (D)4
3. 若 a, b, c, d 为互不相等的整数, $abcd = 25$, 那么 $a + b + c + d$ 等于().
(A)-8 (B)0 (C)12 (D)28
4. 已知 m 是有理数, $|m - 2| + |m - 4| + |m - 6| + |m - 8|$ 的最小值是().
(A)4 (B)6 (C)8 (D)12

二、填空题

5. 设 n 为自然数, $9n^2 + 5n + 26$ 的值是相邻两个自然数的积, 则 n 的值为_____.
6. 已知 a, b, c 为有理数, 且满足 $a = 8 - b, c^2 = ab - 16$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
7. 若 $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ad + bc = 0$, 那么 $ab + cd =$ _____.
8. 当 $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 时, $a^4 + b^4 + c^4 =$ _____.

三、解答题

9. 将 2003 减去它的 $\frac{1}{2}$, 再减去剩下的 $\frac{1}{3}$, 再减去剩下的 $\frac{1}{4}$, 再减去剩下的 $\frac{1}{5}$, ..., 依此类推, 直至最后减去剩下的 $\frac{1}{2003}$. 最后的得数是多少?
10. 设 a, b, c 是三个不同的整数, $f(x)$ 为整系数多项式, 求证: 不可能同时有 $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$.
11. 已知 $a + b + c + d = 0$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab)$.
12. 已知 a, b, c, d 适合 $a + b = c + d, a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. 求证: $a^{2003} + b^{2003} = c^{2003} + d^{2003}$.



九、因式分解



【赛点目标】

1. 了解因式分解的概念.
2. 掌握因式分解的四种主要方法: ①提取公因式法; ②公式法; ③十字相乘法; ④分组分解法.



【方法述要】

1. 把一个多项式化为几个整式的积的形式, 叫做把这个多项式因式分解, 也叫做把这个多项式分解因式.

因式分解与整式乘法正好相反. 例如 $a^2 - b^2 \xrightleftharpoons[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}} (a+b)(a-b)$.

2. 因式分解的一般思考顺序是:

- (1) 多项式的各项有公因式时, 应先提取公因式;
- (2) 如果能逆用乘法公式, 则尽量用公式;
- (3) 二次三项式可考虑用十字相乘法;
- (4) 多于三项的多项式, 常可考虑用分组分解.

3. 因式分解总是在指定的数集里进行, 不作特别说明, 一般在有理数范围内进行.

4. 因式分解的结果是几个整式的积的形式, 分解应分到不能再分为止.

5. 除以上四种基本方法外, 分解因式还可利用求根公式法、待定系数法及拆项、添项等方法.

6. 几个常用的恒等变形:

$$(1) (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$$

$$(2) (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2);$$

$$(3) x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2];$$

$$(4) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b);$$

$$(5) 2(a^3 + b^3) = (a+b)[a^2 + b^2 + (a-b)^2];$$

$$(6) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$



【赛题精讲】

例1 请看下列因式分解过程,分析其解法是否正确.

$$(1)(2p+q)(8p-3q)-2p(2p+q)=(2p+q)(8p-3q-2p) \\ = (2p+q)(6p-3q);$$

$$(2)(a-b)^3-(b-a)^2-2a+2b=(a-b)[(a-b)^2-(a-b)-2] \\ = (a-b)(a^2-2ab+b^2-a+b-2) \\ = (a-b)[(a^2-a-2)+(b^2+b-2)+(2-2ab)] \\ = (a-b)[(a-2)(a+1)+(b+2)(b-1)+2(1-ab)].$$

解 (1)分解因式要分解到不能再分为止,其中第二个括号内还有因式3可以提取,正确答案为原式 $=3(2p+q)(2p-q)$;

第(2)题的解答是错误的,因式分解的结果应是若干个整式的积的形式,即是若干个小括号的积,不应该出现中括号.若运算过程中出现中括号,则应对中括号内多项式再分解,不能分解时,则去掉小括号合并同类项,把中括号改为小括号.

本题可用换元的思想将中括号内的 $(a-b)$ 视作 x ,则 x^2-x-2 可进行分解,正确答案应为原式 $=(a-b)(a-b-2)(a-b+1)$.

例2 分解下列各式:

$$(1)x^6-y^6;$$

$$(2)4x^3+x^2-16x-4;$$

$$(3)(1-a^2)(1-b^2)-4ab.$$

解 第(1)题显然是利用乘法公式,但有两种思路:若将其视为 $(x^3)^2-(y^3)^2$,则可顺利分解为 $(x^3+y^3)(x^3-y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$;但若将其视为 $(x^2)^3-(y^2)^3$,则当分解为 $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$ 后,其第二个因式须用添项的方法才能继续分解下去,所以在使用乘法公式时须加以合理选择.

第(2)题应用分组分解,分组的原则是第一次分解后还有公因式可提取或可再利用乘法公式等,本题将一、三项分成一组,二、四项分成一组.

$$\text{原式}=4x(x^2-4)+(x^2-4)=(x^2-4)(4x+1)=(x+2)(x-2)(4x+1).$$

第(3)题虽然前两个括号可用平方差公式,但接下去不能进行再分解,所以应采用先去括号,再分组分解的方法,这里还有一简单的拆项—— $-4ab=-2ab-2ab$.

$$\text{原式}=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2+2ab+b^2) \\ = (ab-1)^2-(a+b)^2=(ab-1+a+b)(ab-1-a-b).$$

例3 分解下列各式:

$$(1)x^3+2x^2-5x-6;$$

$$(2)(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2;$$

$$(3)2x^2-5xy+2y^2+7x-5y+3.$$

解 本例介绍几种特殊的但又是常用的因式分解的方法技巧.



(1)拆项法:把多项式中的某一项拆成两项,再用分组分解法分解因式,如本例可以将二次项 $2x^2$ 拆成 $x^2 + x^2$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x^3 + x^2 + x^2 - 5x - 6 = x^2(x+1) + (x-6)(x+1) = (x+1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x+1)(x+3)(x-2).\end{aligned}$$

本例还可以拆一次项 $-5x = -3x - 2x$,请读者试一试.

注意“拆项”与“添项”是对立统一的,如分解 $x^4 + 4$,可添上 $4x^2$ 再减去 $4x^2$,当然也可以视为将 0 拆为 $4x^2 - 4x^2$.

(2)换元法:将多项式中某些具有共同特征的表达式用一个更简洁的未知数替换,完成分解过程后再替换回来.本题可设 $x+y=m$, $xy=n$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (m-2n)(m-2) + (1-n)^2 = (m^2 - 2mn + n^2) - 2(m-n) + 1 \\ &= (m-n-1)^2 = (x+y-xy-1)^2 \\ &= [x(1-y) - (1-y)]^2 = (1-y)^2(x-1)^2.\end{aligned}$$

(3)本题的多项式是一个二元二次多项式的一般形式,将其因式分解一般有以下两种思路:

一是由于 $2x^2 - 5xy + 2y^2 = (2x-y)(x-2y)$,故可设原式 $= (2x-y+p)(x-2y+q)$,展开后比较等式两边的同类项的系数来确定 p, q 的值,即应用待定系数法.

也可以由原式 $= (2x-y)(x-2y) + (7x-5y) + 3$,应用双十字相乘法来分解.

二是可用“主元法”进行分解因式,即把 x 视为主元,其他字母暂作为常数,按 x 的降幂排列:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2x^2 + (7-5y)x + 2y^2 - 5y + 3 = 2x^2 + (7-5y)x + (y-1)(2y-3) \\ &= [2x - (y-1)][x - (2y-3)] = (2x-y+1)(x-2y+3).\end{aligned}$$

例 4 (1)当 k 为何值时, $x^2 + xy + ky^2 - 2x + 11y - 15$ 能分解成两个一次因式的乘积?

(2)若多项式 $2x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + b$ 能被多项式 $x^2 + x - 2$ 整除,求 a, b 的值.

解(1)依题意可设 $x^2 + xy + ky^2 - 2x + 11y - 15 = (x+ay+3)(x+by-5)$, $(x+ay+3)(x+by-5) = x^2 + (a+b)xy + aby^2 - 2x + (3b-5a)y - 15$.

$$\begin{aligned}\text{比较系数得} &\begin{cases} a+b=1, \\ ab=k, \\ 3b-5a=11. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=-1, \\ k=-2. \end{cases}\end{aligned}$$

当 $k = -2$ 时, $x^2 + xy + ky^2 - 2x + 11y - 15$ 能分解成两个一次因式的乘积.

(2)设 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + b$,

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2),$$

又 $f(x)$ 能被多项式 $x^2 + x - 2$ 整除,



$$\text{故 } \begin{cases} f(1)=0, \\ f(-2)=0. \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 2-3+a+7+b=0, \\ 32+24+4a-14+b=0. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a=-12, \\ b=6. \end{cases}$$

即 $a = -12, b = 6$.

例 5 (1)求证: $8x^2 - 2xy - 3y^2$ 可以化成两个整系数多项式的平方差.

(2)设 m, n, p, q 都是整数, 且 $mn + pq$ 能被 $m - p$ 整除, 求证: $mq + np$ 也能被 $m - p$ 整除.

证明 (1)设 $8x^2 - 2xy - 3y^2 = A^2 - B^2$, 则

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = 8x^2 - 2xy - 3y^2 = (2x + y)(4x - 3y).$$

令 $A + B = 2x + y, A - B = 4x - 3y$ 得 $A = 3x - y, B = -x + 2y$.

$$\text{所以 } 8x^2 - 2xy - 3y^2 = (3x - y)^2 - (-x + 2y)^2.$$

命题得证.

$$\begin{aligned} (2) \quad mq + np &= mq + np - (mn + pq) + (mn + pq) \\ &= (mq - pq) - (mn - np) + (mn + pq) \\ &= q(m - p) - n(m - p) + (mn + pq). \end{aligned}$$

$mn + pq$ 能被 $m - p$ 整除, $\therefore mq + np$ 能被 $m - p$ 整除.

例 6 若三角形三边 a, b, c 满足等式: $(a - b)c^3 - (a^2 - b^2)c^2 - (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)c + a^4 - b^4 = 0$, 求证: 此三角形为等腰三角形或直角三角形.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad &(a - b)c^3 - (a^2 - b^2)c^2 - (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)c + a^4 - b^4 \\ &= (a - b)[c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2)] \\ &= (a - b)(c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0. \end{aligned}$$

又 a, b, c 为三角形的三边,

所以 $c - a - b < 0, \therefore a - b = 0$ 或 $c^2 - a^2 - b^2 = 0$.

当 $a - b = 0$ 时, 三角形为等腰三角形; 当 $c^2 - a^2 - b^2 = 0$ 时, 三角形为直角三角形.

所以 三角形为等腰三角形或直角三角形.

例 7 已知: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2$, 求证: $x = y = z$.

证明 令 $x - y = A, y - z = B, z - x = C$, 则 $A + B = -C, y + z - 2x = C - A, z + x - 2y = A - B, x + y - 2z = B - C$.

$$\text{原式可化为 } A^2 + B^2 + C^2 = (C - A)^2 + (A - B)^2 + (B - C)^2.$$

$$\text{即 } A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2BC - 2CA = 0.$$

$$\text{即 } A^2 + B^2 + (A + B)^2 - 2(A + B)C - 2AB = 0.$$

$$\text{即 } 2A^2 + 2B^2 + 2C^2 = 0.$$

所以 $A = B = C = 0$. 即 $x = y = z$.



例 8 求证: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a-b)(a-c) + 2(b-c)(b-a) + 2(c-a)(c-b)$.

证明 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - [2(a-b)(a-c) + 2(b-c)(b-a) + 2(c-a)(c-b)]$
 $= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(a-b)(c-a) + 2(b-c)(a-b)$
 $+ 2(c-a)(b-c) = [(a-b) + (b-c) + (c-a)]^2 = 0.$

即 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
 $= 2(a-b)(a-c) + 2(b-c)(b-a) + 2(c-a)(c-b).$

例 9 已知: $a+b+c=3m$, 求证:

$(m-a)^3 + (m-b)^3 + (m-c)^3 = 3(m-a)(m-b)(m-c).$

证明 令 $m-a=A, m-b=B, m-c=C$, 则 $A+B+C=0$.

即 $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) = 0.$

即 $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC.$

即 $(m-a)^3 + (m-b)^3 + (m-c)^3 = 3(m-a)(m-b)(m-c).$

例 10 已知 $a+b+c+d=0$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab).$

证明 因为 $a+b+c+d=0$,

所以 $a+b=-(c+d)$. 即 $(a+b)^3 = -(c+d)^3.$

即 $a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3 - d^3 - 3cd(c+d).$

即 $a^3 + b^3 - 3ab(c+d) = -c^3 - d^3 + 3cd(a+b).$

即 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab).$

例 11 若 a, b, c, d 为正数, 且 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, 求证: $a=b=c=d$.

证明 因为 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, 所以 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 0.$

即 $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2b^2 - 4abcd + 2c^2d^2 = 0.$

即 $(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0.$

即 $a^2 - b^2 = 0, c^2 - d^2 = 0, ab - cd = 0.$

又 a, b, c, d 为正数, 所以 $a=b=c=d$.

例 12 若 a 为自然数, 则 $a^4 - 3a^2 + 9$ 是质数还是合数?

解 $a^4 - 3a^2 + 9 = a^4 + 6a^2 + 9 - 9a^2 = (a^2 + 3)^2 - (3a)^2 = (a^2 + 3a + 3)(a^2 - 3a + 3).$

因为 a 为自然数, 所以 $a^2 + 3a + 3 > 1.$

又 $a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 当 $a^2 - 3a + 3 > 1$ 时, $a^4 - 3a^2 + 9$ 为合数.

若 $a^2 - 3a + 3 = 1$, 则 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时, $a^4 - 3a^2 + 9 = 7$ 为质数;



当 $a=2$ 时, $a^4 - 3a^2 + 9 = 13$ 为质数; 当 $a \geq 3$ 时, $a^2 - 3a + 3 = a(a-3) + 3 > 1$.
所以 当 $a=1$ 或 $a=2$ 时, $a^4 - 3a^2 + 9$ 为质数, 当 $a \geq 3$ 时, $a^4 - 3a^2 + 9$ 为合数.



【能力训练】

一、选择题

1. 化简 $\frac{1234567890}{1234567891^2 - 1234567890 \times 1234567892}$ 的值为 ().
(A) 1234567890 (B) 1234567891 (C) 1234567892 (D) 1234567893
2. 已知 $zx - zy + 2xy - x^2 - y^2 = 0$, 则 $x^3 - x^2y - x^2z - xy^2 + zy^2 + y^3$ 的值为 ().
(A) 3 (B) 0 (C) 2 (D) 4
3. 若 $a + b + c + d = 0$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3$, 则 $abc + bcd + cda + dab$ 值为 ().
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4
4. 若四个互不相等的正数 x, y, m, n 中, x 最小, n 最大, 且 $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, 设 $S = x + n$, $T = y + m$, 则 ().
(A) $S > T$ (B) $S < T$ (C) $S = T$ (D) 不确定

二、填空题

5. 用拆添项法分解下列因式:

(1) $x^4 - 23x^2 + 1 =$ _____;

(2) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 =$ _____.

6. 若 $a + \frac{1}{a} = m$, 则 $a^2 + \frac{1}{a^2} =$ _____; $a^3 + \frac{1}{a^3} =$ _____.

7. (1) 分解因式 $x^3 + ax^2 + ax + a - 1 =$ _____;

(2) $(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) =$ _____.

8. (1) 分解因式 $x^4 + 2x^2 + 9 =$ _____;

(2) 分解因式 $a^2 + (a+1)^2 + (a^2+a)^2 =$ _____.

三、解答题

9. 证明: $a^4 + 4$ (a 是整数, 且 $|a| \neq 1$) 是一个合数.

10. 求证: $x^2 - xy + y^2 + x + y$ 不能分解成两个一次因式的乘积.

11. 已知: $x^3 + bx^2 + cx + d$ 为整系数多项式, 若 $bd + cd$ 为奇数. 求证: 这个多项式不能分解为两个整系数多项式之积.

12. 若 p, q 都是大于 5 的任意质数, 求证: $p^4 - q^4$ 总能被 80 整除.



十、分 式



【赛点目标】

1. 了解分式的概念及最简分式的概念.
2. 能利用分式的基本性质进行约分等运算.
3. 熟练地利用分式基本性质进行分式的乘除法、乘方及加减法运算.
4. 能在整式运算的基础上,较为灵活地进行简单的分式混合运算.



【方法述要】

1. 分式的基本性质为 $\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}$, $\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$ (其中 M 为不等于零的整式).

2. 分式的运算法则

(1) 乘、除运算法则: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$;

(2) 加、减运算法则: 同分母分式相加减,分子相加减,分母不变,异分母分式相加减,先将其通分变成同分母分式再相加减.

3. 最简分式

分子与分母的最大公因式为 1 的分式称为最简分式,分式的运算结果应写成最简分式的形式.

4. 在分式的运算过程中常需要将一个分式拆成几个分式的代数和的形式,这种运算方法叫做拆项相消法.

5. 分式乘除法的关键是约分,约分的理论依据是分式的基本性质.约分前,尽可能先把分式的分子、分母分解因式.

分式加减法的关键是通分,通分时视题目条件,可先分解因式,约分后再通分,也可提取公因式后再通分;可逐步通分,也可整体通分;还可以化为带分式后再通分.

6. 除了分式的四则运算外,我们还主要讨论三个方面的问题:(1)对分式的化简;(2)由已知条件求分式的值;(2)证明有关分式的等式.要注意观察题目条件与结论两方面的特点,选择正确而又简便的方法.

7. 在解决有关分式的问题中,经常用到的数学方法有换元、降幂、拆项、待定系数等函数方程思想.



【赛题精讲】

例1 计算下列各式：

$$(1) \left[\frac{a^3 - 8}{a^2 - 4} - \frac{3(a-1)}{a^2 + a - 2} \right] \div \frac{1 + 2a + a^2}{a + 2};$$

$$(2) \frac{6x}{x^2 - x - 2} + \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) \div \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{x-2}.$$

解 分式的四则运算类同于整式，一般先乘方，后乘除，再加减，有括号则先做括号内的，运用乘法公式、因式分解，往往能使运算简化。

$$\begin{aligned} (1) \text{原式} &= \left[\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{(a+2)(a-2)} - \frac{3(a-1)}{(a+2)(a-1)} \right] \div \frac{1+2a+a^2}{a+2} \\ &= \left[\frac{a^2+2a+4}{a+2} - \frac{3}{a+2} \right] \div \frac{1+2a+a^2}{a+2} = \frac{a^2+2a+1}{a+2} \cdot \frac{a+2}{1+2a+a^2} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \frac{6x}{x^2-x-2} + \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{6x}{(x+1)(x-2)} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{6x + (x-1)(x-2) + x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2+4x+3}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}. \end{aligned}$$

例2 (1) 若 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，求 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值；

(2) 已知 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}$ ，求分式 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值。

解 第(1)小题可以从条件向结论靠拢，将已知变形为 $y-x=3xy$ ，分别代入分子分母，约去 xy 后得原式 $= \frac{3}{5}$ ；也可以从结论向条件靠拢，将结论中的分子分母同时除以 xy ，则会出现 $\frac{2}{x} - \frac{2}{y}$ 与 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ，这两种均可称为整体变形的方法。

对第(2)小题，由于分式的分子是单项式，而分母是多项式，所以可以采取先取倒数后解题的方法。即将条件变形为 $\frac{x^2+x+1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1 = 4$ ， $\therefore x + \frac{1}{x} = 3$ ，而所求式的倒数为 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = 8$ ，得 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{8}$ 。

注意第(2)题的条件还可改为 $x^2-3x+1=0$ ，若想求出方程的根代入分式求值，则必然使运算复杂化。

例3 (1) 若 $\frac{x}{y+z} = a$ ， $\frac{y}{z+x} = b$ ， $\frac{z}{x+y} = c$ ，求代数式 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$ 的值；

(2) 已知 $a+b+c=0$ ，求代数式 $\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$ 的值。



解 (1) 因为 $\frac{x}{y+z} = a$, 所以 $\frac{a}{1+a} = \frac{\frac{x}{y+z}}{1+\frac{x}{y+z}} = \frac{x}{x+y+z}$.

同理可得 $\frac{b}{1+b} = \frac{y}{x+y+z}$, $\frac{c}{1+c} = \frac{z}{x+y+z}$.

所以 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$.

(2) 因为 $a+b+c=0$, 所以 $a = -b-c$.

所以 $2a^2 + bc = a^2 + a^2 + bc = a^2 - (b+c)a + bc = (a-b)(a-c)$.

同理可得 $2b^2 + ac = (b-a)(b-c)$, $2c^2 + ab = (c-a)(c-b)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{a^2}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} - \frac{c^2}{(c-a)(b-c)} \\ &= -\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{a^2(b-c) - a(b-c)(b+c) + (b-c)bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1. \end{aligned}$$

例 4 (1) 计算: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6}$;

(2) 计算: $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4x^3}{1+x^4}$.

解 (1) 原式 $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}$
 $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$.

(2) 原式 $= \frac{(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4x^3}{1+x^4}$
 $= \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4x^3}{1+x^4}$
 $= \frac{4x^3}{1-x^4} - \frac{4x^3}{1+x^4} = \frac{8x^7}{1-x^8}$.

例 5 (1) 计算: $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)} + \frac{b-c}{(a-b)(x-b)} + \frac{b-c}{(b-a)(x-a)}$;

(2) 计算: $\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ac+bc} + \frac{2b-c-a}{b^2-bc-ba+ca} + \frac{2c-a-b}{c^2-ca-cb+ab}$.

解 (1) 原式 $= \frac{x-c}{(x-a)(x-b)} - \frac{(b-c)(a-b)}{(a-b)(x-a)(x-b)}$
 $= \frac{x-c}{(x-a)(x-b)} - \frac{b-c}{(x-a)(x-b)}$



$$= \frac{x-b}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{x-a}.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \frac{(a-b)+(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-c)+(b-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c-a)+(c-b)}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a} - \frac{1}{b-c} = 0. \end{aligned}$$

例 6 (1) 计算: $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\right)$;

(2) 计算: $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right)\left(x^{16} + \frac{1}{x^{16}}\right)(x^2 - 1)$.

解 (1) 原式 = $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\right)$
 $= \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{64}.$

(2) 原式 = $x\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right)\left(x^{16} + \frac{1}{x^{16}}\right)$
 $= x\left(x^{32} - \frac{1}{x^{32}}\right) = x^{33} - \frac{1}{x^{31}}.$

例 7 (1) 化简: $\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{1 - 2|a| + a^2}$;

(2) 已知三角形三边之长 a, b, c 满足关系式: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a-b+c}$, 如果按边分类, 试判断这个三角形的形状.

解 (1) 若绝对值中含有字母, 必须注意按字母的符号进行分类讨论, 现在与分式综合, 还须注意到分母不等于零.

$$\text{原式} = \frac{a^2(a-1) - (a-1)}{(|a|)^2 - 2|a| + 1} = \frac{(a-1)^2(a+1)}{(|a|-1)^2}.$$

当 $a < 0$ 且 $a \neq -1$ 时, $(|a|-1)^2 = (-a-1)^2 = (a+1)^2$, 原式 = $\frac{(a-1)^2}{a+1}$;

当 $a \geq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $(|a|-1)^2 = (a-1)^2$, 因为 原式 = $a+1$.

(2) 由条件得 $\frac{bc-ac+ab}{abc} = \frac{1}{a-b+c}.$

即 $(a-b+c)(bc-ac+ab) - abc = 0.$

展开, 并因式分解, 得 $(a+c)(a-b)(b-c) = 0,$

在三角形中, 因为 $a+c > 0$, 所以 $a=b$ 或 $b=c$.

所以 该三角形为等腰三角形.

例 8 已知 $abcd = 1$, 求 $\frac{a}{abc+ab+a+1} + \frac{b}{bcd+bc+b+1} + \frac{c}{cda+cd+c+1} +$

$\frac{d}{dab+da+d+1}$ 的值.



解 因为 $abcd = 1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{b}{bcd + bc + b + 1} + \frac{c}{cda + cd + c + 1} + \frac{d}{dab + da + d + 1} \\ &= \frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{ab}{abcd + abc + ab + a} + \frac{abc}{abcda + abcd + abc + ab} \\ & \quad + \frac{abcd}{abcdab + abcd + abcd + abc} \\ &= \frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{ab}{abc + ab + a + 1} + \frac{abc}{abc + ab + a + 1} + \frac{1}{abc + ab + a + 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

例 9 已知 a, b, c 都不为零, 且 $a + b + c = 2, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, 求证: a, b, c 中至少有一个等于 2.

证明 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, 所以 $abc = 2ab + 2bc + 2ca$.

$$\text{又 } (a-2)(b-2)(c-2) = abc - 2ab - 2bc - 2ca + 4a + 4b + 4c - 8 = 0,$$

所以 $a-2=0$ 或 $b-2=0$ 或 $c-2=0$.

即 a, b, c 中至少有一个等于 2.

例 10 已知 $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. 求证: $a = b = c$ 或 $(abc)^2 = 1$.

证明 因为 $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}$, 所以 $a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$, 即 $bc(a - b) = b - c$.

同理可得 $ab(c - a) = a - b, ca(b - c) = c - a$.

$$\text{即 } a^2 b^2 c^2 (a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)(b - c)(c - a).$$

$$\text{即 } (a - b)(b - c)(c - a)[(abc)^2 - 1] = 0.$$

$$\text{即 } (abc)^2 = 1 \text{ 或 } a - b = 0 \text{ 或 } b - c = 0 \text{ 或 } c - a = 0.$$

当 $a - b = 0$ 或 $b - c = 0$ 或 $c - a = 0$ 时, 由 $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ 得 $a = b = c$.

即 $a = b = c$ 或 $(abc)^2 = 1$.

例 11 求证: $\frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 - b^2}{c} = (a + b + c) \left(\frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b} + \frac{a - b}{c} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{证明 右边} &= (a + b + c) \left(\frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b} + \frac{a - b}{c} \right) \\ &= b - c + \frac{b^2 - c^2}{a} + c - a + \frac{c^2 - a^2}{b} + a - b + \frac{a^2 - b^2}{c} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 - b^2}{c} = \text{左边}. \end{aligned}$$

所以 命题成立.

例 12 已知 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$. 求证: $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^{2n+1}$



$$+ \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^{2n+1} = 1 \quad (n \text{ 为自然数}).$$

证明 由 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$,

得 $b^2a + c^2a - a^3 + c^2b + a^2b - b^3 + a^2c + b^2c - c^3 = 2abc$.

即 $a^3 - a^2(b+c) - a(b^2 - 2bc + c^2) + b^3 + c^3 - b^2c - bc^2 = 0$.

即 $a^2(a-b-c) - (b-c)^2(a-b-c) = 0$.

即 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$.

即 $a+b-c=0$ 或 $b+c-a=0$ 或 $c+a-b=0$.

当 $a+b-c=0$ 时, 则 $c=a+b, a=c-b, b=c-a$.

所以 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - (c-b)^2}{2bc} = 1$.

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c^2 + a^2 - (c-a)^2}{2ca} = 1.$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a+b)^2}{2ab} = -1.$$

所以 $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^{2n+1} = 1$.

当 $b+c-a=0$ 或 $c+a-b=0$ 时, 同理可得

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^{2n+1} = 1.$$

所以 $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^{2n+1} = 1$.



【能力训练】

一、选择题

1. 若 $(x+y):(x-y)=5:2$, 则 $x:y$ 等于().

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{7}{3}$

(C) $\frac{3}{7}$

(D) $\frac{2}{7}$

2. 若 $a^2 + 4a + 1 = 0$, 则 $\frac{a^4 + 19a^2 + 1}{2a^3 + 19a^2 + 2a}$ 的值为().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. 当 $a < b < c$ 时, $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ 的值是().

(A) 正数

(B) 负数

(C) 0

(D) 无法确定

4. 若 $a+b+c=0, abc \neq 0$, 则 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 3$ 的值为().



(A)0

(B)1

(C)-1

(D)不确定

二、填空题

5. 化简 $\frac{a^2 - (b-c)^2}{(a+c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (c-a)^2}{(a+b)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (a-b)^2}{(b+c)^2 - a^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 化简 $\frac{x-3}{2x-4} \div \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 当 $x = -4\frac{1}{3}$ 时, $\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x-2}\right)^2 \div \left(\frac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 若 $|a-1| + (ab-2)^2 = 0$, 则 $\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \cdots + \frac{1}{(a+2003)(b+2003)}$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

9. 已知 $a \neq b$, $x = \frac{4ab}{a+b}$, 求代数式 $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b}$ 的值.

10. 有三个连续正整数, 其倒数之和为 $\frac{47}{60}$, 求这三个数.

11. 解关于 x 的方程 $\frac{a^2+2x}{2x+1} - \frac{a^2-2x}{1-2x} = \frac{2(1-a^4)}{1-4x^2}.$

12. 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, 求证:

$$\frac{1}{a^{2003}} + \frac{1}{b^{2003}} + \frac{1}{c^{2003}} = \frac{1}{a^{2003} + b^{2003} + c^{2003}}.$$



十一、全等三角形



【赛点目标】

1. 理解全等三角形的定义,掌握全等三角形的性质,能以三角形全等的判定方法证明边、角的相等问题.
2. 会画与已知三角形全等的三角形.
3. 全等三角形的对应元素(边、角、角平分线、中线、高线)相等.
4. 全等三角形的判定方法是:SAS, ASA, AAS, SSS, 对直角三角形来说,还有 HL 定理.
5. 利用直尺和圆规,根据 SAS, ASA, SSS 的方法都可画出与已知三角形全等的三角形.



【方法述要】

能够完全重合的两个三角形称为全等三角形.在平面几何中,证明线段或角相等,主要是利用全等三角形,其基本思路是:

1. 观察求证的线段(或角)在哪两个三角形中,再证明这两个三角形全等.
2. 如果求证的线段(或角)不在两个全等三角形中,应考虑将线段或角转化,再寻找全等三角形,或通过添加辅助线,构造全等三角形.



【赛题精讲】

例 1 如图11-1, D, E 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的两点, $AD = AE$, 要证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 还应补充一个什么条件?

解 补充以下条件之一,均可证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

- | | |
|---------------------------------|--|
| (1) $\angle BAD = \angle CAE$; | (6) $AB = AC$; |
| (2) $\angle B = \angle C$; | (7) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$; |
| (3) $\angle BAE = \angle CAD$; | (8) $\triangle ABC$ 是等腰三角形; |
| (4) $EC = BD$; | (9) $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACE}$; |
| (5) $BE = CD$; | (10) $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACD}$. |

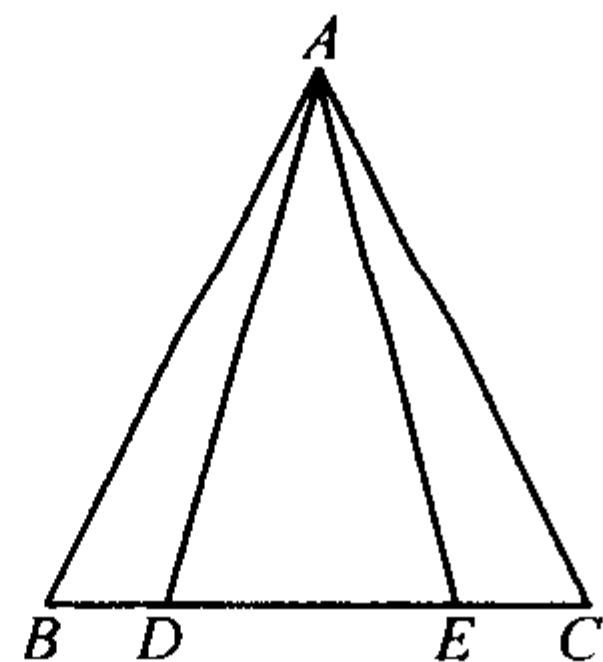


图 11-1

例 2 如图11-2, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, AE 是 $\triangle ABD$ 的中线, $BA = BD$, 求证: $AC = 2AE$.



分析 要证 $AC = 2AE$, 即证 $AE = \frac{1}{2}AC$, $\because D$ 是 BC 中点, 取 AB 中点 M , 连结 MD , 得 $\triangle ABC$ 的中位线 MD , $MD = \frac{1}{2}AC$, 再证 $MD = AE$.

证明 取 AB 中点 M , 连结 MD .

$\because BD = DC, \therefore MD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore MD = \frac{1}{2}AC.$$

又 $\because BE = \frac{1}{2}BD, BM = \frac{1}{2}BA, BD = BA,$

$\therefore BE = BM$. 而 $\angle B = \angle B, \therefore \triangle BAE \cong \triangle BDM,$

$$\therefore AE = MD, \therefore AE = \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore AC = 2AE.$$

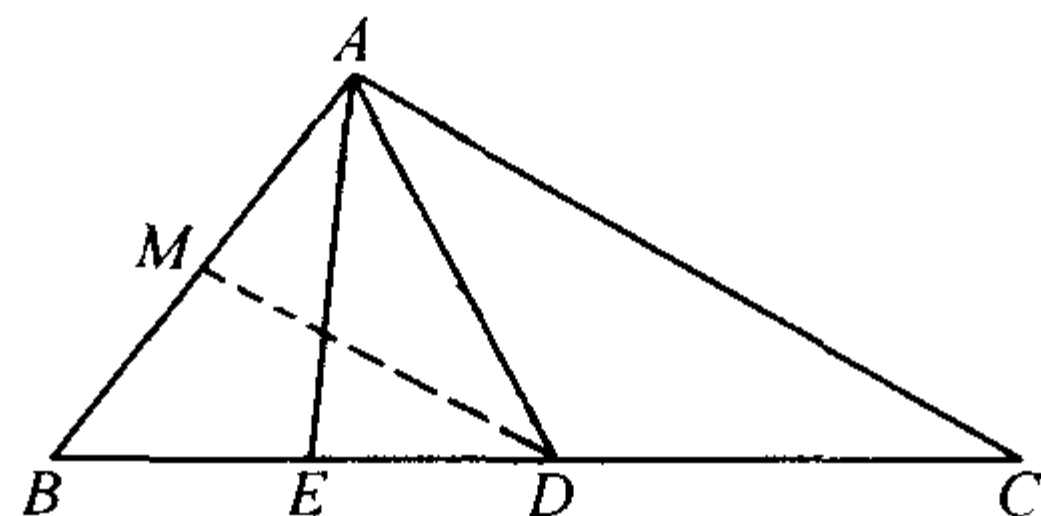


图 11-2

例 3 如图 11-3, 在正方形 $ABCD$ 中任作 $\angle EAF = 45^\circ$, AE 交 CD 于点 E , AF 交 BC 于点 F , $AP \perp EF$ 于 P . 求证: $AP = AB$.

分析 由于 AP 是 $\triangle AEF$ 的高线, 可考虑构造一个三角形, 使 AB 成为此三角形的高线, 若能证此三角形和 $\triangle AEF$ 全等, 就可利用全等三角形对应高线相等这一性质. 为了构造新的三角形, 由 $\angle EAD + \angle BAF = 45^\circ = \angle EAF$ 想到, 可以把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 90° , 和 $\triangle ABF$ 拼成 $\triangle AGF$.

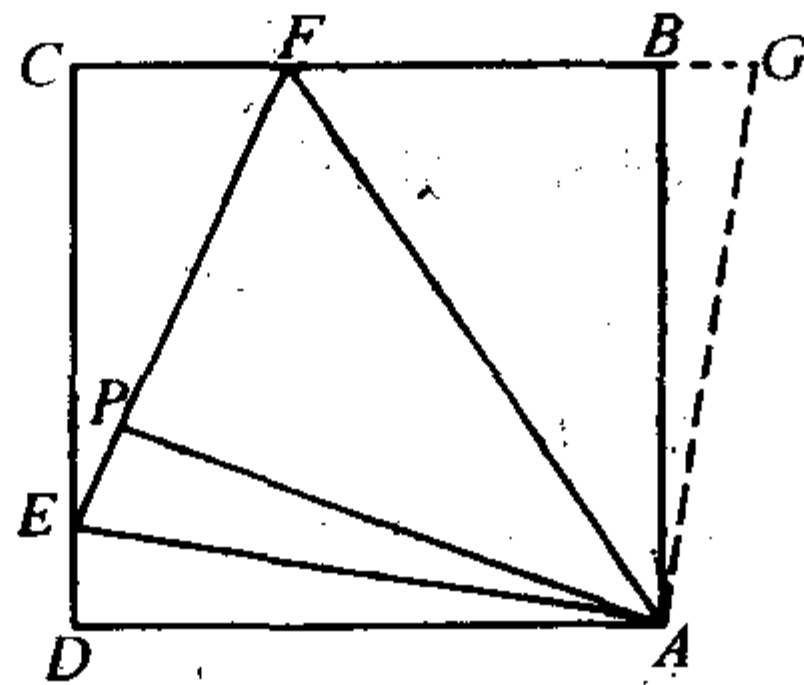


图 11-3

证明 延长 CB 到 G , 使 $BG = DE$, 连结 AG , 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABG$ 中, $AD = AB, \angle D = \angle ABG = 90^\circ, DE = BG,$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABG.$$

$$\therefore AE = AG, \angle EAD = \angle GAB.$$

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ, \therefore \angle EAD + \angle BAF = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle GAB + \angle BAF = 45^\circ, \text{即 } \angle GAF = 45^\circ.$$

在 $\triangle AGF$ 和 $\triangle AEF$ 中, $AG = AE, \angle GAF = \angle EAF = 45^\circ, AF = AF, \therefore \triangle AGF \cong \triangle AEF.$

$\because AB, AP$ 是这两个全等三角形对应边上的高线, $\therefore AB = AP.$

例 4 如图 11-4 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 一直线过点 A 与过点 B, C 且垂直于 BC 的两条垂线交于点 D, E . 求证: $AD = AE$.

分析 图中 AD, AE 所在的三角形不全等, 可以通过加辅助线构造两个全等三角形.

证法一 延长 BA 交 CE 于点 F .



$\because BC \perp CF,$
 $\therefore \angle 1 + \angle 4 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ.$
 又 $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 3 = \angle 4.$
 $\therefore AC = AF. \therefore AB = AF.$
 又 $\because \angle D = \angle E, \angle BAD = \angle EAF,$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle AFE.$
 $\therefore AD = AE.$

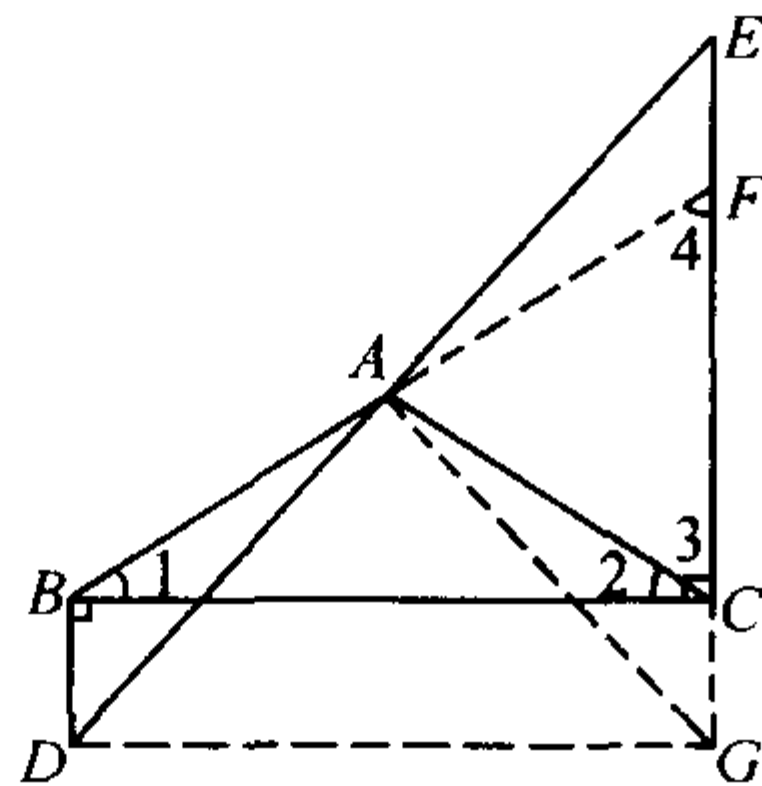


图 11-4

证法二 过点 D 作 $DG \perp BD$ 交 EC 的延长线于点 G , 连结 AG , 则四边形 $BCGD$ 为矩形.

$\because AB = AC, BD = CG, \angle ABD = \angle ACG,$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACG. \therefore AD = AG, \angle ADB = \angle AGC.$
 又 $\because \angle E + \angle EDG = 90^\circ, \angle EGA + \angle AGD = 90^\circ,$
 且 $\angle ADG = 90^\circ - \angle ADB = 90^\circ - \angle AGC = \angle AGD.$
 $\therefore \angle E = \angle AGC.$
 $\therefore AG = AE. \therefore AD = AE.$

例 5 如图 11-5 所示, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 为正三角形, AC 与 BE 交于点 M , AD 与 CE 交于点 N . 求证: (1) $AD = BE$; (2) $CM = CN$.

分析 (1) 线段 AD 在 $\triangle ACD$ 中, 线段 BE 在 $\triangle BCE$ 中, 可以通过证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$; (2) 线段 CM 在 $\triangle CMB$ 和 $\triangle CME$ 中, 线段 CN 在 $\triangle CNA$ 和 $\triangle CND$ 中, 通过观察, 可证 $\triangle CMB \cong \triangle CNA$ 或证 $\triangle CME \cong \triangle CND$.

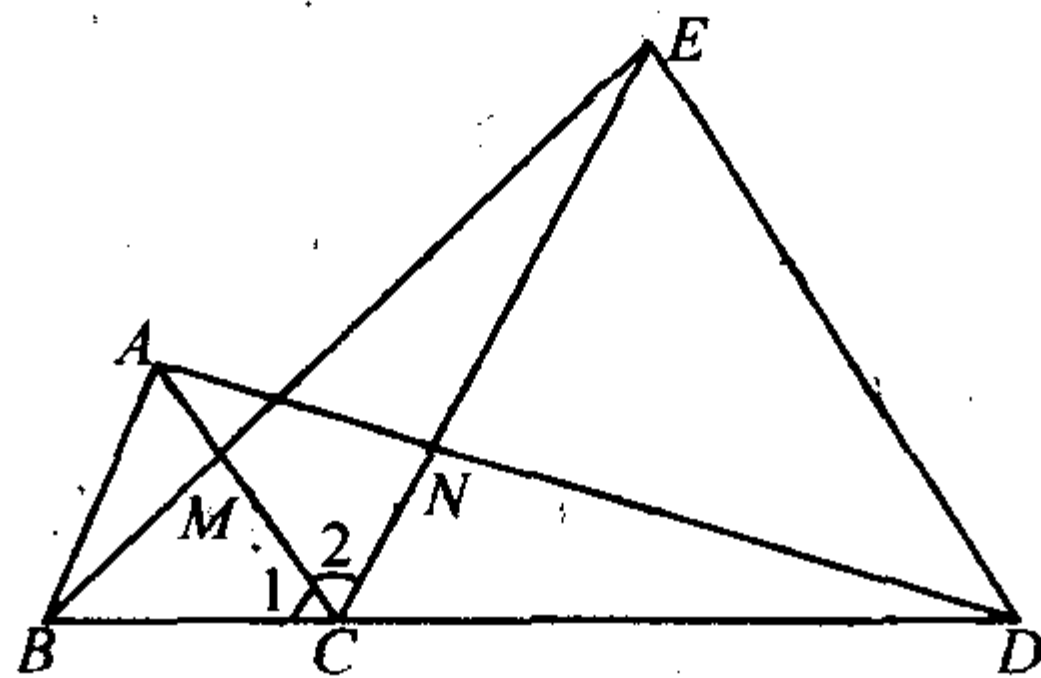


图 11-5

证明 (1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 为正三角形,
 $\therefore BC = AC, CE = CD, \angle BCE = 120^\circ = \angle ACD,$
 $\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD. \quad (\text{SAS})$
 $\therefore BE = AD.$
 (2) 由 (1) 可知 $\triangle BCE \cong \triangle ACD.$
 $\therefore \angle CBE = \angle CAD.$
 又 $\because BC = AC, \angle 1 = 60^\circ = \angle 2,$
 $\therefore \triangle BCM \cong \triangle ACN. \quad (\text{ASA})$
 $\therefore CM = CN.$

例 6 如图 11-6 所示, BD, CE 是 $\triangle ABC$ 的高, 点 P 在 BD 的延长线上, $PB = AC$, 点 Q 在 CE 上, $QC = AB$. 求证: $PA = QA, PA \perp QA$.

分析 PA 在 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PAB$ 中, QA 在 $\triangle QAE$ 和 $\triangle QAC$ 中, 结合已知条件可



知证明 $\triangle PAB \cong \triangle AQC$. 而 $PA \perp QA$ 可以通过角度关系证明, 也可根据 $\triangle PAB$ 旋转 90° 与 $\triangle AQC$ 重合而得.

证明 $\because CE \perp AB, BD \perp AC$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ = \angle 2 + \angle 4.$$

$$\text{又} \because \angle 3 = \angle 4, \therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\text{又} \because PB = AC, AB = QC,$$

$$\therefore \triangle PAB \cong \triangle AQC. \quad (\text{SAS})$$

$$\therefore PA = QA \text{ 且 } \angle QAC = \angle P.$$

$$\because \angle P + \angle PAD = 90^\circ, \therefore \angle QAC + \angle PAD = \angle PAQ = 90^\circ.$$

$$\therefore PA \perp QA.$$

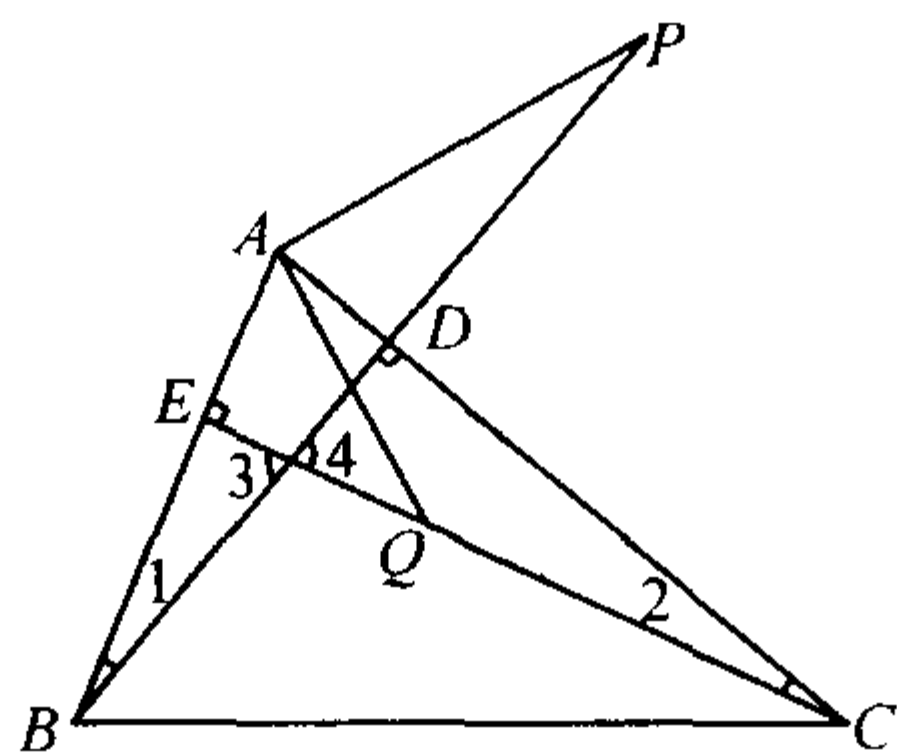


图 11-6

例 7 如图11-7所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, $\angle EDF = 90^\circ$, DE 交 AB 于点 E , DF 交 AC 于点 F , 求证: $BE + CF > EF$.

分析 应设法将 BE, CF, EF 集中到同一个三角形中, 可作旋转变换, 构造全等三角形.

证明 延长 FD 至点 G , 使 $DF = DG$, 连结 EG, BG , 易知 $\triangle DFC \cong \triangle DGB$.

$$\therefore CF = BG.$$

$$\text{又} \because ED \perp GF, GD = FD,$$

$$\therefore EF = EG. \quad (\text{中垂线性质})$$

$$\because \text{在 } \triangle EBG \text{ 中, 有 } BE + BG > EG,$$

$$\therefore BE + CF > EF.$$

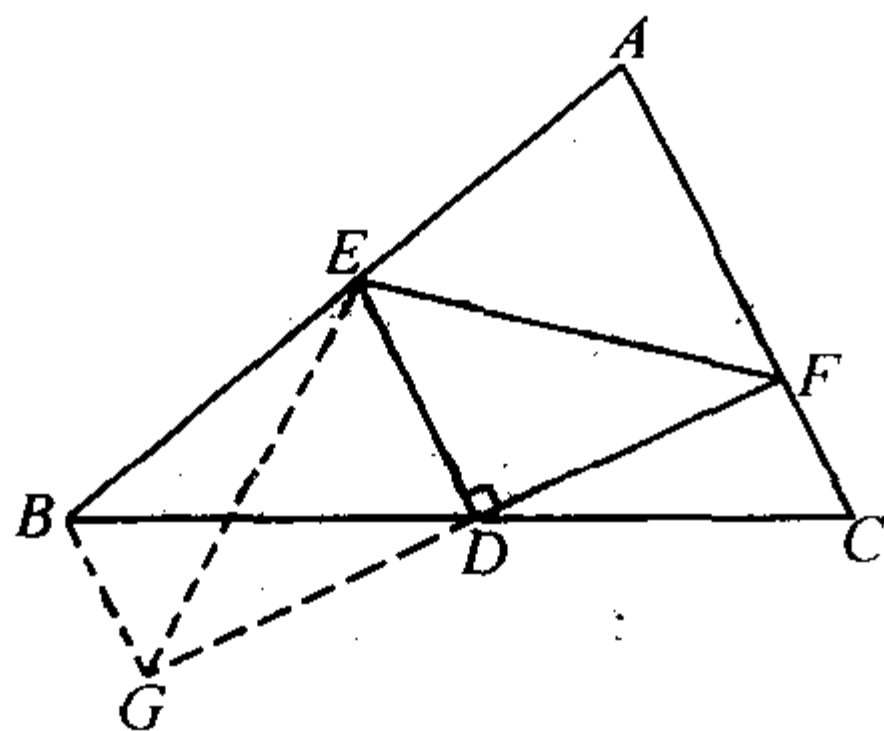


图 11-7

例 8 如图11-8所示, $\triangle ABC$ 两条角平分线 BD, CE 相交于点 O , $\angle A = 60^\circ$, 求证: $CD + BE = BC$.

证明 在 BC 上取一点 F , 使 $BF = BE$, 连结 OF , 则

$$\because BE = BF, \angle 1 = \angle 2, BO = BO,$$

$$\therefore \triangle EBO \cong \triangle FBO. \therefore \angle EOB = \angle FOB.$$

$$\text{又} \because \angle 2 + \angle 4 = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle COB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle EOB = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle EOB = \angle BOF = \angle FOC = \angle DOC = 60^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 3 = \angle 4, OC = OC,$$

$$\therefore \triangle OFC \cong \triangle ODC. \therefore CD = CF.$$

$$\therefore BC = BF + CF = BE + CD.$$

说明 证明两条线段之和等于另一条线段, 通常有两种证法: 一是将较长的线段分

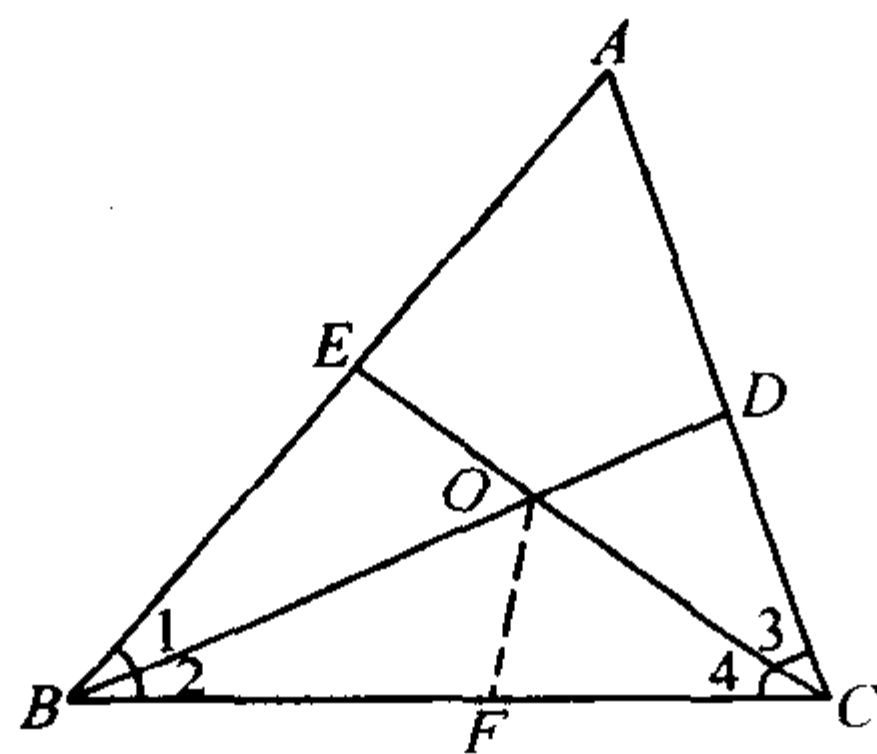


图 11-8



成两段;一是将较短的线段延长,使它等于两条线段之和,从而将结论转化为证明线段相等.

例 9 如图11-9所示,在 $\triangle ABC$ 中, D, E 是 BC 上两点,且 $AD \parallel EG$, EG 交 AC 于点 F ,交 BA 的延长线于点 G ,若 $EF + EG = 2AD$,求证:
 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线.

证明 延长 AD 至点 M ,使 $DM = AD$,连结 MC ,延长
 GE 交 MC 于点 N ,则

$$\because FN \parallel AM, AD = DM, \therefore FE = NE.$$

$$\text{又} \because EF + EG = EN + EG = GN,$$

$$\therefore AM = GN.$$

\therefore 四边形 $AMNG$ 是平行四边形.

$$\therefore AG \parallel MN, \therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\text{又} \because \angle 3 = \angle 4, AD = DM,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle MCD. \therefore BD = DC.$$

$\therefore AD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线.

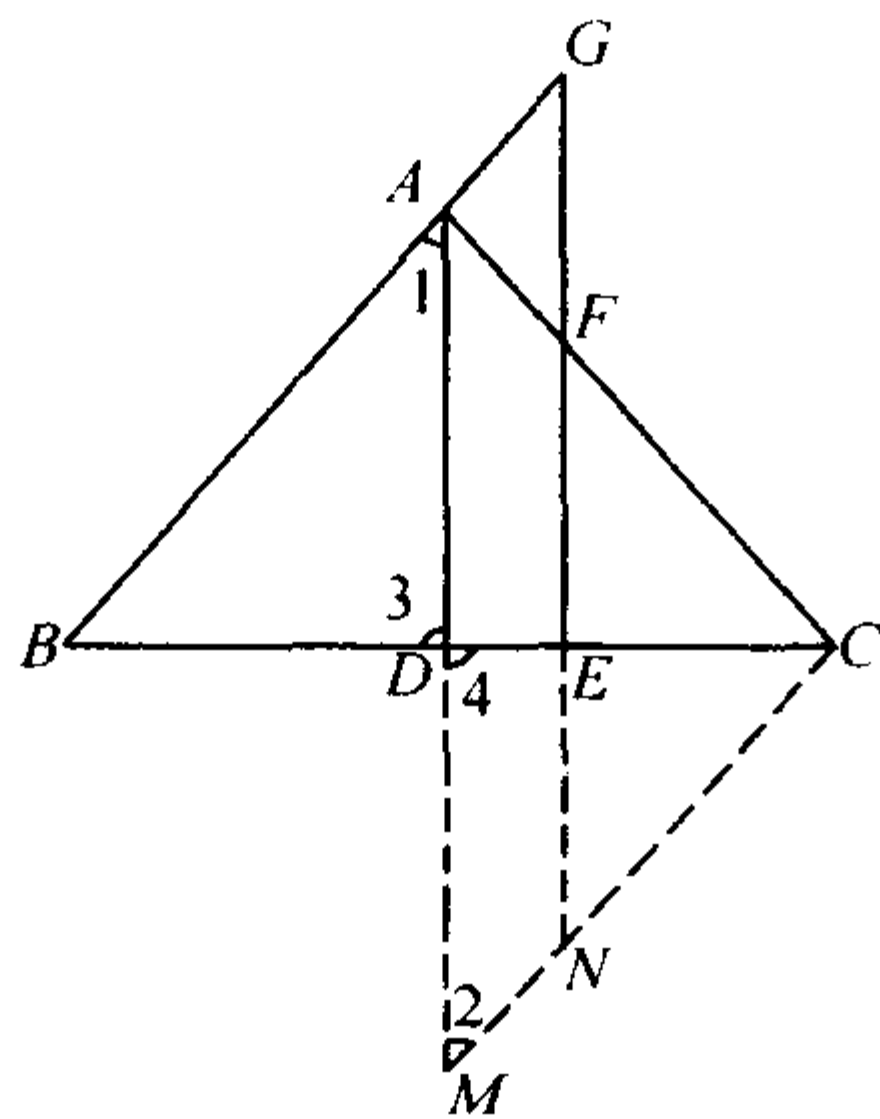


图 11-9

例 10 如图11-10所示, $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BDC$,求证:
 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明 延长 CD 至点 E ,使 $DE = DB$,则

$$\because \angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BDC, \therefore 2\angle ADB + \angle BDC = 180^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle EDA + \angle ADB + \angle BDC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADE.$$

$$\text{又} \because BD = DE, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADE.$$

$$\therefore AE = AB, \angle E = \angle ABD = 60^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle ACE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 为正三角形.

$$\therefore AC = AE.$$

$$\therefore AB = AC. \quad \text{即} \triangle ABC \text{为等腰三角形.}$$

说明 几何变换是构造全等三角形的常用方法,一般地,如果图中出现角平分线,可作反射变换,若出现中线,可作旋转变换.

例 11 已知:如图11-11 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, $AD = DB$, $AE = CF$. 求证: $DE = DF$.

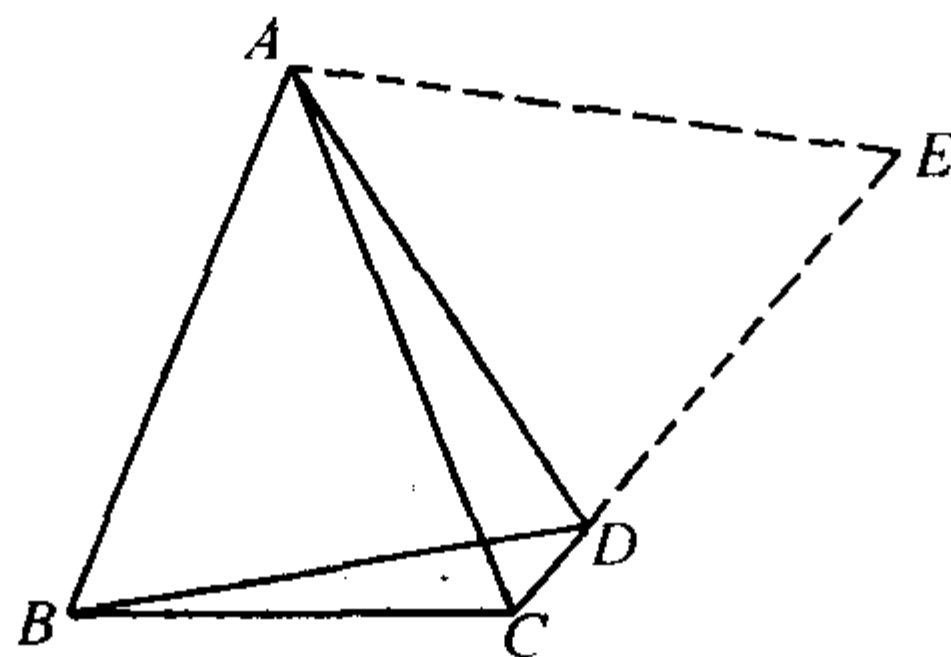


图 11-10



分析 此题图形是等腰直角三角形,因此必有 $\angle A = \angle B = 45^\circ$,由条件 $AD = DB$,想到连结 CD ,又必有 $CD = AD = DB$,
 $\angle BCD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$. 从中不难发现 $\triangle DCF \cong \triangle DAE$. 故 $DE = DF$.

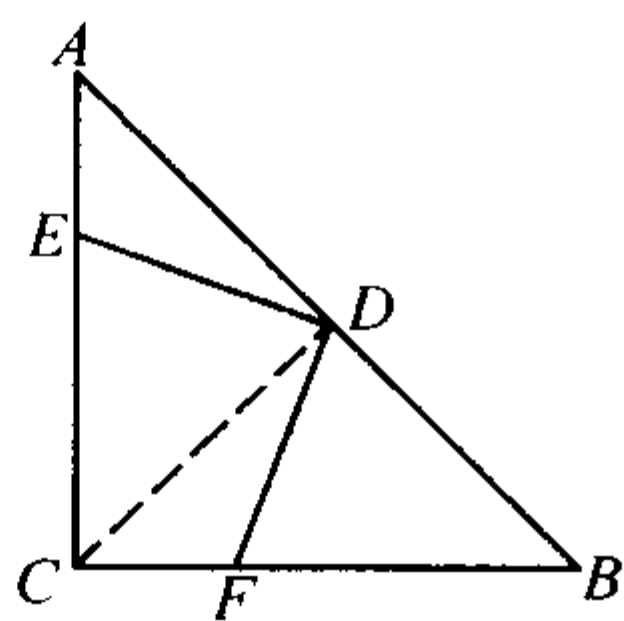


图 11-11

证明 连结 CD .

$\because AC = BC, \therefore \angle A = \angle B$.

$\because \angle ACB = 90^\circ, AD = DB, \therefore CD = BD = AD, \therefore \angle DCB = \angle B = \angle A$.

$\because AE = CF, \angle A = \angle DCF, AD = CD, \therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF, \therefore DE = DF$.

说明 ①从解法的分析中,可以体会计算法在分析题目中的应用. 尽管有时在证明中不一定计算角度,但它对寻找解题方法确有很大帮助.

②在直角三角形中,作出斜边中线是常用辅助线.

③在等腰三角形中,作出顶角平分线、底边上的中线或高也是常用辅助线.

④此题 ED 可以看成是 $\triangle AEB$ 的中线. 故此题用倍长中线也可解. 即延长 ED 到 M , 使 $DM = DE$, 连结 BM . 这种解法留给读者自己完成.

例 12 已知如图 11-12 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC, AD = DC, AE \perp BD$ 交 BC 于 E . 求证: $\angle ADB = \angle CDE$.

分析 此题又是等腰直角三角形,故可得 $\angle C = 45^\circ$,由条件 $AD = DC$,和结论 $\angle CDE = \angle ADB$,想到能否作一个三角形与 $\triangle CDE$ 全等,因此只须作 $\angle DAF = 45^\circ$,由 $\angle BAC = 90^\circ$,故只须作 $\angle BAC$ 的平分线,这时要证 $\triangle CDE \cong \triangle ADF$,从图形上看只须证 $CE = AF$. 这点可由 $\triangle ACE \cong \triangle BAF$ 中得到.

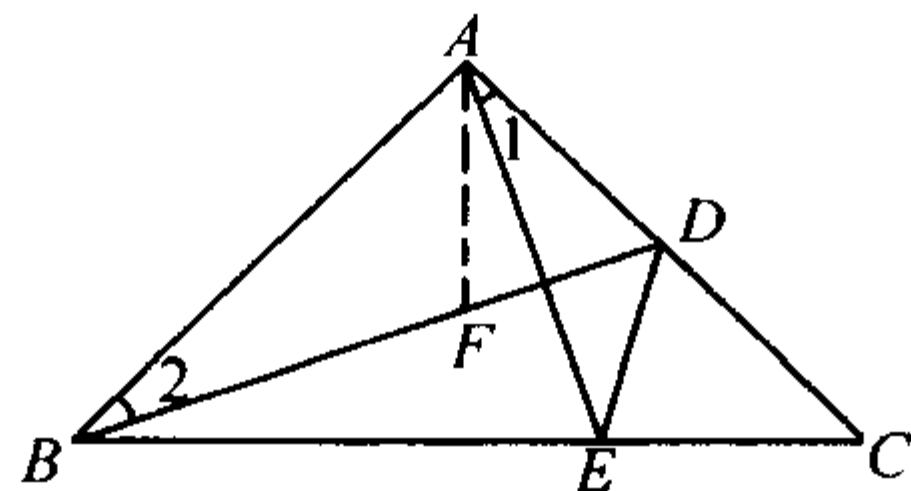


图 11-12

证明 作 AF 平分 $\angle BAC$ 交 BD 于 F .

$\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle BAF = \angle FAD = 45^\circ$,

$\because AB = AC, \therefore \angle C = \angle ABC = 45^\circ, \therefore \angle BAF = \angle FAD = \angle C$.

$\because \angle BAC = 90^\circ, AE \perp BD, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because \angle 1 = \angle 2, AC = AB, \angle C = \angle BAF, \therefore \triangle ACE \cong \triangle BAF, \therefore CE = AF$.

$\because \angle C = \angle FAD, CD = AD$,

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ADF, \therefore \angle ADB = \angle CDE$.

说明 制造全等三角形时,一般是尽量借助图中已有的线段或角等条件. 此题还有其他方法,例如:借助于 $AB = AC, \angle 2 = \angle 1$,制造一个与 $\triangle ABD$ 全等的三角形. 这种作法留给读者自己去做.



【能力训练】

一、选择题

- 如果两个三角形的两边和其中一边上的高对应相等,那么这两个三角形的第三边所对的角().
(A)相等 (B)互余 (C)互补 (D)互补或相等
- 如图 11-13, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, $DE = DF$, 则下面结论一定成立的是().
(A) $AE = FC$ (B) $AE = DE$ (C) $AE + FC = AC$ (D) $AD + FC = AB$
- 如图 11-14, $\angle BAC = 90^\circ$, $CE \perp BE$, $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, 则().
(A) $2CE = BD$ (B) $2CD = BD$
(C) $CE + CD = BD$ (D) 以上都不可能
- 如图 11-15, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, $\angle BDC = 120^\circ$, $BD = DC$, 以 D 为顶点作一个 60° 角, 角的两边分别交 AB 于 M , 交 AC 于 N , 连结 MN , 形成一个 $\triangle AMN$, 则 $\triangle AMN$ 的周长是().
(A)9 (B)10 (C)11 (D)12

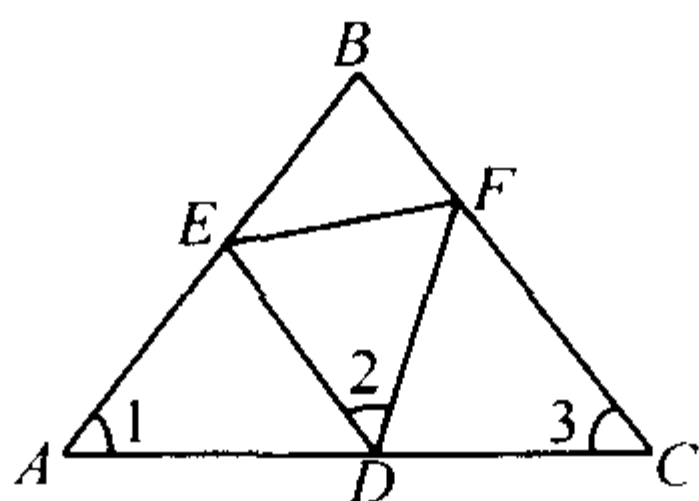


图 11-13

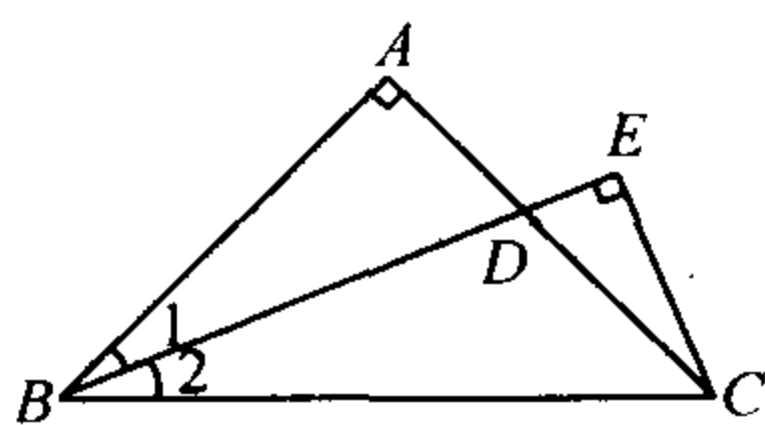


图 11-14

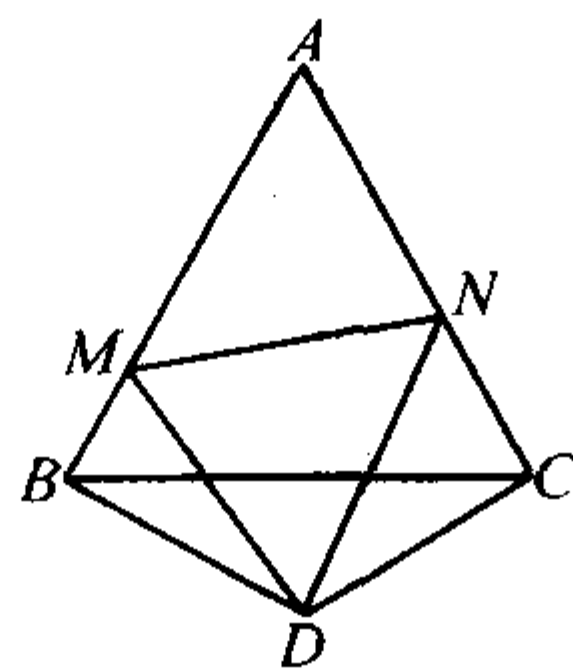


图 11-15

二、填空题

- 如图 11-16, $\triangle ABC$ 的高 AD 、 BE 相交于 H , 且 $BH = AC$, 则 $\angle BCH$ 的度数等于_____.
- 如图 11-17, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上的一点, 且 $AC = DB$, CE 平分 AD , $\angle ADC = \angle ACD$, $CE = a$, 那么 $BC =$ _____.
- 如图 11-18, 在平面上将 $\triangle ABC$ 绕 B 点旋转到 $\triangle A'BC'$ 的位置时, $AA' \parallel BC$, $\angle ABC = 70^\circ$, 则 $\angle CBC' =$ _____.
- 如图 11-19, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AE = CD$, AD , BE 相交于 P 点, $BQ \perp AD$ 于 Q , $PQ = a$, 则 $BP =$ _____.

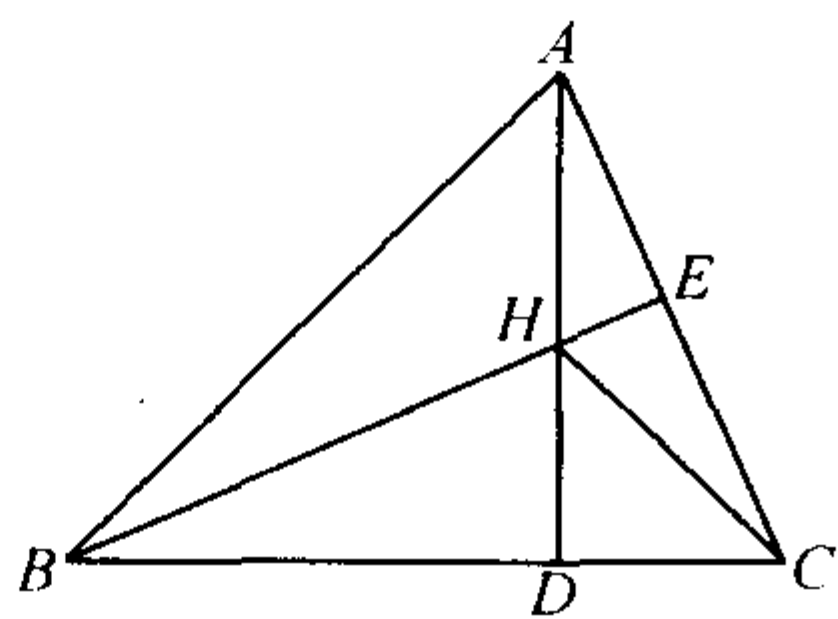


图 11-16

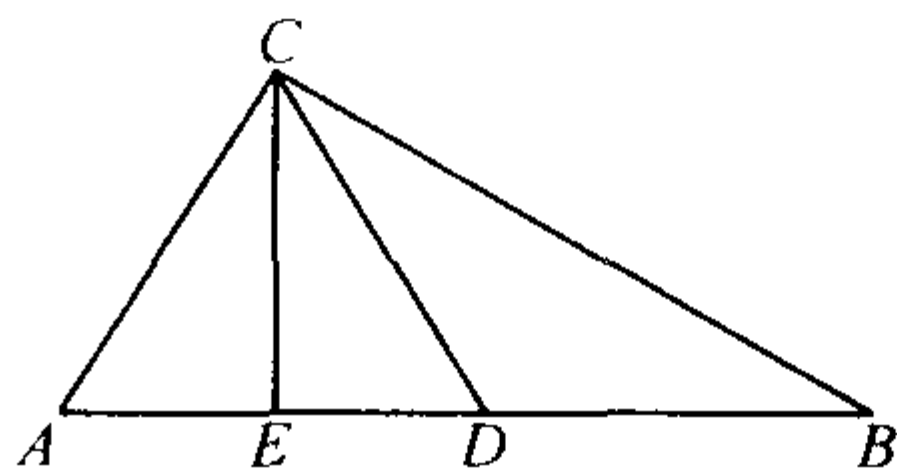


图 11-17

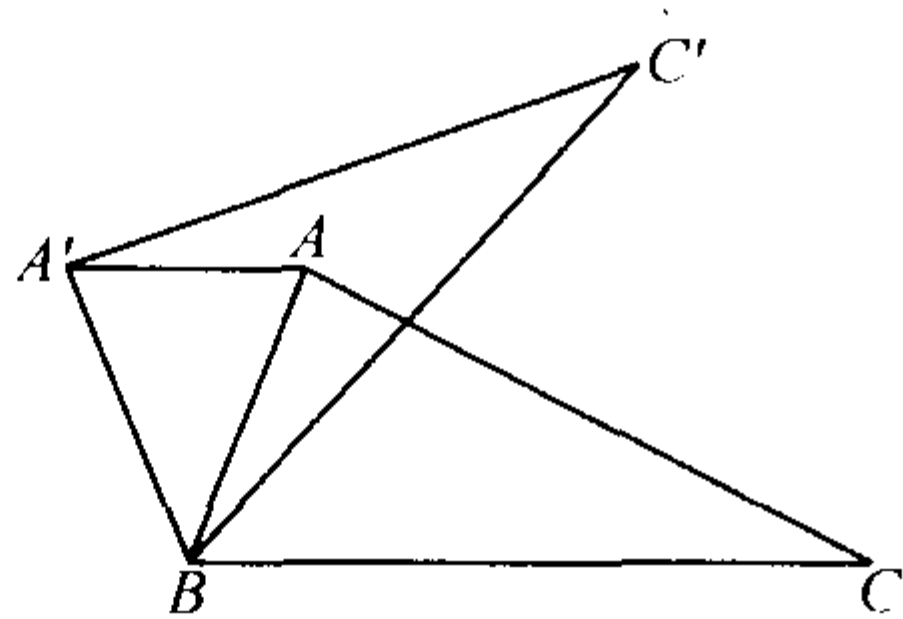


图 11-18

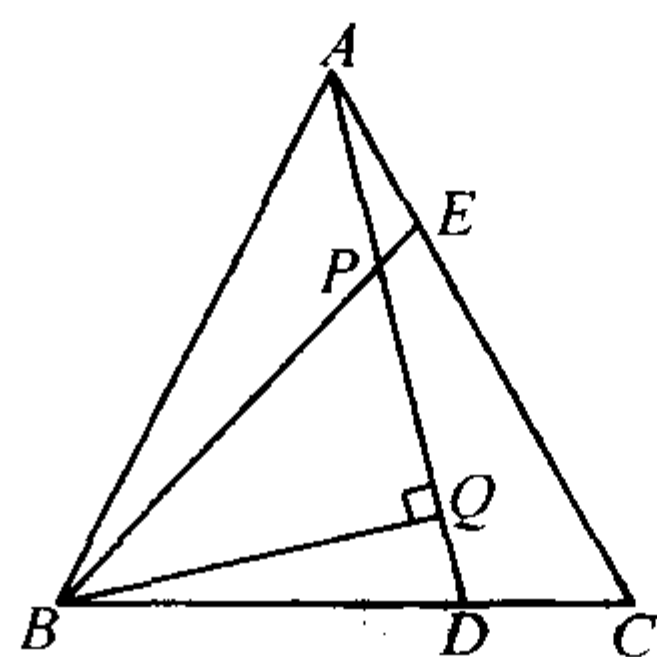


图 11-19

三、解答题

9. 如图 11-20 所示, D, C 为 $\triangle ABE$ 的 BE 边上的两点, $BD = DC, AB = BC = CE$, 求证: $\angle BAD = \angle E$.

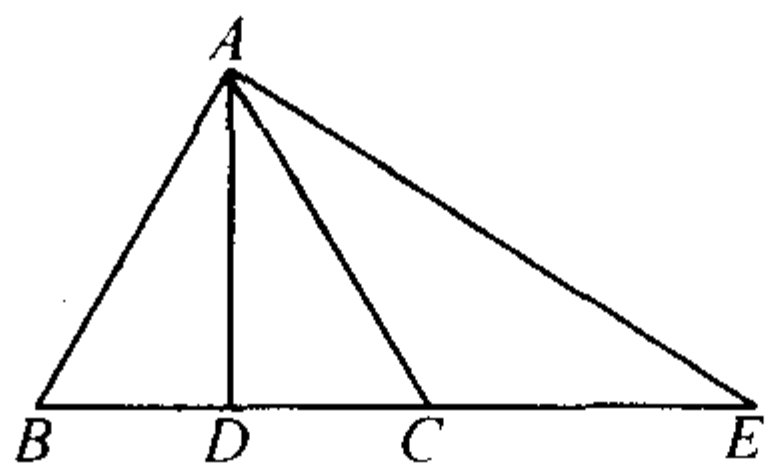


图 11-20

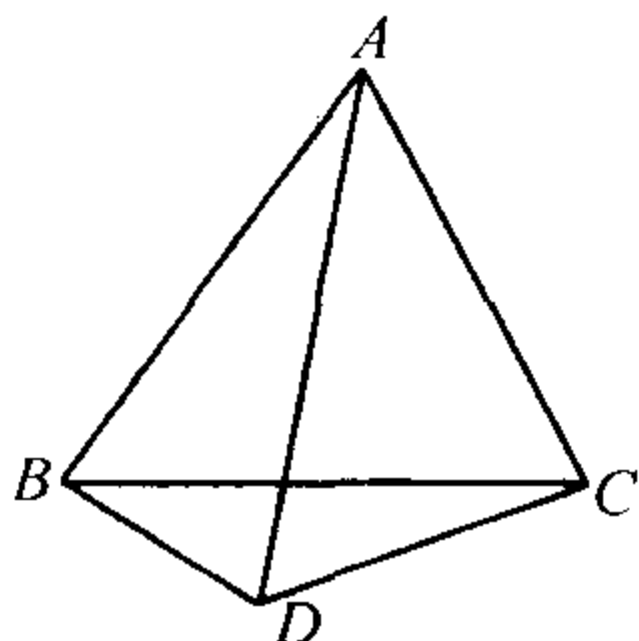


图 11-21

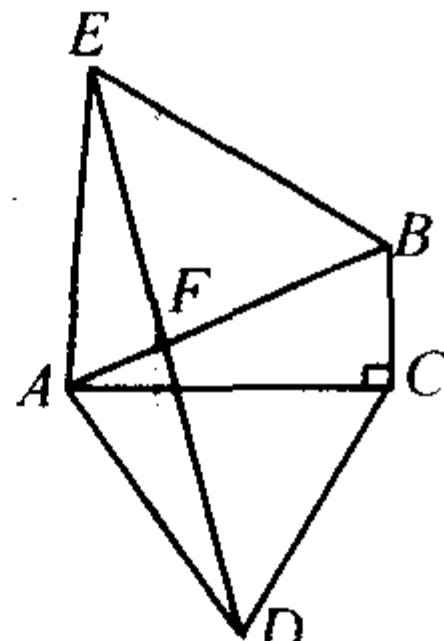


图 11-22

10. 如图 11-21 所示, D 为等边 $\triangle ABC$ 外一点, 连结 DA, DC, DB , 若 $\angle BDA = \angle BCA$, 求证: $AD = BD + CD$.

11. 如图 11-22 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle, \angle A = 30^\circ$, 分别以 AB, AC 为边在 $\triangle ABC$ 外侧作正 $\triangle ABE$ 和正 $\triangle ACD$, DE 与 AB 交于点 F , 求证: $EF = DF$.

12. (1) 已知在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, \angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 100^\circ$, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

(2) 若将上题中的 100° 改为 70° , 结论是否仍成立? 为什么?



十二、等腰三角形



【赛点目标】

1. 掌握等腰三角形、等边三角形的性质以及它们的判定方法.
2. 了解轴对称图形的概念.
3. 会画正三角形、正三棱柱、正三棱锥直观图.
4. 会写简单命题的逆命题.



【方法述要】

1. 一个图形沿着某条直线折过来后,如能与另一个图形重合,就说这两个图形关于这条直线对称.

2.

图 形	定 义	性 质	判 定
等腰 三角形	两边相等的三角 形	1. 两腰相等 2. 两底角相等 3. “三线合一” 4. 是轴对称图形,有一 条对称轴	1. 两边相等的三角形 2. 两角相等的三角形 (等角对等边)
等边 三角形	底与腰相等的等 腰三角形	1. 三边相等 2. 三个角都是 60° 3. “三线合一” 4. 是轴对称图形,有三 条对称轴	1. 三边相等的三角形 2. 有两个角是 60° 的 三角形 3. 有一个角是 60° 的 等腰三角形



【赛题精讲】

例 1 如图 12-1, 已知等边 $\triangle ABC$, D, E 分别在 BC, BA 的延长线上, 且 $BD = AE$, 求证: $CE = DE$.

证明 延长 BD 到 F , 使 $BF = BE$, 连结 EF ,

$\because \angle B = 60^\circ, \therefore \triangle BEF$ 是等边三角形.



$\therefore EF = BE, \angle B = \angle F = 60^\circ$.

又 $\because AE = BD, BE = BF, \therefore BA = DF, \because AB = BC,$
 $\therefore BC = DF. \therefore \triangle BCE \cong \triangle FDE, \therefore CE = DE$.

例 2 如图12-2所示, $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH, \angle A = 10^\circ$, 求 $\angle \alpha$ 的度数.

解 $\because \angle 1 = 2\angle A = 20^\circ,$
 $\angle 2 = \angle A + \angle 1 = 30^\circ,$
 $\angle 3 = \angle A + \angle 2 = 40^\circ,$
 $\angle 4 = \angle A + \angle 3 = 50^\circ,$
 $\angle 5 = \angle A + \angle 4 = 60^\circ,$
 $\therefore \angle \alpha = 180^\circ - \angle 5 = 120^\circ$.

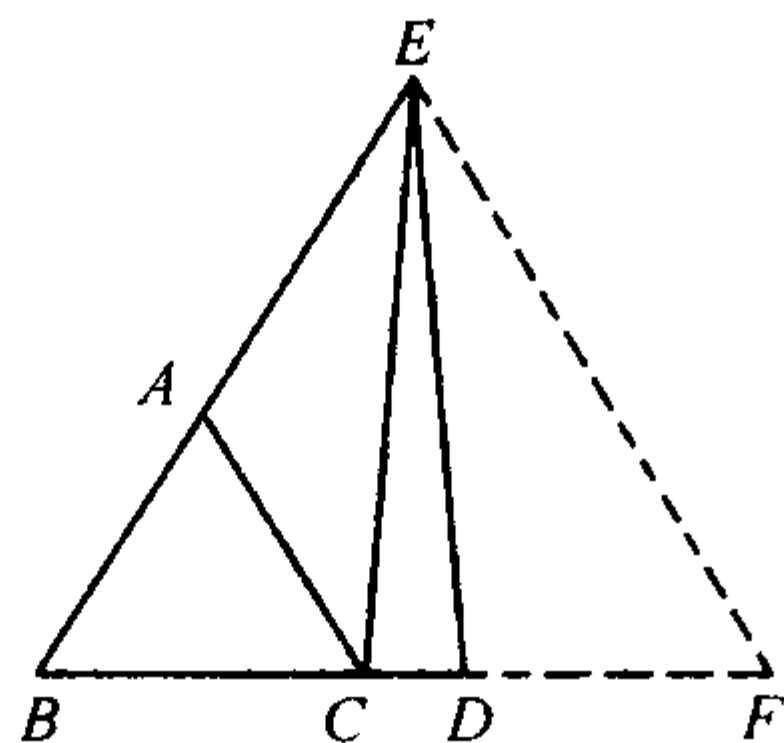


图 12-1

例 3 如图12-3所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AD = AC, BE = BC$, 求 $\angle DCE$ 的度数.

解 设 $\angle DCE = x^\circ$, 则 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - x$.

且 $\angle 1 + \angle 2 = \angle BCE + \angle ACD$
 $= \angle DCE + \angle ACB$
 $= 90^\circ + x$.

$\therefore 180^\circ - x = 90^\circ + x. \therefore x = 45^\circ$.

例 4 如图12-4所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B$ 的外角平分线分别交对边 CB, AC 的延长线于 D, E , 且 $AD = AB = BE$, 求 $\angle BAC$ 的度数.

解 设 $\angle BAC = \alpha, \because AB = BE$, 则 $\angle BEA = \angle BAC = \alpha$.

$\therefore \angle FBE = 2\alpha. \because BE$ 平分 $\angle FBC$,

$\therefore \angle CBE = \angle FBE = 2\alpha$.

$\therefore \angle ACB = \angle CBE + \angle BEA = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$.

$\angle ABD = \angle BAC + \angle ACB = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$.

$\because AD = AB, \therefore \angle D = \angle ABD = 4\alpha$.

$\because AD$ 平分 $\angle GAB, \therefore \angle GAD = \angle BAD = \angle D + \angle GCD = 4\alpha + 3\alpha = 7\alpha$,

$\therefore \angle GAC = 180^\circ. \therefore 7\alpha + 7\alpha + \alpha = 180^\circ$.

$\therefore 15\alpha = 180^\circ, \alpha = 12^\circ. \therefore \angle BAC = 12^\circ$.

例 5 如图12-5所示, D 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点, E 为 $\triangle ABD$ 内一点, 求证: $\angle AEB > \angle AEC$.

证明 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转至 $\triangle ACE'$, 则 $\triangle ACE' \cong \triangle ABE$.

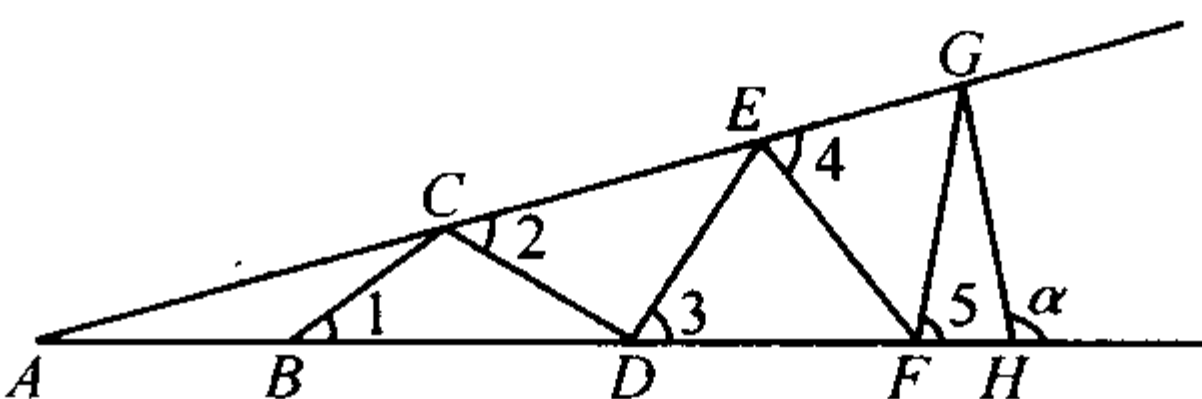


图 12-2

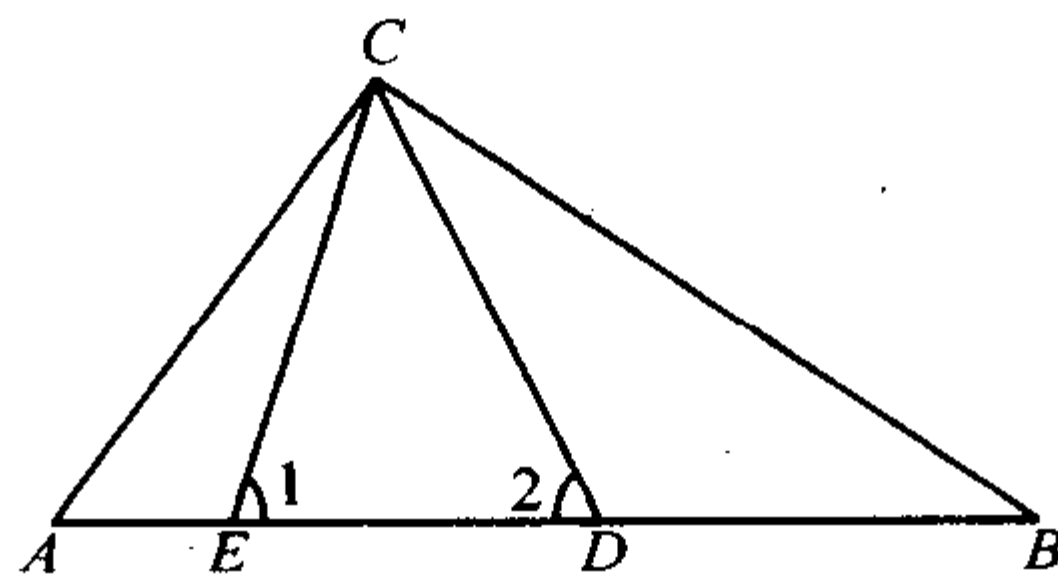


图 12-3

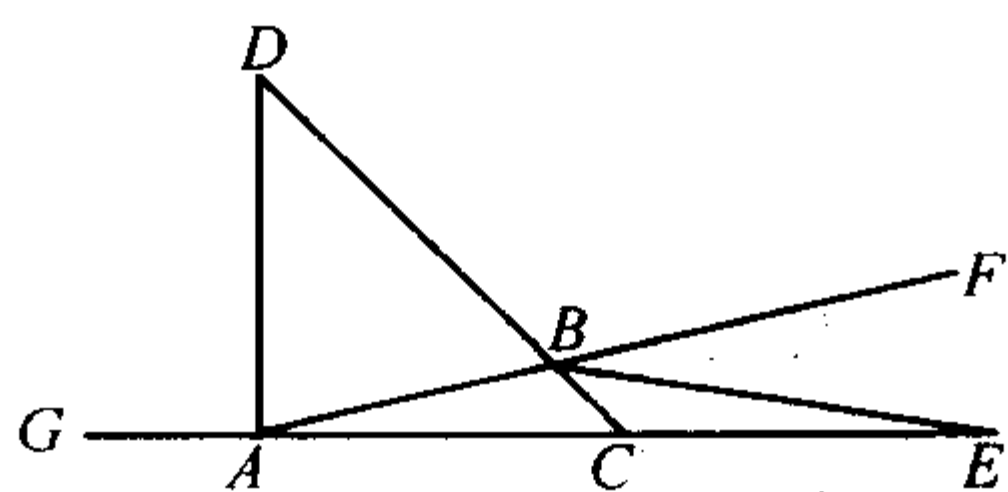


图 12-4



$\because AE = AE', \therefore \angle AEE' = \angle AE'E.$
 \because 在 $\triangle CE'E$ 中, $CE > BE = CE',$
 $\therefore \angle EE'C > \angle E'EC,$
 $\therefore \angle AE'C = \angle AE'E + \angle CE'E > \angle AEE' + \angle E'EC = \angle AEC.$
 又 $\because \angle AEB = \angle AE'C,$
 $\therefore \angle AEB > \angle AEC.$

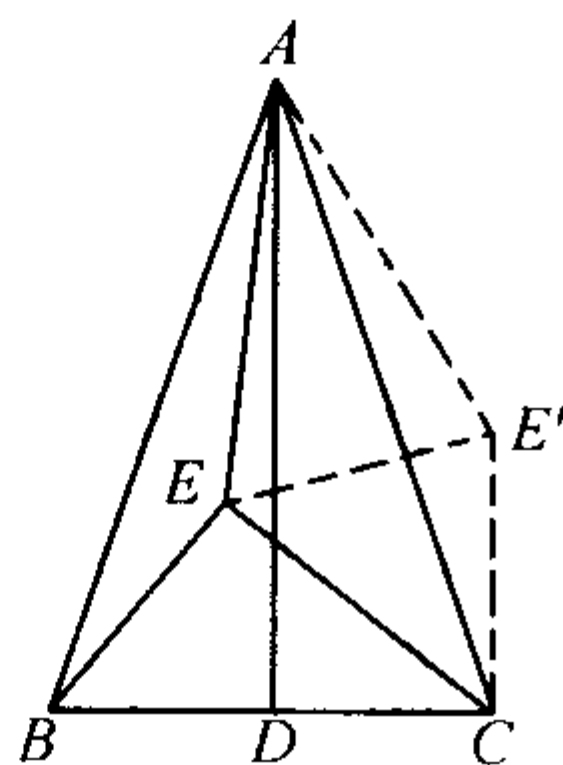


图 12-5

例 6 如图 12-6 所示, 等腰 $\triangle ABC$ 的顶角 $\angle A = 80^\circ$, O 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle OBC = 10^\circ$, $\angle OCB = 30^\circ$, 求 $\angle OAB$ 的度数.

解 作顶角 A 的角平分线交 CO 的延长线于点 N , 连结 BN , 由对称性可知 $\triangle ACN \cong \triangle ABN$.

$\because \angle A = 80^\circ, \therefore \angle ABC = \angle ACB = 50^\circ.$
 $\therefore \angle ABN = \angle ACO = 20^\circ.$
 $\therefore \angle OBN = 50^\circ - 20^\circ - 10^\circ = 20^\circ.$

又 $\because \angle BAN = \frac{1}{2} \angle A = 40^\circ,$

$\angle BON = \angle OBC + \angle OCB = 40^\circ,$

$\therefore \angle BAN = \angle BON.$

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle OBN. \therefore AN = ON.$

$\therefore \angle NAO = \angle NOA.$

又 $\because \angle ANO = \angle NAB + \angle ABO + \angle NOB = 120^\circ,$

$\therefore \angle NAO = 30^\circ.$

$\therefore \angle OAB = \angle OAN + \angle NAB = 70^\circ.$

说明 利用等腰三角形的对称性是解题的常用方法.

例 7 如图 12-7, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, $BE \perp AD$ 交 AD 的延长线于 E , $CF \perp AD$, 垂足分别为 E, F , G 是 BC 中点, 求证: $GE = GF$.

分析 $\because G$ 是 BC 中点, 若能使 GE, GF 分别是两个三角形的中位线, 那么要证 $GE = GF$, 只要证另外两条线段相等, 问题就转化了.

证明 延长 CF 交 AB 于 M , 延长 BE 交 AC 的延长线于 N .

$\because \angle 1 = \angle 2, AF = AF, \angle AFC = \angle AFM = 90^\circ,$

$\therefore \triangle FAC \cong \triangle FAM, \therefore MF = FC, AM = AC.$

同理可证 $\triangle ABE \cong \triangle ANE, \therefore BE = EN, AB = AN.$

$\because BG = GC, \therefore GF, GE$ 分别是 $\triangle CBM$ 和 $\triangle BCN$ 的中位线.

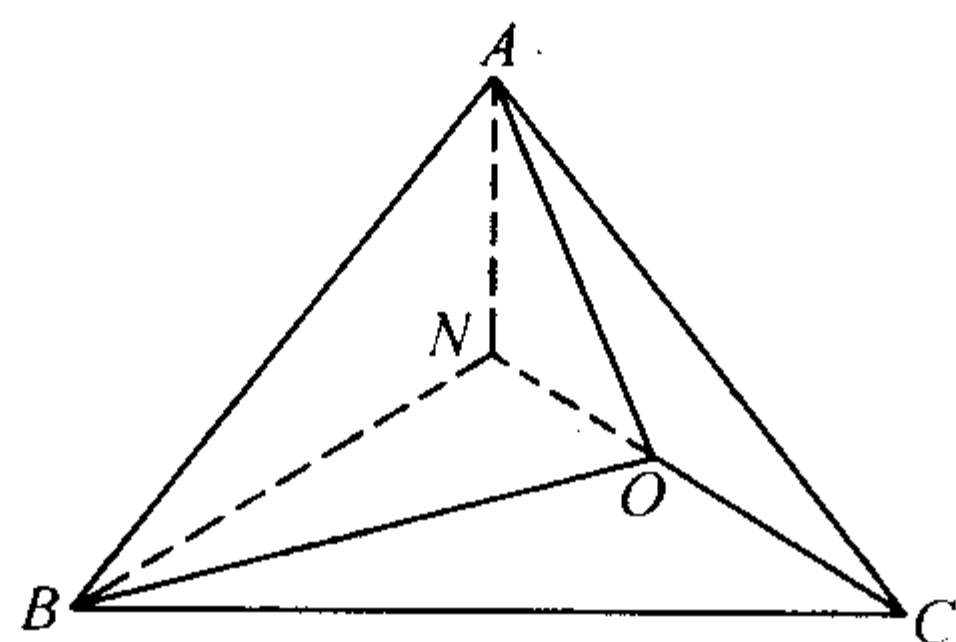


图 12-6

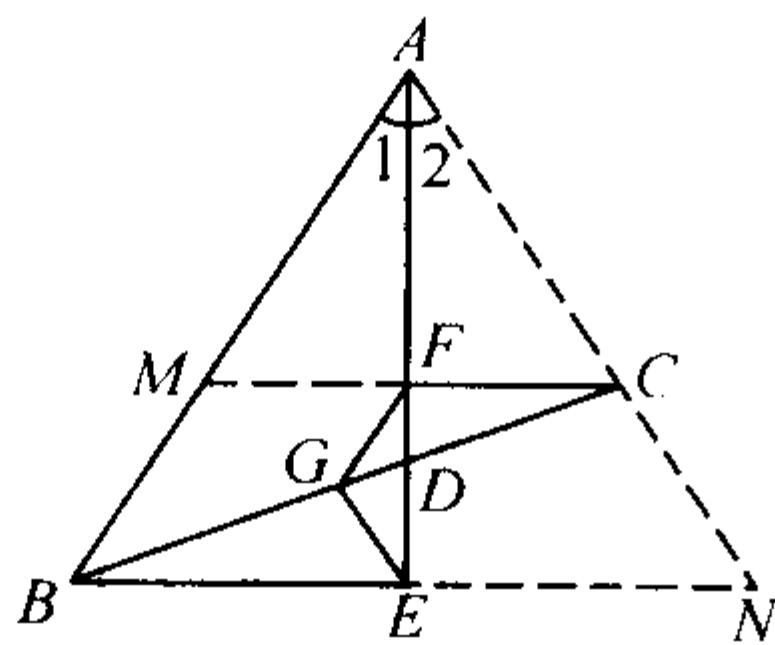


图 12-7



$$\therefore GF = \frac{1}{2} BM, GE = \frac{1}{2} CN.$$

$$\because AB = AN, AM = AC, \therefore BM = NC.$$

$$\therefore \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} NC. \therefore GE = GF.$$

(证出 GF, GE 分别是 $\triangle BCM$ 和 $\triangle BCN$ 的中位线后, 也可以得出 $GF \parallel AB, GE \parallel AN, \therefore \angle 1 = \angle GFE, \angle 2 = \angle FEG. \because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle GFE = \angle GED, \therefore GE = GF$)

例 8 如图12-8, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, \angle A = 100^\circ$, 作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 E , 求证: $BC = AE + EB$.

分析 要证 $BC = AE + EB$, 一般有两种方法, 一是在 BC 上截取 $BD = BE$, 再证 $DC = AE$; 第二种方法是把 BE 延长到 G , 使 $EG = AE$, 再证 $BG = BC$. 下面我们采用第一种方法证明, 第二种方法的证明由读者自己完成.

证明 在 BC 上截取 $BD = BE$, 连结 ED . 在 BD 上截取 $BF = BA$, 连结 FE .

$$\because \angle A = 100^\circ, AB = AC, BE \text{ 平分 } \angle ABC, \therefore \angle ABE = \angle EBF = 20^\circ, BE = BE.$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE, \therefore \angle BFE = \angle A = 100^\circ, AE = EF, \therefore \angle EFD = 80^\circ.$$

$$\because BE = BD, \angle EBD = 20^\circ, \therefore \angle EDB = 80^\circ.$$

$$\therefore \angle EFD = \angle EDF, \therefore EF = ED, \therefore AE = ED.$$

$$\text{又 } \because \angle C = 40^\circ, \angle EDF = 80^\circ, \therefore \angle DEC = 40^\circ, \therefore DE = DC.$$

$$\therefore AE = DC, \therefore BC = BD + DC = BE + AE, \therefore BC = AE + EB.$$

例 9 已知: 如图12-9, $\triangle ABC$ 中, $BD = DC, E$ 是 AC 上一点, AD, BE 交于 F . 若 $AE = EF$. 求证: $BF = AC$.

分析 此题欲证 $BF = AC$, 一时很难将其与其他条件联系在一起. 为此想到能否利用全等三角形去证: 作 $CM \perp AD, BN \perp AD$, 则必有 $\triangle BDN \cong \triangle CDM$, 从中得到 $BN = CM$, 进而得到 $\triangle BFN \cong \triangle CAM$.

证明 作 $BN \perp AD$ 于 $N, CM \perp AD$ 于 M .

$$\text{则 } \angle BNA = \angle CMD = \angle CMA = 90^\circ.$$

在 $\triangle BDN$ 和 $\triangle CDM$ 中,

$$\because \angle BNA = \angle CMD, \angle BDN = \angle CDM, BD = DC,$$

$$\therefore \triangle BDN \cong \triangle CDM, \therefore BN = CM.$$

$$\because AE = EF, \therefore \angle CAF = \angle AFE = \angle BFN.$$

在 $\triangle BFN$ 和 $\triangle CAM$ 中,

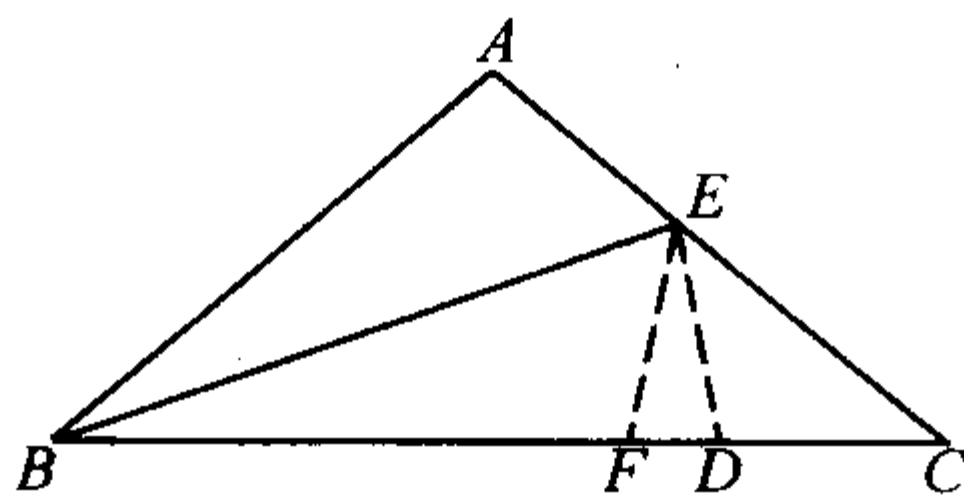


图 12-8

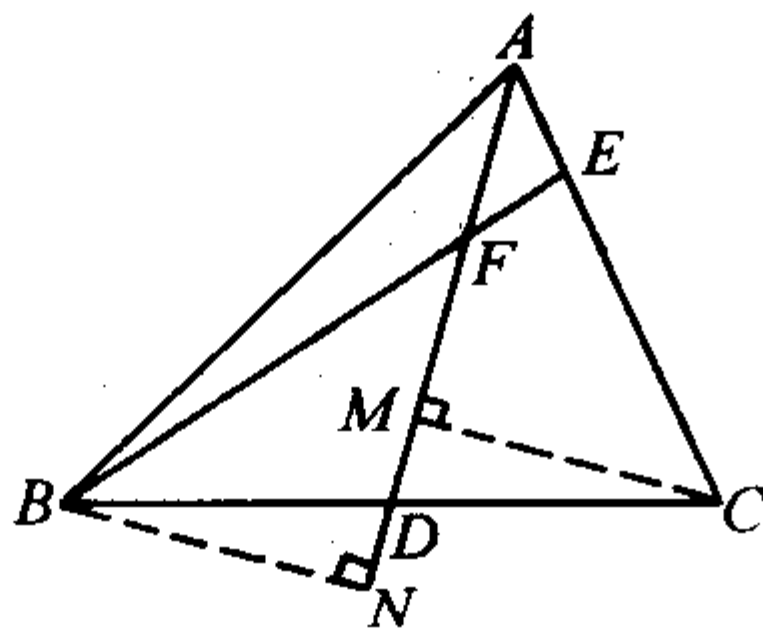


图 12-9



$\because \angle BFN = \angle CAF, \angle BNA = \angle CMA, BN = CM,$

$\therefore \triangle BFN \cong \triangle CAM, \therefore BF = AC.$

说明 题目的条件和结论分散的证明线段或角相等的问题,经常利用全等三角形去证,较难的题目常须适当添辅助线构造全等三角形.

添辅助线制造全等三角形时,经常以已有的相等的线段或角为边、角作直角三角形,它的优点是:所作的两个三角形必有一对直角相等.

例 10 如图12-10所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC, BE$ 平分 $\angle ABC$, $CE \perp BE$,求证: $CE = \frac{1}{2}BD$.

证明 延长 CE 交 BA 的延长线于点 F ,则

$\because \angle 1 = \angle 2, \angle BEC = \angle BEF = 90^\circ, BE = BE,$

$\therefore \text{Rt}\triangle BEC \cong \text{Rt}\triangle BEF.$

$\therefore BC = BF, CE = EF.$

$\therefore CE = \frac{1}{2}CF.$

又 $\because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ.$

且 $\angle 3 = \angle 4, \therefore \angle 2 = \angle 5.$

又 $\because AB = AC,$

$\therefore \text{Rt}\triangle AFC \cong \text{Rt}\triangle ADB.$

$\therefore CF = BD. \therefore CE = \frac{1}{2}BD.$

例 11 已知:如图12-11,等边 $\triangle ABC$ 中, D 是形内一点, E 是形外一点,若 $DA = DB, \angle DBE = \angle DBC, BE = AB$.求: $\angle E$ 的度数.

分析 此题欲求 $\angle E$ 的度数,由于条件中并没有给出角度条件,因此必须挖掘图形中的角度性质,注意等边 $\triangle ABC$,必有 $\angle ACB = 60^\circ$,注意 $\triangle ADC \cong \triangle BDC, \triangle BDE \cong \triangle BDC$,不难发现

$\angle E = \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^\circ.$

解 连结 CD .

\because 等边 $\triangle ABC, \therefore \angle ACB = 60^\circ, AC = BC = AB.$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中,

$\because AD = BD, AC = BC, CD = CD.$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDC, \therefore \angle 2 = \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^\circ.$

$\because BE = AB, \therefore BE = BC.$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDC$ 中,

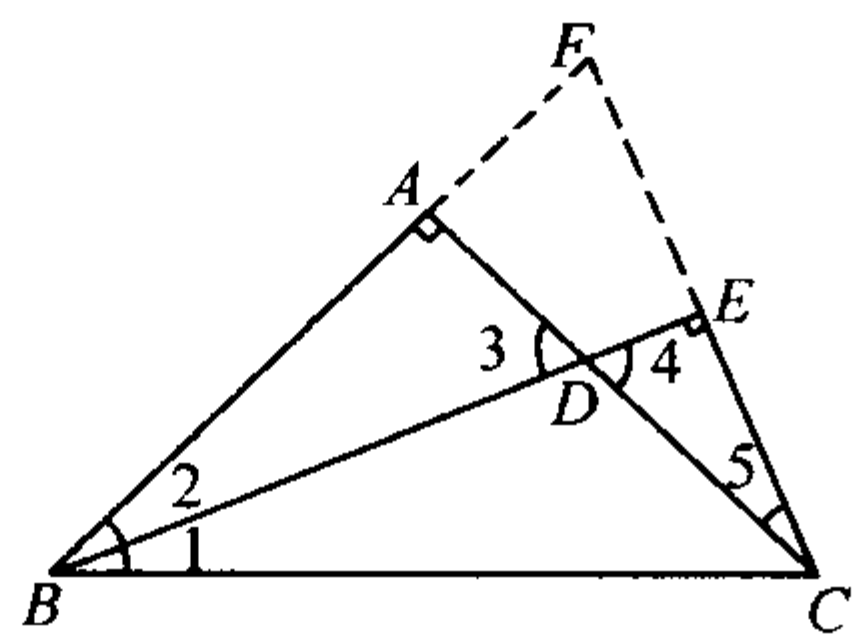


图 12-10

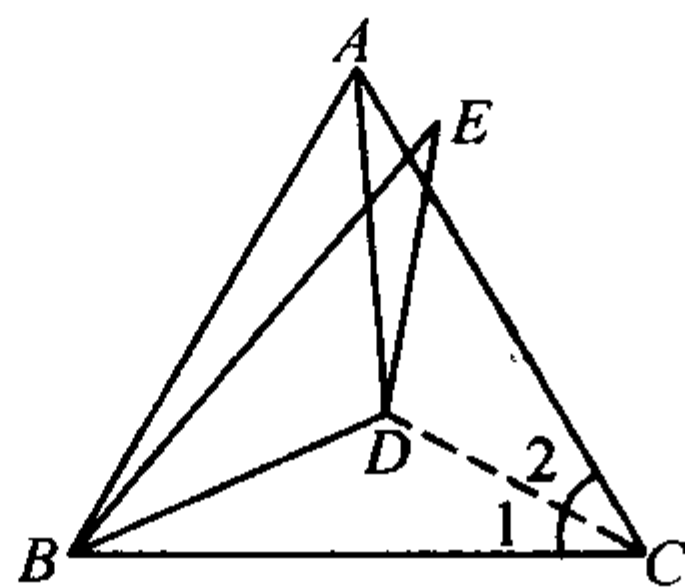


图 12-11



$$BE = BC, \angle DBE = \angle DBC, BD = BD.$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDC, \therefore \angle E = \angle 1 = 30^\circ.$$

答: $\angle E$ 的度数是 30° .

说明 当题目条件中有等边三角形时,常在图形中标出其三边相等,三个角为 60° ,以便随时应用.

当题目中边角相等的条件充足时,常观察图形中有无全等三角形,若有必须要能尽快找到,因为这对全等三角形所提供的性质往往是解题的关键所在.

例 12 已知:如图 12-12 四边形 $ABCD$ 中, AE 、 AF 分别是 BC 、 CD 的中垂线, $\angle EAF = 80^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$.

求: $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的度数.

分析 此题由条件不难发现 $\angle BCD = 100^\circ$,进而得 $\angle BDC = 50^\circ$,为求出 $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 的度数,只须求出 $\angle ABD$ 和 $\angle ADB$ 的度数,由中垂线条件不难发现: $AB = AC = AD$,如何将这一条件与 $\angle EAF = 80^\circ$ 联系起来则是本题的关键所在.为此必须进一步挖出由中垂线条件还能推出什么性质.由 $AB = AC$, $AE \perp BC$,想到等腰三角形底边上的高平分顶角,这样便不难得到 $\angle BAD = 2\angle EAF = 160^\circ$,进而得到 $\angle ABD$ 与 $\angle ADB$ 的度数.

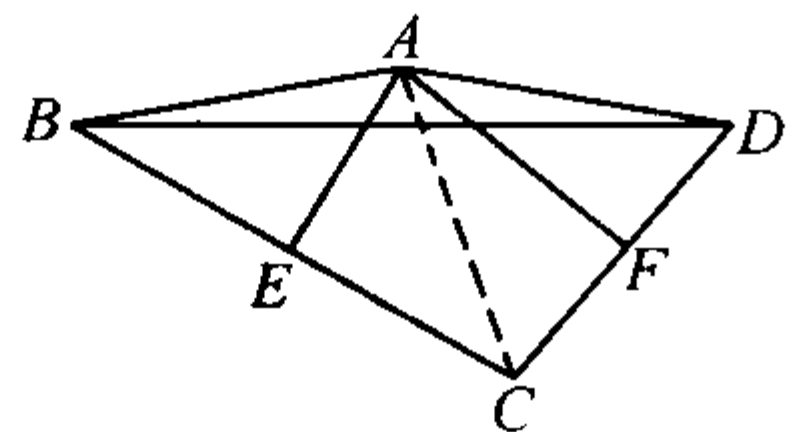


图 12-12

解 连结 AC .

$\because AE, AF$ 分别是 BC, CD 的中垂线.

$\therefore BE = EC, AE \perp BC, CF = FD, AF \perp CD.$

$\therefore AB = AC = AD, \therefore \angle ABD = \angle ADB.$

$\because AB = AC, AE \perp BC,$

$\therefore \angle BAE = \angle EAC.$

同理可得 $\angle CAF = \angle DAF.$

$\because \angle EAF = 80^\circ,$

$$\begin{aligned} \therefore \angle BAD &= \angle BAE + \angle EAC + \angle CAF + \angle DAF \\ &= 2\angle EAF = 160^\circ. \end{aligned}$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = 10^\circ.$$

$\because AE \perp BC, AF \perp CD.$

$\therefore \angle BCD + \angle EAF = 180^\circ.$

$\therefore \angle BCD = 100^\circ.$

$\because \angle CBD = 30^\circ, \therefore \angle BDC = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$

$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ.$



$$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 10^\circ + 50^\circ = 60^\circ.$$

说明 当题目中有线段中垂线条件时,经常把中垂线上某一点与线段两端点相连.这是一条常用的辅助线.



【能力训练】

一、选择题

1. 如图 12-13, 在 $\triangle ABC$ 中, OB 、 OC 分别是 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线, 过 O 作 $MN \parallel BC$, 若 $AB = 12$, $BC = 24$, $AC = 18$, 则 $\triangle AMN$ 的周长为().

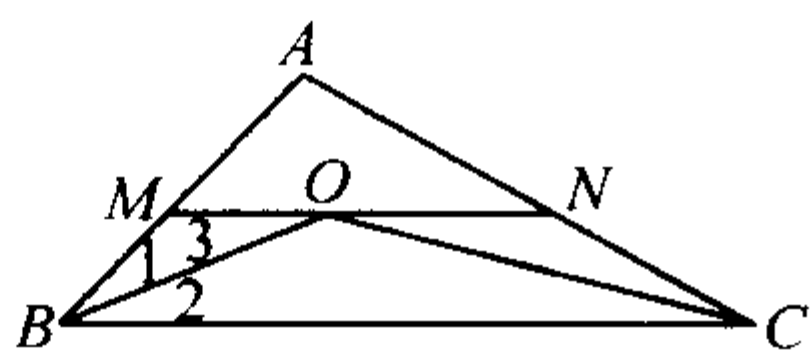


图 12-13

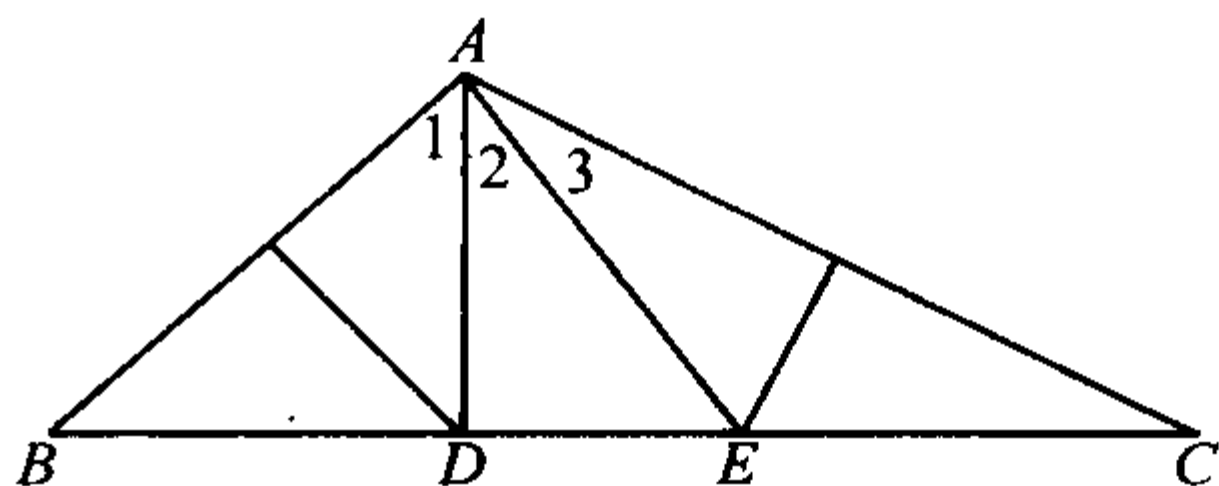


图 12-14

- (A)30 (B)33 (C)36 (D)39
2. 如图 12-14, $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 的垂直平分线分别交 BC 于 D 、 E , 若 $\angle BAC + \angle DAE = 150^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数是().
- (A) 105° (B) 110° (C) 115° (D) 120°
3. 设 P 是等边 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 它使 $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle ACO$ 都是等腰三角形, 满足上述条件的 P 点共有().
- (A)1 个 (B)4 个
(C)7 个 (D)10 个
4. 如图 12-15, 六边形 $ABCDEF$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$, 且 $AB + BC = 11$, $FA - CD = 3$, 则 $BC + DE$ 的值为().

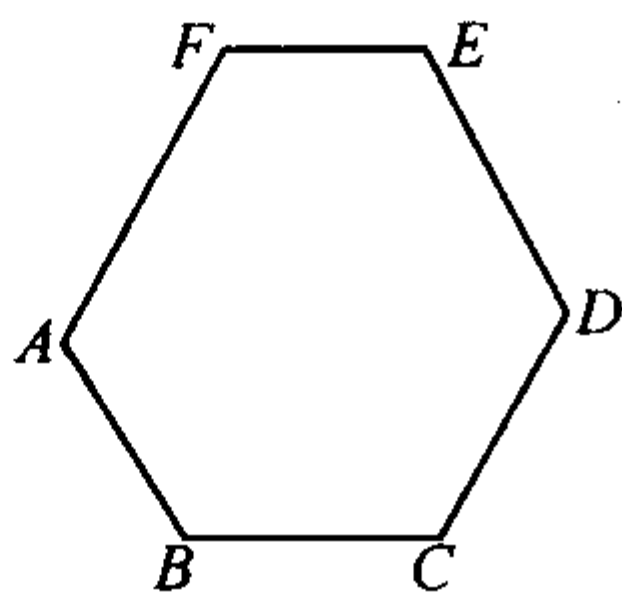


图 12-15

- (A)12 (B)14 (C)15 (D)16

二、填空题

5. 如图 12-16, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$, 延长 CB 到 D , 使 $BD = BA$, 延长 BC 到 E , 使 $CE = CA$, 连结 AD 、 AE , 则 $\triangle ADE$ 各角的度数为_____.

6. 如图 12-17, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 E , $\angle ABC = 40^\circ$. 设 $AE = a$, $BC = b$, 则 $BE =$ _____.

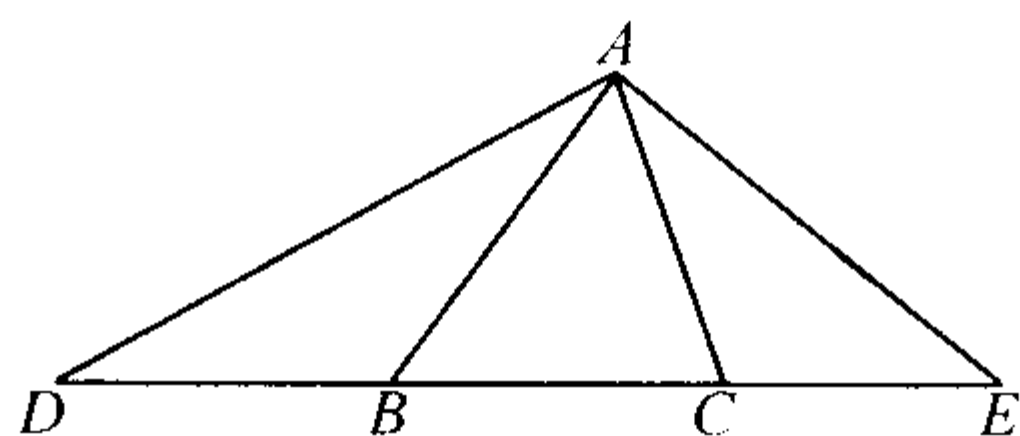


图 12-16

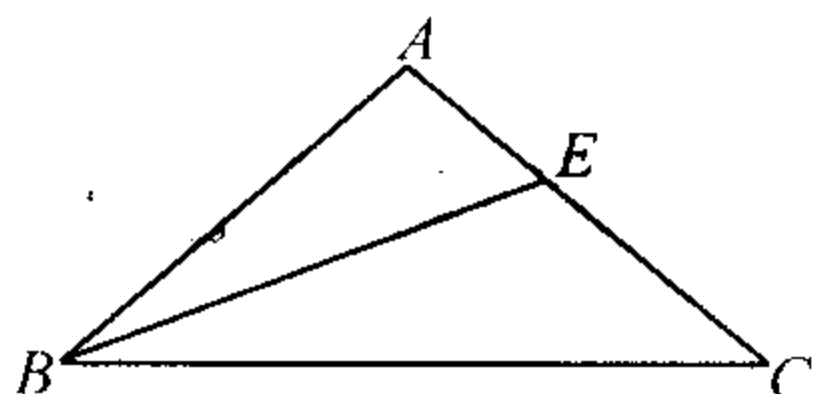


图 12-17

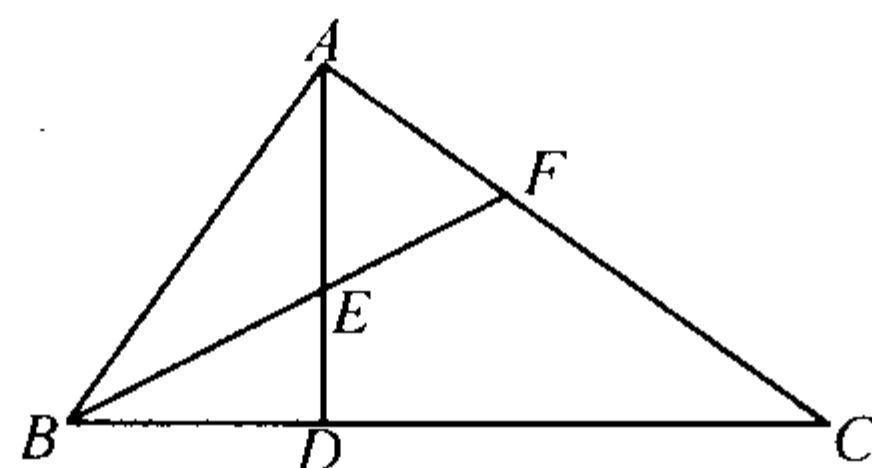


图 12-18

7. 如图 12-18, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$ 于 D , BF 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于 E , 交 AC 于 F , 设 $AE = m$, 则 $AF =$ _____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 向外侧作正方形 $BCDE$, 则 $\angle DAB =$ _____.

三、解答题

9. 已知: 如图 12-19, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 20^\circ$, $BD \perp AC$ 于 D , BE 平分 $\angle ABC$.

求证: $BE = 2DE$.

10. 已知: 如图 12-20, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 、 E 分别是 AC , AB 上的点, 若 $BD = BC$, $AD = DE = BE$.

求: $\angle A$ 的度数.

11. 已知: 如图 12-21, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABE$ 都是等边三角形.

求证: $AD \perp DE$.

12. 已知: 如图 12-22, 正方形 $ABCD$ 中, 延长 AD 到 E , 使 $DE = AD$, 再延长 DE 到 F , 使 $DF = BD$. 连结 CE , BF , 设 BF 交 CE , DC 于 M , N , 求证: $MD = MN$.

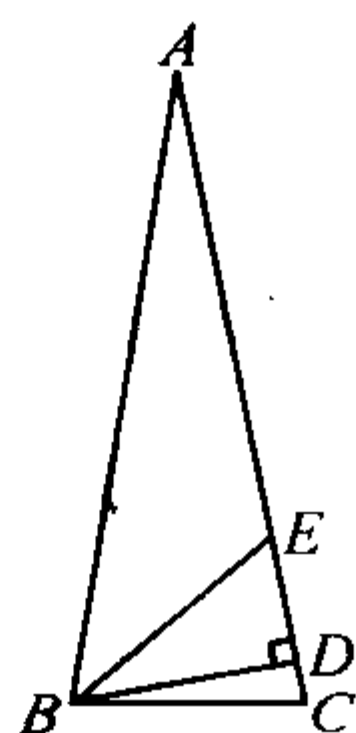


图 12-19

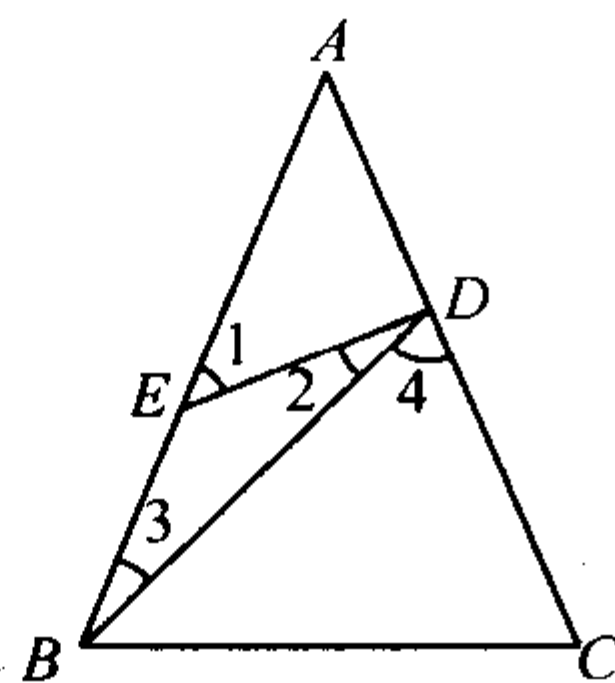


图 12-20

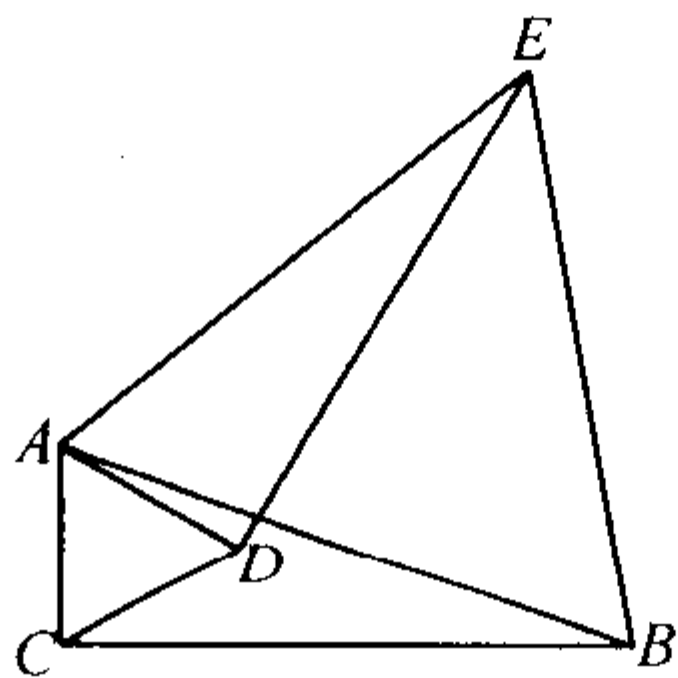


图 12-21

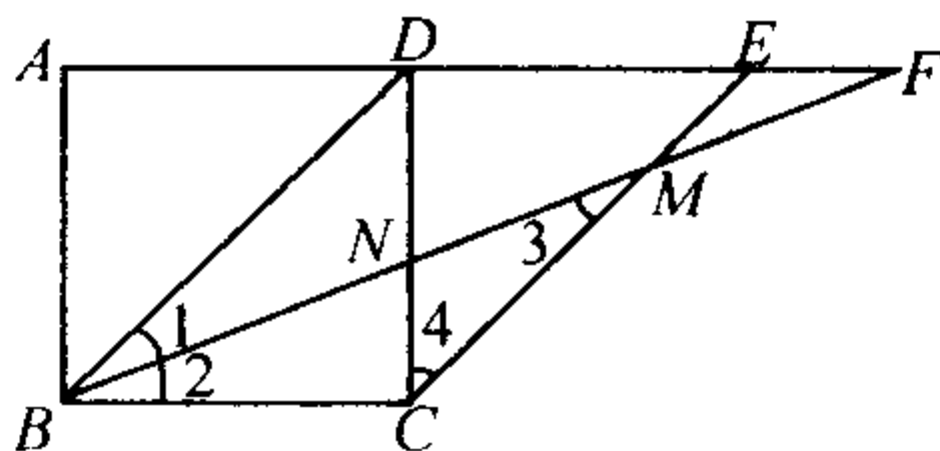


图 12-22



十三、勾股定理与直角三角形

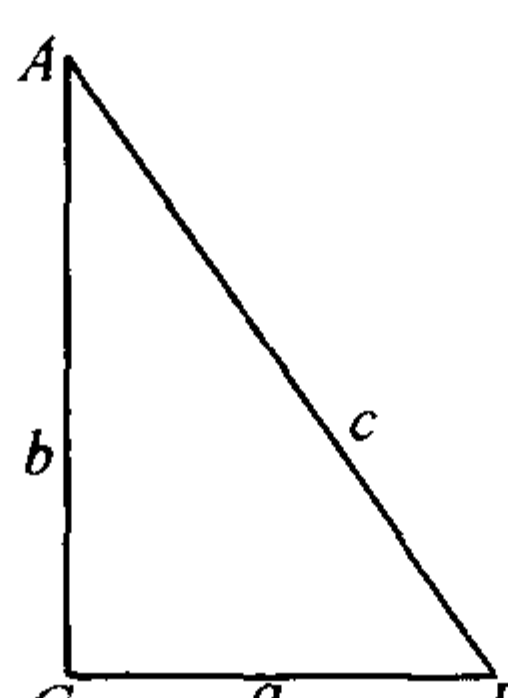


【赛点目标】

1. 掌握直角三角形的性质和判定方法, 并会根据具体问题加以应用.
2. 熟悉一些常用辅助线的添法.



【方法述要】

图 形	性 质	判 定
直角三角形 	1. 两锐角互余 2. 斜边上的中线等于斜边的一半 3. 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 反之亦然 4. 如果 $\angle C = 90^\circ$, 则 $a^2 + b^2 = c^2$	1. 两锐角互余的三角形 2. 一条边上的中线等于该边的一半的三角形 3. 如果 $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\angle C = 90^\circ$. (勾股定理的逆定理)



【赛题精讲】

例 1 已知直角三角形周长为 24, 面积为 24, 求各边之长.

解 设直角三角形三边长为 a, b, c ($a \leq b \leq c$), 依题意有

$$\begin{cases} a + b + c = 24, & \text{①} \\ \frac{1}{2}ab = 24, & \text{②} \\ a^2 + b^2 = c^2. & \text{③} \end{cases}$$

由①得 $a + b = 24 - c$.

两边平方得 $a^2 + b^2 + 2ab = (24 - c)^2$. ④

②、③代入④得 $c^2 + 24 \times 4 = 24^2 - 24 \times 2c + c^2$,
 $c = 10$.

$$\therefore \begin{cases} a + b = 14, \\ ab = 48. \end{cases}$$



解得 $a=6, b=8$. \therefore 直角三角形三边长为 6, 8, 10.

例 2 如图13-1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, $AB=3$ 厘米, $BC=4$ 厘米, $CD=12$ 厘米, $AD=13$ 厘米, 求四边形的面积.

解 连结 AC , 根据勾股定理, 求得对角线 $AC=5$ 厘米, 由 $AC^2 + CD^2 = 169$, $AD^2 = 169$, $\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2$, 根据勾股定理的逆定理, 得 $\angle ACD = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四边形}ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot BC + \frac{1}{2} AC \cdot CD \\ &= 36 \text{ 平方厘米}. \end{aligned}$$

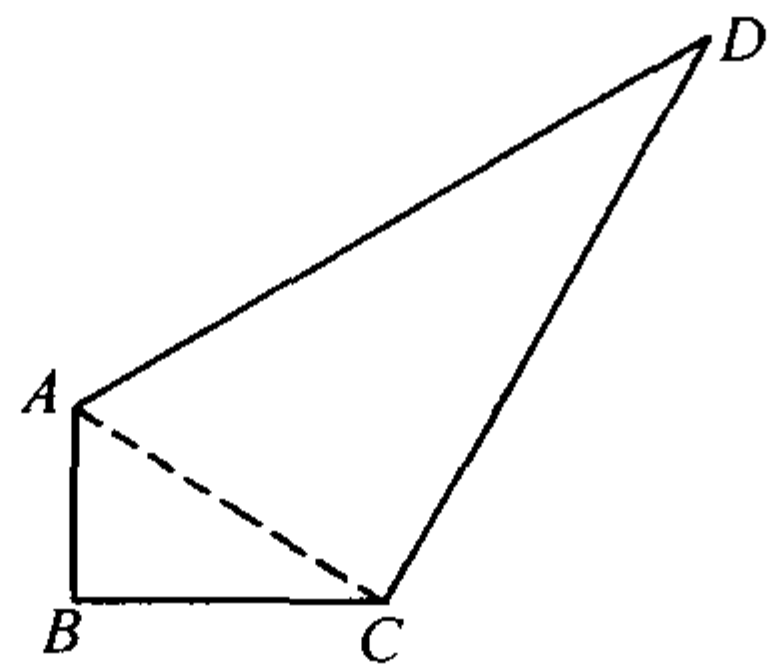


图 13-1

例 3 如图13-2所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=9$, $AC=6$, $AD \perp BC$ 于点 D , M 为 AD 上任一点, 求 $MB^2 - MC^2$ 的值.

解 $\because AD \perp BC$,
 $\therefore MB^2 - BD^2 = MD^2 = MC^2 - CD^2$.
 $\therefore MB^2 - MC^2 = BD^2 - CD^2$.
 同理 $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.
 $\therefore MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2 = 9^2 - 6^2 = 45$.

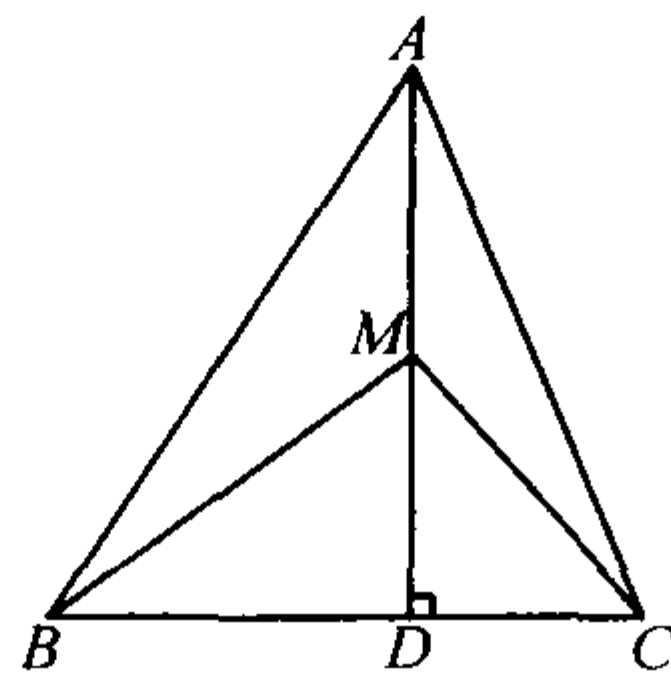


图 13-2

例 4 如图13-3, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{1}{2} \angle C$, AD 是 BC 上的高线, F 是 BC 的中点, 求证: $AC = 2FD$.

分析 $\because \triangle ADC$ 是 $\text{Rt}\triangle$, \therefore 只要作出斜边上的中线 DE , 就会有 $AC = 2DE$, 再证 $FD = DE$ 即可.

证明 取 AC 中点 E , 连结 DE, EF ,

$\because AD \perp BC$ 于 D , $\therefore DE = \frac{1}{2} AC = EC$, $\therefore \angle 1 = \angle C$.

$\because F$ 是 BC 中点, $\therefore EF$ 是三角形 ABC 的中位线.

$\therefore EF \parallel AB$, $\therefore \angle 3 = \angle B$.

$\because \angle B = \frac{1}{2} \angle C$, $\therefore \angle 3 = \frac{1}{2} \angle C$, $\therefore \angle C = 2\angle 3$.

$\therefore \angle 1 = 2\angle 3$, 而 $\angle 1 = \angle 3 + \angle 2$, $\therefore \angle 3 = \angle 2$, $\therefore FD = DE$.

$\therefore FD = \frac{1}{2} AC$, 即 $AC = 2FD$.

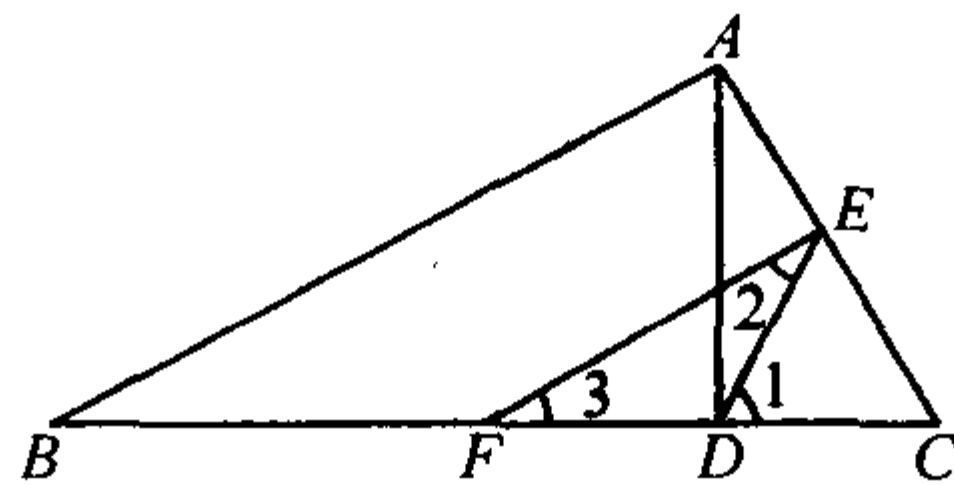


图 13-3

例 5 如图13-4所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, M 为 BC 上一点, 求证: $AB^2 - AM^2 = BM \cdot MC$.

证明 作 $AD \perp BC$ 于点 D , $\because AB = AC$, $\therefore BD = DC$.

又 $\because AB^2 = AD^2 + BD^2$,



$$\begin{aligned}
 AM^2 &= AD^2 + DM^2, \\
 \therefore AB^2 - AM^2 &= BD^2 - DM^2 \\
 &= (BD + DM)(BD - DM) \\
 &= BM \cdot (CD - DM) \\
 &= BM \cdot MC.
 \end{aligned}$$

说明 在证明含有平方的等式时,经常会用勾股定理.

例6 如图13-5所示, P 为矩形 $ABCD$ 内任一点, 求证:
 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

证明 过点 P 作 $PE \perp AD$ 于点 E , PE 交 BC 于点 F , 则

$\because AD \parallel BC, \therefore PF \perp BC$.

\therefore 四边形 $ABFE$ 和 $EFCD$ 均为矩形.

又 $\because PA^2 = AE^2 + PE^2, PC^2 = PF^2 + CF^2$,

$\therefore PA^2 + PC^2 = AE^2 + PE^2 + PF^2 + CF^2$.

又 $\because PB^2 + PD^2 = PF^2 + BF^2 + PE^2 + DE^2$,

而 $AE = BF, DE = CF$,

$\therefore PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

例7 如图13-6, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle A, AB = 2BC$, 求证: $\angle A = 30^\circ$.

分析 要证 $\angle A = 30^\circ$, 由 $AB = 2BC$, 应证 $\angle C = 90^\circ$. 为此, 可利用条件 $\angle B = 2\angle A$, 作出 $\angle B$ 的平分线, 并构造出直角来与 $\angle C$ 呼应.

证明: 作 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于 E .

$\because \angle ABC = 2\angle A = 2\angle ABE, \therefore \angle ABE = \angle A$,

$\therefore AE = BE$.

过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , 则 $AF = BF = \frac{1}{2}AB$.

$\because AB = 2BC, \therefore BC = FB$.

又 $\because \angle FBE = \angle EBC, EB = EB$,

$\therefore \triangle FBE \cong \triangle CBE, \therefore \angle C = \angle BFE = 90^\circ$,

$\because AB = 2BC, \therefore \angle A = 30^\circ$.

例8 如图13-7所示, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = Rt\angle, AC = BC, E, F$ 为 AB 上两点, 且 $\angle ECF = 45^\circ$, 求证: 以线段 AF, FE, EB 为边可以构成直角三角形.

分析 想办法将线段 AF, FE, EB 转化为同一三角形的三边.

证明 在 $\angle ECF$ 内部作线段 $CG = CB$ 且 $\angle GCE = \angle BCE$, 连结 GE, GF , 则 $\triangle GCE \cong \triangle BCE$.

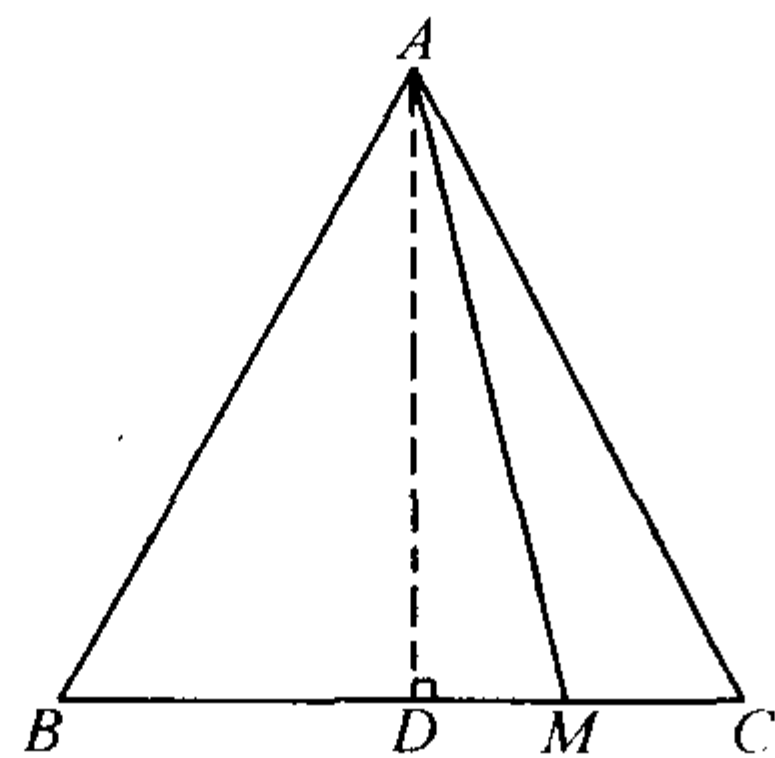


图 13-4

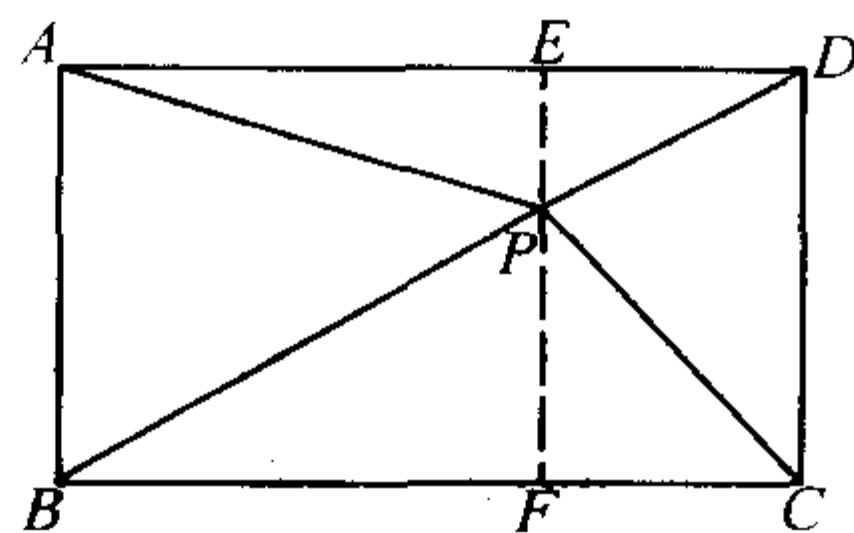


图 13-5

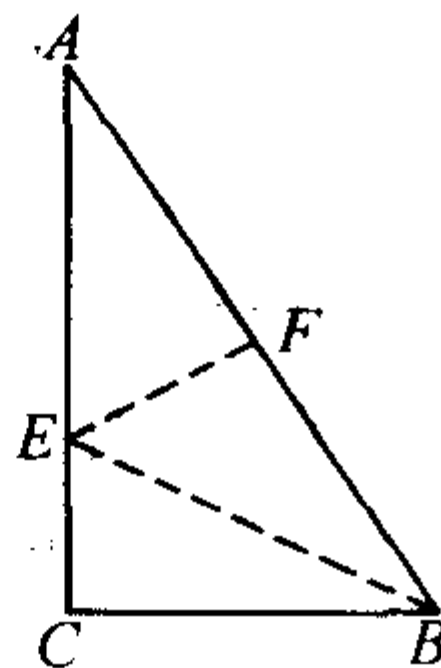


图 13-6



$$\therefore GE = BE, \angle 1 = \angle 2, \angle 5 = \angle B.$$

$$\text{又} \because \angle 4 + \angle 1 = 45^\circ = \angle 3 + \angle 1,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4.$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle GCF. \quad (\text{SAS})$$

$$\therefore AF = FG, \angle 6 = \angle A.$$

$$\therefore \angle 5 + \angle 6 = \angle B + \angle A = 90^\circ.$$

$\therefore \triangle EFG$ 为直角三角形.

\therefore 以 AF, FE, EB 为边可构成直角三角形.

例 9 如图13-8所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle$, M 为 AB 的中点, $DM \perp AB$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 E , 求证: (1) $MD = AM$; (2) DE^2

$$- ME^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + CB^2).$$

证明 (1) 连结 CM , 作 $CF \perp AB$ 于点 F , 则

$$\because DM \perp AB, \therefore DM \parallel CF.$$

$$\therefore \angle FCD = \angle D.$$

$$\text{又} \because \angle ACB = 90^\circ, CF \perp AB, \therefore \angle A = \angle BCE.$$

又 $\because M$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AM = CM = \frac{1}{2}AB. \therefore \angle ACM = \angle A = \angle BCF.$$

$$\text{又} \because CD \text{ 平分 } \angle ACB, \therefore \angle MCD = \angle DCF = \angle D.$$

$$\therefore MD = MC = AM.$$

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle MDE \text{ 中, } DE^2 - ME^2 = MD^2, \text{ 在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

$$\text{又} \because AB = 2AM = 2MD, \therefore AC^2 + BC^2 = 4MD^2.$$

$$\therefore DE^2 - ME^2 = MD^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2).$$

例 10 如图13-9, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 沿过 B 点的一条直线 BE 折叠这个三角形, 使 C 点与 AB 边上的一点 D 重合。要使 D 恰为 AB 中点, 问在图中还应添加什么条件?

解 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 沿 BE 折叠, 使 C 点和 AB 上的点 D 重合, 这意味着:

$$(1) \text{ 折线 } BE \text{ 平分 } \angle CBD;$$

$$(2) BD = BC;$$

$$(3) ED = EC;$$

$$(4) \angle BDE = \angle C = 90^\circ;$$

$$(5) \angle BEC = \angle BED;$$

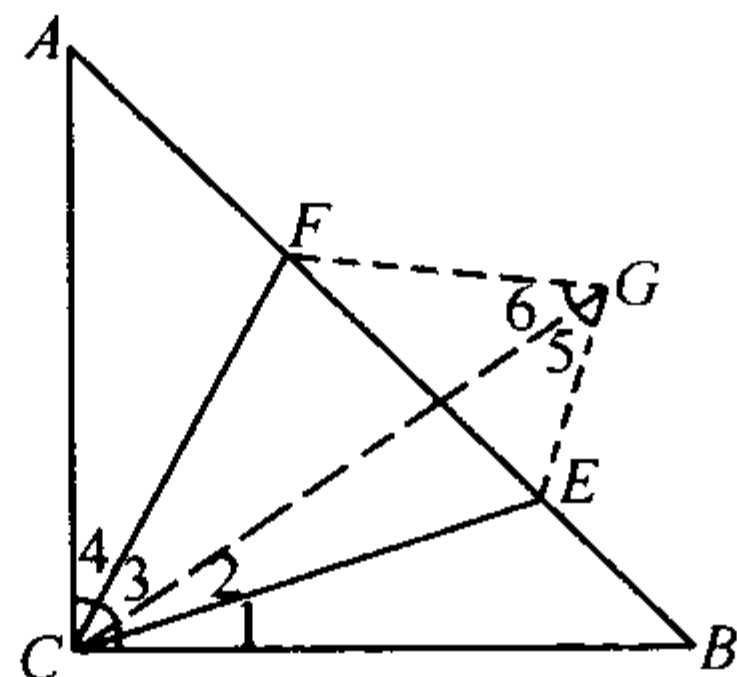


图 13-7

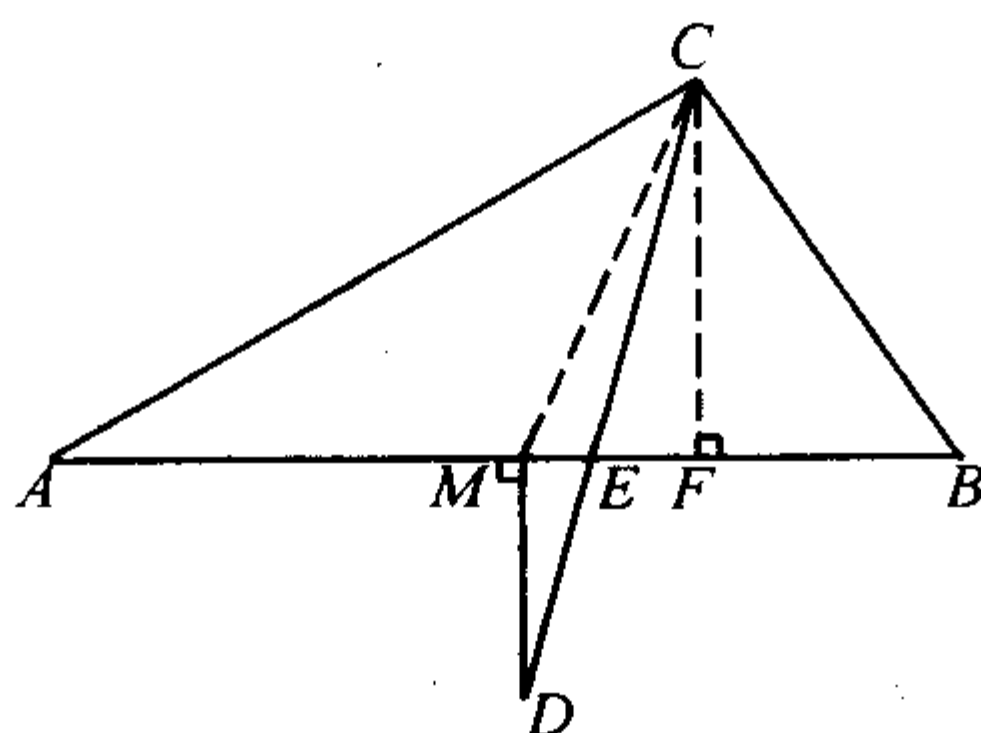


图 13-8

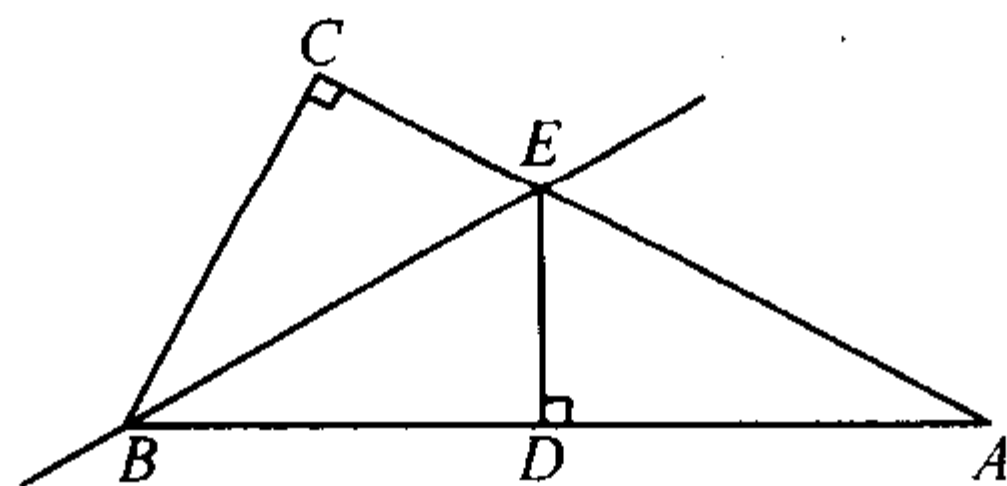


图 13-9



(6) $\triangle BEC \cong \triangle BED$.

如果不再引辅助线,要使 D 为 AB 中点,可添加下列条件之一:

(1) $\angle A = \angle DBE$;

(2) $\angle A = \angle CBE$;

(3) $\angle DEA = \angle DEB$;

(4) $\angle DEA = \angle BEC$;

(5) $\angle A = 30^\circ$;

(6) $\angle CBD = 60^\circ$;

(7) $\angle AED = 60^\circ$;

(8) $\angle CED = 120^\circ$; (以上是角的关系)

(9) $AB = 2BC$;

(10) $AC = \sqrt{3}BC$;

(11) $2AC = \sqrt{3}AB$;

(12) $BE = AE$; (以上是边的关系)

(13) $\triangle BEC \cong \triangle AED$. (三角形的关系)

例 11 AB 是直角三角形 ABC 的斜边, PQ 是该三角形内一条线段, 延长 AC 到 B' , 使 $AB' = AB$, 延长 BC 到 A' , 使 $A'B = AB$. 求证: 如果 $PQ \parallel A'B'$, 那么 PQ 上的点到 $\triangle ABC$ 各边的距离和为定值.

解 如图 13-10 任取 PQ 上一点 M , 连结 AM 、 BM 、 $A'M$ 和 $B'M$, $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle A'MB} + S_{\triangle AMB'} - S_{\triangle A'MB'} = S_{\triangle ACB} - S_{\triangle A'CB'}$. 设 M 到 $\triangle ABC$ 各边的距离为 d_1 、 d_2 、 d_3 , M 到 $A'B'$ 的距离为 d , $AB = c$, $A'B' = m$, $\therefore S_{\triangle ACB} - S_{\triangle A'CB'}$ 为定值, 设这个值为 k . 知 $\frac{1}{2}cd_1 + \frac{1}{2}cd_2 + \frac{1}{2}cd_3 - \frac{1}{2}md = k$, 即 $d_1 + d_2 + d_3 = \frac{2k + md}{c}$ 为定值.

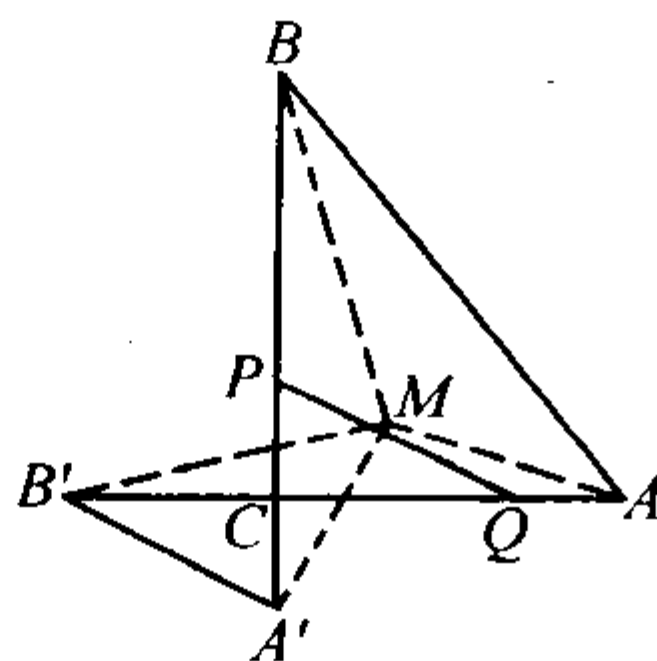


图 13-10

例 12 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, 任作等腰直角三角形 ECF , $\angle ECF = 90^\circ$, 求证: $\frac{BE}{AF}$ 为定值, BE 与 AF 成定角.

解 按 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FEC$ 在不包括 C 点的情况下有交和没交两种情况分类讨论.

(1) 若两三角形有交, 如图 13-11, 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$\therefore FC = EC, AC = BC, \angle ACF = 90^\circ - \angle ECA = \angle BCE$.

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE. \therefore AF = BE$.

即 $\frac{BE}{AF} = 1$ 是定值;

(2) 若两三角形没有交如图 13-12, 只要注意 $\angle ACF = 90^\circ + \angle ACE = \angle BCE$, 其他过程同上, 可得 $\frac{BE}{AF} = 1$.

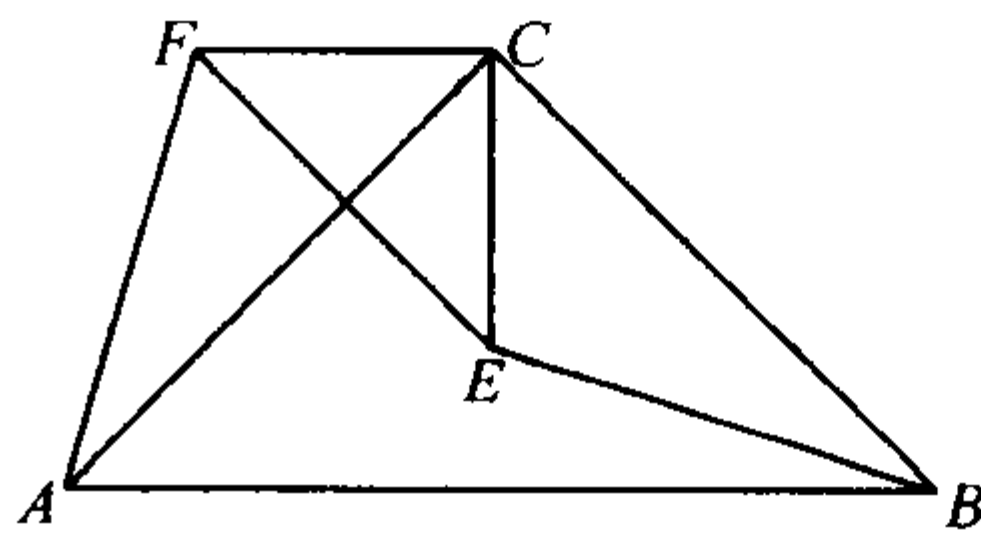


图 13-11

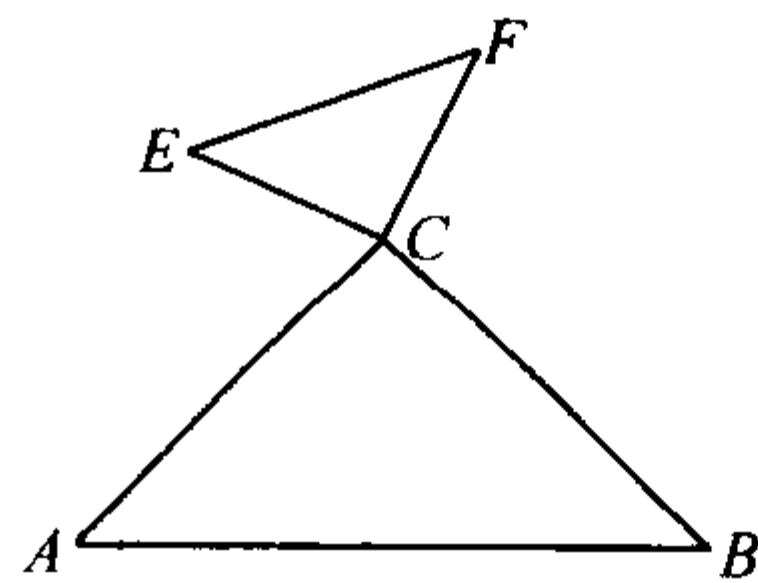


图 13-12



综上所述,不论等腰直角 $\triangle CFE$ 作在哪里,都有 $\frac{BE}{AF}$ 为定值.

$\therefore CF \perp CE, \triangle ACF \cong \triangle BCE$.

$\therefore AF \perp BE$. 即 BE 与 AF 成 90° 的定角.



【能力训练】

一、选择题

1. 直角三角形的面积为 S , 斜边上的中线长为 d , 则这个三角形周长为().

(A) $\sqrt{d^2 + S} + 2d$

(B) $\sqrt{d^2 - S} - d$

(C) $2(\sqrt{d^2 + S} + d)$

(D) $2\sqrt{d^2 + S} + d$

2. 若三角形中有一条边是另一条边的 2 倍, 并且有一个角为 30° , 则这个三角形一定是().

(A) 直角三角形

(B) 锐角三角形

(C) 钝角三角形

(D) 以上结论均不对

3. 如图 13-13, 等腰直角三角形 ABC 中, D 为斜边 AB 的中点, P 为 AB 上任一点, $PE \perp AC$ 于 E , $PF \perp BC$ 于 F , 则 $\angle EDF$ 为().

(A) 锐角

(B) 钝角

(C) 直角

(D) 不确定

4. 如图 13-14, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点, 且 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OCA}$, 那么, $OA^2 + OB^2$ 与 OC^2 的比值为().

(A) 4:1

(B) 5:1

(C) 6:1

(D) 7:1

二、填空题

5. 若 $\triangle ABC$ 中, AD 是高, 且 $AD^2 = BD \cdot CD$, 则 $\angle BAC$ 的度数是_____.

6. 如图 13-15, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D 为斜边 AB 中点, $DE \perp AB$ 交 BC 于 E , 若 $\angle EAC : \angle DAE = 2 : 5$, 则 $\angle BAC$ 的度数是_____.

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, BC 边的高为 h_a , AC 边的高为 h_b , 且有 $a \leq h_a$, $b \leq h_b$, 则 $\triangle ABC$ 的三个内角的度数为_____.

8. $\triangle ABC$ 中, $AB = 15$, $AC = 13$, 高 $AD = 12$, 则三角形的周长是_____.

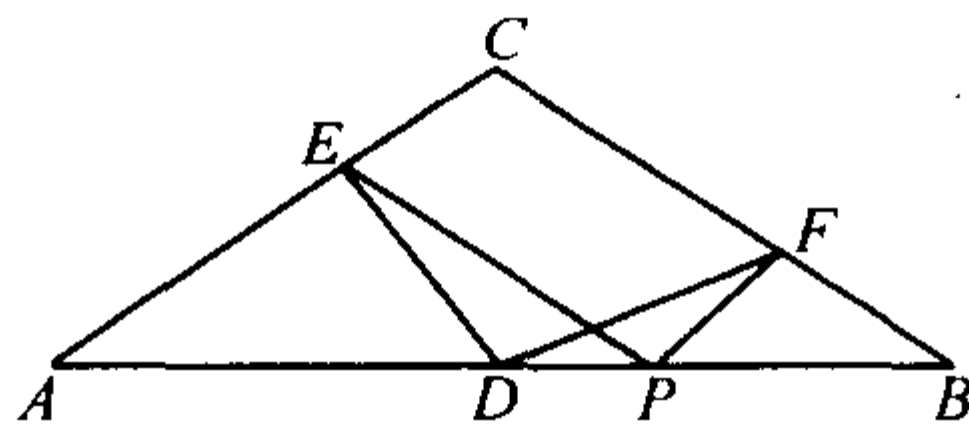


图 13-13

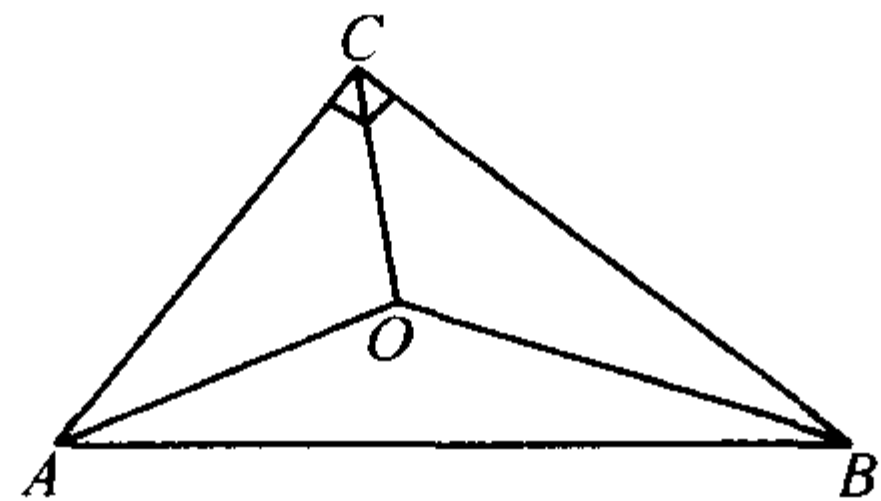


图 13-14

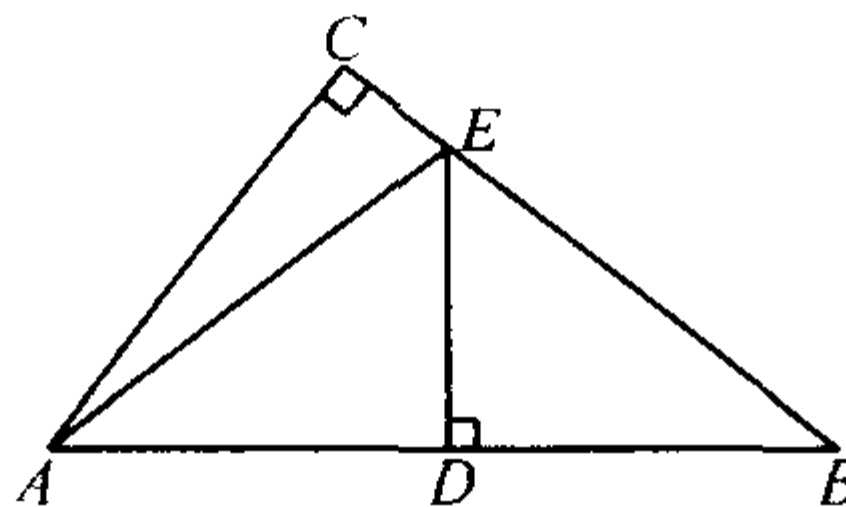


图 13-15



三、解答题

9. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上一点, 已知 $AD = 12$, $AC = 13$, $CD = 5$, $AB = 14$, 求 BD 的长度.

10. 如图 13-16 所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$, $AD = CD$, 求证: $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

11. 已知凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AB 与 CD 互相垂直, 求证: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

12. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 延长 BC 到点 D , 使 $CD = CB$, 求证: $AD^2 = AB^2 + 2BC^2$.

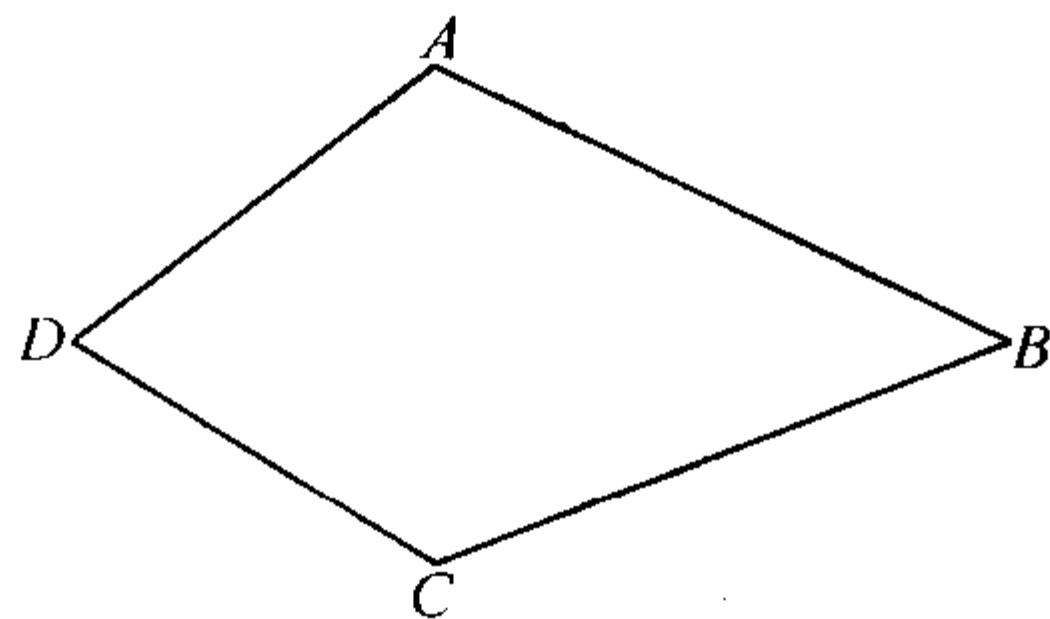


图 13-16



十四、实数



【赛点目标】

1. 了解无理数及实数的概念,进一步掌握和理解平方根、立方根、算术平方根的概念.
2. 能运用查表或计算器求平方根和立方根.
3. 掌握算术平方根的性质,并能运用性质进行算术平方根的化简.
4. 掌握实数与实数轴上的点的对应关系,并能进行实数的大小比较.
5. 知道在有理数中所学的运算律和运算法则在实数运算中同样适用,并能进行实数的加、减、乘、除、乘方运算.



【方法述要】

1. 通过实数单元的学习,能更深刻地认识到数的概念的扩展是人类对客观世界不断认识的结果,并认识到随着学习的不断深入,数的范围还将进一步扩展.

2. 实数单元重点是对无理数及实数意义的理解,能够求一个数的平方根、算术平方根和立方根,并认识到有理数的运算律和运算法则同样适用于实数的运算,能运用运算律和运算法则进行熟练的实数运算,能正确熟练地进行实数的大小比较.难点是无理数意义的理解、算术平方根的理解和运用,以及实数运算中灵活运用运算律和算术平方根性质进行准确的计算;关键点是弄清实数的分类,掌握和理解实数与实数轴上的点的一一对应关系及其意义,并运用数轴解决一类实数问题;弄懂弄通算术平方根的意义及三个重要性质,并熟练地运用三个性质进行实数的化简.在实数运算中,弄清三个级别的运算顺序,正确确定运算结果的符号,灵活地运用算术平方根性质和运算律及运算法则进行实数的运算.

3. 通过复习,使学生初步了解和掌握数学的分类思想和数形结合思想,尤其是通过实数与数轴上的点的对应关系使学生建立起由“数”到轴上的“点”和由轴上的“点”到“数”的数形对应概念,为今后学习函数与图像的对应关系打下基础;通过对算术平方根的性质和实数运算的复习,重点加强学生分析问题的能力、处理数据的能力和正确迅速的运算能力;通过对有理数与无理数间关系的理解,使学生初步建立对立统一的思想.



【赛题精讲】

例1 计算:

$$(1) \left(\frac{2}{9} \sqrt{162} - \sqrt{2} \right) - \left(\frac{2}{5} \sqrt{300} - \frac{1}{3} \sqrt{27} + 2 \sqrt{72} \right);$$

$$(2) (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(-\sqrt{6} - 2\sqrt{3}); \quad (3) \sqrt{18} - 4\sqrt{\frac{1}{27}} + \sqrt{8} + 2\sqrt{48}.$$

分析 在实数运算的过程中,除了要注意运算律的运用,也要注意随时化简,并注意算式特点,看是否能够运用公式计算.

解 (1) 原式 $= (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) - (4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 12\sqrt{2}) = -11\sqrt{2} - 3\sqrt{3}.$

(2) 原式 $= -(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(\sqrt{6} + 2\sqrt{3}) = -[(\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2] = -(6 - 12) = 6.$

(3) 原式 $= 3\sqrt{2} - \frac{4}{9}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 8\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + \frac{68}{9}\sqrt{3}.$

例2 已知 x, y 均为实数, 且 $\sqrt{x^3 + \frac{1}{x^3} - y} + \left(x + \frac{1}{x} - 3\right)^2 = 0$, 试求 y 的值.

解 由 $\begin{cases} x^3 + \frac{1}{x^3} - y = 0, \\ x + \frac{1}{x} - 3 = 0, \end{cases}$ 得 $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18.$

例3 已知实数 a, b 满足等式 $\frac{a^2 b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$, 求 $\frac{a^2 - b^2}{19a^2 + 96b^2}$ 的值.

分析 因没有给出 a, b 的值, 故要求代数式的值, 我们应设法通过已知找出 a 与 b 之间更直接一些的关系.

解 由 $\frac{a^2 b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$ 可知 a, b 均不为 0, 该式可变形为 $a^2 b^2 = a^4 - 2b^4$,

即 $(a^2 + b^2)(a^2 - 2b^2) = 0.$

$\because a \neq 0, b \neq 0, \therefore a^2 + b^2 > 0.$

由①式知, 必有 $a^2 - 2b^2 = 0$, 即 $a^2 = 2b^2.$

$\therefore \frac{a^2 - b^2}{19a^2 + 96b^2} = \frac{2b^2 - b^2}{19 \times (2b^2) + 96b^2} = \frac{b^2}{134b^2} = \frac{1}{134}.$

例4 设 x, y 是有理数, 若

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)y - 2.25 - 1.45\sqrt{3} = 0, \text{ 求 } x, y \text{ 的值.}$$

分析 将等式变形, 写成 $\alpha + \beta\sqrt{3} = 0$ 的形式, 其中 α, β 是含有字母 x, y 的代数式. 当 x, y 是有理数时, 这两个代数式的值是有理数. 由此可以得到一个关于 x, y 的二元一次方程组, 解此方程组就可以求出 x, y 的值.



解 将已知的等式变形,得 $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2.25\right) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y - 1.45\right)\sqrt{3} = 0$.

因为 x, y 是有理数,所以 $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2.25$ 与 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y - 1.45$

都是有理数,可得
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 2.25 = 0, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{12} - 1.45 = 0. \end{cases}$$

解这个方程组,得 $x = 3\frac{3}{5}, y = 4\frac{1}{5}$.

例 5 求证: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

证明 假设结论不成立,即 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是有理数. 设 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{n}{m}$ (m, n 是互质的整数), 则 $\sqrt{3} = \frac{n}{m} - \sqrt{2}$, 两边平方, 得 $3 = \frac{n^2}{m^2} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{m} + 2$, 即 $\sqrt{2} = \frac{n}{2m} - \frac{m}{2n}$, 但它左边是一个无理数, 而右边是一个有理数, 这是不可能的. 故 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

例 6 已知 a, b, m 均为正实数, 且 $a \neq b$, 比较 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的大小.

分析 用求差法并考虑差是正的、负的或者是零.

解 作 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的差, 得 $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{m(b-a)}{b(b+m)}$.

因为 a, b, m 均为正数, 所以 $\frac{m}{b(b+m)} > 0$.

(1) 当 $b > a$ 时, $b - a > 0$, $\frac{m(b-a)}{b(b+m)} > 0$,

从而 $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} > 0$, 即 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$;

(2) 当 $b < a$ 时, $b - a < 0$, $\frac{m(b-a)}{b(b+m)} < 0$;

从而 $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} < 0$, 即 $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$.

说明 用求差法比较两个实数的大小时, 为了确定差的符号, 有时要把这个差式变形为一个常数, 也可以变形为几个因式的积的形式. 当某个因式的符号不能确定时, 通常需要就其中出现的字母分情况进行讨论.

例 7 设 α, β 是有理数, γ 是无理数, 若 $\alpha + \beta\gamma = 0$, 则 $\alpha = \beta = 0$.

分析 设法将等式变形, 利用有理数不能等于无理数.

证明 由 $\alpha + \beta\gamma = 0$, 得 $\beta\gamma = -\alpha$.

假设 $\beta \neq 0$, 那么 $\gamma = -\frac{\alpha}{\beta}$, 注意到 $\frac{\alpha}{\beta}$ 是有理数, 这样就得有理数等于无理数, 矛盾. 所以 $\beta = 0$, 从而 $\alpha = 0$.



说明 本题还可以作如下推广:

设 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 是有理数, γ 是无理数, 若 $\alpha_1 + \beta_1 \gamma = \alpha_2 + \beta_2 \gamma$, 则 $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.

例 8 若 x 是无理数, a, b, c, d 均为有理数, 问在什么条件下 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 必为有理数.

解 c, d 不能同时为零, 若 $c \neq 0$ 时, $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$.

当 $bc-ad=0$ 时, $\frac{ax+b}{cx+d}$ 是有理数.

若 $c=0$, 则 $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, 且当 $a=0$ 时, $\frac{ax+b}{cx+d}$ 是有理数.

综上所述, 当且仅当 $bc=ad$, 且 c, d 不同时为零时 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 为有理数.

例 9 已知 a, b, c 都是有理数, 并且 $2a + \frac{b}{c} = -4$, 求证: $\sqrt{a^2c^2 - 4bc}$ 是有理数.

分析 要证明 $\sqrt{a^2c^2 - 4bc}$ 是有理数, 只要证明 $a^2c^2 - 4bc$ 是某一个有理数的平方即可.

证明 由 $2a + \frac{b}{c} = -4$, 得 $\frac{2ac+b}{c} = -4$.

上式两边同乘以 c , 得 $2ac + b = -4c$.

上式两边同乘以 b , 得 $2abc + b^2 = -4bc$.

在 $\sqrt{a^2c^2 - 4bc}$ 中用 $2abc + b^2$ 代替 $-4bc$, 得

$$\sqrt{a^2c^2 - 4bc} = \sqrt{a^2c^2 + 2abc + b^2} = \sqrt{(ac+b)^2} = |ac+b|.$$

又由已知 a, b, c 是有理数, 故 $|ac+b|$ 是有理数, 因而 $\sqrt{a^2c^2 - 4bc}$ 是有理数.

例 10 设 a, b 为相异实数, t 为一正实数, 求证: 实数 $\frac{a+bt}{1+t}$ 必在 a 与 b 之间.

分析 此问题只要将其看作比较 $a, b, \frac{a+bt}{1+t}$ 三实数之间的大小, 即可得证.

证明 $\frac{a+bt}{1+t} - a = \frac{(b-a)t}{1+t}; \frac{a+bt}{1+t} - b = \frac{a-b}{1+t},$

$\because t > 0, \therefore 1+t > 0,$

当 $a < b$ 时, $b-a > 0, a-b < 0$, 此时, $a < \frac{a+bt}{1+t} < b;$

当 $a > b$ 时, $b-a < 0, a-b > 0$, 此时, $b < \frac{a+bt}{1+t} < a.$

综上所述, $\frac{a+bt}{1+t}$ 必在 a 与 b 之间.

例 11 试证: 任何两个不同的有理数 a, b 之间存在着无限多个有理数.

分析 两个有理数 a, b 的算术平均值 $\frac{a+b}{2}$ 就是一个介于 a, b 之间的有理数, 按



照这个办法可以找到第二个,第三个,...

证明 不妨设 $a < b$, 则 $a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$.

记 $m_1 = \frac{a+b}{2}$, 则 $a < m_1 < b$.

已记 $m_2 = \frac{m_1+b}{2}$, 则

$$a < m_1 < m_2 < b.$$

重复以上过程就可以得到无限多个有理数 m_1, m_2, m_3, \dots , 它们都在 a, b 之间.

例 12 要把一张面值为一角的人民市换成零钱, 现有足够的面值为 5 分、2 分、1 分的人民币, 试尽可能多地写出各种不同的兑换方法.

解 此题随便写出几种兑换方式并不难, 但要尽可能多地写出甚至一个不漏地写出有一定难度. 这类问题, 我们可用数学分类思想, 逐类穷举兑换方法. 为便于叙述, 分别将 5 分币、2 分币、1 分币记为⑤、②、①, 则我们可用以下分类法来写:

(1) 只用一种分币: $2 \times \textcircled{5}, 5 \times \textcircled{2}, 10 \times \textcircled{1}$;

(2) 只用二种分币: $1 \times \textcircled{5} + 5 \times \textcircled{1}, 4 \times \textcircled{2} + 2 \times \textcircled{1}, 3 \times \textcircled{2} + 4 \times \textcircled{1}, 2 \times \textcircled{2} + 6 \times \textcircled{1}, 1 \times \textcircled{2} + 8 \times \textcircled{1}$;

(3) 用三种分币: $1 \times \textcircled{5} + 2 \times \textcircled{2} + 1 \times \textcircled{1}, 1 \times \textcircled{5} + 1 \times \textcircled{2} + 3 \times \textcircled{1}$.

共有 10 种兑换法.

此题也可用其他分类法兑换, 同学们可试一试.



【能力训练】

一、选择题

1. 设 a, b, c 是不全相等的任意实数, 若 $x = a^2 - bc, y = b^2 - ac, z = c^2 - ab$, 则 x, y, z ().

(A) 都不小于 0

(B) 都不大于 0

(C) 至少有一个小于 0

(D) 至少有一个大于 0

2. 已知实数 a, b, x, y 满足 $y + |\sqrt{x} - \sqrt{3}| = 1 - a^2, |x - 3| = y - 1 - b^2$, 则 $2^{x+y} + 2^{a+b}$ 的值是 ().

(A) 12

(B) 16

(C) 17

(D) 18

3. 三个互不相等的有理数, 既可表示为 $1, a+b, a$, 又可表示为 $0, \frac{b}{a}, b$ 的形式, 则 $a^2 + b^2$ 等于 ().

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 5



4. 在实数范围内, 设 $x = \left[\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)} + \sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1 + \frac{1}{1-a}} + \frac{5a+1}{1-a} \right]^{2003}$,

则 x 的个位数字是().

(A)8

(B)6

(C)5

(D)2

二、填空题

5. 已知 $\sqrt{2009} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, 且 $0 < x < y$, 则满足上式的整数对 (x, y) 的个数是 _____ 个.

6. 若 x, y 均为整数, 且 $\sqrt[3]{25 + \sqrt{2}x} = 1 + \sqrt{2}y$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

7. 比 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^4$ 大的最小整数是 _____.

8. 满足方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的所有质数 (即 x, y 都是质数) 的解为 _____.

三、解答题

9. 设 a_n 是 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的个位数字, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 求证: $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

10. 设 a, b, c, d, p 是有理数, \sqrt{p} 是无理数, $a \neq 0$, 求等式 $\frac{a + c\sqrt{p}}{a + b\sqrt{p}} = \frac{a + d\sqrt{p}}{a + c\sqrt{p}}$ 成立的条件.

11. 在正方形的棋盘格的平面上, 能存在以格点为顶点的等边三角形吗?

12. 设正实数 a, b, c 满足条件: $a + b + c \leq 4$, 且 $ab + bc + ca \geq 4$, 试证明下面的三个不等式中至少有两个成立: $|a - b| \leq 2$; $|b - c| \leq 2$; $|c - a| \leq 2$.



十五、一元二次方程



【赛点目标】

1. 掌握一元二次方程概念及一元二次方程一般式(尤其注意二次项系数不得为零),并能将其他形式的一元二次方程化为一般式;掌握一元二次方程求根公式和判别式.
2. 能选用适当方法解一元二次方程.
3. 能就判别式的符号对一元二次方程的解的情况进行讨论,并灵活运用判别式解一类与方程有关的数学问题.
4. 能运用一元二次方程解应用题.



【方法述要】

1. 判别式定理:对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 设 $\Delta = b^2 - 4ac$, 则有:

- (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不等实根;
- (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等实根;
- (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数根.

判别式定理只适用于一元二次方程,若涉及方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有没有实根的问题,还应对 a 加以讨论.

2. 韦达定理:设 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根,则有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, 逆命题也成立.

灵活运用一元二次方程以下两条性质,可以简捷地解决一类与根有关的求值问题.

(1) 设 α 为一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个根,则有 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, 反之亦然;

(2) 设 $\alpha, \beta (\alpha \geq \beta)$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac \geq 0)$ 的两根,则有 $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, 反之亦然.

3. 对于有理系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 有:

- (1) 方程两根为有理数 $\Leftrightarrow b^2 - 4ac$ 为完全平方数;
- (2) 方程有一根为有理数 \Rightarrow 另一根也是有理数.



4. 对整数系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 有:

(1) 方程两根为整数 $\Leftrightarrow b^2 - 4ac$ 为完全平方数, 且 $a \mid b, a \mid c$;

(2) 方程两根为整数 $\Leftrightarrow b^2 - 4ac$ 为完全平方数, 且 $2a \mid (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$.



【赛题精讲】

例1 用适当的方法解下列方程:

(1) $10x^2 - x - 3 = 0$; (2) $6x + 15 = 3x^2$; (3) $y^2 - \frac{7}{4} = 3y$.

分析 只要熟练掌握公式法就可解所有一元二次方程, 但仅掌握这种方法对真正理解一元二次方程及其解法是不够的, 因此我们要仔细观察、分析方程是否能用更简便的方法解. 当然, 首先要将方程化为一般式.

解 (1) 原方程可化为: $(2x + 1)(5x - 3) = 0$, 即 $2x + 1 = 0$, 或 $5x - 3 = 0$,

解得: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{5}$.

(2) 原方程化为: $x^2 - 2x - 5 = 0$, 配方得: $(x - 1)^2 = 6$, 方程两边开方得: $x - 1 = \pm\sqrt{6}$, 即 $x_1 = 1 + \sqrt{6}$, $x_2 = 1 - \sqrt{6}$.

(3) 原方程化为: $4y^2 - 12y - 7 = 0$, 仔细观察方程左侧可用十字相乘法分解. 在这里我们用公式法解: $a = 4, b = -12, c = -7, \Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times (-7) = 256$.

所以 $x = \frac{12 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{12 \pm 16}{8}$. 即 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

例2 解关于 x 的方程: $x^2 + x - 2 + k(x^2 + 2x) = 0$.

分析 首先应将题的意义弄清楚, 该方程形似一元二次方程, 但由于在二次项的系数中含有字母, 且在题中只说“解关于 x 的方程”而并不是“解关于 x 的一元二次方程”, 所以解题中要注意二次项系数的处理.

解 先将方程整理成: $(k + 1)x^2 + (2k + 1)x - 2 = 0$.

当 $k = -1$ 时, 原方程为 $-x - 2 = 0$, 解得 $x = -2$;

当 $k \neq -1$ 时, 原方程为一元二次方程, 且 $\Delta = (2k + 1)^2 + 8(k + 1) = (2k + 3)^2$,

所以原方程的解为 $x = -\frac{(2k + 1) \pm (2k + 3)}{2(k + 1)}$, 解得: $x_1 = \frac{1}{k + 1}, x_2 = -2$.

例3 设 α 是方程 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ 的根, 求 $\frac{\alpha^3 - 1}{\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2}$ 的值.

分析 若解出方程的根, 再代入求值, 显然很复杂, 可以利用性质(1)进行变形求值.

解法一 因为 α 是方程 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$ 的根,



$$\text{所以 } \alpha^2 + \alpha - \frac{1}{4} = 0, \text{ 即 } \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{4}. \quad ①$$

$$\text{又 } \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1),$$

$$\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 = (\alpha^3 - \alpha)(\alpha^2 + \alpha) = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha)^2,$$

$$\text{原式} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha)^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{(\alpha^2 + \alpha)^2}. \quad ②$$

把①式代入②得 原式 = 20.

$$\text{解法二 同解法一得 } \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2}{\alpha^3 - 1} = \alpha^2 + \alpha - 1 + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1} = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{20},$$

原式 = 20.

例 4 已知关于 x 的方程 $k^2x^2 + (2k - 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , (1)求 k 的取值范围; (2)是否存在实数 k , 使方程的两个实数根互为相反数? 如果存在, 求出 k 值; 如不存在, 请说明理由.

解 (1) 根据题意, 得 $\Delta = (2k - 1)^2 - 4k^2 > 0$. 解得 $k < \frac{1}{4}$, \therefore 当 $k < \frac{1}{4}$ 时, 方程有两个不相等实根.

$$(2) \text{不存在. 当 } x_1, x_2 \text{ 互为相反数时, } x_1 + x_2 = 0, \text{ 即 } -\frac{2k - 1}{k} = 0 \quad ①,$$

解得 $k = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, 而此时 $\Delta < 0$, 原方程无实数解.

不存在使方程两根互为相反数的 k 值.

例 5 试确定关于 x 的方程 $(m - 2)x^2 + (2m + 1)x + m - 2 = 0$ 的解的情况.

分析 首先应确定该方程是一次还是二次方程, 然后分别确定方程解的情况.

解 (1) 当 $m = 2$ 时, 方程为一元一次方程, 有一个实数根.

(2) 当 $m \neq 2$ 时, 方程是一元二次方程.

当 $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m - 2)^2 > 0$ 时,

即 $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$ 时, 方程有两个不相等实根.

当 $\Delta = 0$ 即 $m = \frac{3}{4}$ 时, 方程有两个相等实根.

当 $\Delta < 0$ 即 $m < \frac{3}{4}$ 时, 原方程无实数根.

例 6 设 a, b, c 是不全相等的非零实数, 求证: 在方程 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ 和 $cx^2 + 2ax + b = 0$ 中, 至少有一个方程有两个不等实根.

分析 设三个方程判别式分别是 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, 只需证明 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 中至少有一个



大于 0 即可, 可以用反证法.

证明 假设 $\Delta_1 = (2b)^2 - 4ac \leq 0$,

$$\Delta_2 = (2c)^2 - 4ab \leq 0,$$

$$\Delta_3 = (2a)^2 - 4bc \leq 0,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= 4b^2 - 4ac + 4c^2 - 4ab + 4c^2 - 4bc \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= 2[2(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \leq 0. \end{aligned}$$

又 a, b, c 两两不相等.

$$2[2(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0 \text{ (矛盾).}$$

所以假设不成立, 故 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 中至少有一个大于 0, 即原方程中至少有一个方程有两个不等实根.

例 7 若两方程 $a^2x^2 + ax - 1 = 0$ 和 $x^2 - ax - a^2 = 0$ 有公共根, 求 a 的值.

解法一 设 α 是两方程的公共根, 则

$$a^2\alpha^2 + a\alpha - 1 = 0, \quad \alpha^2 - a\alpha - a^2 = 0.$$

$$\text{两式相加得 } (a^2 + 1)(\alpha^2 - 1) = 0.$$

$$\text{由 } a^2 + 1 \neq 0, \text{ 得 } \alpha^2 - 1 = 0, \text{ 即 } \alpha = \pm 1.$$

$$\text{代入原方程得 } a^2 + a - 1 = 0 \text{ 或 } a^2 - a - 1 = 0.$$

$$\text{解得 } a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

解法二 易知 $a \neq 0$, 设方程 $a^2x^2 + ax - 1 = 0$ 两根为 α, β , 则方程 $x^2 - ax - a^2 = 0$ 两根为 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$, 要使两方程有公共根, 必须 $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ 或 $\alpha = \frac{1}{\beta}$ 或 $\beta = \frac{1}{\alpha}$ 或 $\beta = \frac{1}{\beta}$.

$$(1) \text{ 若 } \alpha = \frac{1}{\alpha}, \text{ 则 } \alpha^2 = 1, \alpha = \pm 1, \text{ 代入原方程可得 } a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$(2) \text{ 若 } \alpha = \frac{1}{\beta}, \text{ 则 } \alpha\beta = 1, \text{ 由韦达定理可知 } \alpha\beta = -\frac{1}{a^2}, \text{ 故 } -\frac{1}{a^2} = 1, a^2 = -1 \text{ (矛盾).}$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \text{ 时同 (2), } \beta = \frac{1}{\beta} \text{ 时同 (1).}$$

$$\text{综上所述, } a \text{ 的取值有 4 个, 分别是 } a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

例 8 对于 $a > b > c > 0$, 作二次方程 $x^2 - (a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$.

(1) 若方程有实根, 求证: a, b, c 不能作为一个三角形的三边;

(2) 若方程两根为 6, 9, 求正整数 a, b, c .

解 (1) 由 $a > b > c$,

$$\Delta = (a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca)$$



$$= (a+b+c)(a-b-c) - 2b(a-b) - 2c(a-c) < (a+b+c)(a-b-c).$$

又 $\Delta \geq 0$, 所以 $(a+b+c)(a-b-c) > 0$. 即 $a-b-c > 0$, 即 $a > b+c$.

所以 a, b, c 不能作为三角形的三边.

(2) 由韦达定理得 $a+b+c=15, ab+bc+ca=54$.

由 $a > b > c$, 得 $a+b+c > 3c$, 即 $3c < 15$.

即 $c < 5$. 即 $c=1, 2, 3, 4$.

① 若 $c=1$, 则 $a+b=14, ab=40$, 解得 $a=10, b=4$;

② 若 $c=2$, 则 $a+b=13, ab=28$, 满足条件的 a, b , 不同为正整数.

同理 $c=3, 4$ 时, a, b 不同为正整数.

综上所述, 满足条件的正整数 a, b, c 只有一组 $a=10, b=4, c=1$.

例 9 设 n 为正整数, 且 n^2-71 的值能被 $7n+55$ 的值整除, 求 n 的值.

解 设 $n^2-71=(7n+55)k$, (k 为整数)

$$\text{则 } n^2-7kn-(55k+71)=0. \quad ①$$

因为 n 为整数, 所以 $\Delta=(7k)^2+4(55k+71)=49k^2+220k+284$ 是完全平方数.

$$\text{又 } (7k+15)^2=49k^2+210k+225 < 49k^2+220k+284$$

$$< 49k^2+238k+289=(7k+17)^2.$$

所以 $\Delta=(7k+16)^2$. 即 $(7k+16)^2=49k^2+220k+284$. 解得 $k=7$.

代入①得 $n^2-49n-456=0$. $\therefore n=57$ 或 -8 (舍去).

所以 n 的值为 57.

例 10 已知抛物线 $y=ax^2-3(a+1)x+3a$ 与直线 $y=1-2x$ 至少有一个交点是整点(纵横坐标都是整数的点), 试确定整数 a 的值, 并求出对应的整点坐标.

解 抛物线与直线的交点的横坐标 x 满足方程 $ax^2-3(a+1)x+3a=1-2x$.

$$\text{即 } ax^2-(3a+1)x+3a-1=0. \quad ①$$

因为 $\Delta=(3a+1)^2-4a(3a-1) \geq 0$, 所以 $3a^2-10a-1 \leq 0$. $\therefore \frac{5-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq$

$$\frac{5+\sqrt{28}}{3}.$$

又 a 为整数, 所以 $a=1, 2, 3$.

当 $a=1$ 时, 代入①得 $x^2-4x+2=0$. $x=2 \pm 2\sqrt{2}$.

当 $a=2$ 时, 代入①得 $2x^2-7x+5=0$. $x=1$ 或 $\frac{5}{2}$.

当 $a=3$ 时, 代入①得 $3x^2-10x+8=0$. $x=2$ 或 $\frac{4}{3}$.

所以 满足条件的 a 值有两个: $a=2$ 或 3 , 当 $a=2$ 时, 有一个交点是整点 $(1, -1)$; 当 $a=3$ 时, 有一个交点是整点 $(2, -3)$.



例 11 设 a, b 为整数, 且方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的两个不同的正数根都小于 1, 求 a 的最小值.

解 设 x_1, x_2 为两个正根, 则 $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$.

$$(1) \frac{1}{a} = x_1 x_2 > 0 \Rightarrow a > 0;$$

$$(2) -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0;$$

$$(3) x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} (\text{合}), x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} < 0 (\text{不合}).$$

$$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ b^2 - 4a > 0, \\ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b < -2\sqrt{a}, \\ \sqrt{b^2 - 4a} < 2a + b, \\ b > -2a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b < -2\sqrt{a}, \\ b > -(a+1), \\ b > -2a. \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(a+1) < b < -2\sqrt{a}.$$

当 $a = 1$ 时, $-2 < b < -2$, 不合;

当 $a = 2$ 时, $-3 < b < -2\sqrt{2}$ 与 b 是整数矛盾;

当 $a = 3$ 时, $-4 < b < -2\sqrt{3}$ 与 b 是整数矛盾;

当 $a = 4$ 时, $-5 < b < -4$ 与 b 是整数矛盾;

当 $a = 5$ 时, $-6 < b < -2\sqrt{5}$ 但 b 是整数, 故 $b = -5$.

此时方程为 $5x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$ 满足条件 $0 < \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10} < 1$.

故 a 的最小值为 5.

说明 韦达定理的应用很广泛, 特别是与根的概念、根的判别式联系在一起应用, 我们当然应把它们作为重点来学习.

例 12 某校在向“希望工程”捐款活动中, 甲班的 m 个男生和 11 个女生捐款总数与乙班 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等, 都是 $(mn + 9m + 11n + 145)$ 元, 已知每人捐款数相同, 且都是整数元, 求每人的捐款数.

解 设每人捐款 x 元, 因每人捐款数相同, 故两班捐款人数相同, 即

$$m + 11 = n + 9, m = n - 2. \quad ①$$

$$\text{又 } mn + 9m + 11n + 145 = (9 + n)x, \quad ②$$

把①式代入②式得 $n^2 + 18n + 127 = (9 + n)x$

整理得 $n^2 + (18 - x)n + (127 - 9x) = 0$.

因为 n 为整数, 所以 $\Delta = (18 - x)^2 - 4(127 - 9x) = x^2 - 184$ 为完全平方数.

设 $\Delta = x^2 - 184 = k^2$ (k 为整数, $k \geq 0$), $\therefore (x + k)(x - k) = 184$.



故有 $\begin{cases} x-k=1, 2, 4, 8, \\ x+k=184, 92, 46, 23. \end{cases}$ 解得 $x = \frac{185}{2}, 47, 25, \frac{31}{2}.$

又 x 为整数, 所以 $x = 47, 25$. 即每人捐款数为 47 元或 25 元.



【能力训练】

一、选择题

1. 方程 $x^2 + |x| + 1 = 0$ 有()个实数根.

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0

2. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根, 则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与平方 $M = (2ax_0 + b)^2$ 的关系是().

- (A) $\Delta > M$ (B) $\Delta = M$ (C) $\Delta < M$ (D) 不确定

3. 设 $a + b > c > 0$ 且 $|a - b| < c$, 那么二次方程 $a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)x + b^2 = 0$ 的根的情形是().

- (A) 有两个等根 (B) 无实根 (C) 有两个不等根 (D) 有实根

4. 设方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两实根为 a, b 且有 $l_1 = a + b, l_2 = a^2 + b^2, \dots, l_n = a^n + b^n$, 则当 $n \geq 3$ 时, $l_n + pl_{n-1} + ql_{n-2}$ 的值为().

- (A) 0 (B) p (C) q (D) $1 + p + q$

二、填空题

5. 设 a, b 是自然数, 定义运算“ $*$ ”为 $a * b = a^2 + a + b^2 + b$, 则方程 $x * (x + 2) = 14$ 的正整数解 $x =$ _____.

6. 已知两数积 $ab \neq 1$, 且 $2a^2 + 1234567890a + 3 = 0, 3b^2 + 1234567890b + 2 = 0$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

7. 关于 x 的方程 $x^2 - ax + 4 = 0 (a < 0)$ 的实数根是 x_1, x_2 , 则 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} =$ _____.

8. 已知一元二次方程 $x^2 - x + 1 - m = 0$ 的两实根 α, β 满足 $|\alpha| + |\beta| \leq 5$, 则实数 m 的取值范围为 _____.

三、解答题

9. 当 m 取何值时, 关于 x 的方程 $2(m+1)x^2 + 4mx + 3m - 2 = 0$, (1) 有两个实数根; (2) 没有实数根.

10. 设 α, β 是方程 $x^2 - \sqrt{10}x + 2 = 0$ 的两根, 且 $\alpha > \beta$, 求 $\frac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^3 - \beta^3}$ 的值.

11. 当整数 a 取何值时, 方程 $(a^2 - 1)x^2 - 6(3a - 1)x + 72 = 0$ 两根为整数, 并求出



方程两根.

12. 一个容器盛满纯药液 63 升, 第一次倒出部分药液后, 用水加满; 第二次又倒出同样多的药液, 再用水加满. 这时容器内剩下的纯药液是 28 升, 每次倒出液体多少升?



十六、分式方程



【赛点目标】

1. 掌握分式方程的意义.
2. 能够将分式方程(可化为一元二次方程或一元二次方程的分式方程)化为整式方程,并能够求解.
3. 了解增根的概念及产生增根的原因,从而认识到验根的必要性,并能够通过验根找出分式方程的增根.
4. 能列分式方程解应用题.



【方法述要】

1. 解分式方程的步骤与解一元二次方程的步骤基本相同,重点要掌握解分式方程的第一步——去分母. 方程两边所乘的公分母含有未知数,不能确定它是否不为零,因此按等式性质,这一变换不属于同解变换,而事实上去了分母后,扩大了 x 的取值范围,因而可能会产生增根. 所以解分式方程必须验根,其方法可以把未知数的值代入原方程看方程两边是否相等,也可代入公分母看分母是否为零.

2. 列分式方程解应用题,重点也是找等量关系,两根的检验除了看是否是增根外,还要注意是否符合题意.



【赛题精讲】

例 1 解下列分式方程:

$$(1) \frac{4x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1}{x+2};$$

$$(2) \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} = \frac{x-3}{x^2-3x+2};$$

$$(3) \frac{2(x-1)}{x+1} + \frac{6(x+1)}{x-1} = 7; \quad (4) \frac{6}{x^2+x} = x^2 + x + 1.$$

分析 解分式方程首先应将其化为整式方程,解之前要仔细观察方程,选择去分母或换元法将其化为整式方程.

解 (1) 方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$, 得 $4x - 2(x+2) = (x+2)(x-2) + (x-2)$, 整理得: $x^2 - x - 2 = 0$, 解得 $x_1 = 2, x_2 = -1$.



经检验 $x=2$ 是原方程的增根, \therefore 原方程的解为 $x=-1$.

(2) 方程的两边同乘以 $(x-1)(x-2)(x-3)$, 得 $(x-1)^2 + (x-2)^2 = (x-3)^2$,
整理得: $x^2 = 4$, 解得: $x_1 = 2, x_2 = -2$.

经检验 $x=2$ 是原方程的增根, \therefore 原方程的解为 $x=-2$.

(3) 设 $\frac{(x-1)}{x+1} = y$, 则原方程为: $2y + \frac{6}{y} = 7$.

方程两边同乘以 y , 得 $2y^2 - 7y + 6 = 0$, 解得 $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 2$.

当 $y = \frac{3}{2}$ 时, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{3}{2}$, 解得 $x_1 = -5$;

当 $y = 2$ 时, $\frac{x-1}{x+1} = 2$, 解得 $x_2 = -3$.

经检验, $x_1 = -5$ 和 $x_2 = -3$ 都是原方程的解.

(4) 设 $x^2 + x = y$, 则原方程为 $\frac{6}{y} = y + 1$.

方程两边同乘以 y , 得 $y^2 + y - 6 = 0$, 解得 $y_1 = -3, y_2 = 2$.

当 $y = -3$ 时, $x^2 + x = -3, x^2 + x + 3 = 0$, 此方程无解;

当 $y = 2$ 时, $x^2 + x = 2, x^2 + x - 2 = 0$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = 1$.

经检验 $x_1 = -2$ 和 $x_2 = 1$ 都是原方程的解.

例 2 解方程: (1) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2(x+3)}{x-3}$;

$$(2) \frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}.$$

解 (1) $\frac{x-1+2}{x-1} + \frac{x-2+4}{x-2} = \frac{2[(x-3)+6]}{x-3}$, 即 $1 + \frac{2}{x-1} + 1 + \frac{4}{x-2} = 2 + \frac{12}{x-3}$,

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{12}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x-3}$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-3) = 6(x-2)(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x = 0. \therefore x_1 = 0, x_2 = 1\frac{2}{3}.$$

验证均合题意. 故 $0, 1\frac{2}{3}$ 是原方程的根.

(2) 直接去分母较繁, 可先通过化部分分式将方程化简, 再求解.

$$\text{原方程可化为 } \frac{x-2+2}{x-2} + \frac{x-7-2}{x-7} = \frac{x-1+2}{x-1} + \frac{x-6-2}{x-6},$$

$$1 + \frac{2}{x-2} + 1 - \frac{2}{x-7} = 1 + \frac{2}{x-1} + 1 - \frac{2}{x-6}. \text{ 即 } \frac{-5}{(x-2)(x-7)} =$$

$$\frac{-5}{(x-1)(x-6)}, \text{ 去分母、整理, 得 } x = 4.$$



经检验 $x=4$ 是原方程的根.

例 3 解方程: (1) $\frac{8}{x^2-6x+9} - \frac{7x}{9-x^2} = \frac{18}{x^3-3x^2-9x+27}$;

(2) $\frac{1}{x^2-10x-29} + \frac{1}{x^2-10x-45} - \frac{2}{x^2-10x-69} = 0$;

(3) $\frac{a+b}{2a-ax+2-x} + \frac{1}{a+1} = \frac{b+1}{2x-x^2}$.

解 (1) $\frac{8}{(x-3)^2} + \frac{7x}{(x+3)(x-3)} = \frac{18}{(x-3)^2(x+3)}$,

乘以 $(x+3)(x-3)^2$ 得 $8(x+3) + 7x(x-3) = 18$, 即

$$7x^2 - 13x + 6 = 0, \text{解得 } x_1 = 1, x_2 = \frac{6}{7}.$$

验证均合题意. 故 $1, \frac{6}{7}$ 是原方程的根.

(2) 设 $y = x^2 - 10x - 29$, 则原方程化为 $\frac{1}{y} + \frac{1}{y-16} - \frac{2}{y-40} = 0$

$$\Rightarrow (y-16)(y-40) + y(y-40) - 2y(y-16) = 0$$

$$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow x^2 - 10x - 39 = 0. \text{解得 } x_1 = 13, x_2 = -3.$$

验证均合题意. 故 $13, -3$ 是原方程的根.

(3) $\frac{a+b}{(2-x)(a+1)} + \frac{1}{a+1} = \frac{b+1}{x(2-x)}$

$$\Rightarrow (a+b)x + x(2-x) = (a+1)(b+1)$$

$$\Rightarrow x^2 - (a+b-2)x + (a+1)(b+1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = a+1, x_2 = b+1$$

验证: 在 $\begin{cases} a \neq \pm 1 \\ b \neq \pm 1 \end{cases}$ 时均合题意.

故 $a+1, b+1 (|a|, |b| \neq 1)$ 是原方程的根.

例 4 已知解方程 $\frac{4x}{4-x^2} + 1 = \frac{k-k^2}{x-2} + \frac{1}{x+2}$ 时, 不会产生增根, 求实数 k 的取值范围.

分析 分式方程产生增根的是使分母为零的未知数的值, 所以此问题在将分式方程化成整式方程后, 只要将使分母为零的未知数的值代入即可解得.

解 将原方程去分母, 得: $(x+2)(k-k^2) = x^2 - 5x - 2$.

若方程产生增根, 则 $(x+2)(x-2) = 0. \therefore x_1 = 2, x_2 = -2$.

当 $x = -2$ 时, $(x+2)(k-k^2) = x^2 - 5x - 2 \Rightarrow 0 = 12, k$ 无解.

当 $x = 2$ 时, $(x+2)(k-k^2) = x^2 - 5x - 2 \Rightarrow 4(k-k^2) = -8$

$\therefore k = -1$ 或 $k = 2, \therefore$ 当 $k \neq -1$ 和 $k \neq 2$ 时原方程不会产生增根.



例5 解方程 $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$.

分析 观察各分母的特征可将它们分成三组,分组的原则是每一组各自通分后使得分母的二次项和一次项系数相同.

解 原方程可化为 $\frac{3(2x-5)}{x(x-5)} + \frac{2x-5}{(x-1)(x-4)} + \frac{4(2x-5)}{(x-2)(x-3)} = 0$,

即 $(2x-5) \left(\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} \right) = 0$.

若 $2x-5=0$, 则 $x_1 = \frac{5}{2}$.

若 $2x-5 \neq 0$, 则可设 $x^2-5x+4=y$.

原方程可变形为 $\frac{3}{y-4} + \frac{1}{y} + \frac{4}{y+2} = 0$.

去分母后整理,得 $2y^2-3y-2=0$. 解得 $y=2$ 或 $y=-\frac{1}{2}$.

当 $y=2$ 时,得 $x^2-5x+4=2$. 所以 $x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$;

当 $y=-\frac{1}{2}$ 时,得 $x^2-5x+4=-\frac{1}{2}$. 所以 $x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$.

经检验 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 均为原方程的根.

例6 a 为何值时,方程 $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{4x+a}{x(x+1)}$ 只有一个实数根?

分析 根据题目要求,我们可确定以下三种情况可使原方程只有一个实根.首先,如化得的整式方程为一次方程,则只有一解(并且这个根不能是增根).其次,化得的整式方程为一元二次方程,且判别式为零,此时对原方程而言也只有一个解.最后,如果判别式大于零,此时解得的两根中需有一根为原方程的增根.据目测可知此方程化得的整式方程应是一个一元二次方程,所以属后两种情况.

解 方程两边同乘以 $x(x+1)$,得 $x^2 + (x+1)^2 = 4x + a$.

整理得 $2x^2 - 2x + 1 - a = 0$. ①

(1) 当 $\Delta=0$ 时,解得 $a=\frac{1}{2}$ 时,方程①有两相等的实数根: $x=\frac{1}{2}$;

(2) $\Delta>0$, 解得 $a>\frac{1}{2}$ 时,方程①有两不等实根 $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a-1})$, 或 $x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2a-1})$.

因为 $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a-1}) > 0$, 所以 x_1 不会是原方程的增根, x_1 是原方程的解.

要使原方程只有一个解,则必有 $x_2=0$ 或 -1 (即 x_2 是原方程的增根).

若 $x_2 = -1$, 则 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2a-1}) = -1$, 解得 $a=5$.



若 $x_2=0$, 则 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2a-1})=0$, 解得 $a=1$.

所以, 当 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=1$ 或 $a=5$ 时, 原方程有且只有一个实数根.

例 7 甲、乙、丙三人共同完成一项工程所需要的时间比甲单独完成少用 18 天, 比乙单独完成少用 3 天, 是丙单独完成所需时间的一半, 求三人共同完成这项工程需要多少天?

解 设甲、乙、丙三人共同完成这项工程需要 x 天, 则甲单独完成需 $(x+18)$ 天, 乙单独完成需 $(x+3)$ 天, 丙单独完成需 $2x$ 天, 依题意得 $\frac{1}{x+18} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$.

去分母, 得 $2x(x+3) + 2x(x+18) + (x+18)(x+3) = 2(x+18)(x+3)$.

整理得 $x^2 + 7x - 18 = 0$. 解得 $x_1 = 2$ 或 $x_2 = -9$ (不合题意, 舍去).

经检验, $x=2$ 是原方程的根.

答: 甲、乙、丙三人共同完成这项工程需要 2 天.

例 8 一事甲乙合作, 12 日可成; 甲丙合作, 15 日可成; 乙丙合作, 20 日可成. 问三人合作几日可成?

解 设甲独做 x 日完成, 乙独做 y 日完成, 丙独做 z 日完成, 则

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}; \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

①

②

③

$$\text{①} + \text{②} + \text{③} \text{ 得, } 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{5} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}.$$

④

由于甲、乙、丙合作一日能作此事的 $\frac{1}{10}$, 要完成全部事情需要 $1 \div \frac{1}{10} = 10$ (日).

答: 三人合作 10 日可完成此事.

例 9 解方程组
$$\begin{cases} \frac{xyz}{y+z} = \frac{6}{5}; \\ \frac{xyz}{x+z} = \frac{3}{2}; \\ \frac{xyz}{x+y} = 2. \end{cases}$$

解 原方程组可化为



$$\begin{cases} \frac{y+z}{xyz} = \frac{5}{6}; \\ \frac{x+z}{xyz} = \frac{2}{3}; \\ \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{5}{6}; \\ \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{yz} = \frac{1}{6}; \\ \frac{1}{xz} = \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 6; \\ xz = 3; \\ xy = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 2; \\ z_1 = 3. \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1; \\ y_2 = -2; \\ z_2 = -3. \end{cases}$$

例 10 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y} = \frac{14}{3}; \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y + z} = \frac{14}{5}; \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z + x} = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

解 原方程组可化为

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3}{14}; & \text{①} \\ \frac{y+z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{5}{14}; & \text{②} \\ \frac{z+x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{7}; & \text{③} \end{cases}$$

① + ② + ③ 得 $\frac{2(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3}{7}$. ④

④ - ② 得 $\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{14}$. ⑤

④ - ③ 得 $\frac{y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{7}$. ⑥

④ - ① 得 $\frac{z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3}{14}$. ⑦

将⑤、⑥、⑦各自平方后相加得 $\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{14^2} + \frac{4}{14^2} + \frac{9}{14^2}$,

即 $\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{14} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 14$. ⑧

将⑧代入⑤、⑥、⑦得 $\begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 3. \end{cases}$

例 11 钟摆的调整:挂钟每日慢5秒,如何调整摆长?

解 (1)公式的推导:

设 T_1, T_2 为甲、乙两摆的周期, n_1, n_2 为甲、乙两摆的单位时间内摆动次数, l_1, l_2 为甲、乙两摆的摆长.



$$\text{由 } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ 得 } T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}, \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}. \quad ①$$

$$\text{又 } T_1 = \frac{1}{n_1}, T_2 = \frac{1}{n_2}, \text{ 所以 } \frac{1}{n_1} \div \frac{1}{n_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}, \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}. \quad ②$$

$$\text{甲、乙每日摆动次数之比 } \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}. \quad ③$$

(2) 具体的计算:

挂钟每日摆动 $m_1 = (24 \times 60 \times 60 - 5)$ 次,

挂钟每日应摆动 $m_2 = (24 \times 60 \times 60)$ 次.

$$\text{应用公式③有 } \frac{24 \times 60 \times 60}{24 \times 60 \times 60 - 5} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}},$$

$$l_2 = \left(\frac{24 \times 60 \times 60 - 5}{24 \times 60 \times 60} \right)^2 l_1 = \left(\frac{17279}{17280} \right)^2 l_1 \approx 0.999884263 l_1.$$

故将摆长 l_1 缩短为原来的 0.999884263 倍即可.

例 12 甲、乙二人分别从 A、B 两地同时相向而行, 甲走了一半路程时, 乙尚距 A 地还有 120 千米, 当乙走到一半路程时, 甲距 B 地还有 75 千米, 求: AB 两地的距离.

解 设 AB 距离为 s , 其中点为 C, 甲速为 $v_{\text{甲}}$, 乙速为 $v_{\text{乙}}$, 则甲走 $\frac{s}{2}$ 到 midpoint C 的时间与乙走 $s - 120$ 的时间相等.

$$(1) \frac{\frac{s}{2}}{v_{\text{甲}}} = \frac{s - 120}{v_{\text{乙}}},$$

乙走 $\frac{s}{2}$ 到 midpoint C 的时间与甲走 $s - 75$ 的时间相等;

$$(2) \frac{\frac{s}{2}}{v_{\text{乙}}} = \frac{s - 75}{v_{\text{甲}}}, \text{ 所以 } \frac{\frac{s}{2}}{s - 120} = \frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{s - 75}{\frac{s}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{4} = (s - 75)(s - 120) = s^2 - 195s + 75 \times 120,$$

$$\Rightarrow 3s^2 - 780s + 36000 = 0 \Rightarrow s^2 - 260s + 12000 = 0 \Rightarrow s_1 = 60 \text{ 或 } s_2 = 200.$$

但 $s_1 = 60$ 不合题意, 所以 $s = 200$.

答: 甲、乙两地距离为 200 千米.



【能力训练】

一、选择题



1. 方程 $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ 的根是().
 (A) $x = -1$ (B) $x = 2$ (C) $x = -1$ 或 2 (D) $x = -2$ 或 -1
2. 方程 $\frac{2x}{x^2+2} + \frac{x^2+2}{2x} = \frac{13}{6}$ 的解为().
 (A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $x = 1$ 或 2 (D) $x = -1$ 或 -2
3. 如果关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2-x} + \frac{k-5}{x^2+x} = \frac{k-1}{x^2-1}$ 有增根 $x = 1$, 那么 k 等于().
 (A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) 0
4. 如果关于 x 的方程 $\frac{4x+1}{(a+1)(x-1)} - \frac{2x-1}{(a-1)(x+1)} = \frac{7}{4}$ 的解是 $x = 2$, 那么 $a =$ ().
 (A) 3 (B) $\frac{11}{7}$ (C) 2 (D) $\frac{11}{7}$ 或 3

二、填空题

5. 方程 $\frac{2}{x} - \frac{2}{x(x+1)} = 1$ 的解是_____.
6. 方程 $\frac{2x+4}{x^2-x} = \frac{x+5}{x-1}$ 的解是_____.
7. 方程 $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = 1$ 的解的个数是_____.
8. 方程 $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} = \frac{4}{21}$ 的解是_____.

三、解答题

9. 当 m 为何实数时, 方程 $\frac{3}{x} - \frac{6}{x-1} - \frac{x+m}{x(x-1)} = 0$ 有解?
10. 若方程 $\frac{(a+1)(b+1)}{x+1} + \frac{(a-1)(b-1)}{x-1} = \frac{2ab}{x}$ 无解, 且 $a \neq b$, 试求 $a^2 + ab + b^2$ 的值.

11. 解方程 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1} = \frac{19}{6}$.

12. 解方程组:

$$\begin{cases} x = \frac{2z^2}{1+z^2}, \\ y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \\ z = \frac{2y^2}{1+y^2}. \end{cases}$$



十七、一元一次不等式



【赛点目标】

1. 了解一元一次不等式及一元一次不等式组的概念和它们的解的概念.
2. 了解和掌握不等式的基本性质,能运用性质解一元一次不等式和一元一次不等式组,并能在数轴上表示它们的解.
3. 能列一元一次不等式(组)解应用题.



【方法述要】

1. 解一元一次不等式与解一元一次方程类似,先将不等式化为标准形式: $ax > b$ (或 $ax < b$),再两边同时除以 a ,求出不等式的解集. 必须注意 $a < 0$ 时不等号要改变, $a = 0$ 时要讨论.
2. 解一元一次不等式组,其基本方法是先求出不等式中各个不等式的解集,再求公共部分,通常可以借助数轴来确定公共部分.
3. 不等式与不等式组的应用十分广泛,如解应用题、求最大值或最小值等,在竞赛中也经常会出现.
4. 一元一次不等式有非常广泛的用途,它的解法与一元一次方程的解法相比,就是在不等式两边同乘(或除)以一个数时,必须确定这个数是正数还是负数,进而确定不等号的方向是否改变,这一点在解数字系数不等式时比较容易处理,但在解字母系数不等式时,就需特别注意分析,有时还需分类讨论. 熟练地掌握了一元一次不等式的解法后,再解一元一次不等式组就比较容易了,只要分别将每个不等式解出,再找出它们的公共解即可. 图解不等式(组)的解时要注意空心点和实心点所表示的意义.



【赛题精讲】

例 1 解下列不等式或不等式组,并在数轴上表示解集:

$$(1) \frac{1+x}{2} \leq 1 - \frac{2-3x}{5}, \quad (2) \begin{cases} 3x+4 < 13, & ① \\ \frac{x-5}{5} > \frac{x-2}{2}. & ② \end{cases}$$

分析 解一元一次不等式的基本步骤与解一元一次方程类似,只是在不等式两边同乘以一个负数时,要注意不等号的变号. 在解不等式组时,只要分别解出组中各不等



式的解集,再取其公共部分即可.而在数轴上表示不等式(组)的解集时,要注意空心点和实心点的用法.

解 (1)去分母,得 $5(1+x) \leq 10 - 2(2-3x)$. 去括号,得 $5 + 5x \leq 10 - 4 + 6x$. 移项合并同类项,得 $-x \leq 1$, 解得: $x \geq -1$.

原不等式的解集为 $x \geq -1$, 数轴上表示如图 17-1.

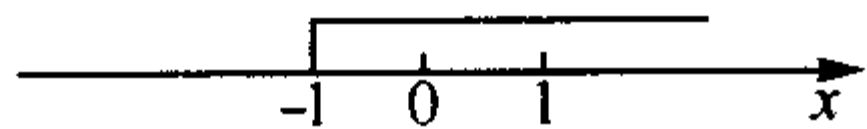


图 17-1

(2)解不等式①,得 $x < 3$, 解不等式②,得 $x < 0$.

原不等式组的解集为: $x < 0$, 在数轴上表示不等式①和②的解集如图 17-2.

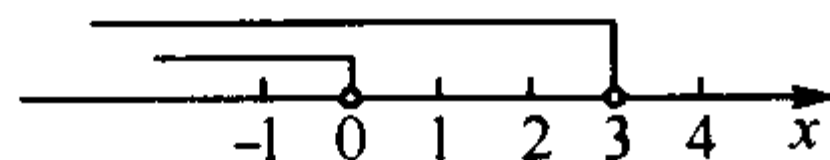


图 17-2

例 2 已知不等式 $3x - a \leq 0$ 的正整数解是 1, 2, 3, 求 a .

分析 本题应从结论出发逆向探求条件的多种可能性,由结论我们可以这样思考: $x \leq 3$ 是符合已知结论的; $x < 3$ 不符合结论,而 $x < 3.1, \dots, x < 4$ 均符合结论,当 $x \leq 4$ 时,不符合结论.

解 $3x - a \leq 0, 3x \leq a, x \leq \frac{a}{3}$.

由以上分析知 $3 \leq \frac{a}{3} < 4$, 得 $9 \leq a < 12$.

例 3 解关于 x 的不等式 $|2x + 1| < m$.

分析 此处有两点特别要注意,一是对含绝对值的不等式要依据绝对值的概念正确地化去绝对值符号.二是题中含有未知的常数,对含绝对值的不等式来说,应明确该常数的符号.

解 1. 当 $m \leq 0$ 时, 无解;

2. 当 $m > 0$ 时, 原不等式化为 $-m < 2x + 1 < m$, 解得: $-\frac{m+1}{2} < x < \frac{m-1}{2}$.

例 4 解不等式: $|x - 5| - |2x + 3| < 1$.

解 可以分以下三种情况:

(1) 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, 原不等式化为 $-(x-5) + (2x+3) < 1$. 解得 $x < -7$;

(2) 当 $-\frac{3}{2} \leq x < 5$ 时, 原不等式化为 $-(x-5) - (2x+3) < 1$;

解得 $x > \frac{1}{3} \therefore \frac{1}{3} < x < 5$.

(3) 当 $x \geq 5$ 时, 原不等式化为 $(x-5) - (2x+3) < 1$. 解得 $x > -9$.

所以 $x \geq 5$.

综上所述, 原不等式的解集为 $x < -7$ 或 $x > \frac{1}{3}$.

例 5 a, b 为任意实数, 解关于 x 的不等式 $a(x + b^2) > b(x + a^2)$.



分析 对解含字母系数的不等式,重要的是掌握不等式性质,进行分类讨论.

解 去括号,得 $ax + ab^2 > bx + ba^2$,移项、合并同类项,得 $(a-b)x > ab(a-b)$.

当 $a > b$ 时, $a-b > 0$,原不等式的解为 $x > ab$;

当 $a = b$ 时, $a-b = 0$,原不等式为 $0 \cdot x > ab \cdot 0$,无解;

当 $a < b$ 时, $a-b < 0$,原不等式的解为 $x < ab$.

综上所述,若 $a > b$,不等式的解为 $x > ab$;若 $a = b$,不等式无解;若 $a < b$,不等式的解为 $x < ab$.

例 6 解不等式: $\frac{2x-3}{x+1} > 1$.

解 原不等式化为 $\frac{x-4}{x+1} > 0$.

由 $(x-4)$ 与 $(x+1)$ 必须同号,得 $\begin{cases} x-4 > 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \text{①}$ 或 $\begin{cases} x-4 < 0, \\ x+1 < 0, \end{cases} \text{②}$

由①得 $x > 4$.

由②得 $x < -1$.

原不等式的解集为 $x > 4$ 或 $x < -1$.

例 7 解不等式组 $\begin{cases} 4x-1 \geq 3x-3, & \text{①} \\ 7-4x < 10-5x, & \text{②} \\ 1-3x > -14. & \text{③} \end{cases}$

解 由①得 $x \geq -2$.

由②得 $x < 3$.

由③得 $x < 5$.

原不等式组的解集为 $-2 \leq x < 3$ (如图 17-3).

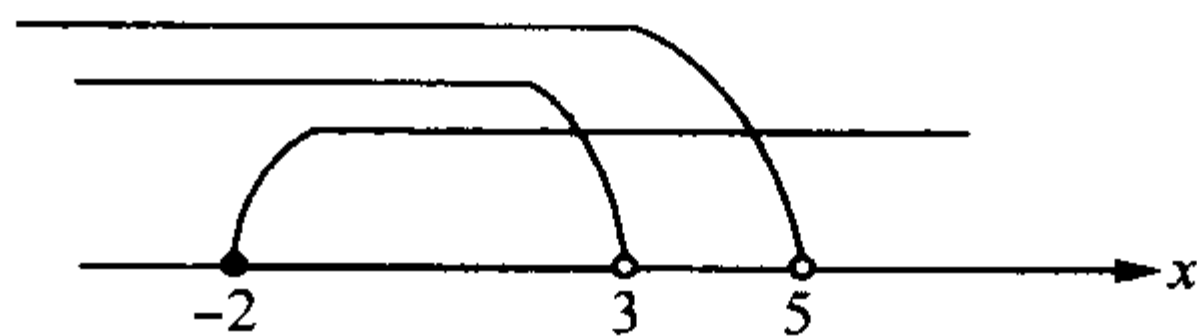


图 17-3

例 8 已知不等式 $(a+b)x + (2a-5b) < 0$ 的解为 $x < -\frac{1}{3}$, 求不等式 $(a+3b)x + (a-2b) > 0$ 的解.

分析 此题要仔细分析题中的隐含条件,由已知不等式及其解,可得 $a+b > 0$, 及 a 与 b 的等量关系,进而可分析出 a, b 的符号及大小,再解另一个不等式就不难了.

解 $(a+b)x + (2a-5b) < 0$ 的解为 $x < -\frac{1}{3}$ (注意不等号未变向),

所以 $a+b > 0$, 且 $\frac{5b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3}$, 化简,得 $a = \frac{16}{5}b$.

由 $a+b > 0$, $a = \frac{16}{5}b$, 可知 $a > 0, b > 0$.

把 $a = \frac{16}{5}b$ 代入不等式 $(a+3b)x + (a-2b) > 0$, 得 $\frac{1}{5}bx + \frac{6}{5}b > 0$.

因为 $b > 0$, 所以不等式的解为 $x > -6$.



例 9 学生若干人分住在若干间宿舍,如果每间住4人,那么有20人没有宿舍住,如果每间住8人,那么有一间宿舍不空也不满,求学生的人数和宿舍的间数.

解 设有宿舍 x 间,则有学生 $(4x+20)$ 人,于是有不等式组:

$$\begin{cases} 8x > 4x + 20, \\ 8(x-1) < 4x + 20. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4x > 20, \\ 4x < 28. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x < 7. \end{cases}$$

因为 x 是正整数,所以 $x=6$,则 $4x+20=44$.

答:有学生44人,有宿舍6间.

例 10 已知 x, y, z 是三个非负有理数,且满足 $3x+2y+z=5, x+y-z=2$. 设 $S=2x+y-z$,求 S 的最大值和最小值.

解 解关于 y, z 的方程 $\begin{cases} 2y+z=5-3x, \\ y-z=2-x. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y=\frac{7-4x}{3}, \\ z=\frac{1-x}{3}. \end{cases}$

$$S=2x+y-z=2x+\frac{7-4x}{3}-\frac{1-x}{3}=x+2.$$

又 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 故 $\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{7-4x}{3} \geq 0, \\ \frac{1-x}{3} \geq 0. \end{cases}$

解得 $0 \leq x \leq 1$.

当 $x=0$ 时, S 的值最小且为2;当 $x=1$ 时, S 的值最大且为3.

例 11 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是自然数,且满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$, 则 x_5 的最大值是_____.

解 由条件等式的对称性,不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$. 由题设有

$$1 = \frac{1}{x_2 x_3 x_4 x_5} + \frac{1}{x_1 x_3 x_4 x_5} + \frac{1}{x_1 x_2 x_4 x_5} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_5} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} \\ \leq \frac{1}{x_4 x_5} + \frac{1}{x_4 x_5} + \frac{1}{x_4 x_5} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_4} = \frac{3+x_4+x_5}{x_4 x_5}$$

所以 $x_4 x_5 \leq 3+x_4+x_5$, 即 $(x_4-1)(x_5-1) \leq 4$ ①

下面分两种情形讨论:

(1) 若 $x_4=1$, 即 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, 则题设等式为 $4+x_5=x_5$, 不可能;

(2) 若 $x_4 > 1$, 即 $x_4 \geq 2$, 则 $x_4-1 \geq 1$, 于是由①式可知 $x_5-1 \leq 4$, 即 $x_5 \leq 5$, 而当 $x_5=5$ 时, 容易找到满足条件的数组 $x_1=x_2=x_3=1, x_4=2, x_5=5$.

所以 x_5 的最大值为5.

例 12 某工厂现有甲种原料360kg,乙种原料290kg,计划利用这两种原料生产A、



B 两种产品共 50 件. 已知生产一件 A 种产品需要甲种原料 9kg, 乙种原料 3kg, 可获利润 700 元; 生产一件 B 种产品需要甲种原料 4kg, 乙种原料 10kg, 可获利润 1200 元. 问: (1) 按要求生产 A、B 两种产品, 有哪几种方案?

(2) 哪种方案获得的利润最大? 最大利润是多少?

解 (1) 设生产 A 种产品 x 件, 则生产 B 种产品 $(50 - x)$ 件, 依题意, 得

$$\begin{cases} 9x + 4(50 - x) \leq 360, \\ 3x + 10(50 - x) \leq 290. \end{cases} \quad \text{解不等式组得 } 30 \leq x \leq 32.$$

因为 x 为整数, 因此 $x = 30, 31, 32$, 于是有如下三种方案:

- ① 生产 A 种产品 30 件, B 种产品 20 件;
- ② 生产 A 种产品 31 件, B 种产品 19 件;
- ③ 生产 A 种产品 32 件, B 种产品 18 件.

(2) 设生产 A 种产品 x 件, B 种产品 $(50 - x)$ 件, 总共获利为 y 元, 依题意, 得 $y = 700x + 1200(50 - x) = 60000 - 500x$.

因为 $x = 30, 31, 32$, 所以当 $x = 30$ 时, y 最大, 且最大值为 $60000 - 500 \times 30 = 4500$ (元).

所以 按第一种方案生产可获得最大利润, 最大利润为 4500 元.



【能力训练】

一、选择题

1. 同时满足不等式 $6x + 5 \geq 3x - 7$ 和 $\frac{x}{4} < 3 - \frac{x}{2}$ 的整数解共有几个().

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

2. 若不等式 $\frac{x+5}{2} - 1 < \frac{ax+2}{2}$ 的解集为 $x > \frac{1}{2}$, 则 a 的值为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 不等式 $\left| \frac{1}{x-1} \right| < 3$ 的解集为().

- (A) $x < \frac{2}{3}$ (B) $x > \frac{4}{3}$
(C) $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ (D) $x < \frac{2}{3}$ 或 $x > \frac{4}{3}$

4. 解关于 x 的不等式: $ax - a^2 < 2(x - 2)$. 得().

- (A) $x < a + 2$ (B) x 无解 (C) $x > a + 2$ (D) 以上答案都错

二、填空题

5. 关于 x 的不等式 $a(x - a) > x - 1$ 的解集为_____.

6. 不等式 $|x + 7| - |x - 2| < 3$ 的解集为_____.



7. 如果关于 x 的不等式 $(2a - b)x + a - 5b > 0$ 的解集为 $x < \frac{10}{7}$, 那么关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解集为_____.

8. 若 p, q 和 m 都是正数, 且 $q < 100$, 那么把 m 增加 $p\%$, 然后再把所得的结果减少 $q\%$, 这样所得的数仍要大于 m , 则 p, q 应满足的关系式为_____.

三、解答题

9. 已知关于 x 的不等式 $\frac{4x + a}{3} > 1$ 的解都是不等式 $\frac{2x + 1}{3} > 0$ 的解, 求 a 的取值范围.

10. 解关于 x 的不等式 $\frac{ax - 2}{2} > x + b (a \neq 2)$.

11. 一批学生合影留念, 一份印两张收费 2.85 元, 加印一张收费 0.48 元, 预定平均每人出钱不超过 1 元, 并都得到一张照片, 问参加合影的至少有几位同学?

12. 某次数学测验, 共有 16 道选择题, 评分办法是: 每题答对得 6 分, 答错倒扣 2 分, 不答得零分. 某同学有一题未答, 问该同学至少答对几题才能使得分在 60 分以上?



十八、四边形及特殊四边形



【赛点目标】

1. 熟练掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形的性质和判定依据,并能不断优化推理论证.
2. 学会把梯形或其他多边形的问题转化为三角形或平行四边形的问题求解,优化几何基本图形的组合.
3. 理解中心对称的概念及性质,并能在解题判断中有所应用.



【方法述要】

1. 探讨把四边形或多边形转化为三角形或平行四边形的有关问题.
2. 使学生逐步树立起对称的观念,构建几何变换的思想.
3. 平行四边形、矩形及菱形的定义、性质及判定

	平行四边形	矩 形	菱 形
定 义	两组对边分别平行的四边形叫平行四边形	有一个角为直角的平行四边形叫矩形	两邻边相等的平行四边形叫做菱形
性 质	两组对边分别平行	两组对边分别平行	两组对边分别平行
	两组对边分别相等	两组对边分别相等	四边相等
	两组对角分别相等	四角都为直角	两组对角分别相等
	对角线互相平分	对角线互相平分	对角线互相平分
		两对角线相等	两对角线互相垂直
判 定	两组对边分别平行	有一个角为直角的平行四边形	邻边相等的平行四边形
	两组对边分别相等		
	一组对边平行且相等		四边都相等
	两组对角分别相等	三个角都是直角	
	对角线互相平分	对角线互相平分且相等	对角线互相平分且垂直

4. 正方形的性质及判定

(1) 正方形的性质

- ① 四边都相等;
- ② 四角都相等且为直角;
- ③ 对角线互相垂直平分且相等;



④正方形既是轴对称图形又是中点对称图形.

(2)正方形的判定

①有一个角为直角且相邻两边相等的平行四边形;

②有一个角为直角的菱形;

③相邻两边相等的矩形;

④对角线互相垂直平分且相等的四边形.



【赛题精讲】

例1 已知:如图18-1, $\square ABCD$ 中, $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, M 、 N 分别是 AD 、 BC 的中点.

求证:四边形 $MENF$ 是平行四边形.

分析 此题由直角三角形斜边中线定理,不难发现 $EM = \frac{1}{2}AD$, $FN = \frac{1}{2}BC$,由 $\square ABCD$ 不难得到 $EM = FN$,这时欲证 $MENF$ 是平行四边形,只须证 $ME \parallel NF$,或 $MF = EN$.

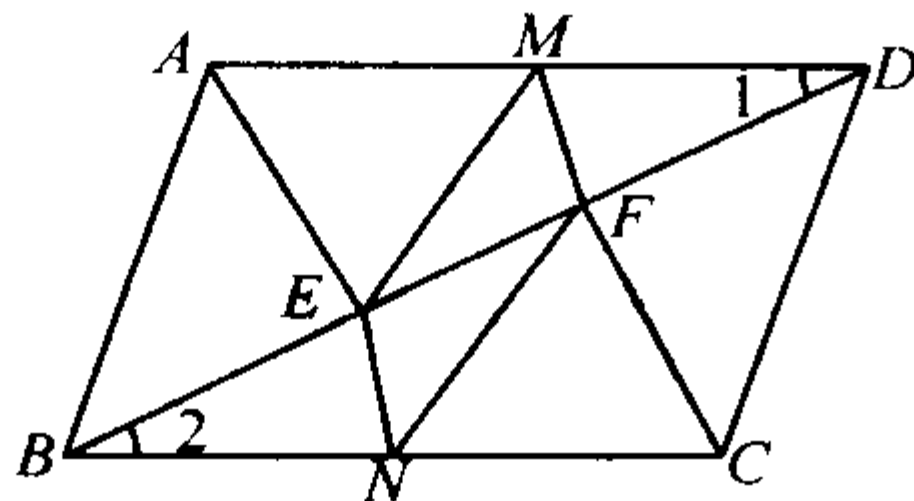


图 18-1

证明 $\because AE \perp BD$, M 是 AD 的中点,

$\therefore ME = MD = \frac{1}{2}AD$, $\therefore \angle 1 = \angle MED$,

同理可得 $FN = BN = \frac{1}{2}BC$, $\angle 2 = \angle BFN$.

$\because \square ABCD$, $\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore ME = FN$, $\angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle MED = \angle BFN$, $\therefore ME \parallel FN$,

\therefore 四边形 $MENF$ 是平行四边形.

说明 平行四边形的判定方法有五种,每种都有两组条件,证题时一定要先分析待证的四边形中,已具备哪组条件,然后以其为基础证出与其搭配的其他一组条件.有两种途径可以选择时,一定要分析一下,选哪一个更好,如此题:若选证明 $MF = EN$ 则不好.

例2 如图18-2所示, E 为正方形 $ABCD$ 内一点,分别以 AE , BE 为边向 $\triangle ABE$ 外作正方形 $AEMN$ 和 $BEFG$,求证: $AG \parallel NC$.

证明 连结 CG , DN , 则

$\because ABCD$ 为正方形, $\therefore AB = BC = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$.

同理可得 $BE = BG$, $\angle EBG = 90^\circ$.

$\therefore \angle EBA = \angle CBG$.



$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBG.$$

$$\therefore AE = CG, \angle BAE = \angle BCG.$$

$$\therefore AE = AN, \therefore AN = CG.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAN = \angle BAE. \therefore \angle DAN = \angle BCG.$$

$$\therefore AD = BC, \therefore \triangle ADN \cong \triangle CBG.$$

$$\therefore DN = BG, \angle ADN = \angle CBG.$$

$$\therefore \angle ABG = \angle CDN. \therefore \triangle ABG \cong \triangle CDN.$$

$$\therefore AG = NC. \therefore \text{四边形 } AGCN \text{ 为平行四边形.} \therefore AG \parallel NC.$$

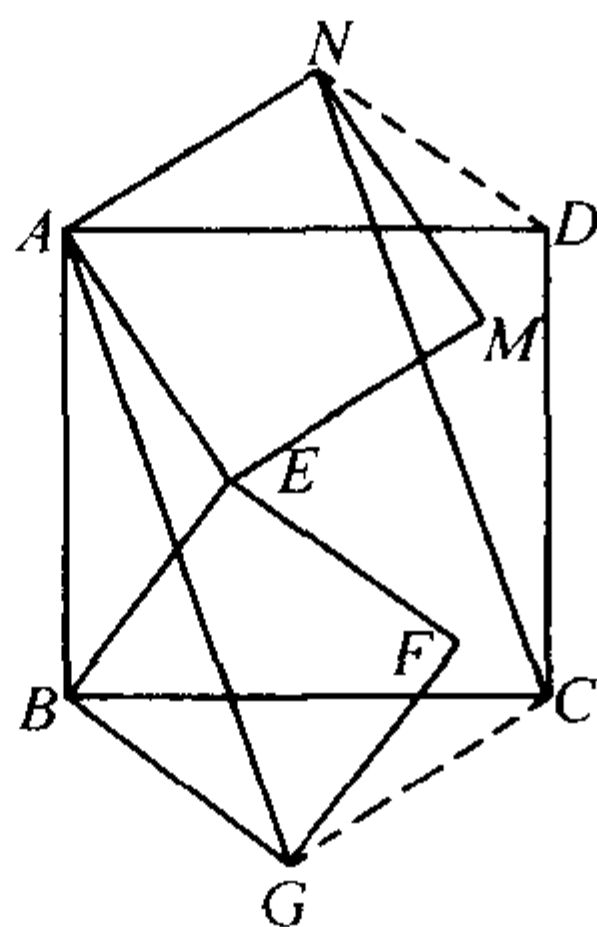


图 18-2

例 3 如图18-3所示,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, M, N 分别是 AD, BC 的中点, 且 $\angle ABC + \angle BCD = 90^\circ$, 求证: $MN = \frac{1}{2}(BC - AD)$.

证明 过点 M 分别作 AB, CD 的平行线交 BC 于点 E, F ,

$$\therefore AM \parallel BE, AB \parallel EM,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABEM \text{ 为平行四边形.}$$

$$\therefore AM = BE, \angle ABE = \angle MEC.$$

$$\text{同理可得 } MD = CF, \angle BCD = \angle BFM.$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 90^\circ, \therefore \angle MEF + \angle MFE = 90^\circ, \therefore \angle EMF = 90^\circ.$$

$$\text{又} \therefore BN = CN, \therefore EN = FN. \therefore MN = \frac{1}{2}(BC - AD).$$

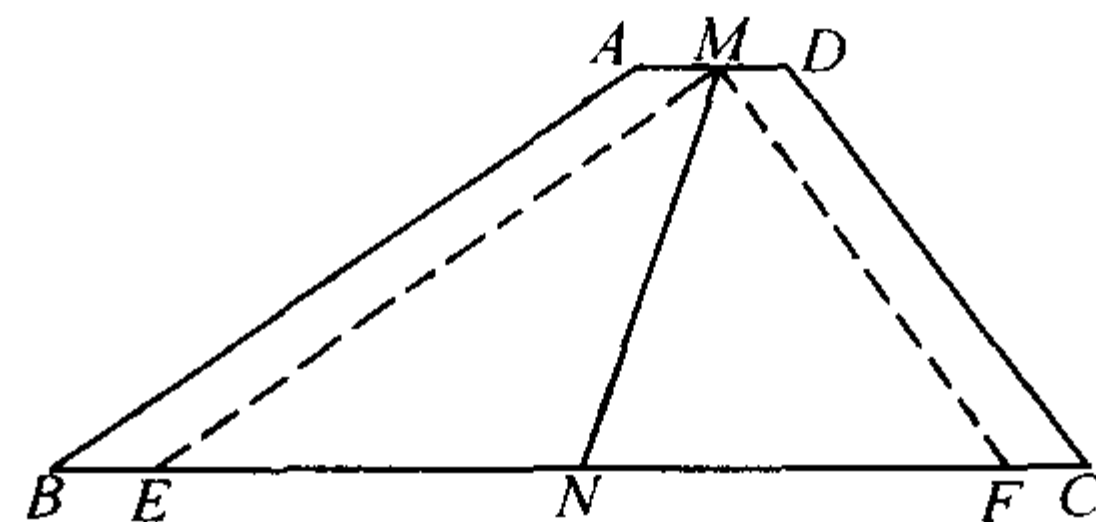


图 18-3

例 4 如图18-4所示,已知 P 为正方形 $ABCD$ 内任一点,求 $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ 的最小值.

解 设点 P 到 AB 的距离为 x , 点 P 到 AD 的距离为 y , 正方形的边长为 a , 则

$$PA^2 = x^2 + y^2, PB^2 = x^2 + (a - y)^2.$$

$$PC^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2, PD^2 = (a - x)^2 + y^2.$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

$$= x^2 + y^2 + x^2 + (a - y)^2 + (a - x)^2 + (a - y)^2 + (a - x)^2 + y^2$$

$$= 2[x^2 + (a - x)^2] + 2[y^2 + (a - y)^2]$$

$$\geq [x + (a - x)]^2 + [y + (a - y)]^2 = 2a^2.$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 \text{ 的最小值为 } 2a^2.$$

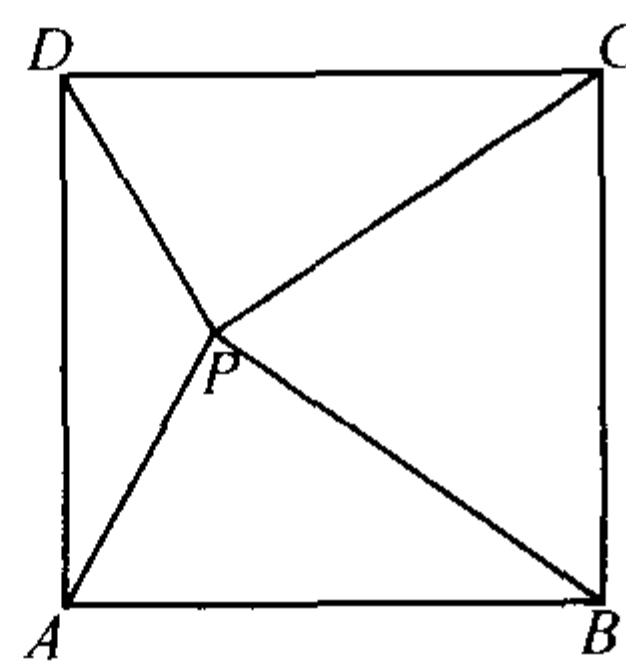


图 18-4

例 5 已知四边形 $ABCD$ 中, $BC > BA$, $AD = DC$, BD 平分 $\angle ABC$, 求证: $\angle B + \angle D = 180^\circ$.



分析 直接证明 $\angle B + \angle D = 180^\circ$ 是难以奏效的, 由于 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, 所以可改证 $\angle A + \angle C = 180^\circ$, 而 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 故我们可以利用角平分线的对称性来添设辅助线:

(1) 如图 18-5, 在 BC 上取点 E , 使 $BE = AB$. 由 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ (SAS) 可知 $\angle A = \angle BED$, $AD = DE$. 所以 $DE = DC$, 即 $\angle C = \angle DEC$. 所以有 $\angle A + \angle C = \angle BED + \angle DEC = 180^\circ$. 从而 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

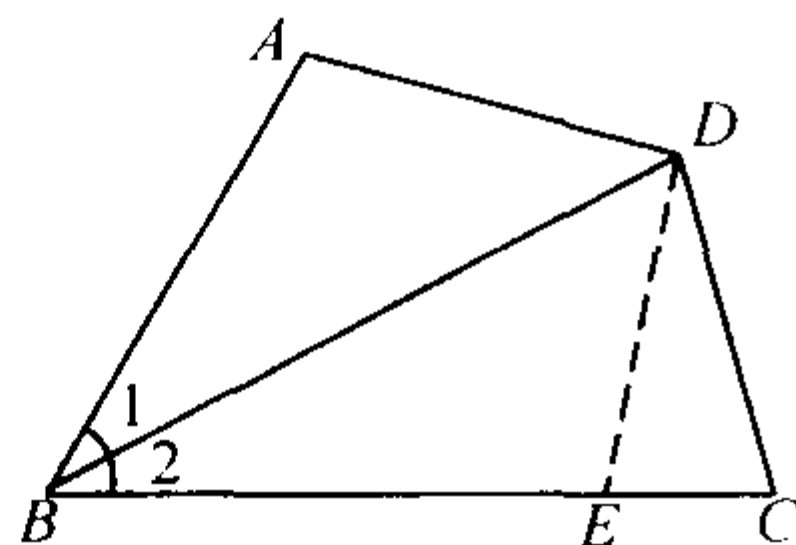


图 18-5

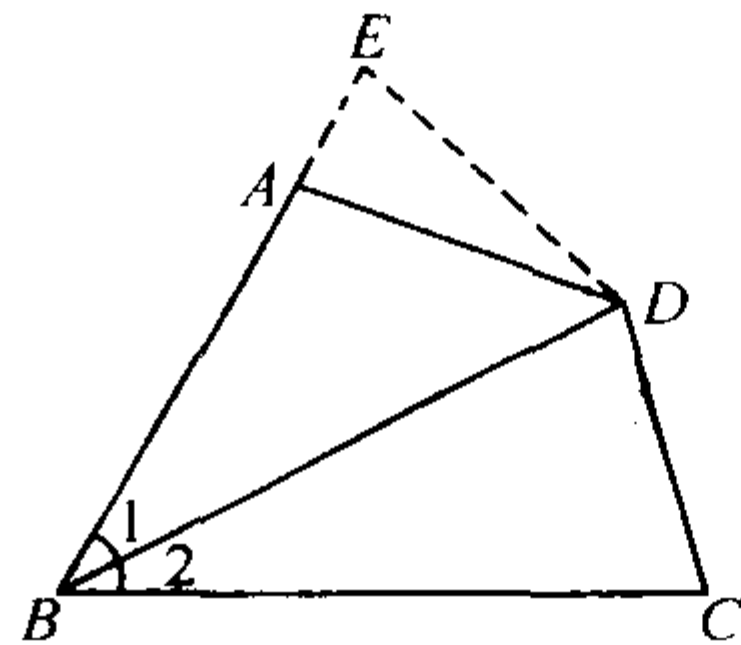


图 18-6

(2) 如图 18-6, 延长 BA 到 E , 使 $BE = BC$, 由 $\triangle BCD \cong \triangle BED$ (SAS) 可知, $\angle E = \angle C$, $DE = DC$, 所以 $AD = DE$, 即 $\angle E = \angle EAD$. 所以 $\angle A + \angle C = \angle BAD + \angle EAD = 180^\circ$, 从而 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

(3) 如图 18-7, 过 D 点作 BA, BC 的垂线, E, F 分别为垂足, 则由角平分线的性质易知 $DE = DF$, 由 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle CDF$ (HL), 可知 $\angle EAD = \angle C$, $\therefore \angle A + \angle C = \angle BAD + \angle EAD = 180^\circ$, 从而 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

(4) 如图 18-8, 过 A 作 BD 的垂线 AE , 延长交 BC 于 F , 连 DF , 易证 $\triangle ABF$ 为等腰三角形, 且 BD 为其对称轴. $\therefore AD = DF$, $\angle BAD = \angle BFD$, $\therefore DF = DC$, $\therefore \angle DFC = \angle C$, $\therefore \angle A + \angle C = \angle BFD + \angle DFC = 180^\circ$, 从而 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

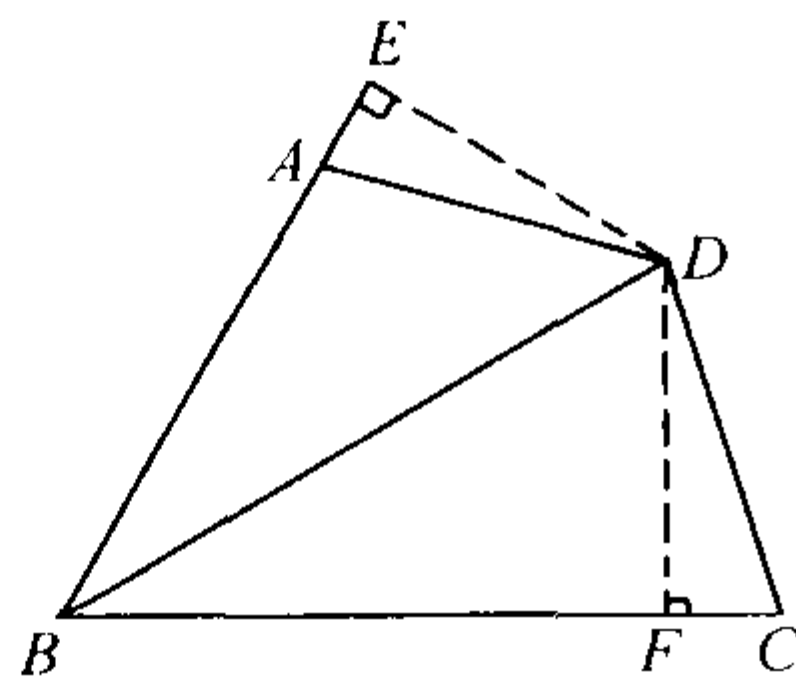


图 18-7

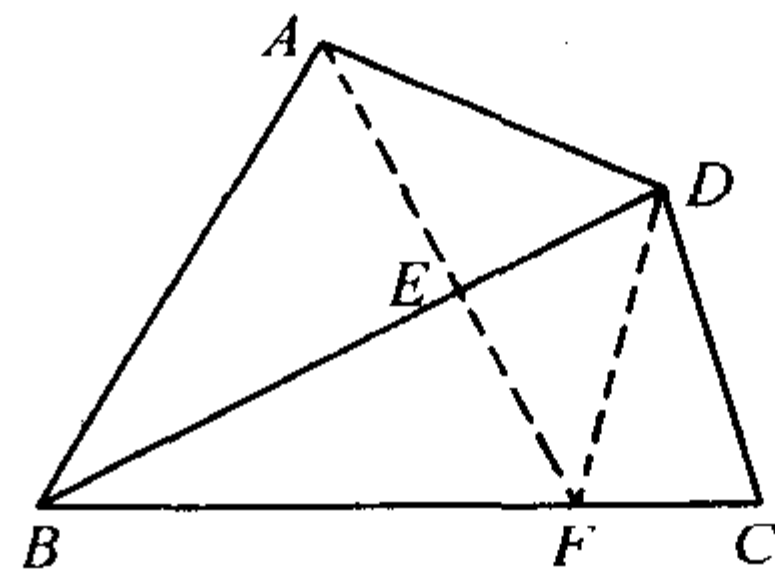


图 18-8

说明 本例体现一种转化的思想——把四边形转化为三角形问题.

例 6 如图 18-9, 在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 的边 AB, AD 上分别取点 P, S , 连 PS , 将 $\text{Rt}\triangle SAP$ 绕正方形中心 O 旋转 180° 得 $\text{Rt}\triangle QCR$, 得四边形 $PQRS$. 试判断四边形 $PQRS$ 能否变化成矩形? 若能, 设 $PA = x$, $SA = y$, 请说明 x, y 具有什么关系时,



四边形 $PQRS$ 是矩形;若不能,请说明理由.

解 显然 $\text{Rt}\triangle SAP$ 与 $\text{Rt}\triangle QCR$ 关于 O 对称.

$\therefore OP = OR, OQ = OS, \therefore$ 四边形 $PQRS$ 为平行四边形.

当 $\angle PSR = 90^\circ$ 时, $\square PQRS$ 为矩形, 此时 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

又 $\angle 3 + \angle 1 = 90^\circ, \therefore \angle 3 = \angle 2$, 即 $\text{Rt}\triangle PAS \sim \text{Rt}\triangle SDR$.

$\therefore \frac{PA}{SD} = \frac{AS}{RD}, \therefore \frac{x}{a-y} = \frac{y}{a-x}$. 即 $(x-y)(x+y-a) = 0$.

\therefore 当 $x = y$ 或 $x + y = a$ 时, 四边形 $PQRS$ 为矩形.

例 7 如图 18-10, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AC \perp BD, AD = 3, BD = 5, \angle ACB = 30^\circ$, 求 BC 和 AC 的长.

解 由于 $AC \perp BD$ 这一条件无法直接利用, 因此我们利用平移 BD 至 AE 的位置, 构造 $\text{Rt}\triangle AEC$ 来解决问题:

过 A 作 $AE \parallel BD$, 交 CB 的延长线于 E , 则四边形 $AEBD$ 为平行四边形.

$\therefore EB = AD = 3, AE = BD = 5. \therefore EC = 2AE = 10, \therefore AC = 5\sqrt{3}, BC = 7$.

说明 1. 对于梯形或平行线间, 若存在两互相垂直或相等的直线段, 我们一般都采用平移其中一线段的办法来构造 $\text{Rt}\triangle$ 或等腰三角形, 请思考下面两题:

(1) 如图 18-11, $AC \parallel BD$, 且 $AB = DC$, 设 AB 和 CD 的交点为 O , 求证: $AO = OC, OB = OD$.

(2) 求证: 在对角线互相垂直的等腰梯形中, 中位线等于高线.

2. 关于梯形的常见辅助线添法有以下几种:

(1) 作出梯形的高线(往往两条一起作);

(2) 平移一腰;

(3) 平移一条对角线;

(4) 构造对角线中点、并与上下底的中点组成的一个三角形(图 18-12).

例 8 如图 18-13, A, B, C, D 四点共线, 且 B, C 是 AD 上的三等分点, 过 B, C 分别作 $EB \parallel FC$, 且使 $EB = 2AB, FC = 2CD$, 连结 EF , 连 AF 交 BE 于 M , 连 DE 交 FC 于 N , AF, DE 交于 P 点, 求证: $AF \perp ED$ 于 P .

证明 (方法一) 利用两锐角互余的方法, 即证 $\angle A + \angle D = 90^\circ$.

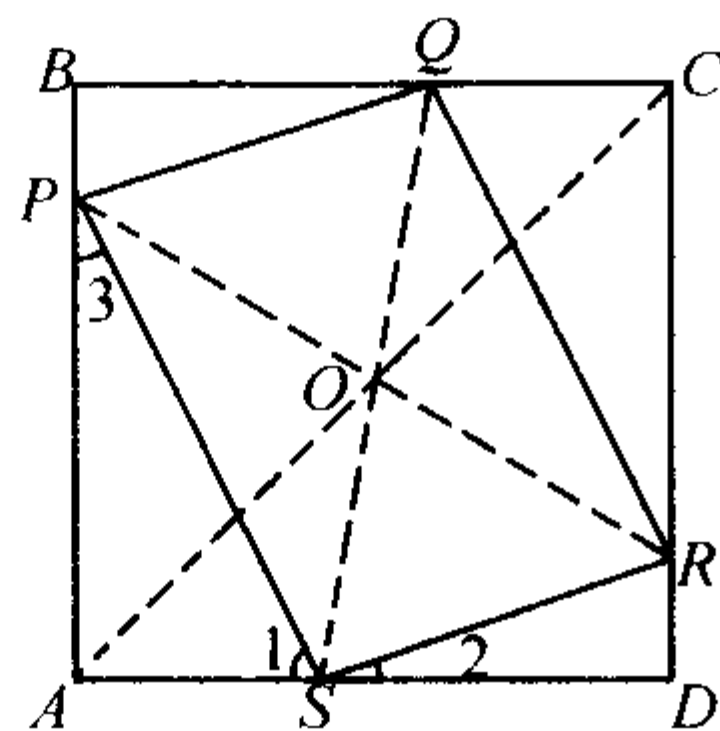


图 18-9

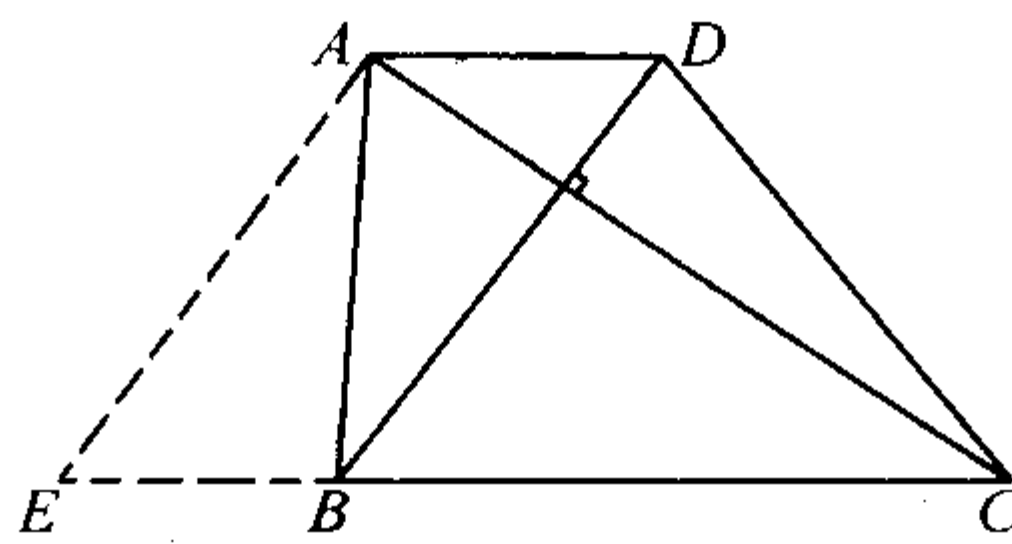


图 18-10

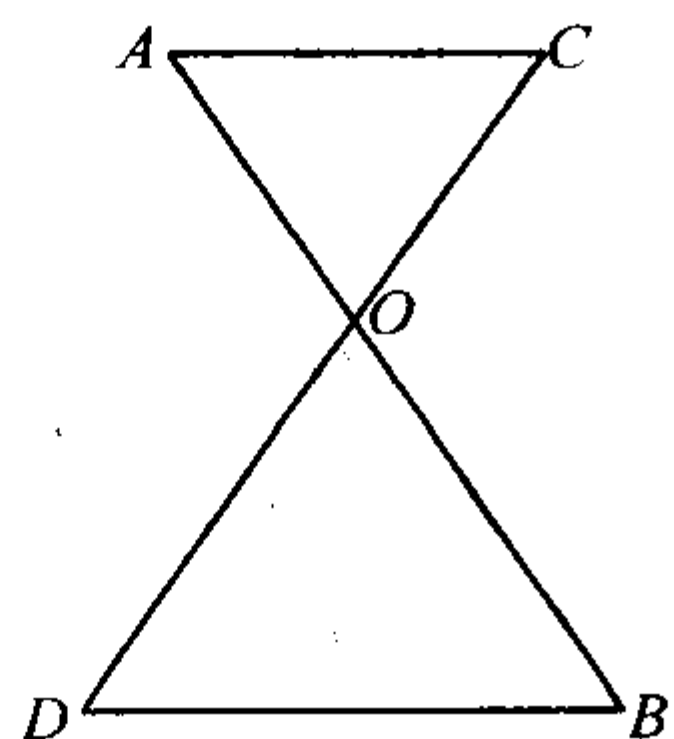


图 18-11

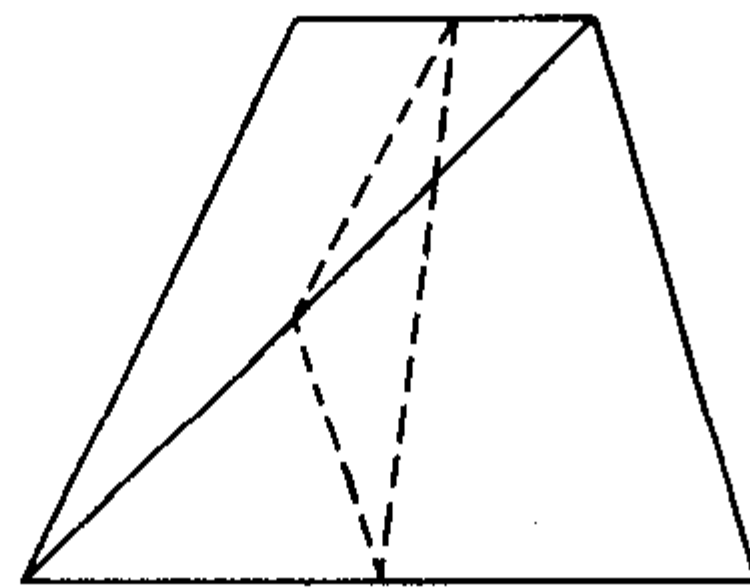


图 18-12



$$\because AC = FC, \therefore \angle A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACF).$$

$$\text{又} \because BE = BD, \therefore \angle D = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EBD).$$

$$\therefore \angle A + \angle D = \frac{1}{2}[360^\circ - (\angle ACF + \angle EBD)] = 90^\circ.$$

(方法二) 利用等腰三角形“三线合一”的性质, 不难发现四边形 $BCFE$ 是平行四边形, $\therefore \angle A = \angle EFA$. 又 $\because AC = CF$, $\therefore \angle A = \angle CFA$, 故 AF 是 $\angle EFN$ 的平分线, 而 $\triangle EFN$ 是等腰三角形是显而易见的. 故由“三线合一”性质知命题是真的.

(方法三) 利用定理“若一边上的中线等于这条边的一半则这个三角形是直角三角形”. 过 F 作 $FG \parallel ED$, 交 AD 的延长线于 G , 易知 $AB = BC = EF = CD = DG$, $AC = FC = CG$. 这说明 FC 是 $\triangle AFG$ 中 AG 边的中线, 且有 $FC = \frac{1}{2} AG$, $\therefore \angle AFG = \text{Rt} \angle$, 故 $\angle APD = \text{Rt} \angle$ (图 18-14).

(方法四) 利用菱形的对角线互相垂直. 如图 18-15, 连 MN , 容易证明四边形 $EFNM$ 是平行四边形, 且 $EF = FN = NM = ME$, 故 $\square EFNM$ 是菱形, 问题解决.

例 9 如图 18-16 所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, M 是 AC 的中点, $MN \perp BD$, 并与 MD 的平行线相交于点 N .

(1) 求证: 四边形 $BNDM$ 是菱形;

(2) 若 $\angle DAC = 30^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, 求菱形 $BNDM$ 的两个内角.

(1) 证明 $\because \angle ADC = 90^\circ$,

又 $\because M$ 为 AC 的中点, $\therefore DM = \frac{1}{2} AC$.

同理可得 $BM = \frac{1}{2} AC$.

$\therefore DM = BM, \therefore \angle BDM = \angle DBM$.

$\because MN \perp BD, \therefore MN$ 为 BD 的垂直平分线.

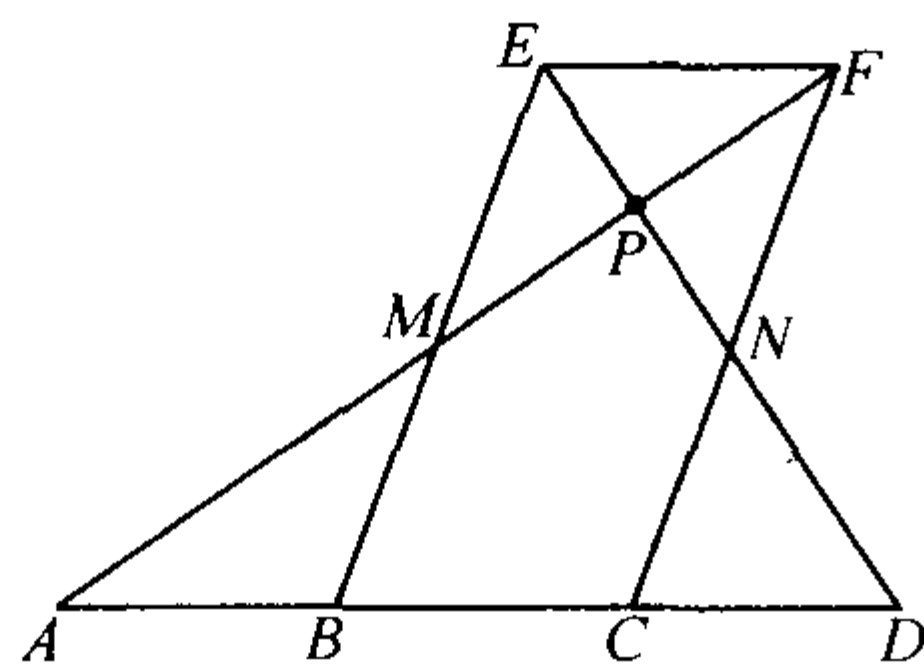


图 18-13

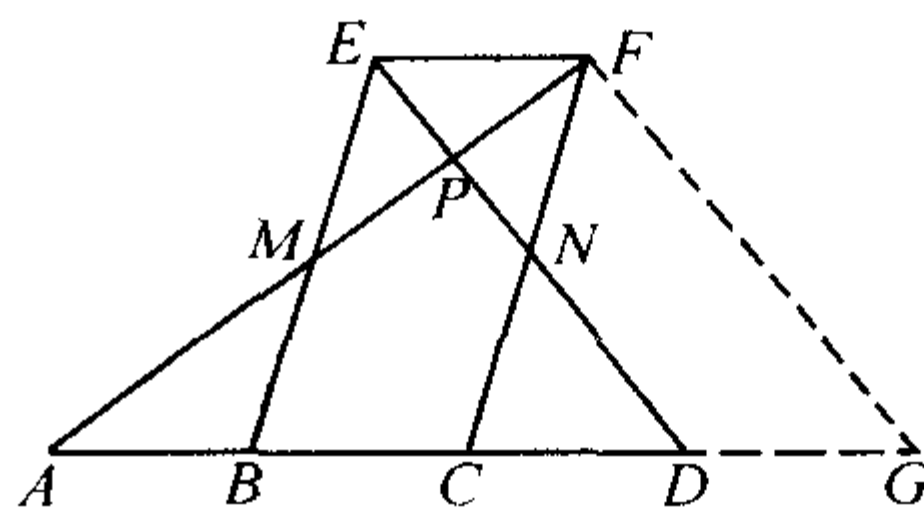


图 18-14

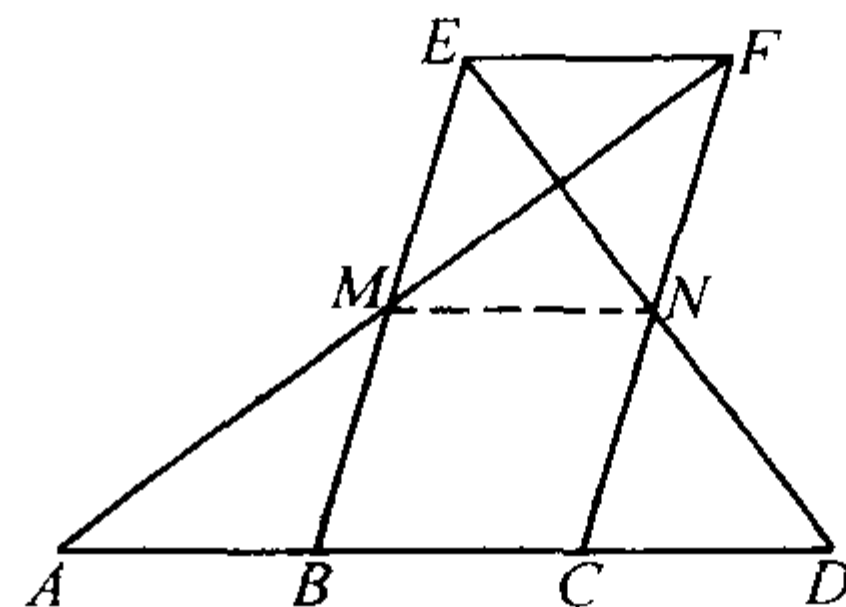


图 18-15

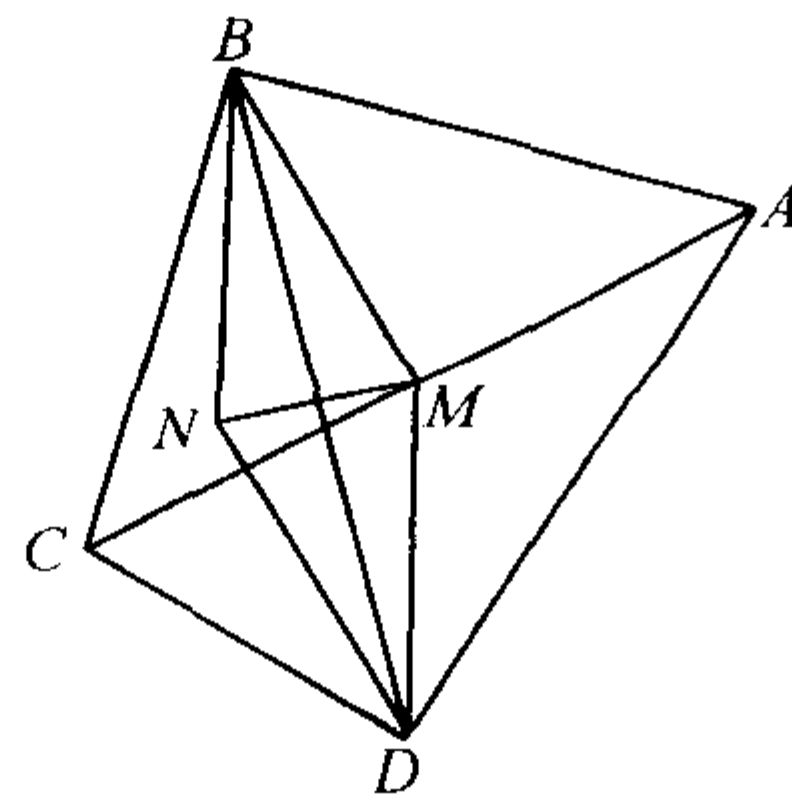


图 18-16



$\because BN \parallel DM, \therefore \angle NBD = \angle MDB.$

$\therefore \angle NBD = \angle MBD.$

$\because MN \perp BD, \therefore BD$ 为 MN 的垂直平分线.

\therefore 四边形 $BMDN$ 为菱形.

(2) 解 $\because \angle BAC = 30^\circ, \therefore \angle ACB = 60^\circ.$

又 $\because BM = CM = AM, \therefore \triangle BCM$ 为等边三角形.

$\therefore \angle BMC = 60^\circ.$

$\because \angle DCA = 45^\circ, DM = CM = AM, \therefore DM \perp AC. \therefore \angle CMD = 90^\circ.$

$\therefore \angle BMD = 150^\circ. \therefore \angle MBN = 30^\circ.$

例 10 已知: 如图 18-17, 矩形 $ABCD$ 中, $DE \perp AC$ 于 $E, CD = 2, AD = 2\sqrt{3}.$

求: BE 的长.

分析 此题欲求 BE 的长, 由条件想到先计算图中能计算的线段, 不难从中发现 $AC = 4$, 进而发现 $AC = 2DC$, 注意矩形对角线性质, 连结 BD 交 AC 于 O , 则 $\triangle ODC$ 是等边三角形, $OE = EC = 1$, 问题是利用什么方法去求, 由垂直条件, 想到能否利用勾股定理, 为此作 $BF \perp AC$, 则不难发现 $BF = \sqrt{3}, EF = 2$, 进一步求出 $BE = \sqrt{7}.$

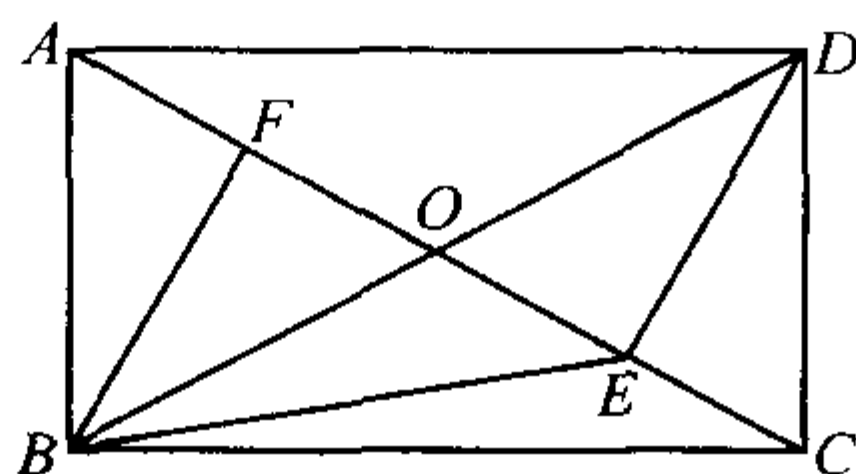


图 18-17

解 连结 BD 交 AC 于 O , 作 $BF \perp AC$ 于 F .

\because 矩形 $ABCD$,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ, AB = DC = 2, AC = BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD.$

$\therefore OA = OC = OD = OB.$

$\because AC^2 = AD^2 + DC^2, AD = 2\sqrt{3}, \therefore AC^2 = 12 + 4 = 16, \therefore AC = \sqrt{16} = 4.$

$\therefore OA = OC = OB = OD = 2, \therefore OD = DC.$

$\because DE \perp OC, \therefore OE = \frac{1}{2}OC = 1.$

同理 $OF = \frac{1}{2}OA = 1, \therefore EF = OE + OF = 2.$

$\because BF^2 = OB^2 - OF^2 = 4 - 1 = 3, \therefore BF = \sqrt{3}.$

$\because BE^2 = EF^2 + BF^2 = 3 + 4 = 7, \therefore BE = \sqrt{7}.$

答: BE 的长是 $\sqrt{7}.$

说明 矩形的性质较多, 应牢记这些性质, 以便在分析题目时应用, 特别是矩形特有的性质的应用, 例如图中所示, $AC = BD$, 进一步推出 $OA = OC = OB = OD$, 是有矩形条件时常用性质.

例 11 已知: 如图 18-18, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC, AC, BD$ 交于 $O, AD = BC$, 若



$\angle DOC = 120^\circ$, $BD = 10$.

求: 梯形 $ABCD$ 的面积.

分析 此题欲求梯形面积, 想到利用梯形面积公式, 因此需求出梯形的高和两底的长, 或两底长度之和. 为此作 $BE \perp DC$ 于 E , 则 BE 为梯形的高. 注意 $\angle DOC = 120^\circ$, AD

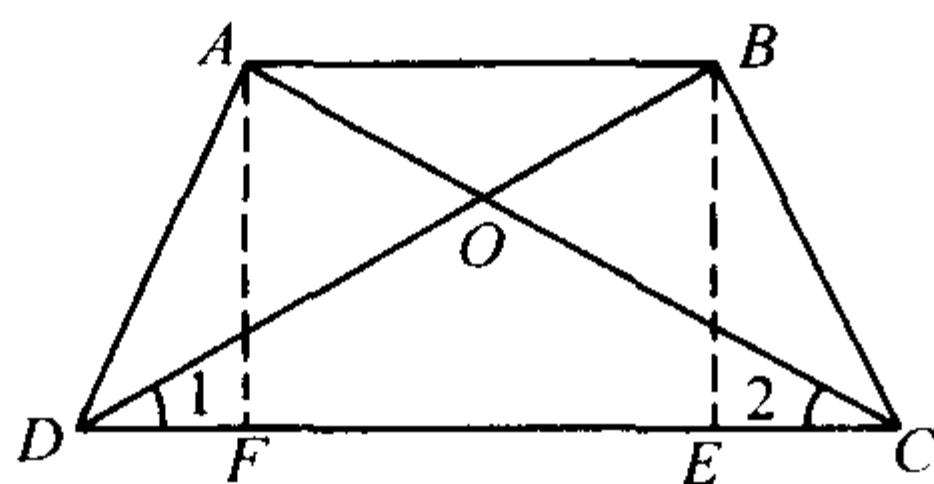


图 18-18

$= BC$, 不难发现 $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$. 从中可得 $BE = \frac{1}{2} BD = 5$,

$DE = 5\sqrt{3}$. 问题关键是如何求出两底的长. 为此想到作常用辅助线: 作 $AF \perp DC$ 于 F . 不难发现 $CF = 5\sqrt{3}$, 而 $DE + CF = DC + EF = DC + AB = 10\sqrt{3}$, 这样就求出了 AB 和 DC 的长度之和.

解 作 $BE \perp DC$ 于 E , $AF \perp DC$ 于 F . 则 $AF \parallel BE$.

$\because AB \parallel DC, \therefore AF = BE, EF = AB$.

$\because AD = BC, \therefore AC = BD = 10$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$\because AD = BC, AC = BD, DC = CO, \therefore \triangle ADC \cong \triangle BCD, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle DOC = 180^\circ, \angle DOC = 120^\circ$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$.

$\because BE \perp DC, \therefore BE = \frac{1}{2} BD = 5$.

$\because DE^2 = BD^2 - BE^2 = 100 - 25 = 75, \therefore DE = 5\sqrt{3}$. 同理 $CF = 5\sqrt{3}$.

$\therefore CF + DE = DC + EF = DC + AB = 10\sqrt{3}$.

\therefore 梯形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2}(DC + AB) \cdot BE = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 5 = 25\sqrt{3}$.

答: 梯形的面积是 $25\sqrt{3}$.

说明 此题计算 $AB + DC$ 的值的方法, 是数学中常用解题技巧, 即当题目只须求出两量之和便足以解决问题时, 解题时不一定非要分别求出两个量的值, 经常是一次求出两量之和的值.

此题还可作出下面辅助线去解: 过 B 作 $BM \parallel AC$ 交 DC 延长线于 M , 作 $BE \perp DC$ 于 E , 此法留给读者自己完成.

例 12 如图 18-19 所示, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB$, 对角线 AC, BD 交于点 O , $\angle ACD = 60^\circ$, 点 S, P, Q 分别是 OD, OA, BC 的中点.

(1) 求证: $\triangle PQS$ 为等边三角形;

(2) 若 $AB = 5, CD = 3$, 求 $\triangle PQS$ 的面积.

(1) **证明** 连结 CS , 则在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD = BC, \angle ADC = \angle BCD$.

$\because CD = CD, \therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$.



$\therefore \angle ACD = \angle BDC = 60^\circ$, $\triangle OCD$ 为正三角形.

$\therefore AC \perp CF$.

$\because S$ 为 OD 的中点, $\therefore CS \perp BD$.

$\because Q$ 为 BC 的中点, $\therefore SQ = \frac{1}{2}BC$.

同理可证 $PQ = \frac{1}{2}BC$.

$\because P$ 为 OA 的中点, $\therefore SP = \frac{1}{2}AD$.

$\therefore SP = PQ = QS \therefore \triangle SPQ$ 为正三角形.

(2)解 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E , 则

$\because \triangle OCD$ 为正三角形, $\therefore CO = CD = 3$.

同理可证 $\triangle OAB$ 为正三角形.

$\therefore AO = AB = 5 \therefore AE = 4, CE = 4\sqrt{3} \therefore BE = 4, BC = 7 \therefore SP = 3.5$.

$\therefore \triangle SPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times SP^2 = \frac{49\sqrt{3}}{16}$.



【能力训练】

1. 如图 18-20, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AD 边的中点, BD 与 CE 相交于点 F , 求证: $AF \perp BE$.

2. 如图 18-21, E 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 上的一点, F 为对角线 BD 上的一点, 且 $AE = \sqrt{2}DF$, 求证: $\triangle CEF$ 为等腰直角三角形.

3. 如图 18-22, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp BC$, M 为 BC 边上一点, 且 $MA = MD$, 又 $\angle AMB = 75^\circ, \angle DMC = 45^\circ$, 求证: $AB = BC$.

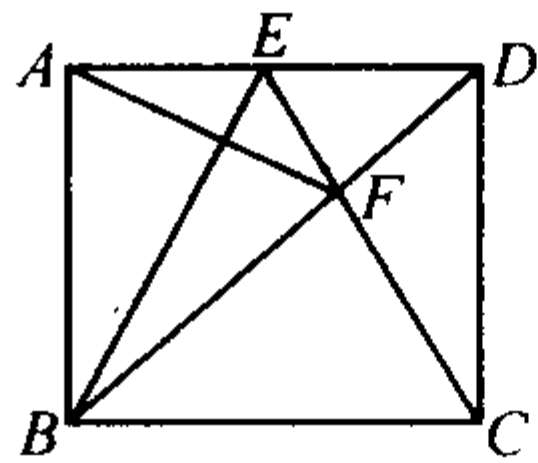


图 18-20

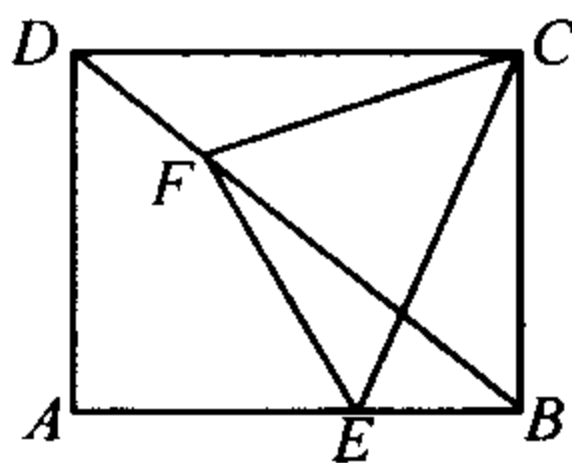


图 18-21

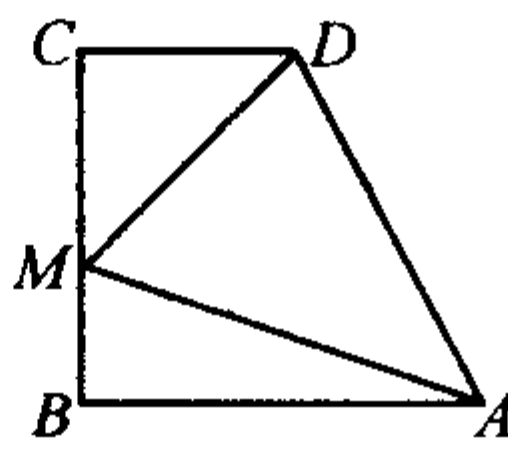


图 18-22

4. 如图 18-23, 在梯形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB, AD = AB + CD$, M 为 BC 的中点, 求证: AM, DM 分别平分 $\angle BAD$ 与 $\angle ADC$, 且 $AM \perp DM$.

5. 如图 18-24, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC, AF \perp CD, EM \perp AF, FM \perp AE$, 若 $EF = a, AC = b$, 求 AM 的长.

6. 如图 18-25, 在正方形 $ABCD$ 中, AK 和 AN 是 $\angle BAD$ 内的任意两条射线, $BK \perp AK, BL \perp AN, DM \perp AK, DN \perp AN$, 求证: $KL = MN$.

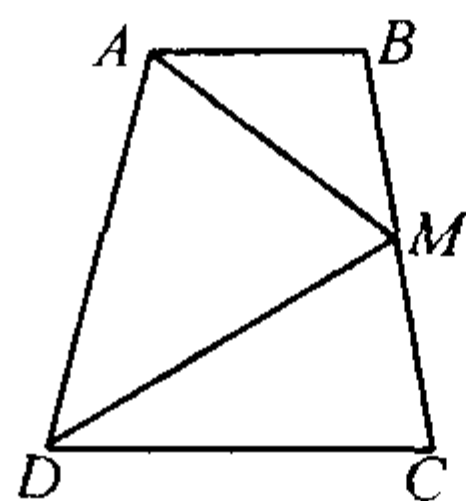


图 18-23

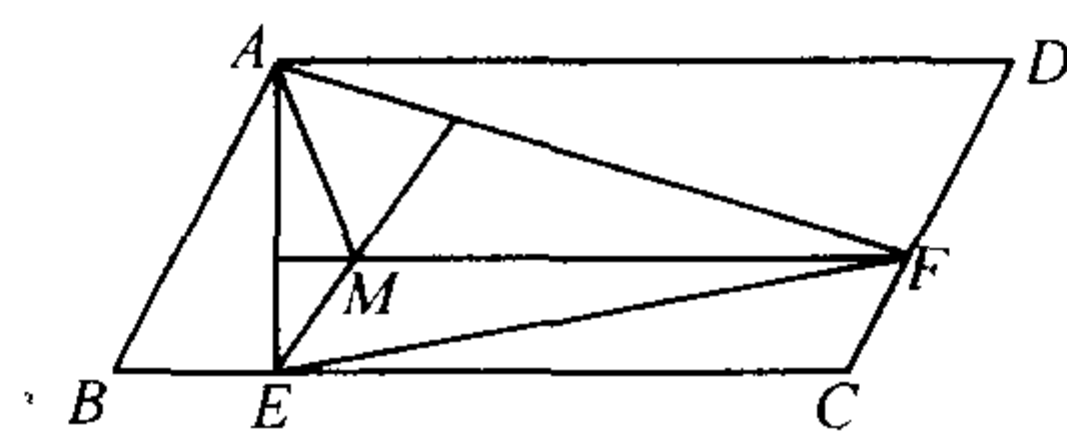


图 18-24

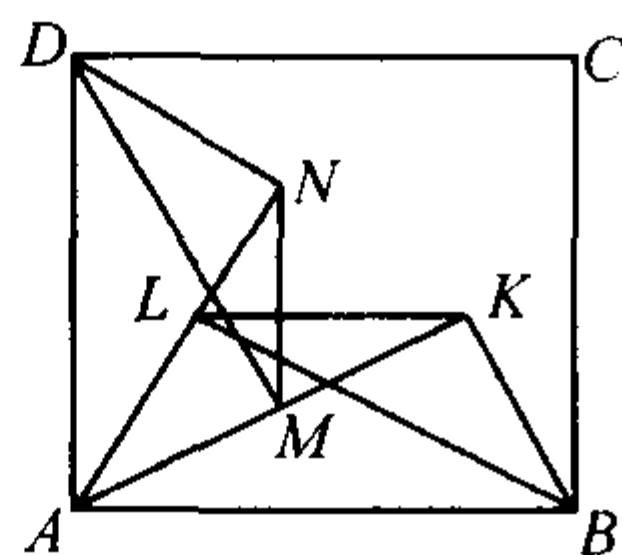


图 18-25

7. 如图 18-26, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\triangle EAD$ 为等边三角形, F 为 ED 的中点, BE, AF 交于 M , 求证: $DM = \frac{1}{2}BD$.

8. 如图 18-27, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $BE \perp AD, BF \perp CD, BC \perp DG, \triangle BEF$ 的垂心为 H , 求证: $BH = GF$.

9. 如图 18-28, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AC \perp BD, E$ 为 AB 边上一点, 且 $AE - BE = CD$, 求证: $CE = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

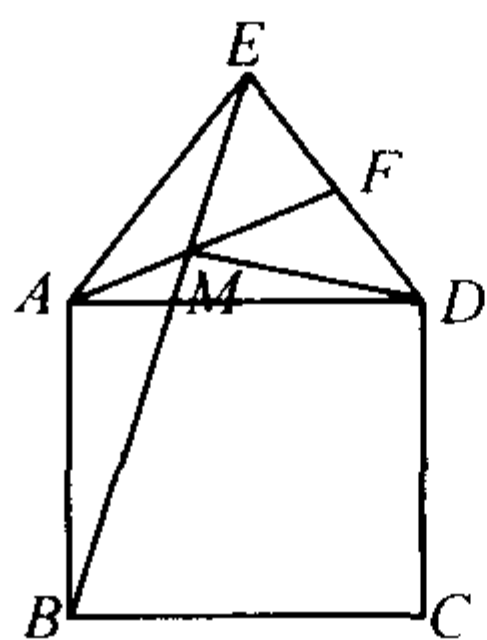


图 18-26

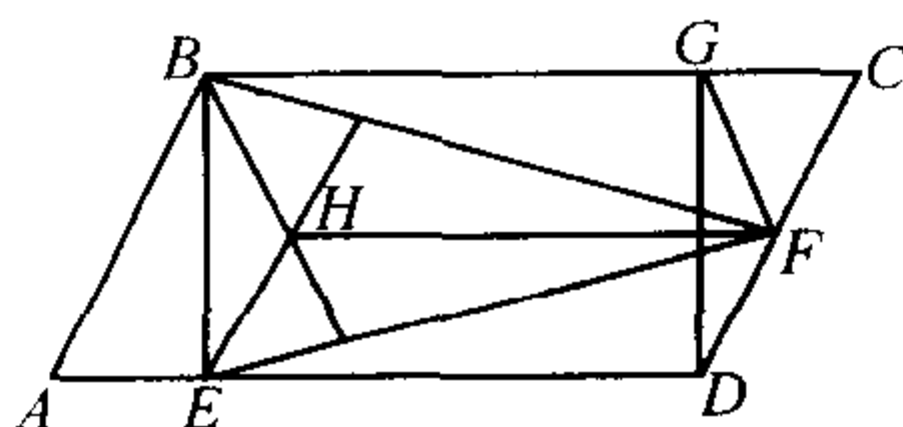


图 18-27

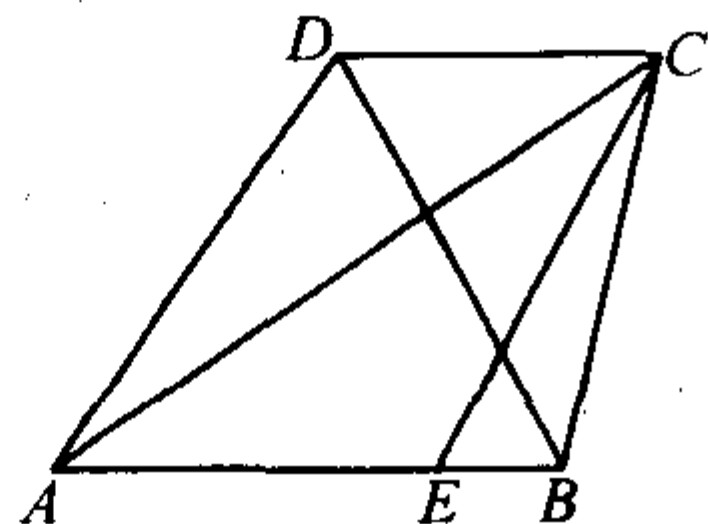


图 18-28

10. 如图 18-29, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 四边形 $ACEF$ 为菱形, 点 B, E, F 在同一直线上, 求证: AE, AF 三等分 $\angle CAB$.

11. 如图 18-30, 在五边形 $ABCDE$ 中, $AB = AE, BC + DE = CD, \angle BAE = \angle BCD = 120^\circ, \angle ABC + \angle AED = 180^\circ$, 连结 AD , 求证: AD 平分 $\angle CDE$.

12. 已知: 如图 18-31, 菱形 $ABCD$ 中, E 是 BC 上一点, AE, BD 交于 M , 若 $AB = AE, \angle EAD = 2\angle BAE$. 求证: $AM = BE$.

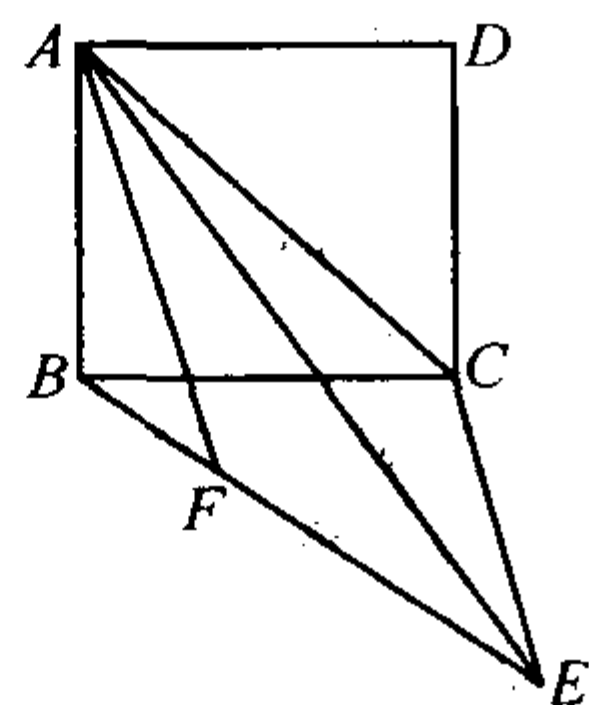


图 18-29

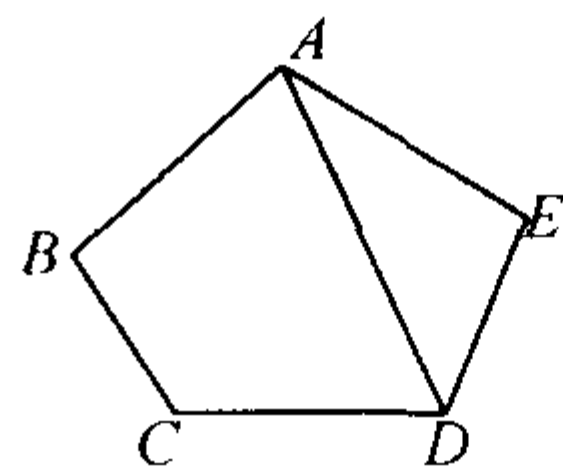


图 18-30

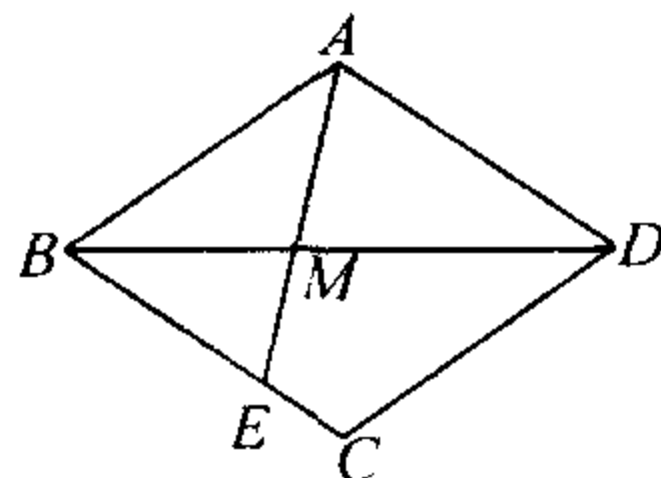


图 18-31



十九、三角形、梯形的中位线



【赛点目标】

1. 能熟练运用三角形、梯形的中位线解决与此有关的计算和证明问题.
2. 能运用合理的方法处理线段的一半和两倍之间的关系.



【方法述要】

1. 掌握三角形中位线定理, 并会用它进行简单的证明和计算.

三角形两边中点的连线, 叫做三角形中位线. 三角形中位线性质是: 三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.

2. 理解梯形中位线定理, 会用它进行简单的计算.

梯形中两腰中点的连线叫做梯形中位线. 梯形中位线的性质是: 梯形中位线平行于两底边, 且等于两底边和的一半.



【赛题精讲】

例 1 已知: 如图 19-1, $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是 AB 、 AC 上的点, 若 $AD = DB$, $AE = 2EC$, BE 与 CD 交于 F . 求证: $EF = \frac{1}{4}BE$.

分析 此题有线段 AB 中点条件, 因此可设法添三角形中位线, 取 AE 中点 M , 连结 DM , 则有

$$EF = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{4}BE.$$

证明 取线段 AB 的中点 M , 连结 DM .

$$\because AD = DB, AM = ME, \therefore DM \parallel \frac{1}{2}BE.$$

$$\because AE = 2EC, AE = 2ME, \therefore ME = EC.$$

$$\because DM \parallel EF, \therefore DF = FC.$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DM, \therefore EF = \frac{1}{4}BE.$$

说明 添三角形中位线这条辅助线时, 一般应是以有线段中点条件的线段为一边, 再考虑联系其他条件作出, 此题还可取线段 BE 的中点 N , 连结 DN , 这种方法留给读者自己去作.

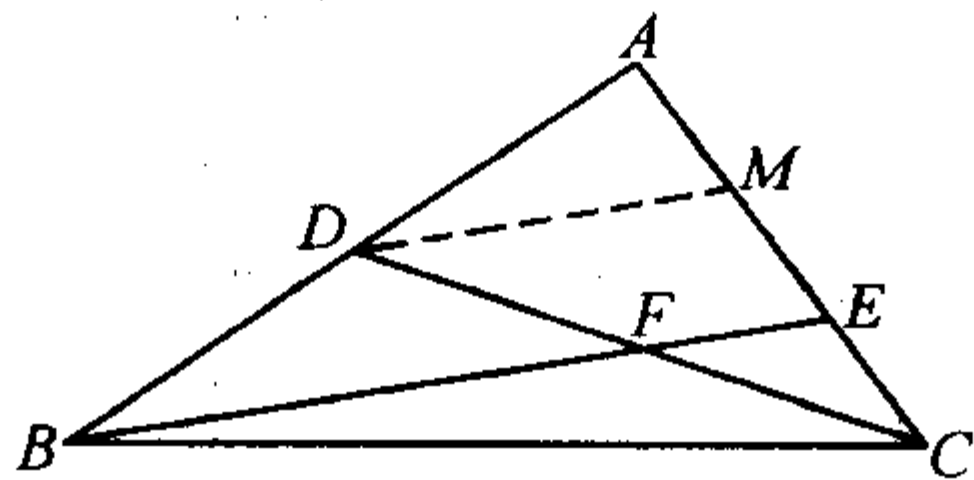


图 19-1



例2 已知:如图19-2, $\triangle ABC$ 中, E, F 分别是 AB, BC 的中点, M, N 是 AC 边上的三等分点, EM 与 FN 交于 D .

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

分析 此题有中点条件的线段较多, 故应推敲一下如何添三角形中位线, 考虑线段 AB , 连 BN , 要比连 EF 好, 同样连出 BM , 从中可得: $\square BMDN$, 进而证出此题.

证明 连结 BN, BM , 连结 BD 交 AC 于 O .

$\because AE = EB, AM = MN, \therefore EM \parallel BN$.

同理可得 $BM \parallel FN, \therefore$ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

$\therefore OB = OD, OM = ON, \therefore AM = NC, \therefore OA = OC$,

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

说明 当题目有较多的线段中点条件时, 经常适当作出多条三角形的中位线.

例3 如图19-3所示, 在 $\triangle ABC$ 中, BD, CE 为两条角平分线, M 是 DE 的中点, 过点 M 作 $MN \perp BC$ 于点 $N, DH \perp AB$ 于点 $H, EL \perp AC$ 于点 L , 求证: $EL + DH = 2MN$.

证明 过点 D, E 作 BC 的垂线, 垂足分别为 P, Q , 则

$\because BD$ 平分 $\angle ABC, DH \perp AB, DQ \perp BC$,

$\therefore DQ = DH$.

同理可得 $EP = EL$.

$\because MN \perp BC, \therefore DQ \parallel MN \parallel EP$.

$\because M$ 为 DE 的中点, $\therefore MN$ 为梯形 $DQPE$ 的中位线.

$\therefore DQ + EP = 2MN$. 即 $DH + EL = 2MN$.

例4 如图19-4所示, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 $O, \angle CAB$ 的平分线交 BD 于点 F , 交 BC 于点 G , 求证: $CG = 2OF$.

证明 取 CG 的中点 E , 连结 OE , 则 OE 为 $\triangle ACG$ 的中位线.

$\therefore OE \parallel AG, \therefore \angle CAG = \angle COE$.

$\because AG$ 平分 $\angle CAB, \therefore \angle CAG = \angle BAG$.

$\because \angle CAB = 45^\circ, \therefore \angle CAG = 22.5^\circ$.

$\therefore \angle COE = 22.5^\circ$.

$\because \angle COB = 90^\circ, \therefore \angle BOE = 67.5^\circ$.

$\because \angle CBD = 45^\circ, \therefore \angle BEO = 67.5^\circ$.

\therefore 四边形 $OEGF$ 为等腰梯形. $\therefore OF = GE, \therefore CG = 2OF$.

例5 如图19-5所示, P 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上一点, 过点 P 作 $PF \perp BC$, 交

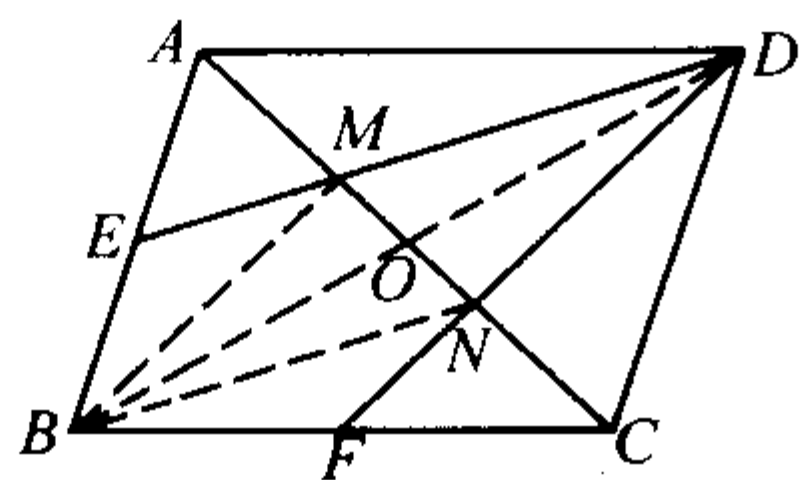


图 19-2

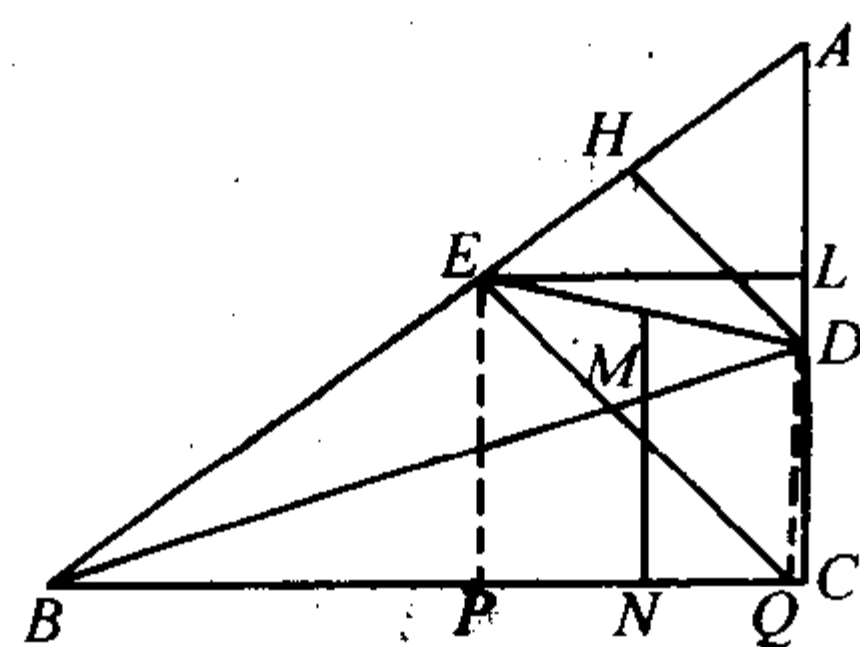


图 19-3

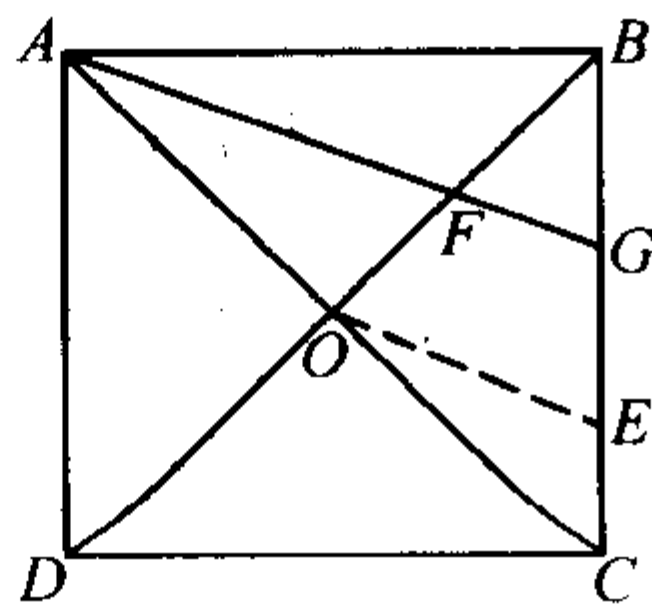


图 19-4



AB 于点 E, 交 CA 的延长线于点 F, $AD \perp BC$ 于点 D, 求证: $PE + PF = 2AD$.

证明 在 CD 上取一点 Q, 使得 $CQ = BP$,

过 Q 作 $GQ \perp BC$ 交 AC 于点 G, 则

$\therefore PF \perp BC, GQ \perp BC,$

$\therefore \angle BPE = \angle CQG = 90^\circ, PF \parallel QG.$

$\therefore AB = AC, \therefore \angle B = \angle C.$

又 $\because BP = CQ, \therefore \triangle BPE \cong \triangle CQG.$

$\therefore PE = QG.$

$\therefore AD \perp BC, \therefore BD = CD, AD \parallel PF \parallel QG.$

又 $\because BP = CQ, \therefore PD = QD.$

$\therefore AD$ 为梯形 $PFGQ$ 的中位线. $\therefore AD = \frac{1}{2}(PF + GQ).$

$\therefore AD = \frac{1}{2}(PF + PE).$ 即 $PE + PF = 2AD.$

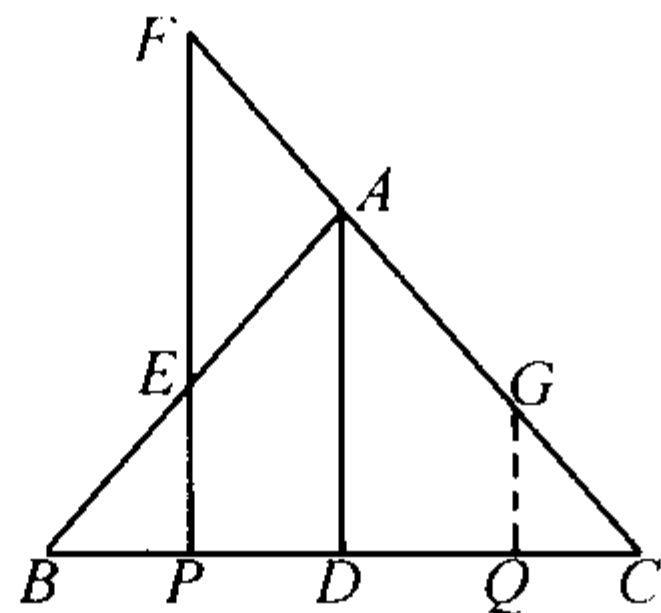


图 19-5

例 6 如图 19-6, 在四边形 ABCD 中, $AB = CD$, E, F 分别是对角线 BD, AC 的中点, 直线 EF 交 AB 于点 P, 交 CD 于点 Q, 求证: $\angle 1 = \angle 2$.

分析 可考虑再找一个中点(M)使之与 E, F 构成三角形的中位线, 于是取 BC 中点 M, 作 $\triangle EMF$, 由于 $AB = CD$, 则 $\triangle EMF$ 是等腰三角形, 故 $\angle 3 = \angle 4$, 即 $\angle 1 = \angle 2$.

当然也可取 AD 中点或同时取 AD, BC 中点 N, M, 构造等腰 $\triangle NEM$, 请读者自己完成.

说明 1. 至此我们得到一个新结论 $PQ \perp NM$ 及四边形 NEMF 为菱形.

2. 可以构造一个结论完全类似但似乎条件稍强的命题: “如图 19-7, 四边形 ABCD 中, $AB = CD$, M, N 是 BC, AD 的中点, $PQ \perp MN$ 交 AB 于 P, 交 DC 于 Q, 求证: $\angle 1 = \angle 2$.” (提示: 取 BD 中点 E, 则 $\triangle NEM$ 为等腰三角形, 利用等角的余角相等证 $\angle 1 = \angle 2$.)

3. 从图 19-7 的构图, 我们发现利用它可以快捷地证明下列各题:

(1) 如图 19-7, 在四边形 ABCD 中, M, N 是 BC, AD 的中点, 求证: $|AB - CD| \leq 2MN \leq (AB + CD).$

(2) 如图 19-8, 四边形 ABCD 中, $AB = CD$, M, N 为 BC, AD 的中点, 且 BA, CD 的延长线与 MN 的延长线交于 E, F, 求证: $\angle 1 = \angle 2$.

(3) 如图 19-9, $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 上一点, 且 $AB = DC$, M, N 是 BC, AD 的中

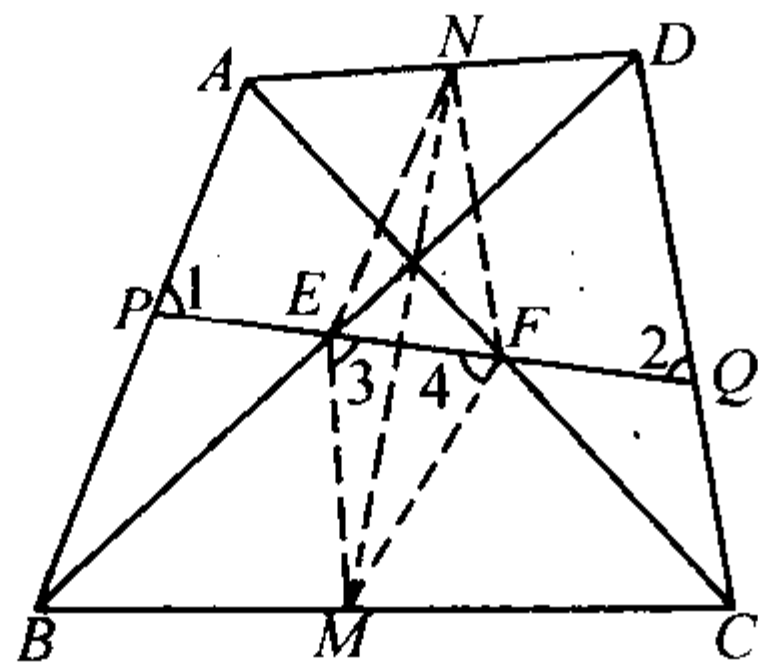


图 19-6

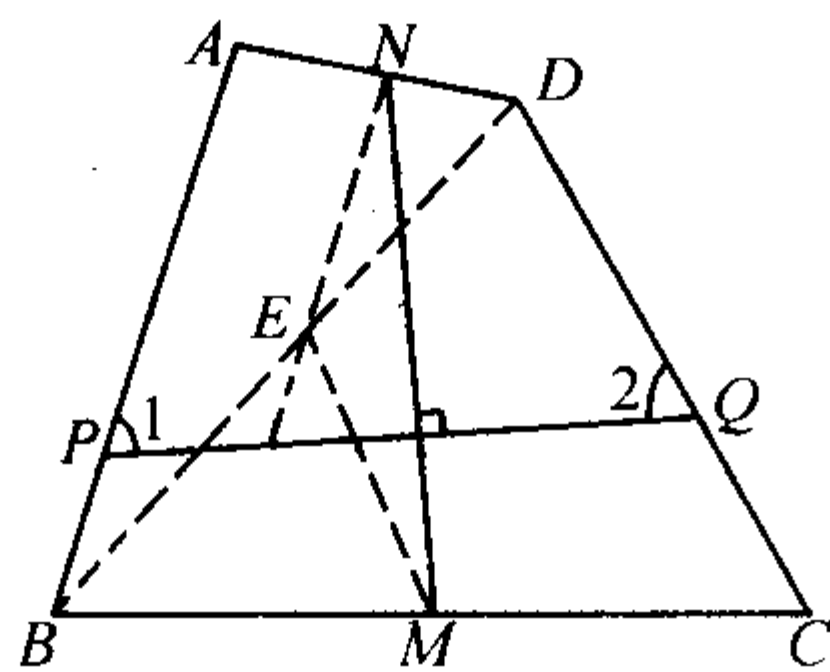


图 19-7



点, MN 交 BA 的延长线于 P , 求证: $\triangle APN$ 是等腰三角形.

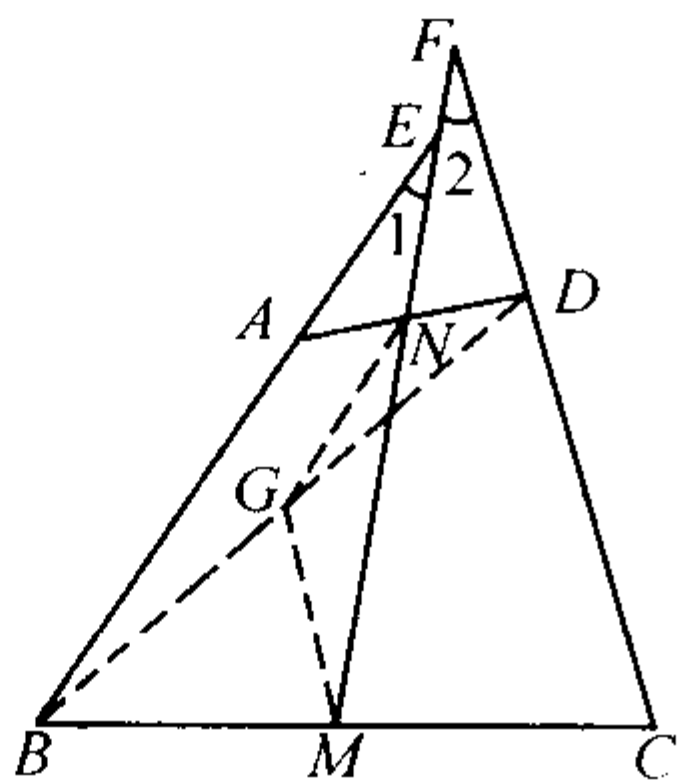


图 19-8

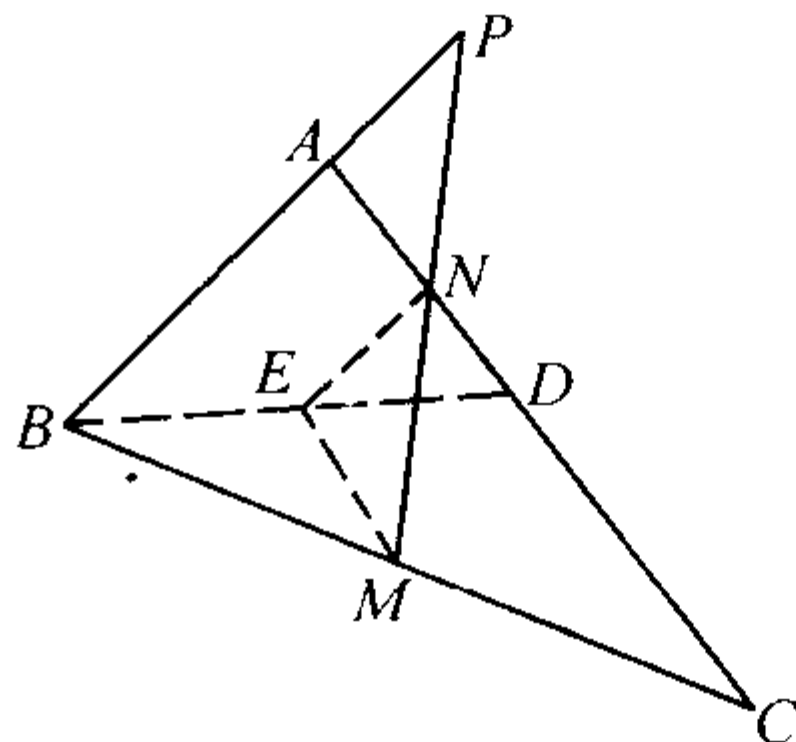


图 19-9

例 7 如图19-10所示, P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $PE \perp AB$, $PF \perp AC$, D 是 BC 边上的中点, 若 $\angle PBE = \angle PCF$, 求证: $DE = DF$.

证明 取 PB , PC 的中点 M , N , 连结 EM , DM , DN , FN , 则

$$\because PE \perp AB, \therefore EM = BM = PM = \frac{1}{2} PB.$$

$$\therefore \angle EMP = 2\angle PBE.$$

$$\text{同理可得 } FN = \frac{1}{2} PC, \angle FNP = 2\angle PCF.$$

$$\because D \text{ 是 } BC \text{ 的中点}, \therefore DM \text{ 为 } \triangle BCP \text{ 的中位线}.$$

$$\therefore DM = \frac{1}{2} PC, \text{ 且 } DM \parallel PC.$$

$$\text{同理可得 } DN = \frac{1}{2} PB, \text{ 且 } DN \parallel PB.$$

$$\therefore \text{四边形 } DMPN \text{ 为平行四边形}.$$

$$\therefore \angle DMP = \angle PND.$$

$$\because \angle PBE = \angle PCF, \therefore \angle EMD = \angle FND.$$

$$\text{又 } \because EM = DN, DM = FN, \therefore \triangle DME \cong \triangle DNF.$$

$$\therefore DE = DF.$$

例 8 如图19-11所示, D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 的中点, $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACF$ 为正三角形, M , N 分别为 BE , CF 的中点, 求证: $DM = DN$.

证明 连结 CE , BF , 则

$$\because \triangle ABE \text{ 与 } \triangle ACF \text{ 为正三角形},$$

$$\therefore AB = AE, AF = AC, \angle CAF = \angle BAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EAC.$$

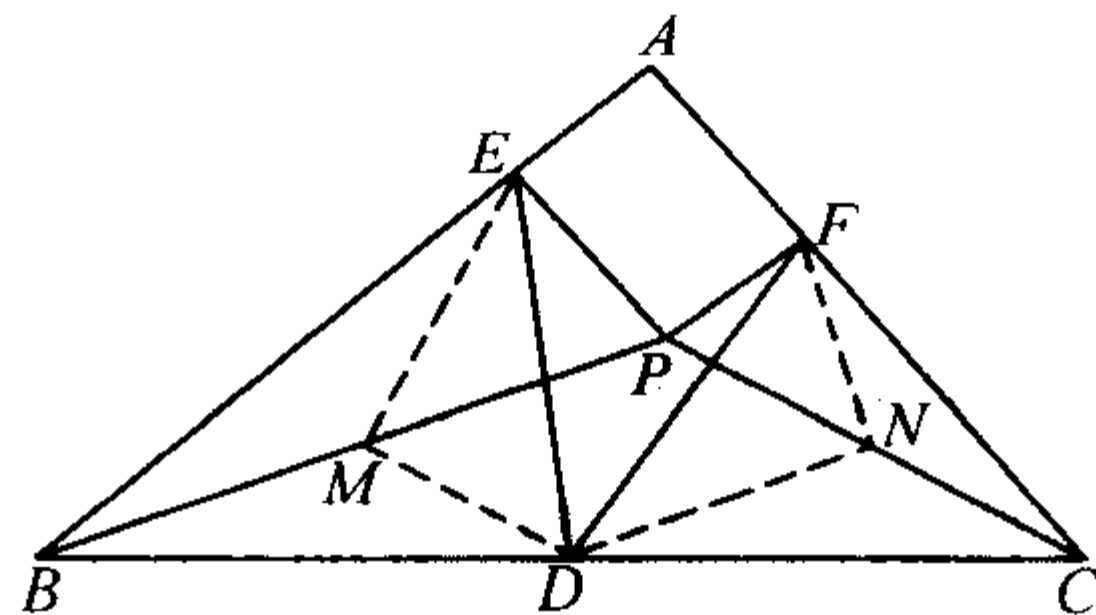


图 19-10

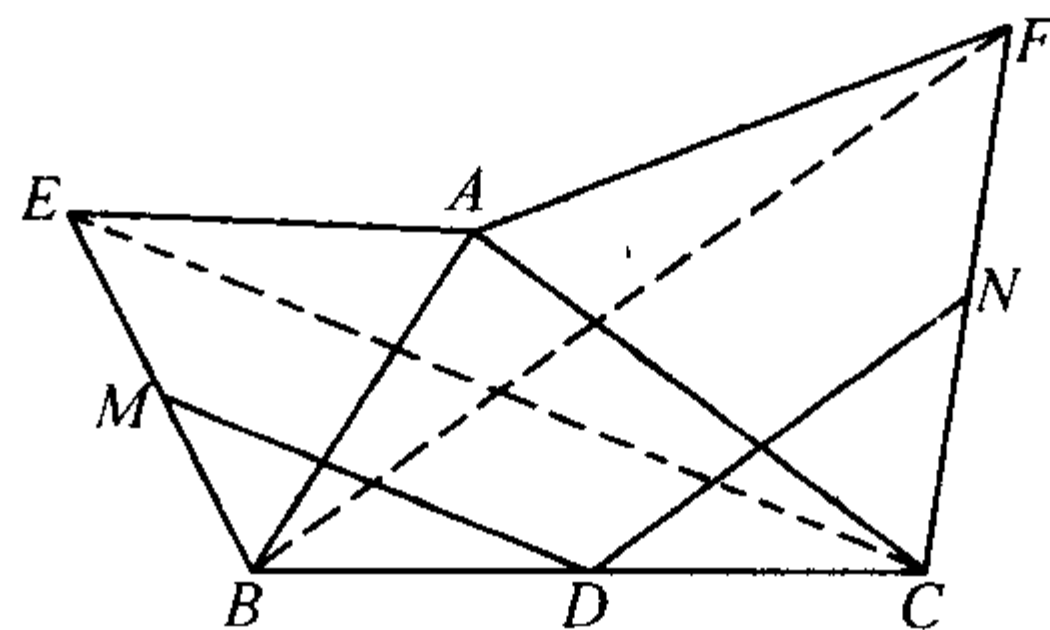


图 19-11



$$\therefore \triangle BAF \cong \triangle EAC.$$

$$\therefore BF = CE.$$

$\because D$ 为 BC 中点, M 为 BE 中点, $\therefore MD$ 为 $\triangle EBC$ 的中位线.

$$\therefore MD = \frac{1}{2} EC.$$

同理可得 $ND = \frac{1}{2} BF. \therefore DM = DN.$

例 9 如图 19-12, O 是正方形 $ABCD$ 的对角线的交点, AE 为 $\angle BAC$ 的平分线, 交 BC 于 E , $DH \perp AE$ 于 H , 交 AB 于 F , 交 AO 于 G , 求证: $BF = 2OG$.

分析 结论的这种形式明确地暗示着可以利用中位线来试之. 利用中位线定理解题一般有两条路可走. 即寻找 $2OG$ 或 $\frac{1}{2} BF$.

(方法一) 寻找 $2OG$.

如图 19-12, 过 B 作 $BF' \parallel OG$, 交 DF 的延长线于 F' , 显然 OG 是 $\triangle DBF'$ 的中位线, 即 $2OG = BF'$. 只须证 $BF' = BF$, 即证 $AF = AG$.

(方法二) 寻找 $\frac{1}{2} BF$.

如图 19-13, 过 O 作 $OF' \parallel BF$, 交 DF 于 F' , 则 OF' 是 $\triangle DFB$ 的中位线, 即 $OF' = \frac{1}{2} BF$. 所以问题转化为只要证 $OF' = OG$, 即证 $AF = AG$.

说明 1. 这是利用中位线定理的典型问题. 同理可证 $2OI = EC$.

2. 假如设正方形的边长为 1, 则 $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 而 $\triangle AGF \sim \triangle CGD. \therefore \frac{AG}{AF} = \frac{CG}{CD}$.

$$\because AF = AG, \therefore CG = CD = 1.$$

$$\therefore OG = CG - CO = CD - AO = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$BF = 1 - AF = 1 - AG = 1 - (AC - CG) = 2 - \sqrt{2}.$$

故 $BF = 2OG$.

这个证明不必添加辅助线, 同时也说明几何证明的多样性和趣味性.

3. 还可以按图 19-14 中的添两条辅助线方法给出两种类似的证明.

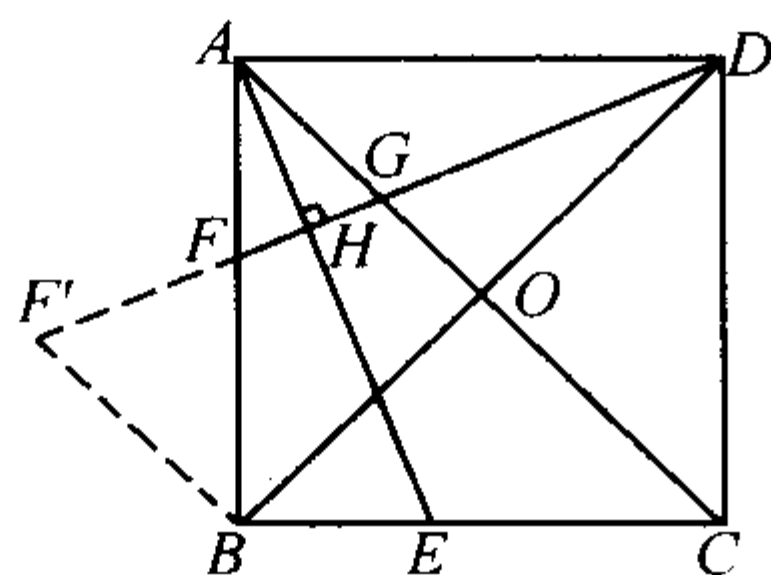


图 19-12

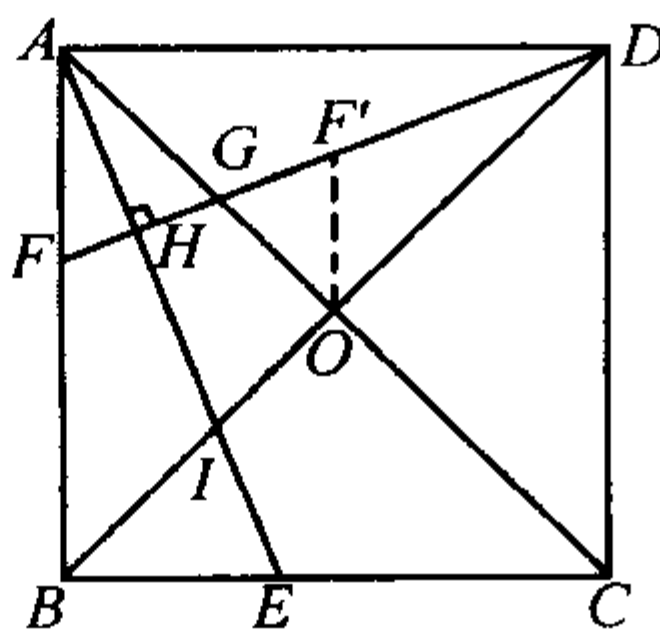


图 19-13

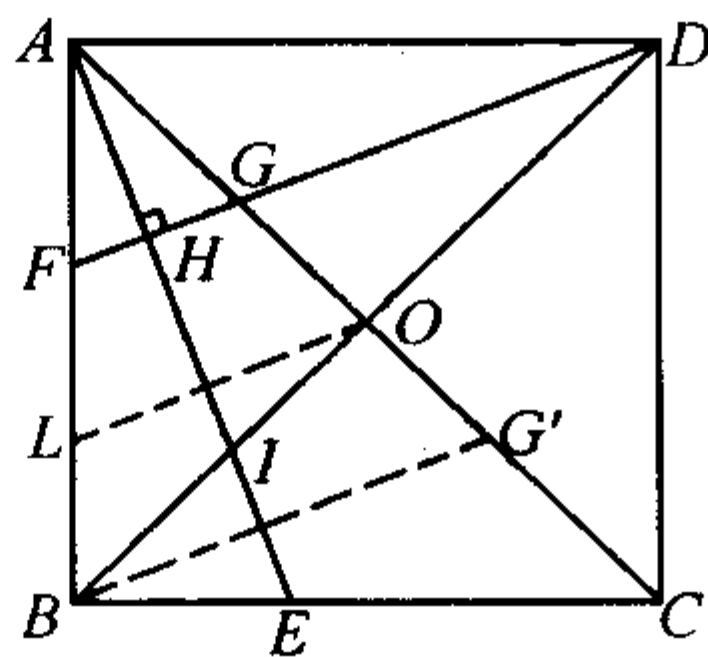


图 19-14



例 10 如图 19-15, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $AE \perp BC$ 于 E . 求证: $DE = \frac{1}{2} AC$.

解 与上例类似.

(方法一) 利用三角形中位线定理——“折半”.

如图 19-15, 取 AB 中点 M , BC 中点 N , 连 MN , 则 $MN = \frac{1}{2} AC$.

$\because CD \perp AB, \angle B = 60^\circ, \therefore \angle BCD = 30^\circ, \therefore BD = \frac{1}{2} BC = BN$.

同理 $BM = \frac{1}{2} AB = BE$, 所以有 $\triangle DBE \cong \triangle NBM$.

$\therefore DE = MN = \frac{1}{2} AC$.

(方法二) 利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”——“折半”.

如图 19-16, 取 AC 中点 M , 连 EM, DM .

$\because \angle ADC = \angle AEC = 90^\circ, \therefore DM = EM = \frac{1}{2} AC$.

事实上, $\angle DME = \angle AME - \angle AMD$
 $= 2\angle ACE - 2\angle ACD$
 $= 2\angle DCB = 60^\circ$.

$\therefore \triangle DME$ 是等边三角形, $\therefore DE = DM = \frac{1}{2} AC$.

(方法三) “加倍法”. 如图 19-17, 延长 BD 到 N 使 $DN = BD$, 在 EC 上取 $EM = BE$, 连 MN . 则 $MN = 2DE$, 再由 $\triangle BCA \cong \triangle BNM$, 即可得证.

说明 这是一个常见的问题, 一般是通过相似的方法完成的.

由 $\triangle ABE \sim \triangle CBD$, 知: $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$, 从而可以推得 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$. 由于 $\triangle BDE$ 与 $\triangle BCA$ 的相似比 $k = \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{DE}{AC} = k = \frac{1}{2}$, 即 $AC = 2DE$.

虽然这种方法简洁, 但方法一与方法二更能说明几何证题的一般思路.

例 11 (1) 阅读下列材料, 补全证明过程:

已知: 如图 19-18, 矩形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O , $OE \perp BC$ 于 E , 连结 DE 交 OC 于点 F , 作 $FG \perp BC$ 于 G .

求证: 点 G 是线段 BC 的一个三等分点.

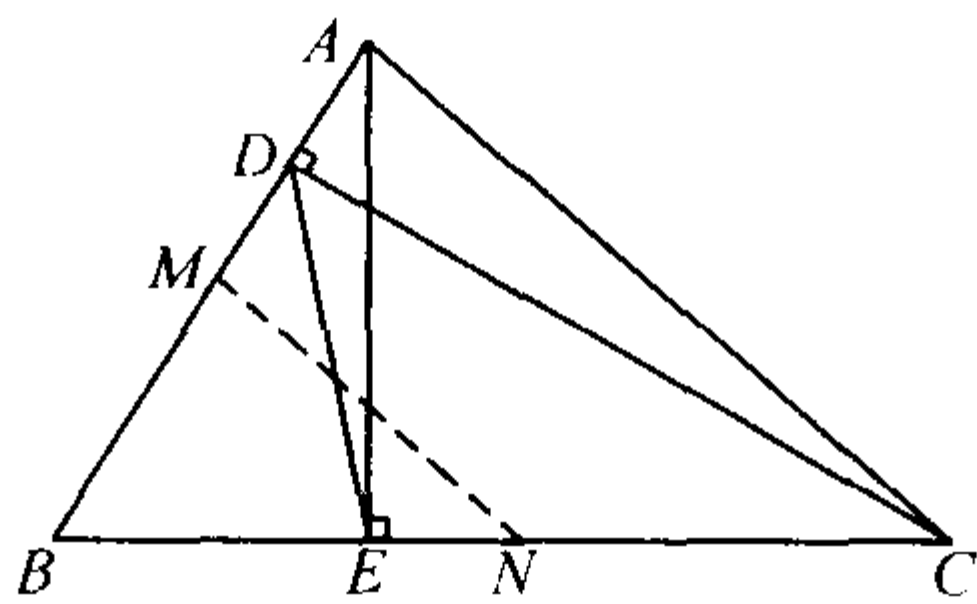


图 19-15

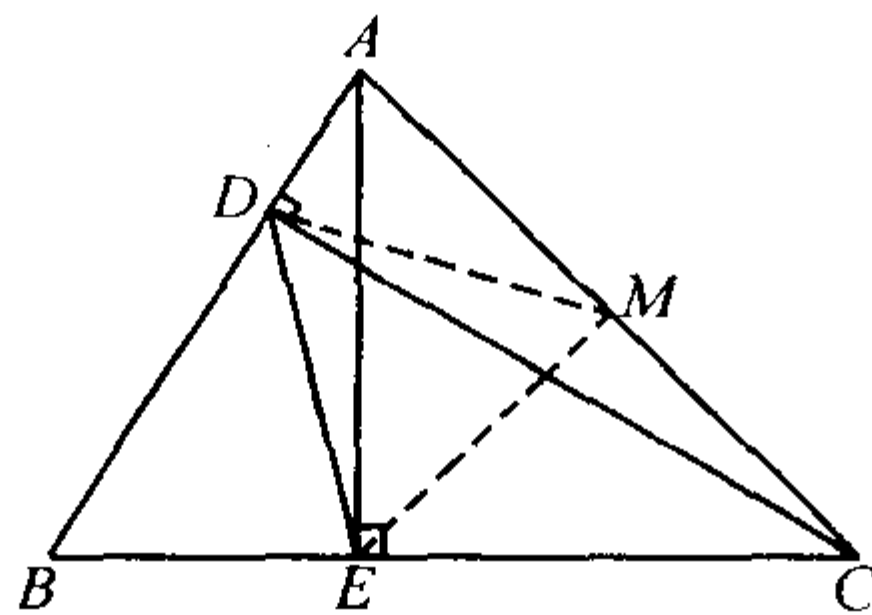


图 19-16

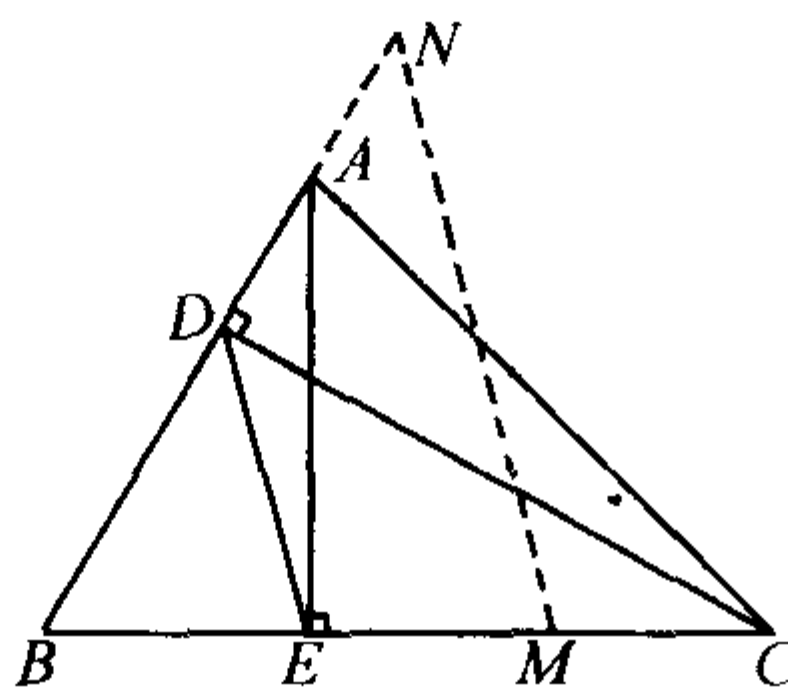


图 19-17



证明 在矩形 $ABCD$ 中, $OE \perp BC, DC \perp BC$,

$$\therefore OE \parallel DC, \therefore \frac{OE}{DC} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{EF}{FD} = \frac{OE}{DC} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}, \dots$$

(2) 请你仿照上面的画法, 在原图上画出 BC 的一个四等分点. (要求: 保留画图痕迹, 不写画法及证明过程)

解 补充证明的方法不惟一:

(方法一) $\because FG \parallel DC$, 则 $\frac{FG}{DC} = \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{FG}{AB} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{CG}{BC} = \frac{FG}{AB} = \frac{1}{3}.$$

(方法二) $\because \frac{EG}{EC} = \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{GC}{EC} = \frac{2}{3}$. 又 $\because E$ 是 BC

中点.

$$\therefore \frac{GC}{BC} = \frac{GC}{2EC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(2) 如图 19-19 所示, I 为所求.

说明 请同学们思考, 是否可以用该方法画出某一线段的任意等分点?

例 12 已知: 如图 19-20, P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $PE \perp AB, PF \perp AC, D$ 是 BC 中点, $\angle PBE = \angle PCF$. 求证: $DE = DF$.

分析 此题由垂直条件想到作斜边中线 EM, FN , 进而又想到连三角形中位线: DM, DN , 这样必有 $DM \parallel \frac{1}{2} PC = FN, DN \parallel \frac{1}{2} PB = BM = EM$, 从中不难发现可通过 $\triangle DME \cong \triangle FND$ 来证明 $DE = DF$.

证明 取 PB, PC 中点 M, N , 连结 EM, DM, FN, DN .

$$\because PE \perp AB, PM = BM, \therefore EM = BM = \frac{1}{2} PB,$$

$$\therefore \angle BEM = \angle PBE, \therefore \angle PME = \angle BEM + \angle PBE = 2\angle PBE.$$

$$\text{同理可得 } FN = NC = \frac{1}{2} PC, \angle PNF = 2\angle PCF.$$

$$\because \angle PBE = \angle PCF, \therefore \angle PME = \angle PNF.$$

$$\because PM = BM, BD = DC, \therefore DN \parallel \frac{1}{2} PB.$$

$$\therefore DN = EM.$$

$$\text{同理可得 } DM \parallel \frac{1}{2} PC, FN = DM.$$

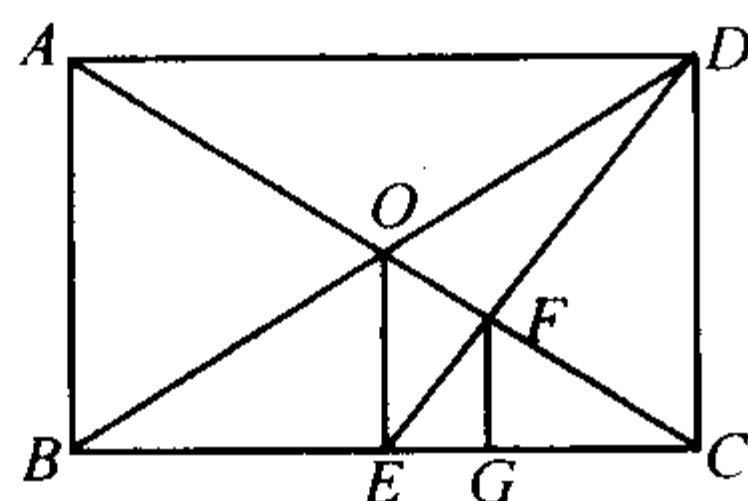


图 19-18

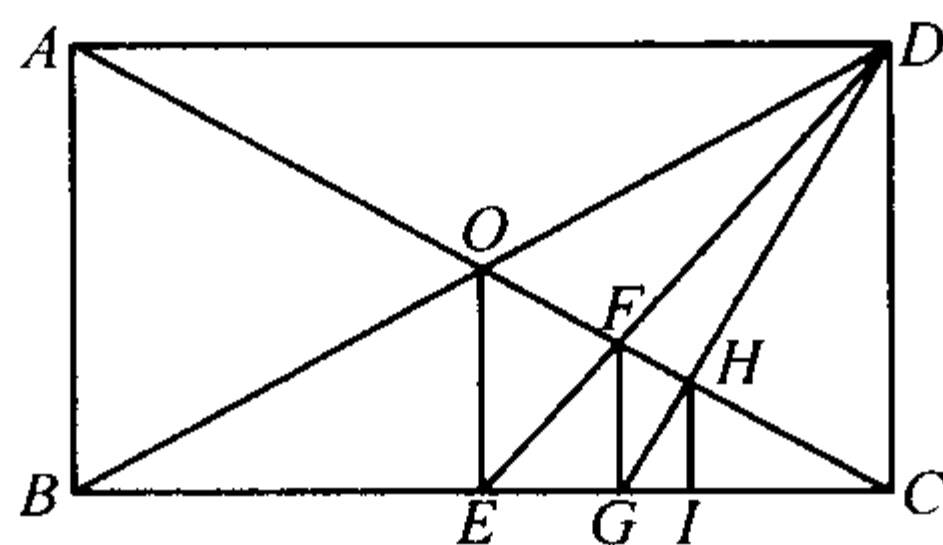


图 19-19

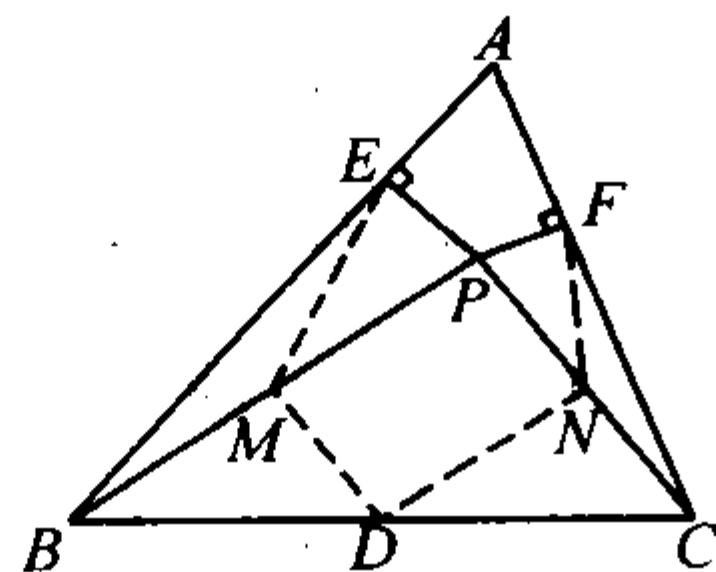


图 19-20



$$\therefore \angle PMD = \angle PND, \therefore \angle EMD = \angle DNF.$$

$$\therefore \triangle DME \cong \triangle FND, \therefore DE = DF.$$



【能力训练】

1. $\triangle ABC$ 中, $BE \perp AC$ 于 E , AD 是 BC 边上的中线, 若 $\angle DAC = 30^\circ$, 求证: $AD = BE$.

2. 四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于 O , E, F 分别是 AB, DC 的中点, 连 EF 交 BD, AC 于 M, N , 若 $AC = BD$, 求证: $OM = ON$.

3. 四边形 $ABCD$ 中, E, F, P, Q 分别是 AD, BC, BD, AC 的中点, M, N 分别是 PB, QC 的中点, 求证: EF 平分 MN .

4. 四边形 $ABCD$ 中, $AB = DC$, E, F 分别是 AD, BC 的中点, 连 FE 交 BA, CD 延长线于 G, H , 求证: $\angle BGF = \angle CHF$.

5. $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 延长 BC 到 M , N 是 BM 的中点, H 是 EN 的中点, 连 DH 交 BM 于 F , 求证: $CF = FM$.

6. 正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于 O , $\angle BAC$ 的平分线分别交 OB, BC 于 E, F , 求证: $OE = \frac{1}{2}CF$.

7. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, E, F 分别为 AD, BC 的中点, BA 的延长线交 FE 的延长线于点 G , CD 的延长线交 FE 的延长线于点 H , 求证: $\angle BGF = \angle CHF$.

8. $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, $AD \perp BC$, E 是 BC 的中点. 求证: $DE = \frac{1}{2}AB$.

9. 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle D + \angle C = 90^\circ$, E, F 分别是 AB, DC 边中点.

求证: $EF = \frac{1}{2}(DC - AB)$.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, $AD \perp BC$ 于点 D , E 是 BC 的中点, 求证: $DE = \frac{1}{2}AB$.

11. 已知 AH 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角平分线, 在 AB, AC 上分别截取 $BD = CE$, M 是 DE 的中点, N 是 BC 的中点, 求证: $MN \parallel AH$.

12. 已知: 如图 19-21, $\triangle ABC$ 中, BE, CF 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$, $AE \perp BE, AF \perp CF$. 求证: $EF \parallel BC$.

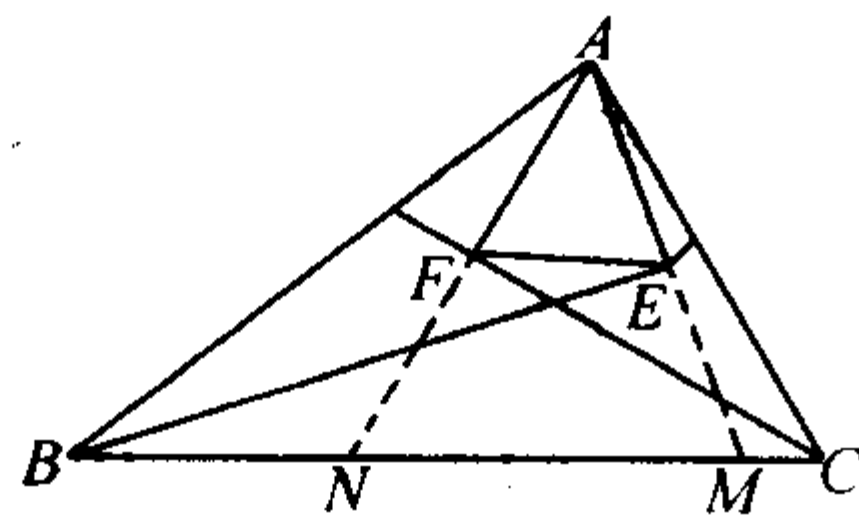


图 19-21



二十、圆的基本性质



【赛点目标】

1. 明确圆的定义、圆的对称性,能用圆的定义判定点与圆的位置关系.
2. 理解垂径定理及其逆定理所揭示的圆中直径、弦和弧之间的关系.
3. 明确下列关系并能熟练应用:在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两个圆周角、两条弦、两条弦心距或两条弧中有一对相等,那么它们所对应的其余各对都相等.



【方法述要】

1. 使学生进一步明确由圆的对称性而派生的一系列性质,进一步巩固对称思想.
2. 学会通过简单地构造基本图形,把问题转化而得以解决.
3. 能计算一些“规则”图形的面积及圆的弧长.
4. 能进行简单的等积变形和求一些可化为“规则”图形的图形面积.
5. 弧长公式: $l = \frac{n\pi R}{180}$; 扇形面积公式: $S = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2}lR$.
6. 弓形面积可用公式: $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} \pm S_{\Delta}$.
7. 等积三角形: 等底(同底)等高(同高)的两个三角形面积相等.



【赛题精讲】

例 1 如图20-1, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 以点 C 为圆心, CA 为半径画弧交 AB 于 D , 求 AD 的长.

解 因为 AD 为 $\odot C$ 的弦, 故作弦心距 CM , 由于 $\frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot MC$, $\therefore CM = \frac{24}{5}$, 接下去可在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中利用勾股定理求得 $AM = \frac{18}{5}$. (或利用射影定理 $AC^2 = AM \cdot AB$, 求 AM) $\therefore AD = 2AM = 7.2\text{cm}$.

说明 1. 圆中涉及半径、弦、弦心距的有关计算, 往往作弦心距构造 $\text{Rt}\triangle$, 利用勾股定理算得.

2. 请看下面类似的一个问题: 如图 20-2, 在 $\triangle ABC$ 中, 以 A 为圆心, AB 为半径的

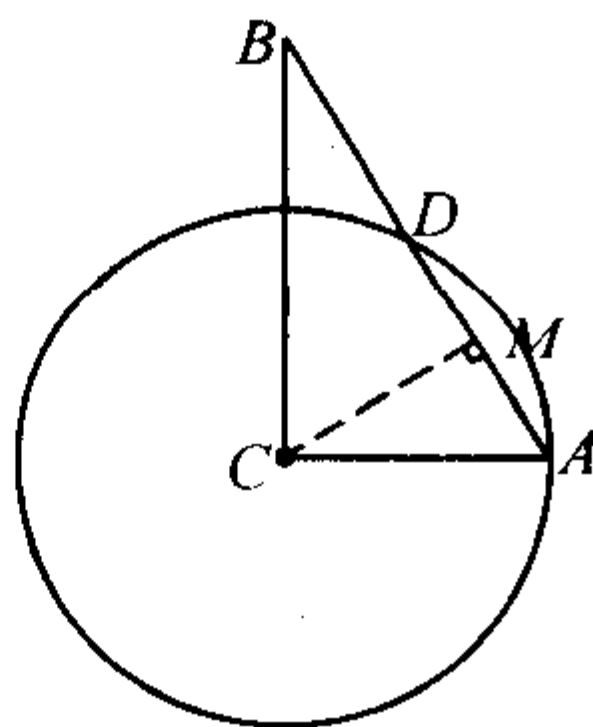


图 20-1



圆分别交 BC, AC 于其内部的点 D, E , 若 $BD = 10, DC = 6$, 那么 $AC^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

同上例的方法作 $AF \perp BC$ 于 F , 则 $BF = \frac{1}{2}BD = 5, FC = FD + DC = 11$. 利用射影定理可得 $AC^2 = CF \cdot CB = 176$.

现在的问题是只用勾股定理可解否? 回答是肯定的.

由勾股定理易得: $AB^2 - 5^2 = AC^2 - 11^2 = AF^2$, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

故可得如下方程组 $\begin{cases} AC^2 - AB^2 = 96, \\ AC^2 + AB^2 = 256. \end{cases}$ 解得 $AC^2 = 176$.

用方程或方程组的方法解决几何问题, 有时会“事半功倍”, 值得留意.

例 2 已知, 点 A 在 $\odot O$ 上, $\odot A$ 与 $\odot O$ 相交于 B, C 两点, 点 D 是 $\odot A$ 上一点, 直线 BD 与 $\odot O$ 相交于点 E .

(1) 如图 20-3, 当点 D 在 $\odot O$ 外时, 试判断 $\triangle CED$ 的形状, 并证明你所得结论;

(2) 如图 20-4, 当点 D 在 $\odot O$ 内时, 上述结论是否还能成立? 并说明理由.

解 第(1)题要判定 $\triangle CED$ 的形状, 可将点 D 在 $\odot A$ 上运动, 即将 BD 绕点 B 旋转, 在运动过程中观察 $\triangle CED$ 的形状, 当运动到 BD 经过 $\odot A$ 的圆心 A 时, 此时点 E 与 A 重合, 可发现 $\triangle CED$ 是等腰三角形. 对一般情况, 进一步观察可发现 $\angle D$ 及 $\angle CED$ 的大小保持不变. 与此同时得到借助特殊位置进行证明的思路:

连结 BA 并延长交 $\odot A$ 于 D' , 并连结 CD', CA .

$\because \angle CEB = \angle CAB, \therefore \angle CED = \angle CAD'$. 又 $\angle D = \angle D'$,

$\therefore \triangle CED \sim \triangle CAD'$. 由 $AC = AD'$, 得 $CE = DE$, 从而 $\triangle CED$ 是等腰三角形.

对第(2)题, 思考方法基本相同. 作与第(1)小题同样的辅助线, 得:

$\angle E = \angle CAD', \angle EDC = \angle D', \therefore \triangle CED \sim \triangle CAD'$, 由于 $\triangle CAD'$ 是等腰三角形, 可以得到 $\triangle CED$ 也是等腰三角形.

说明 1. 第(1)小题也可只连结 AB, AC , 利用 $\angle CEB = \angle CAB = 2\angle D$ 及 $\angle CEB = \angle D + \angle DCE$, 得到 $\angle D = \angle DCE$.

2. 本例为图形形状判定型的探索题, 运用图形运动思想, 把要证明的结论由一般位

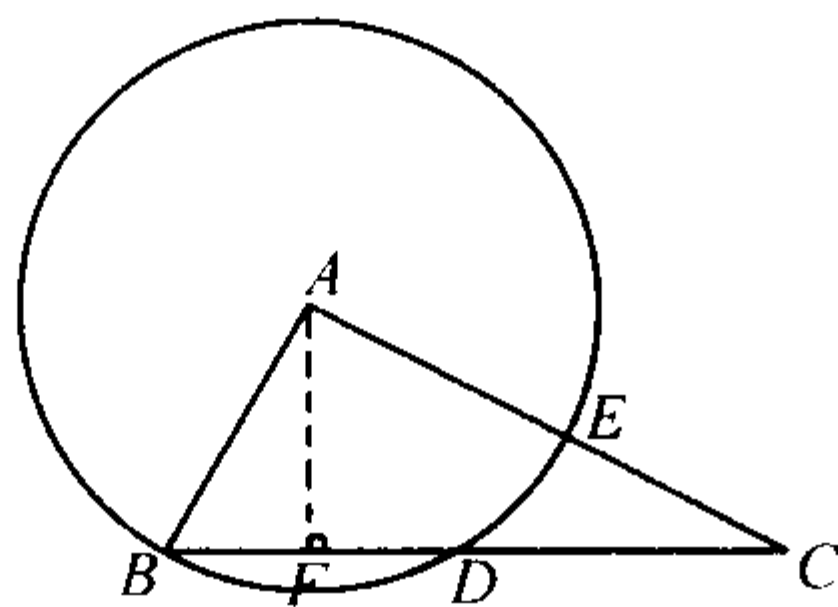


图 20-2

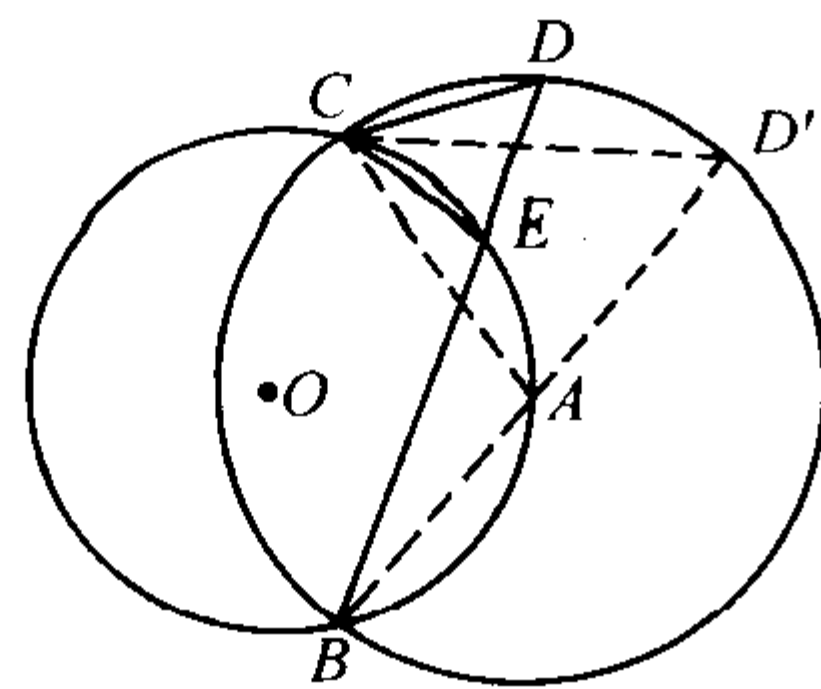


图 20-3

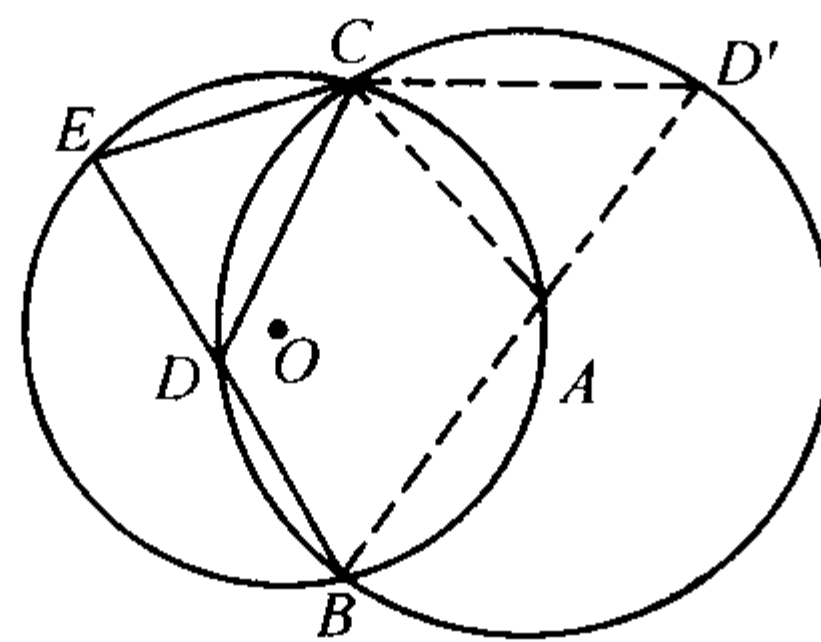


图 20-4



置转化成特殊位置,同时获得添辅助线的方法,这也是添辅助线时常应想到的思想方法.

3. 如果将 BD 运动到使点 E 在 BD 的反向延长线上时, $\triangle CED$ 仍然是等腰三角形,这一点同学们可自己证明.

例 3 已知:如图20-5, M 为 \widehat{AMB} 的中点,以 AM 为直径的半圆交 AB 于 N , D 为 \widehat{AMB} 上任一点,连结 AD 交 MN 于 C .

求证: $AC = CD + DB$.

证明 连结 MN , 并延长 AD 至 E , 使 $DE = DB$, 连 BE , CN .

$\because AM$ 为直径, $\therefore MN \perp AB$ (垂足为 N).

$\because DE = DB, \therefore \angle CDB = 2\angle E = 2\angle M = 2\angle ACN$.

$\therefore \angle ACN = \angle E, CN \parallel BE$.

又 $\because AM = MB, MN \perp AB, \therefore AN = BN$.

$\therefore AC = CE = CD + DB$.

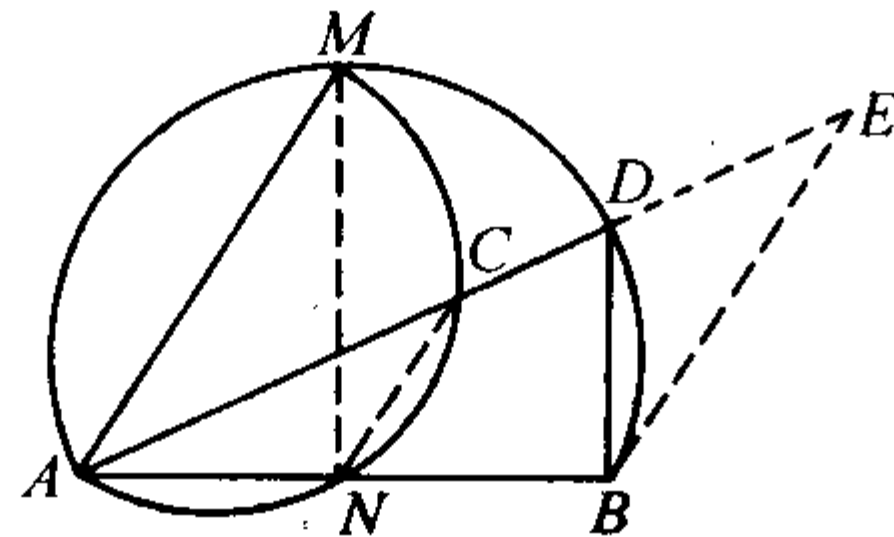


图 20-5

例 4 已知:如图20-6, $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 $\triangle DEF$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心. 求证: $OA \perp EF$.

分析 由于 OA 为半径, 因此联想到过点 A 且与 OA 垂直的直线必为 $\odot O$ 的切线, 因此只需证明该切线与 EF 平行即可.

证明 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 AM , 则 $AM \perp AO$.

$\because \angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$,

$\therefore B, C, F, E$ 四点共圆. 所以 $\angle 1 = \angle ACB$.

又 $\because \angle 2 = \angle ACB, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\therefore EF \parallel AM, \therefore OA \perp EF$.

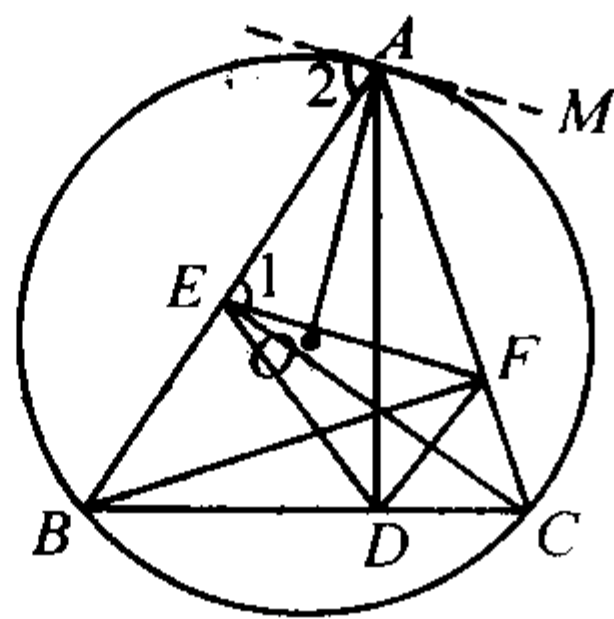


图 20-6

例 5 如图20-7, $OQ \perp AB$, 求证: $OA^2 = OP \cdot OQ$.

解 思路一, 作直径证明.

作直径 CE , 连 $AE, AP, OA, \because OQ \perp AB, \therefore OQ$ 垂直平分 AB , 即 $PA = PB, \angle APO = \angle BPO$, 由 $\angle E = \angle B$, 得 $\angle ECA = \angle BPO, \therefore \angle APO = \angle BPO = \angle ACE = \angle OAQ, \therefore \triangle OAP \sim \triangle OQA$, 即 $\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OQ}, \therefore OA^2 = OP \cdot OQ$.

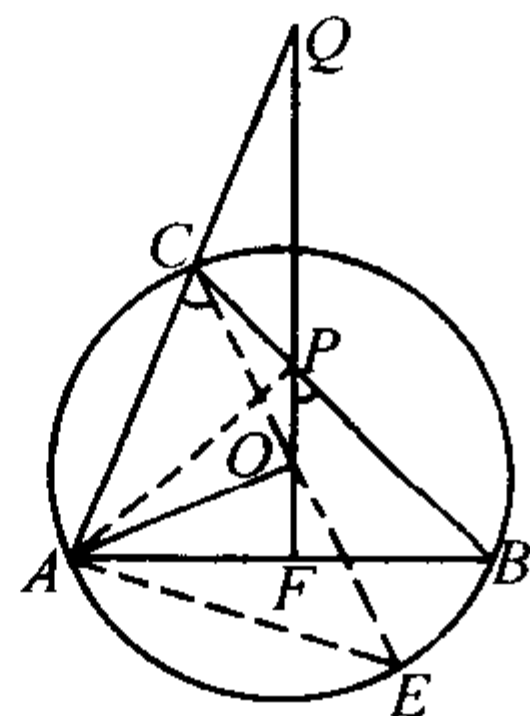


图 20-7

思路二, 用圆周角定理证明.

如图 20-8, 连 $AP, \angle AOF = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \angle ACB$,

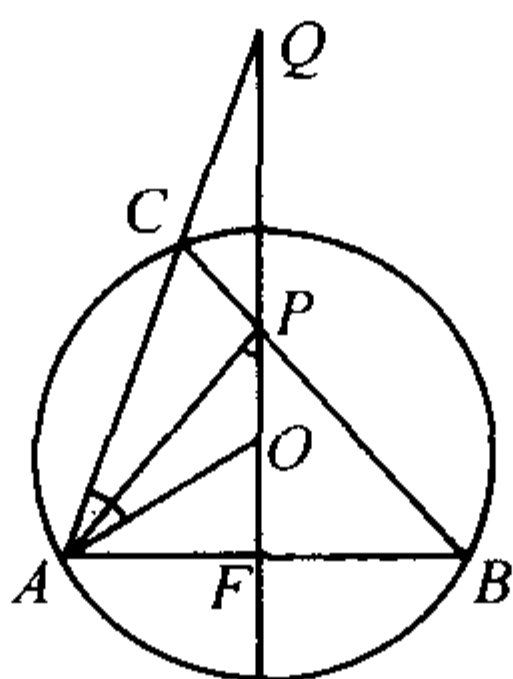


图 20-8

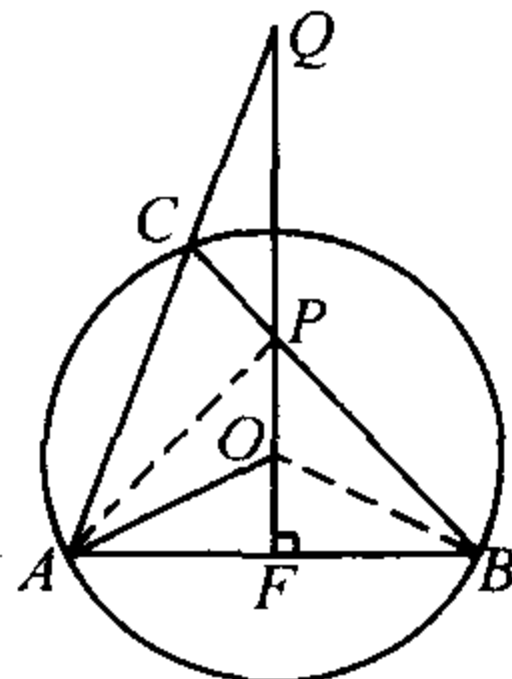


图 20-9

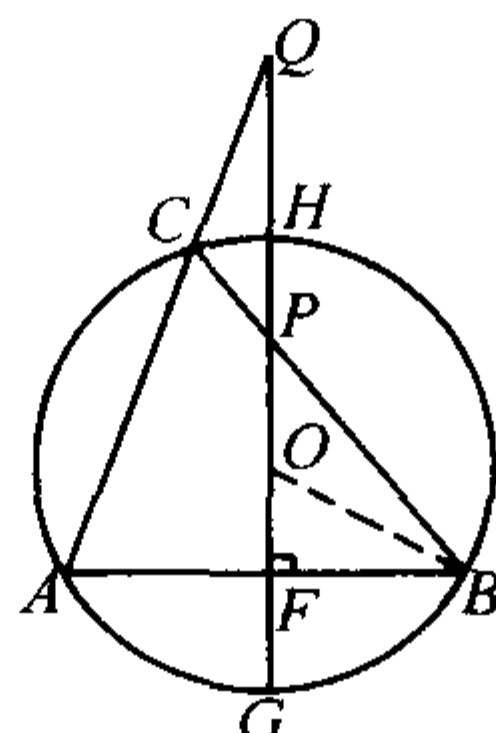


图 20-10

又 $\because \angle AOF = \angle Q + \angle QAO$,
 $\angle ACB = \angle Q + \angle QPC = \angle Q + \angle BPO = \angle Q + \angle APO$,
 $\therefore \angle QAO = \angle APO, \therefore \triangle AOP \sim \triangle OAQ$, 以下证明同上.

思路三, 等量代换的思想证明.

如图 20-9, 连 AP , 则 $\angle BOF = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \angle ACB, \therefore \angle QCB = \angle QOB$.

$\therefore \angle Q = \angle PBO$, 显然可证 $\angle PBO = \angle PAO, \therefore \angle PAO = \angle Q$.

$\therefore \triangle OAP \sim \triangle OQA$. 以下证明同上.

思路四, 用相交弦定理证明.

如图 20-10, 延长 QO 交 $\odot O$ 于 G , 设 OQ 交 $\odot O$ 于 H , 连 OB , 则 $\angle BOF = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \angle ACB, \therefore \angle QCP = \angle BOP$.

又 $\angle CPQ = \angle OPB$,

$\therefore \triangle CPQ \sim \triangle OPB, \therefore OP \cdot PQ = PC \cdot PB$.

$\therefore OP \cdot OQ = OP(OP + PQ) = OP^2 + OP \cdot PQ = OP^2 + PC \cdot PB$
 $= OP^2 + PH \cdot PG = OP^2 + (OA - OP)(OA + OP)$
 $= OP^2 + OA^2 - OP^2 = OA^2$.

说明 贯通前后, 以点带面, 是提高解题效率, 事半功倍的有效途径.

例 6 如图 20-11, $\odot A, \odot B$ 外切于点 P , 它们的半径分别为 R 和 r , CD 是它们的外公切线, 切点分别为 C, D 且 \widehat{CP} 的弧长为 l .

(1) 求证: $S_{\text{阴影}} = \frac{(CD - l)R + r \cdot CD}{2}$;

(2) 当 $R = 6\text{cm}, r = 2\text{cm}$ 时, 求 $S_{\text{阴影}}$.

解 (1) 阴影部分的面积可由梯形 $ACDB$ 的面积与扇形

ACP 的面积差得到. 连 $AC, AB, S_{\text{梯形}ACDB} = \frac{1}{2}(R + r) \cdot CD$,

$S_{\text{扇形}ACP} = \frac{1}{2}lR$,

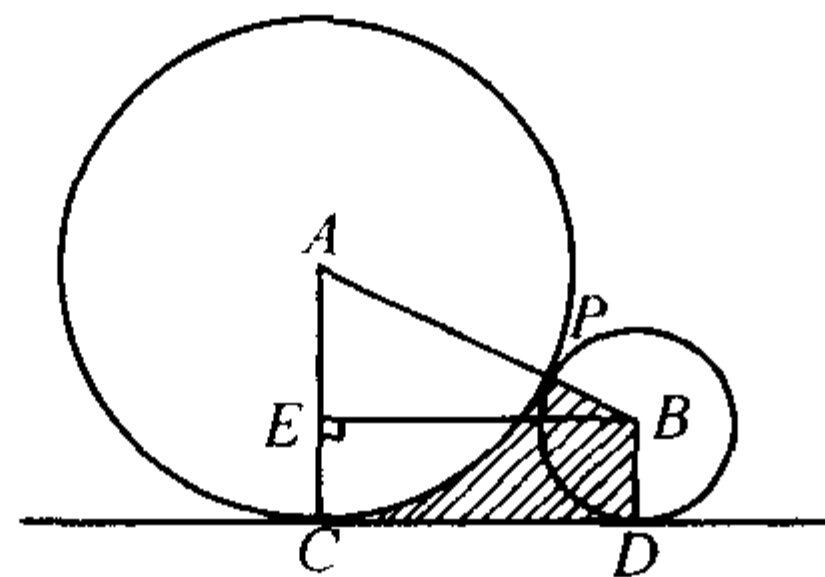


图 20-11



$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{梯形}ACDB} - S_{\text{扇形}ACP} = \frac{(CD-l)R + r \cdot CD}{2}.$$

(2) 作 $BE \perp AC$ 于 E , 由 $AB = 8, AE = 4$, 可知 $\angle ABE = 30^\circ$, $\therefore CD = AB \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$.

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 16\sqrt{3} - 6\pi (\text{cm}^2).$$

例 7 如图 20-12, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A, B , 过 A 作 $\odot O_2$ 的切线交 $\odot O_1$ 于 C , 作 $\odot O_1$ 的切线交 $\odot O_2$ 于 D . 若 $\angle CAB = 45^\circ, \angle DAB = 30^\circ$, $\odot O_2$ 的半径为 $5\sqrt{2}$, 求图中阴影部分的面积.

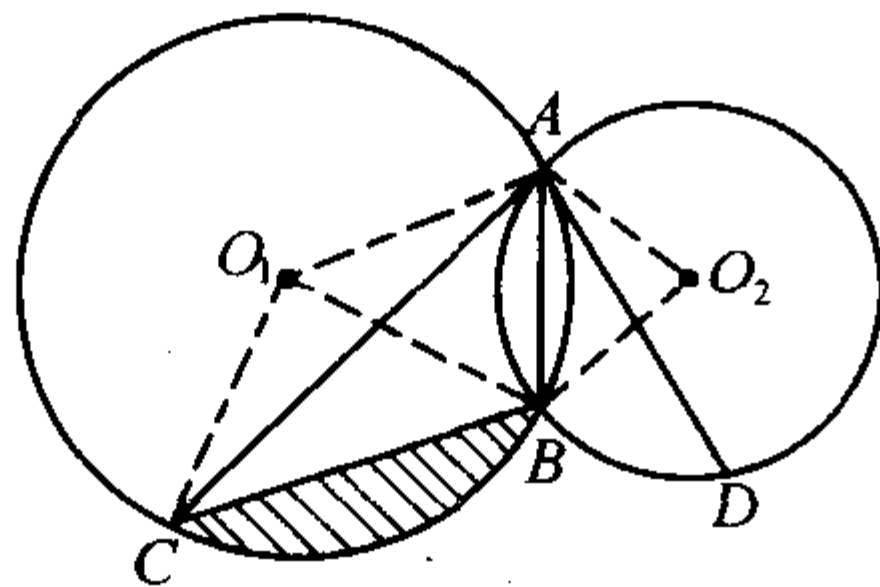


图 20-12

解 连 $O_1A, O_1B, O_1C, O_2A, O_2B$.

$\because CA$ 切 $\odot O_2$ 于 A , 且 $\angle CAB = 45^\circ$, $\therefore \angle AO_2B = 90^\circ$.

又 $\because AO_2 = 5\sqrt{2}$, $\therefore AB = 10$.

$\because DA$ 切 $\odot O_1$ 于 A , 且 $\angle DAB = 30^\circ$, $\therefore \angle AO_1B = 60^\circ$.

$\therefore AO_1 = BO_1 = CO_1 = AB = 10$.

由 $\angle CAB = 45^\circ$, 得 $\angle BO_1C = 90^\circ$.

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}BO_1C} - S_{\triangle BO_1C} = \frac{1}{4}\pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times 10^2 = 25(\pi - 2).$$

例 8 已知: 如图 20-13, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是底边 BC 上一点, E 是线段 AD 上一点, 且 $\angle BED = 2\angle CED = \angle BAC$. 求证: $BD = 2CD$.

证明 延长 AD 与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 F , 连结 CF, BF .

则 $\angle BFA = \angle ABC = \angle ACB = \angle AFC$.

即 $\angle BFD = \angle CFA$.

$\therefore BF : CF = BD : DC$.

又 $\angle BEF = \angle BAC, \angle BFE = \angle ACB, \therefore \angle BFE = \angle ABC$.

$\therefore \angle FBE = \angle FEB, \therefore EB = EF$.

作 $\angle BEF$ 的平分线交 BF 于 G , 则 $BG = GF$.

又 $\because \angle GEF = \frac{1}{2} \angle BEF = \angle CEF, \angle GFE = \angle CFE, EF = EF, \therefore \triangle EFG \cong \triangle EFC, \therefore GF = CF, \therefore BF = 2FC$. 故 $BD = 2CD$.

例 9 已知: 如图 20-14, 过 $\odot O$ 的弦 BC 的中点 A 作二弦 PQ, RS , 连结 PS, RQ 分别交 BC 于点 M, N . 求证: $AM = AN$.

分析 此题是蝴蝶定理, 证法很多. 下面只介绍一种利用圆的对称性, 通过作辅助线, 构造轴对称图形的方法来证明此题.

证明 过点 S 作 $SH \perp OA$ 的延长线于点 H , 并延长 SH 交 $\odot O$ 于点 K , 连结 AK ,

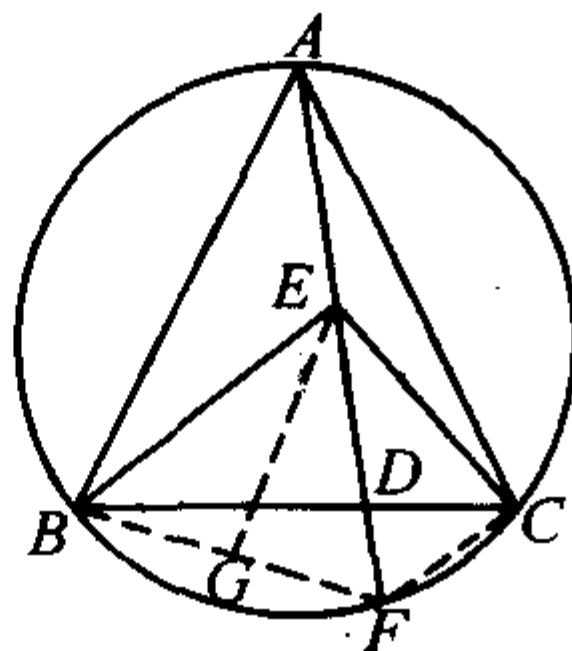


图 20-13



而 $r < OP_{k+1} < \dots < OP_{100}$, 故 $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_{99}, P_{100}$ 这 $100 - k$ 个点均在 $\odot(O, r)$ 外.

按照上述方法就可以作出合于要求的圆.

例 12 如图 20-16, 直线 AB 经过 $\odot O$ 的圆心, 且与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点, 点 C 在 $\odot O$ 上, 且 $\angle AOC = 30^\circ$, 点 P 是直线 AB 上一个动点 (与点 O 不重合), 直线 PC 与 $\odot O$ 相交于点 Q . 问是否存在点 P , 使得 $QP = QO$? 如果存在, 那么这样的点 P 共有几个? 并相应求出 $\angle OCP$ 的大小; 如果不存在, 请说明理由.

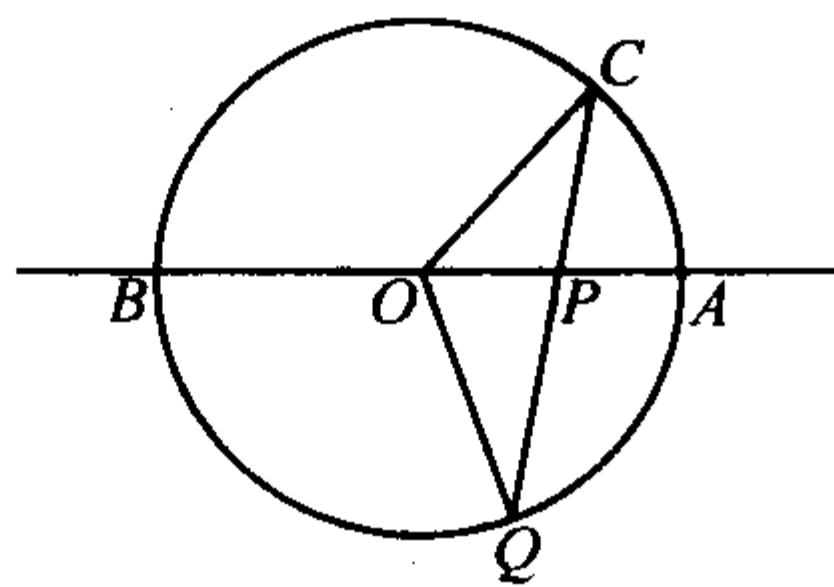


图 20-16

解 当点 P 由点 A 出发向点 O 运动时, 点 Q 随着 CP 的运动而运动. 因为点 Q 在圆上, 所以 QO 的大小始终保持不变, PQ 的长度从零开始逐步由小变大, 在某一时刻 (图 20-16), 确定存在点 P , 使 $PQ = OQ$; 点 P 再向前运动到点 O 的过程中, $QP > QO$; 当点 P 由点 O 运动到 B 点过程中 $QP < QO$; 当点 P 由点 B 出发继续向圆外运动时, PQ 又从零开始由小变大, 同样存在点 P , 使 $QP = QO$ (图 20-17); 再往外运动 $QP > QO$, 当点 P 从点 A 出发向圆外运

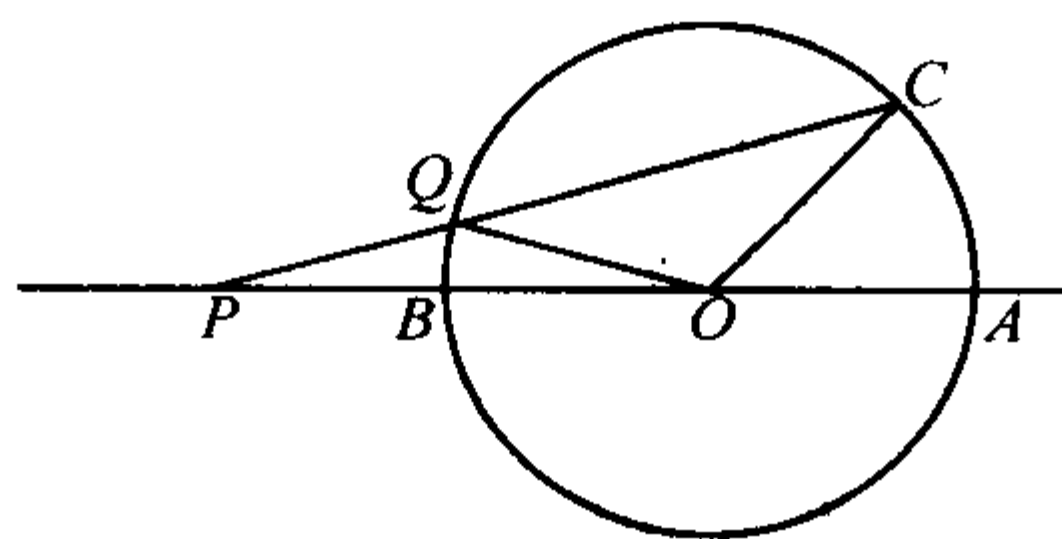


图 20-17

动时, 也存在点 P , 使 $QP = QO$, 这时点 Q 在 BC 上 (图 20-18). 这样符合条件的点共有 3 个.

显然, 如 P 点存在, 则 $OQ = OC$, $QO = QP$, 即 $\angle OQC = \angle OCQ$, $\angle QOP = \angle QPO$, 设 $\angle OCP = x$, 则:

(1) 如图 20-16, 当点 P 在线段 AO 上时, $\angle OQC = \angle OCP = x$, $\therefore \angle QPO = \frac{180^\circ - \angle OQP}{2} = \frac{180^\circ - x}{2}$.

$$\therefore \frac{180^\circ - x}{2} = x + 30^\circ, \therefore x = 40^\circ.$$

(2) 如图 18-17, 当点 P 在 OB 的延长线上时, $\angle OQC = \angle OCQ = x$.

$$\therefore 30^\circ = x + \frac{1}{2}x. \therefore x = 20^\circ.$$

(3) 如图 18-18, 当点 P 在 OA 的延长线上时, 则

$$180^\circ - x = \frac{1}{2}x + 30^\circ. \therefore x = 100^\circ.$$

(4) 当点 P 在线段 OB 上时, $PQ > QO$. 所以符合要求的点 P 不存在.

说明 1. 运用数形结合的思想, 用建立方程的方法将几何问题转化为代数问题.

2. 本题三种可能结果的导出, 实际上是一种构造命题的方法, 也是展示一种数学的

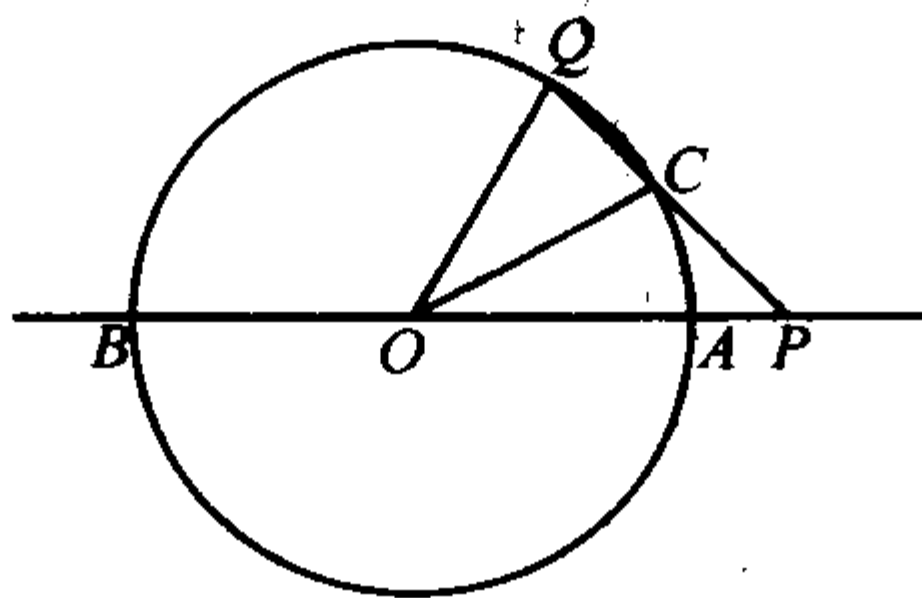


图 20-18



创造过程. 在本例的解题过程中, 三种情况的解法虽有所不同, 但其思考方法相同——类比.



【能力训练】

一、选择题

1. 四边形 $ABCD$ 内接于圆, AD 为圆的直径, 且 $AD = 8$, $AB = BC$, $CD = 7$, 则 AB 的长为().

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}$

2. 已知 $\odot O$ 中, 弦 AB, CD 交于 E 点, 且 $\widehat{AC} = \widehat{CB} = \widehat{BD}$, 若 $\angle AED = 130^\circ$, 则 $\angle ACD$ 的度数是().

- (A) 95° (B) 100° (C) 105° (D) 110°

3. 已知在 $\odot O$ 中, 直径 AB 为 24cm , M 是 OB 中点, 过 M 点作 CD 与 AB 所夹的角为 30° , 则弦 CD 的长是().

- (A) $6\sqrt{3}\text{cm}$ (B) $6\sqrt{5}\text{cm}$ (C) $6\sqrt{10}\text{cm}$ (D) $6\sqrt{15}\text{cm}$

4. 已知在 $\odot O$ 中, AB, AC 是弦, D 是 \widehat{AB} 的中点, E 是 \widehat{AC} 的中点, 连结 DE 交 AB, AC 于 M, N 点, 则 $\triangle AMN$ 是().

- (A) 斜三角形 (B) 直角三角形
(C) 等腰三角形 (D) 等边三角形

二、填空题

5. 圆内接四边形中, $AB = 25$, $BC = 39$, $CD = 52$, $DA = 60$, 则 AC 的长为_____.

6. 如图 20-19, PA 切 $\odot O$ 于 A , PO 延长后交 $\odot O$ 于 B , PC 是 $\angle APB$ 的平分线, 交 AB 于 C , 则 $\angle PCA$ 的度数是_____.

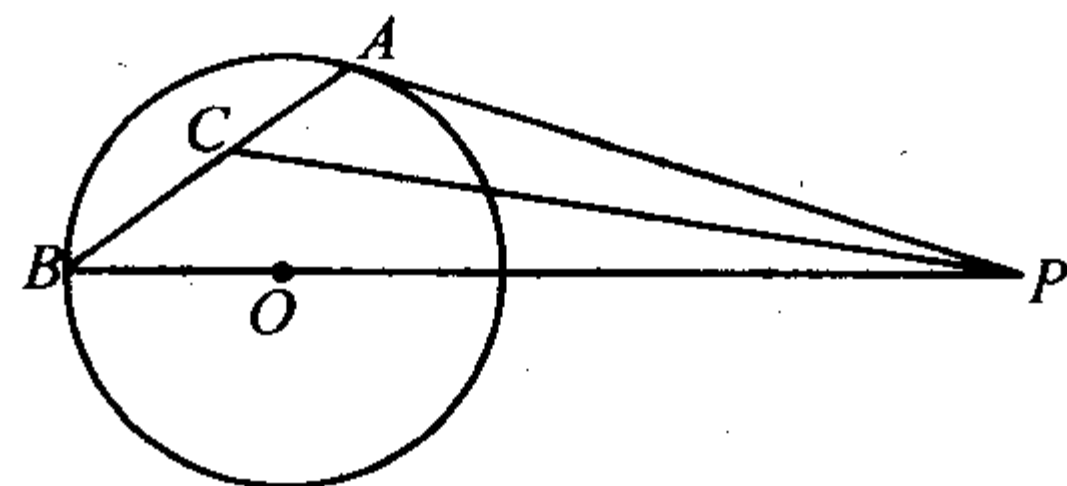


图 20-19

7. 在直径 AB 为 $\sqrt{7}$ 的圆上有两点 M, N , M 和 N 在 AB 同侧, AM 与 BN 交于圆内一点 P , 则 $AP \cdot AM + BP \cdot BN =$ _____.

8. 若圆外某点到该圆的最长距离是它到该圆最短距离的 3 倍, 且最长距离为 18cm , 则此圆的半径长为_____.

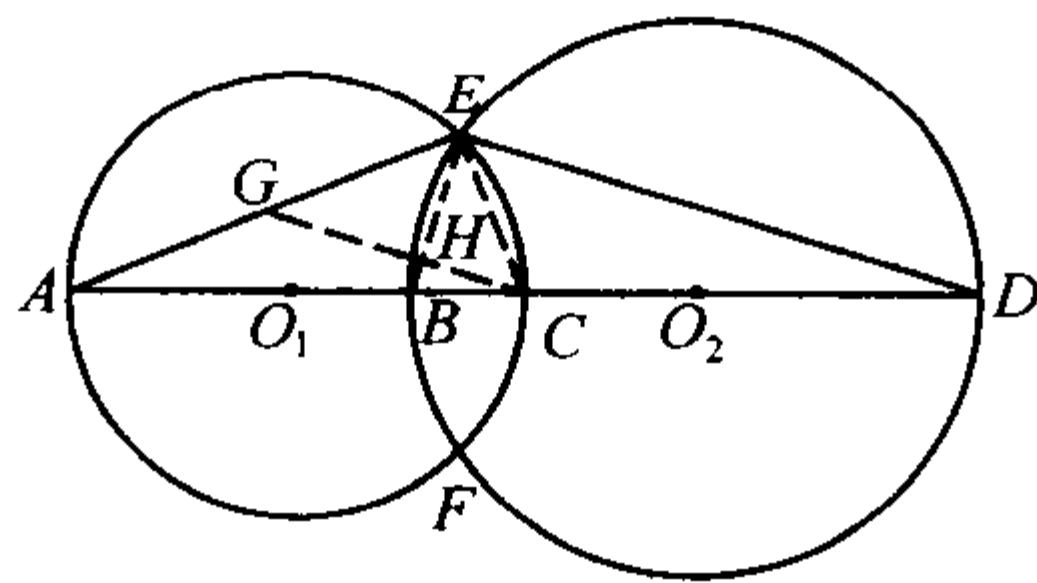


图 20-20

三、解答题

9. 如图 20-20, 直线上按顺序有四个点 A, B, C, D 且 $AB:BC:CD = 2:1:3$, 分别以 AC, BD 为直径的 $\odot O_1$,



$\odot O_2$ 两圆交于 E, F . 求 $ED:EA$ 的值.

10. 如图 20-21, $\angle AOX = 90^\circ$, $OX \parallel AY$, $OA = 1\text{cm}$, \widehat{AB} 是 $\odot O$ 的一部分, \widehat{BC} 是 $\odot A$ 的一部分, 求阴影部分的周长和面积.

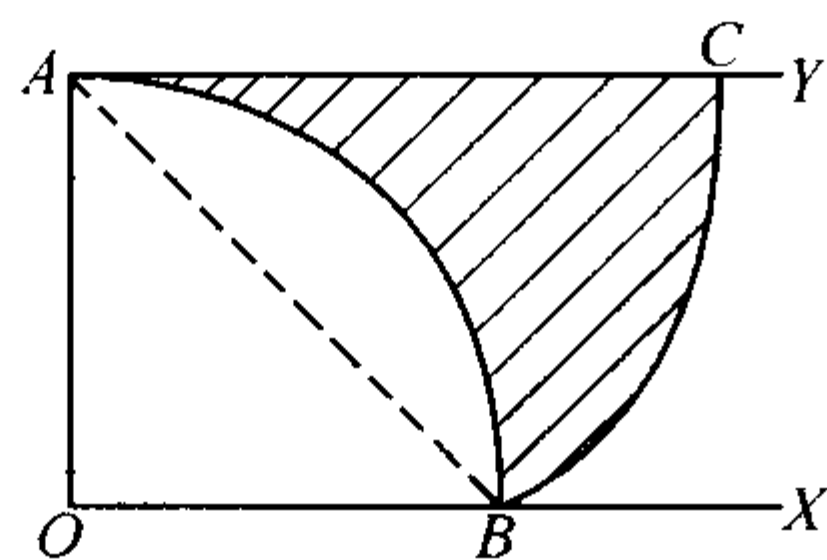


图 20-21

11. 如图 20-22, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 P , Q 是过 P 的公切线上任一点, QAB 和 QDC 分别是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的割线, P 在 AB, AD 和 DC 上的射影分别为 E, F, G . 求证: $\angle BPC = \angle EFG$.

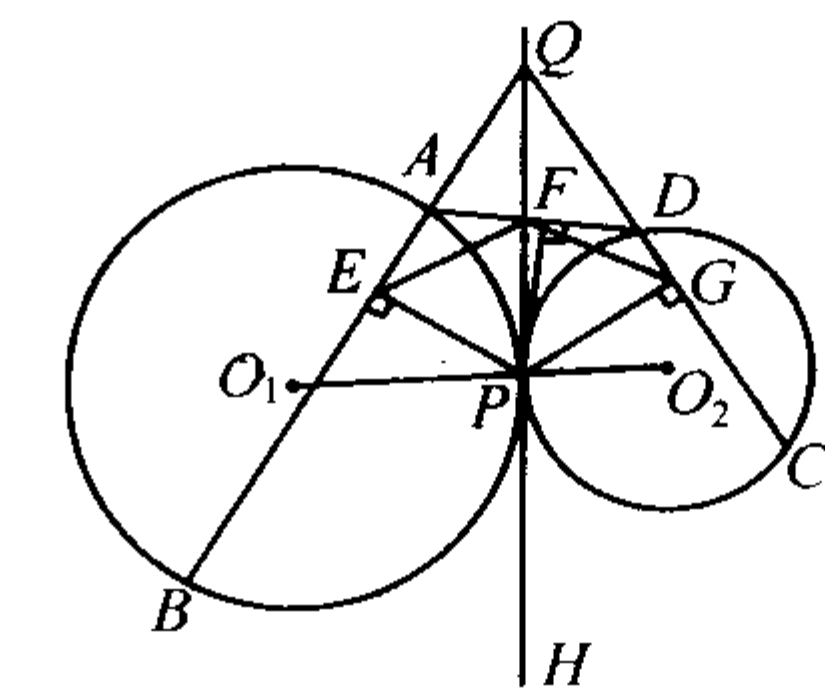


图 20-22

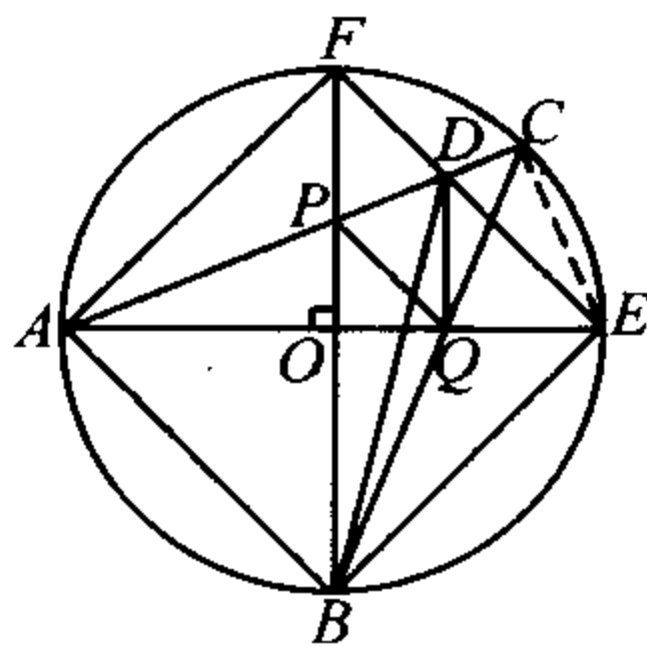


图 20-23

12. 如图 20-23, 在半径为 1 的 $\odot O$ 中引两条互相垂直的直径 AE 和 BF . 在 \widehat{EF} 上取点 C , 弦 AC 交 BF 于 P , 弦 CB 交 AE 于 Q . 求证: 四边形 $APQB$ 的面积是 1.



二十一、圆柱、圆锥、圆台



【赛点目标】

1. 了解矩形(以一边为轴)旋转成圆柱、直角三角形(以直角边为轴)旋转成圆锥、直角梯形(以垂直于底的腰为轴)旋转成圆台,理解圆柱、圆锥、圆台的底面、高线、母线等有关概念,进一步培养空间想像能力.

2. 了解圆柱的轴截面是矩形,圆锥的轴截面是等腰三角形,圆台的轴截面是等腰梯形.平行于圆柱、圆锥、圆台底面的截面是圆,进一步学会空间与平面之间的转化.

3. 掌握圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图和侧面积公式,会画侧面展开图,会求圆锥、圆台的侧面展开图所在扇形的圆心角,会计算上述图形的侧面积和全面积.



【方法述要】

1. 能应用圆柱、圆锥、圆台的有关概念,直接进行判断、计算、作图.

2. 在理解圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式的基础上,巩固空间想像能力,应用“数形结合”的思想方法,进行简单的计算.

3. 在旋转体的计算过程中,要能善于将空间图形转化成平面图形,如通过轴截面将圆柱转化成矩形,圆锥转化成等腰三角形,圆台转化为等腰梯形;或者通过侧面展开图来实现空间向平面的转化,如圆柱的侧面展开图是矩形,圆锥侧面展开图是扇形,圆台的侧面展开图是扇环(其中弧长为底面的周长).

4. 在应用公式进行计算的过程中,通常需要根据已知条件及所求的元素进行公式变形,在公式变形中特别要注意空间与平面图形转换中的量的变化.

5. 在解决圆台的问题时,通常还需将轴截面的等腰梯形分成一半——直角梯形来解决一部分问题.空间图形在向平面图形转化中,通常用“勾股定理”来构造一个方程,求出相应的元素.我们还可以将柱、锥、台的侧面积公式统一成台的侧面积公式来帮助识记.



【赛题精讲】

例 1 已知一个圆锥的轴截面是正三角形,底面半径为 6cm ,另一个圆锥的轴截面是直角三角形,底面半径是 8cm ,分别求这两个圆锥的高线长,并比较它们的母线的长.

解 本题中有两个圆锥,在计算前首先应将轴截面为正三角形的圆锥称为圆锥



A, 另一个则为圆锥 B, 然后分别求出要比较的对象的长即可. 对于圆锥 A, 知道轴截面为正三角形, 所以 $r_A = 6\text{cm}$, $l_A = 2r_A = 12\text{cm}$, 如图 21-1 所示, 应用 $r_A^2 + h_A^2 = l_A^2$, 可得 $h_A = 6\sqrt{3}(\text{cm})$. 对于圆锥 B, 知道轴截面是直角三角形, 因而直角为顶角(可尝试将直角放在底角, 想一想为什么?). 故有 $r_B = 8$, $l_B = \sqrt{2}r_B = 8\sqrt{2}\text{cm}$, 应用 $r_B^2 + h_B^2 = l_B^2$ 可得 $h_B = 8(\text{cm})$, 故母线之比为: $l_A : l_B = 12 : 8\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$, 则 $l_B < l_A$

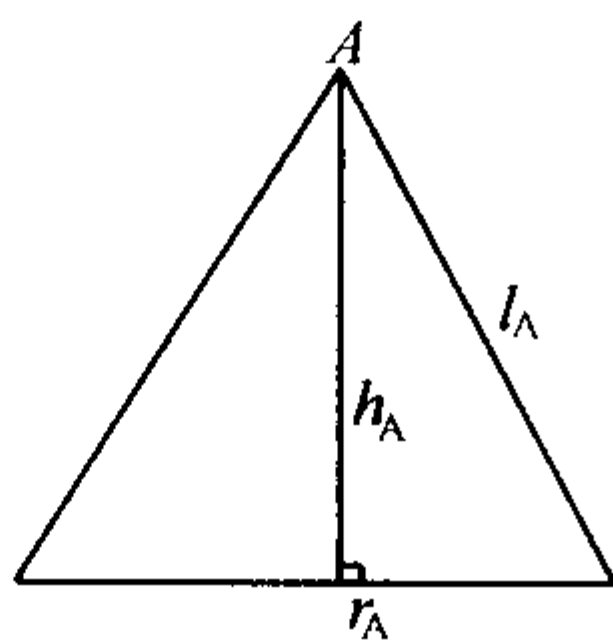


图 21-1

例 2 圆锥的高为 $\frac{32}{3}\text{cm}$, 侧面展开图的中心角为 216° , 用平行于底面的平面去截圆锥, 若截得的圆台有内切球, 求圆台的侧面积.

解 如图 21-2, 设圆锥底面半径为 R , 母线长为 l , 球半径为 r , $\frac{R}{l} \cdot 360^\circ = 216^\circ$, $l = \frac{5}{3}R$, $l^2 - R^2 = h^2$, $\frac{25}{9}R^2 - R^2 = \frac{32^2}{9}$, $R = 8$, $l = \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3}$, $\frac{r}{R} = \frac{l - R - r}{l}$, $r = 2$.

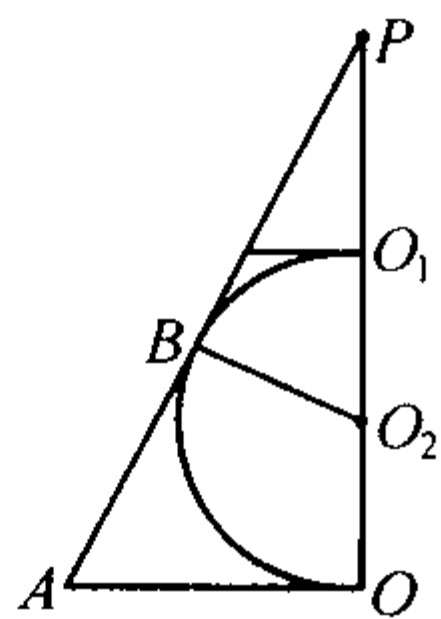


图 21-2

$$S_{\text{台}} = \pi(R + r)^2 = \pi(8 + 2)^2 = 100\pi.$$

例 3 已知圆环大圆半径为 16, 小圆半径为 10, 用这个圆环可以做成几个母线长为 6, 下底半径与上底半径之差为 2 的圆台侧面?

解 本题的关键是求得符合条件的圆台侧面展开图的圆心角 θ , 而依据公式可知, 求 θ 角的度数的重点必须得到母线 l 及圆台的半径之差 $R - r$. 根据题意得: $R - r = 2$, $l = 6$, 公式为 $\theta = \frac{R - r}{l} \cdot 360^\circ$, 求得 $\theta = 120^\circ$, 而圆环整个圆周为 360° , 故得圆环可分成 120° 的三个部分, 其中圆环的半径之差为 $16 - 10 = 6$ 恰好是圆台的母线长, 因而得到符合条件的圆台侧面可做 3 个.

例 4 已知圆台的上、下底面半径之比为 2:3, 母线长是 10cm , 侧面积是 $50\pi\text{cm}^2$, 求圆台的高线长.

解 设圆台的上底面半径为 $2x\text{cm}$, 则下底面半径为 $3x\text{cm}$, 由圆台的侧面积公式得: $\pi(2x + 3x) \cdot 10 = 50\pi$, 解这个方程得 $x = 1$.

\therefore 下底面半径 - 上底面半径 = 1cm .

设圆台的高线长为 $h\text{cm}$, 则 $h = \sqrt{10^2 - 1^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$.

\therefore 高线长为 $3\sqrt{11}\text{cm}$.

例 5 圆台的上、下底面面积为 S_1 、 S_2 . 求平行于底面并将圆台的高分成距上、下底面之比为 $m:n$ 的截面面积.



解 设圆台轴截面的母线的延长线交于点 P , P 到上底面距离为 x , 截面到上、下底面距离为 mh, nh , (h 为比例常数), 由旋转体的性质, 得:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x+mh}{x}, \\ \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x+(m+n)h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}} = \frac{mh}{x}, \\ \frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}} = \frac{(m+n)h}{x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2}, \text{ 得 } \sqrt{S} = \frac{m\sqrt{S_2} + n\sqrt{S_1}}{m+n}.$$

$$\therefore \text{ 所求截面面积 } S = \left[\frac{m\sqrt{S_2} + n\sqrt{S_1}}{m+n} \right]^2.$$

说明 在解决有关台体(棱台、圆台)计算或证明题目, 往往把台体补成锥体, 利用中截面的性质 $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ 寻找解题途径.

例 6 一个圆锥的高为定值 h , 圆锥顶角的大小可以变化, 球 C_1 是圆锥的一个内切球, 球 C_2 是与圆锥侧面及球 C_1 都相切的球, 求当球 C_1 的半径 R 为何值时, 球 C_2 的表面积最大, 并求出这个最大值.

解 作出该圆锥的轴截面, 如图所示, 设球 C_2 的半径为 r ,

\because 圆锥的高为 h ,

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{h-2R-r}{h-R} \Rightarrow r = \frac{Rh-2R^2}{h} = -\frac{2}{h} \left(R - \frac{h}{4} \right)^2 + \frac{h}{8}.$$

故当 $R = \frac{h}{4}$ 时, r 取最大值 $\frac{h}{8}$, 此时球 C_2 取最大表面积 $4\pi \left(\frac{h}{8} \right)^2 = \frac{\pi h^2}{16}$.

说明 本例 $\angle ASB$ 是可变的, 若将问题改为 $\angle ASB$ 多大时, 球 C_2 表面积最大, 这时直接求较难, 如按此法转化为求 R 和 SC_1 后, 再去求 $\sin \angle C_1 SB$ 较易, 这种转化思想应随时注意使用.

例 7 如图 21-4, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC = CD = 10$, $AB = 15$, $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $\angle A = 60^\circ$, 把四边形 $ABCD$ 绕直线 AB 旋转一周, 求所得几何体的表面积.

解 四边形 $ABCD$ 绕直线 AB 旋转一周得到的几何体是圆锥与圆柱的合成体. 我们可以过点 D 作 $DE \perp AB$ 交 AB 于点 E , 要得到几何体的表面积只需求得绕 AE 旋转得到圆锥的侧面积与绕 BE 旋转得到的圆柱的侧面积与一个底面积, 求得它们的和即为所求的表面积. 由于 $BC = CD = 10$, 则圆柱的 $S_{\text{侧}} = 2\pi \cdot BC \cdot CD = 200\pi$, $S_{\text{底}} = \pi \cdot BC^2 = 100\pi$, 又因为 $ED = BC = 10$ (为什么?), 圆锥的 $S_{\text{侧}} = \pi \cdot BC \cdot AD$, 已知 $AE = AB - BE = 15 - 10 = 5$, (BE 为什么是 10?), $DE \perp BE$, 由勾股定理得: AD

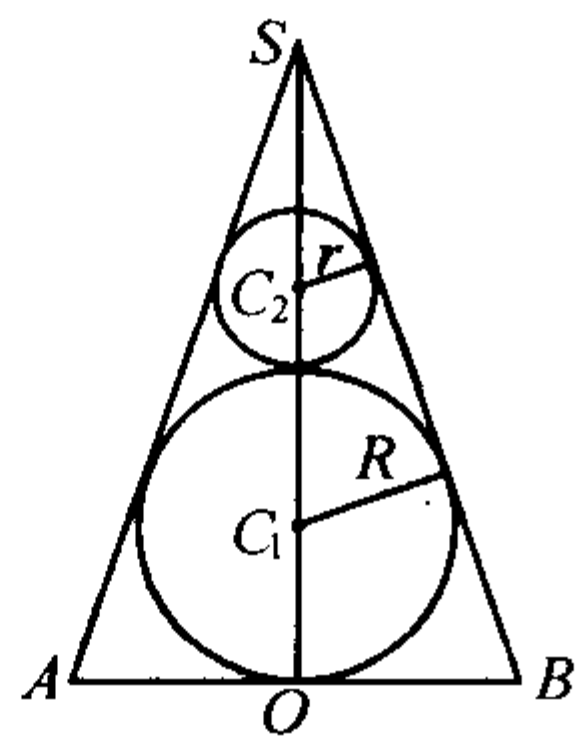


图 21-3

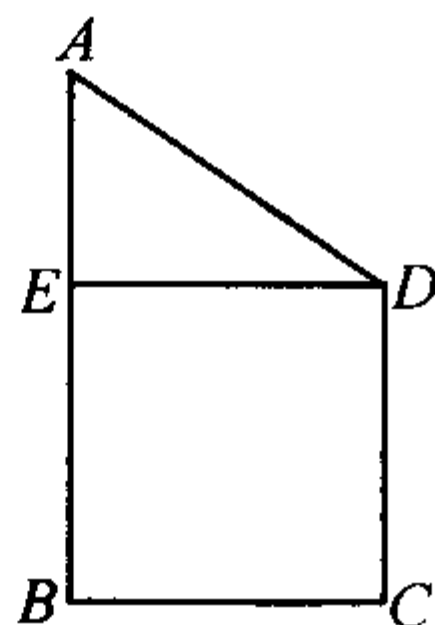


图 21-4



$= \sqrt{AE^2 + DE^2} = 5\sqrt{5}$, 所以得圆锥的 $S_{\text{侧}} = 50\sqrt{5}\pi$, 那么几何体的表面积为 $50(6 + \sqrt{5})\pi$.

例 8 若圆台的上、下底面半径分别为 r 和 R , $R = 3r$, 经过高线的中点画平行于底面的截面, 如图 21-5, 这个截面把圆台的侧面分成两部分, 求这两部分的面积比.

解 分析题意可得, 要比较侧面积的大小, 必须知道母线及底面的半径. 由于圆台的轴截面是梯形, 因而符合题意经过高线的中点且平行于底面的平面去截圆台, 此截面的直径为梯形的中位线, 而梯形的中位线又平分梯形的两腰即母线, 故上下圆台的母线长相等, 可设为 l .

而中位线长为 $(R + r) = 4r$, 故半径 $R' = 2r$, 所以可得上圆台的侧面积为 $S_{\text{上}} = \pi(r + R')l = 3\pi rl$, 下圆台的侧面积为 $S_{\text{下}} = \pi(R + R')l = 5\pi rl$, 所以两部分的侧面积之比为 $3:5$. (可尝试求表面积之比值 $\frac{5+2\sqrt{2}}{17}$)

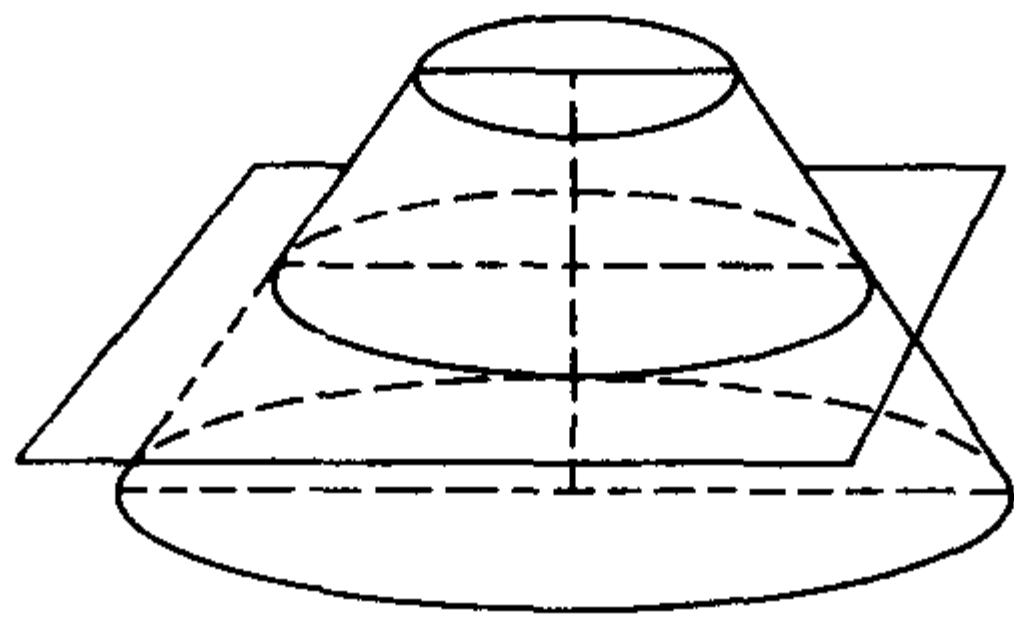


图 21-5

例 9 在半径为 R 的球内作一内接圆柱, 这个圆柱的底面直径和高为何值时, 它的侧面积最大? 最大值是多少?

解 如图 21-6, 设内接圆柱底面半径为 r , $0 < r < R$, 则 $S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi\sqrt{r^2(R^2 - r^2)} = 4\pi\sqrt{\frac{R^4}{4} - \left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2}$.

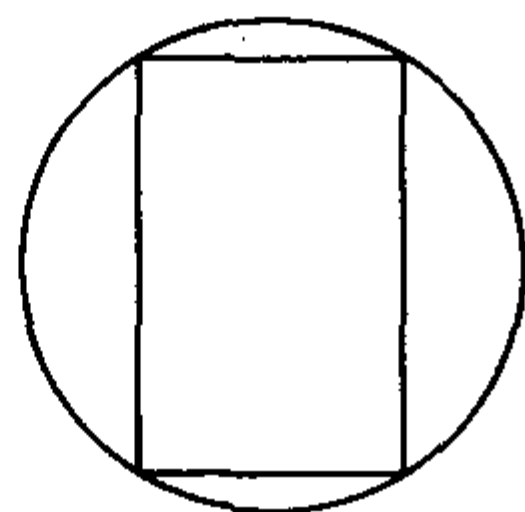


图 21-6

当 $r^2 = \frac{R^2}{2}$, 即 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R \in (0, R)$, 圆柱有最大的侧面积 $2\pi R^2$, 此时高为 $2\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{2}R$.

例 10 一扇形铁皮 AOB , 半径 $OA = 72\text{cm}$, 圆心角 $\angle AOB = 60^\circ$, 现剪下一个扇环 $ABCD$ 做圆台形容器的侧面, 并从剩余的扇形 COD 内剪下一个最大的圆刚好做容器的下底(圆台下底面大于上底面)(图 21-7), 则 OC 应取多少?

解 设 $OC = x\text{cm}$, 圆台下底面半径为 r , 即 $O_1M = r$, $\angle CON = \frac{1}{2}\angle AOB = 30^\circ$,

$$\therefore OO_1 = 2O_1M = 2r, ON = OO_1 + O_1N = 3r.$$

$$\therefore r = \frac{1}{3}x. \text{ 由 } 2\pi r \text{ 与 } \widehat{AB} \text{ 长相等得 } 2\pi r = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 72,$$

$$\therefore r = 12, \text{ 故 } x = 3r = 36(\text{cm}). \text{ 即 } OC \text{ 应取 } 36\text{cm}.$$

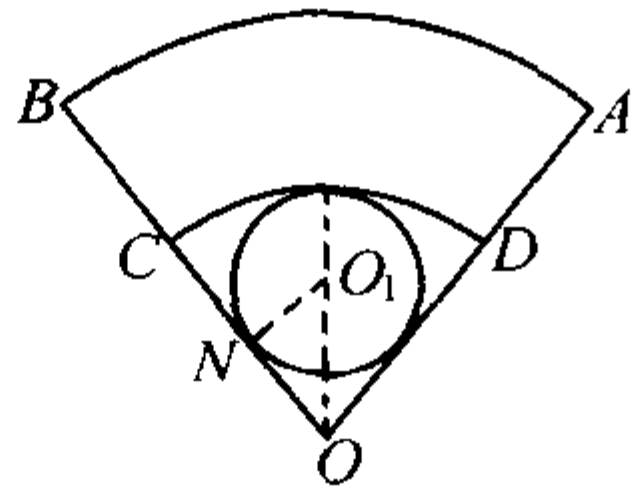


图 21-7

例 11 如图 21-8, 圆台上、下底面半径分别为 1cm 、 2cm , 母线长等于下底面半径的 2 倍, 若动点 P 在圆台的侧面上运动, 求动点 P 自点 A 出发到 B_1 点处的最短路程.

解 如图 21-9, 将圆台的侧面沿母线 A_1A 处展开并补成扇形 SAA' , 显然, 在扇形



A, B_1 两点间距离即是在圆台侧面上动点 P 自 A 点出发到 B_1 点处的最短路程, 设圆台的上、下底面半径分别为 r, R .

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{SA_1}{SA},$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{SA_1}{SA_1 + 4}, \therefore SA_1 = 4(\text{cm}), SA = 8(\text{cm}),$$

$$\angle A'SA = \frac{2\pi R}{SA} = \frac{\pi}{2}, \angle BSA = \frac{\pi}{4},$$

在 $\triangle SAB_1$ 中, $SB_1 = SA_1 = 4$, 由余弦定理得: $AB_1 = 4\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}(\text{cm})$.

例 12 圆锥 $S-AB$ 的底面半径为 R , 母线长 $SA = 3R$, D 为 SA 的中点, 一个动点自底面圆周上的 A 点, 沿圆锥侧面移动到 D 点, 求这点移动的最短距离.

解 如图 21-10, 沿圆锥母线 SA 剪开展成平面图形, 则 AD 最短.

$$\therefore \angle ASD = \frac{r}{l} \times 360^\circ = \frac{R}{3R} \times 360^\circ = 120^\circ,$$

\therefore 由余弦定理, 得:

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{SA^2 + SD^2 - 2SA \cdot SD \cdot \cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{(3R)^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 - 2 \cdot 3R \cdot \frac{3}{2}R \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{7}}{2}R. \end{aligned}$$

说明 1. 将几何体展成平面图形后, 弄清几何体中的有关点、线在展开图中的相应位置关系是关键;

2. 空间图形求表面上折线段最小值时, 解决的方法就是把各侧面展开铺在平面上, 根据“平面内连结两点的线中线段最短”的方法来解决.



【能力训练】

一、选择题

1. 一个圆锥的侧面展开图刚好是一个半圆, 则这个圆锥的轴截面等腰三角形的顶角是().
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°
2. 如果圆台的上、下底面半径与母线长的比为 $1:2:2$, 则轴截面中母线与下底面半径所成的角为().
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°
3. 一个圆柱与圆锥的侧面积之比是 $3:2$, 且母线长相等, 那么圆柱与圆锥的底面积

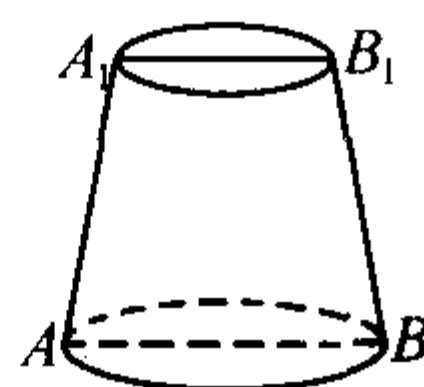


图 21-8

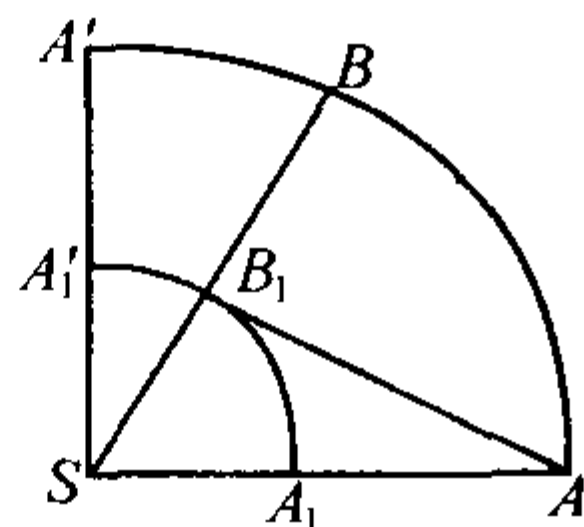


图 21-9

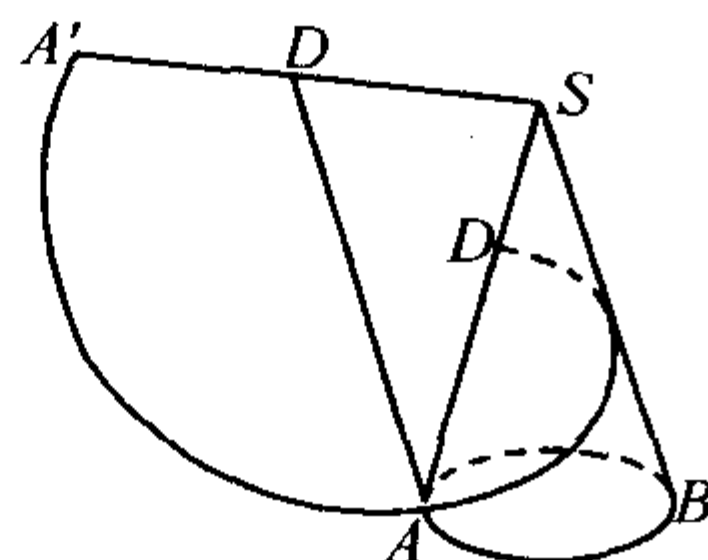


图 21-10



之比是().

(A)3:2

(B)3:4

(C)9:16

(D)9:4

4. 圆柱 A 的高线长 h , 半径是 r ; 圆柱 B 的高线长 $\frac{h}{2}$, 半径是 $2r$; 圆柱 C 的高线长是 $2h$, 半径是 $\frac{r}{2}$. 试比较它们表面积, 比较的结果是().

(A) $S_{A表} > S_{B表} > S_{C表}$

(B) $S_{B表} > S_{C表} > S_{A表}$

(C) $S_{B表} > S_{A表} > S_{C表}$

(D) $S_{A表} > S_{C表} > S_{B表}$

二、填空题

5. 圆柱的底面面积为 Q , 轴截面面积为 P , 则此圆柱的体积为_____.

6. 圆锥轴截面 AOB 的顶角 $\angle AOB = 60^\circ$, 母线长为 5cm , 在圆锥面上, A 到母线 OB 的最短距离是_____.

7. 半球内有一内接正方体, 则这半球的全面积与正方体的全面积之比为_____.

8. 设圆柱的轴截面的对角线长为定值 l , 为使圆柱的侧面积最大, 轴截面的对角线与底面所成的角应是_____.

三、解答题

9. 已知圆锥体的底面半径为 R , 高为 h , 内接于这个圆锥的圆柱的高为 x , 当 x 为何值时, 圆柱的体积最大并求出这个体积.

10. 圆锥底面半径为 1cm , 高为 $\sqrt{2}\text{cm}$, 求它的内接正方体的棱长.

11. 母线长为 1 的圆锥体积最大时, 求侧面展开图圆心角 φ .

12. 已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍, 求该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角.



二十二、正、反比例函数与一次函数



【赛点目标】

1. 能了解平面直角坐标系的概念,熟悉点的坐标的特征,接触数形结合的思想.
2. 在理解常量、变量、函数等知识的基础上,能直接应用这些知识判断函数的不同表示方法,掌握求函数值及自变量的取值范围的方法.
3. 在掌握正比例函数、一次函数的概念基础上,能利用它们的解析式、图像、性质三者之间的对应关系进行判断、计算、作图,并解决与正比例函数、一次函数有关的简单的实际问题.
4. 能理解反比例函数的概念和性质,会画反比例函数的图像.
5. 会应用反比例函数的有关知识及性质,确定图像在平面直角坐标系中的位置,反之亦然.会用待定系数法和实际问题的变量关系确定反比例函数的解析式.
6. 能利用反比例函数的解析式、图像、性质及其他有关知识,分析和解决具有一定综合性的数学问题和实际问题,使学生体验客观事物是互相联系又互相制约的.



【方法述要】

1. 会建立平面直角坐标系,并熟记平面上四个象限及坐标轴上的点的坐标的特征,能迅速正确地做到见点写出坐标,由坐标描出点的位置.
2. 能理解函数的实质是两个变量之间的关系,并能及时找到函数表达式中的常量与变量、函数与变量、变量与变量之间的因果关系,同时结合代数式的意义,找出自变量取值范围的规律.了解常量与变量,函数与自变量之间的辩证关系.
3. 抓住正比例函数与一次函数的特征及它们的联系与区别,并利用这些特征分清图像、性质、解析式三者之间的互动关系,分析和解决与它们有关的较综合性的数学问题和简单的实际问题,从而揭示数形结合分类讨论等思想及方法.
4. 通过反比例函数的概念,进一步理解自变量的取值范围及函数值的意义.
5. 会根据函数图像的形状及在直角坐标轴的位置,确定出函数解析式的结构及各解析式中系数的符号,并能结合函数值与自变量取值之间的对应关系来解决有关数形结合的问题.
6. 会用图像上的点、实际问题中的变量关系以及图像的形状和位置或具有的性质等各种条件,灵活运用转化、分类讨论和方程等思想方法,用待定系数法来确定反比例



函数的解析式.



【赛题精讲】

例 1 已知 $y = (m^2 - 4m + 3)x^{m^2 - 3m + 1}$, m 为何值时: (1) y 为正比例函数; (2) y 为反比例函数; (3) y 为二次函数.

解 (1) y 为正比例函数 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 1 = 1, \\ m^2 - 4m + 3 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $m = 0$.

(2) y 为反比例函数 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 1 = -1, \\ m^2 - 4m + 3 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $m = 2$.

(3) y 为二次函数 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 1 = 2, \\ m^2 - 4m + 3 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $m = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

例 2 万有引力定律说: F 与 m_1, m_2 的乘积成正比例, F 与 d 的平方成反比例. 当 F 与 m_1, m_2 成正比又与 d^2 成反比联系起来一块考虑当如何? 这些语言都如何表示?

解 (1) F 与 m_1, m_2 的乘积成正比例, 即 $F = k_1 m_1 m_2$, 其中 k_1 是比例系数;

(2) F 与 d 的平方成反比例, 即 $F = \frac{k_2}{d^2}$, 其中 k_2 是比例系数.

(3) F 与 M 成正比例又同时与 D 成反比例, 即 $F = k \frac{M}{D}$, 故 $F = k \frac{m_1 m_2}{d^2}$, 其中 k 是比例系数.

说明 只要一个比例系数 k 即可.

例 3 已知 $f_1(x)$ 是正比例函数, $f_2(x)$ 是反比例函数, 且 $\frac{f_1(1)}{f_2(1)} = 2$, $f_1(2) + 4f_2(2) = 6$, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的图像的交点设为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求直线 $f_1(x) = k_1 x$, $x = x_1, x = x_2$, 及 x 轴所围成的图形的面积.

解 设 $f_1(x) = k_1 x$, $f_2(x) = \frac{k_2}{x}$, 则

$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_2} = 2 \\ 2k_1 + \frac{4k_2}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2, \\ k_2 = 1. \end{cases}$$

所以 $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

由 $\begin{cases} y = 2x, \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ 消去 y , 得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $y = \pm \sqrt{2}$.

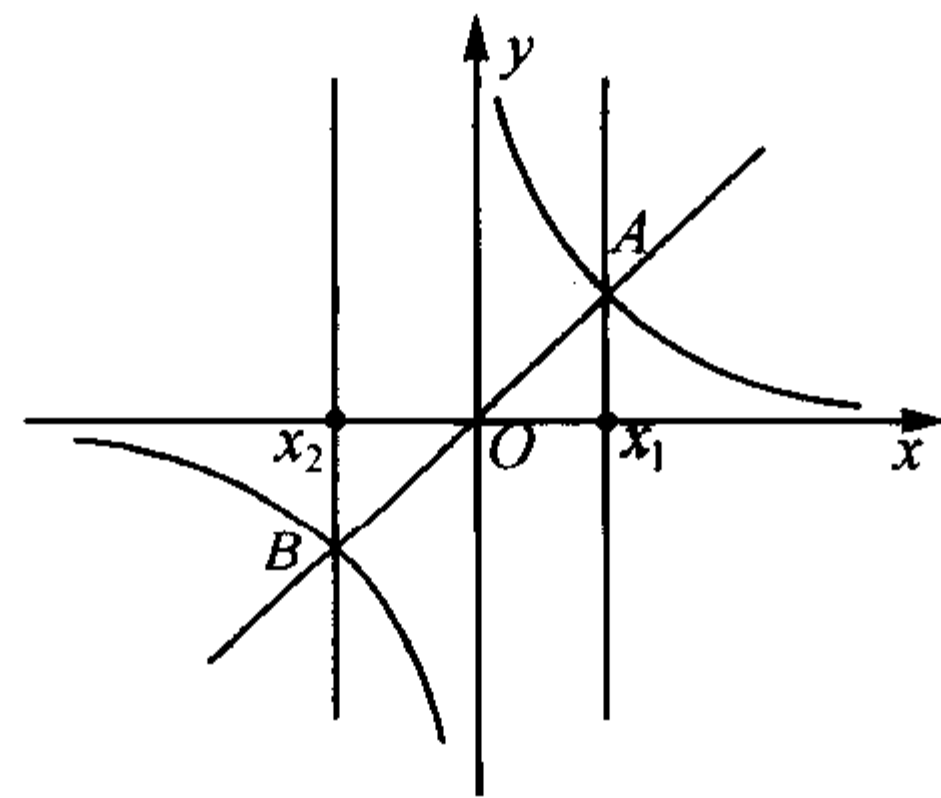


图 22-1



所以交点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

所以 $S = 2 \times \left(\frac{1}{2} |x| |y|\right) = |xy| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$.

例 4 如图22-2, 已知 $\odot O$ 的半径为 3, PA 切 $\odot O$ 于 A , $PA = 4$, PBC 为 $\odot O$ 的割线, 设 $PB = x$, $PC = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并求自变量 x 的取值范围.

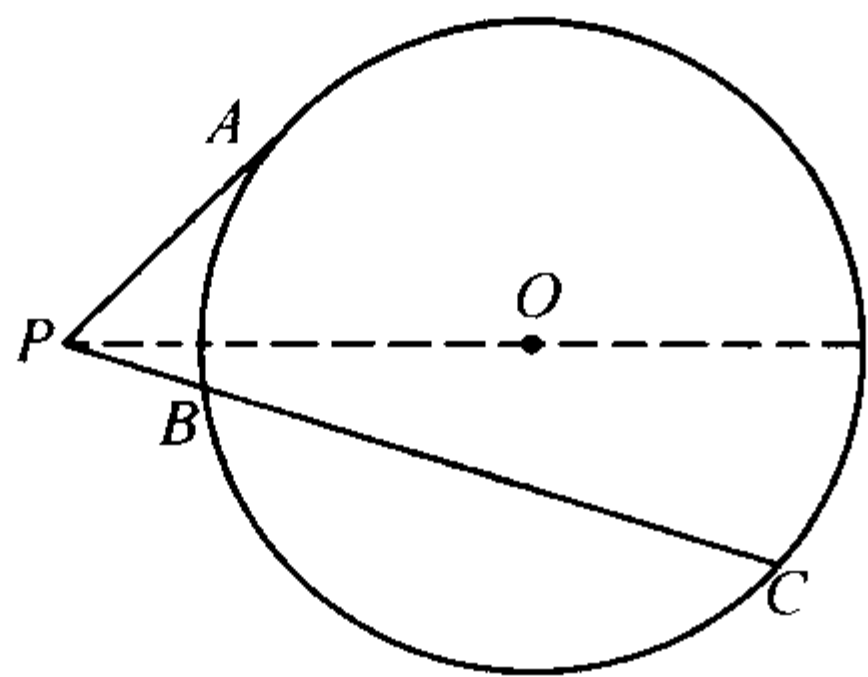


图 22-2

解 本例是以线段 PB , PC 为变量, 求函数的解析式问题. 由已知条件不难利用切割线定理求出解析式: $y = \frac{16}{x}$. 求自变量 x 的取值范围, 是个难点. 一般对于这类问题, 首先想法是让 B 点在 $\odot O$ 上移动, 不难发现: 点 B 移到点 A 或移到使得 PB 为切线的位置时, PB 为最长, 故有 $PB < 4$, 而点 B 移到 BC 是条直径, 即 PBC 过圆心时, PB 为最短, 此时 $PB = PO - OB$, 而求得 $PO = \sqrt{PA^2 + OA^2} = 5$, 所以 $PB = 5 - 3 = 2$, 因而得 $2 \leq PB < 4$, 即为 $2 \leq x < 4$. 可以考虑为什么结果不是 $2 \leq x \leq 4$ 呢?

例 5 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上有一点 A , 它的横坐标 n 使方程 $x^2 - nx + n - 1 = 0$ 有两个相等的实根. A 与 $B(1, 0)$, $C(4, 0)$ 为顶点的三角形面积等于 6, 求反比例函数的解析式.

解 综观整个题目, 要求解析式的关键是求出点 A 的坐标, 然后用“待定系数”求出系数, 即可求得解析式. 分析题意可从点 A 的横坐标 x_A 是使方程 $x^2 - nx + n - 1 = 0$ 有两个相等的实根入手, 得 $\Delta = (-n)^2 - 4 \times 1 \times (n - 1) = 0$, 可得 $n = 2$. 由 $S_{\triangle ABC} = 6$, 其中由已知 $BC = 3$ 及高线是点 A 的纵坐标 y_A , (想一想三角形 ABC 的高线为什么是 A 点的纵坐标?) 这样就得到: $\frac{1}{2} \times 3 \times |y_A| = 6$, $\therefore y_A = \pm 4$, 进而得到点 A 的坐标为 $(2, 4)$ 或 $(2, -4)$, 将点 A 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 可得: $\pm 4 = \frac{k}{2}$, $\therefore k = \pm 8$, 则解析式为: $y = \frac{8}{x}$ 或 $y = -\frac{8}{x}$.

例 6 设一次函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 有一组对应值 $x = \sqrt{2}$, $y = 0$. 试证明 $y = ax + b$ 不能有二组以上有理数的对应值.

证明 (利用反证法) 假如 $y = ax + b$ 存在两组不同的有理数的对应值 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 则

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}ax_1 + b = 0 \\ \sqrt{2}ax_2 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}a(x_2 - x_1) = 0.$$



$\because \sqrt{2} \neq 0, a \neq 0,$

$\therefore x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow y_2 = y_1$ 与假设矛盾.

故不能有二组以上有理数的对应值.

例 7 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上有一点 P , 它的横坐标 m 与纵坐标 n 是方程 $t^2 - 4t - 2 = 0$ 的两个根: (1) 求 k 的值; (2) 求 P 点与原点 O 的距离.

解 (1) \because 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上,

$$\therefore n = \frac{k}{m} \Rightarrow k = mn.$$

$\because m, n$ 是方程 $t^2 - 4t - 2 = 0$ 的两个根, $\therefore mn = -2$, 即 $k = -2$

(2) $\because m, n$ 是方程 $t^2 - 4t - 2 = 0$ 的两个根, $\therefore m + n = 4$.

$$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 4^2 - 2 \times (-2) = 20.$$

$$\text{故 } OP = \sqrt{m^2 + n^2} = 2\sqrt{5}.$$

例 8 平面直角坐标系上有点 $P(-1, -2)$ 和点 $Q(4, 2)$, 取点 $R(1, m)$, 求 m 为何值时 $PR + RQ$ 有最小值?

解 如图 22-3, 显然, $PR + RQ \geq PK + KQ = PQ$.

故等号仅在 R 在 PQ 上时成立.

设直线 PQ 的方程为 $y = kx + b$.

$\because P, Q$ 在直线上,

$$\therefore \begin{cases} -2 = -k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{6}{5} \end{cases}.$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{6}{5}.$$

又若 R 在直线上即 R 与 K 重合,

$$\therefore m = \frac{4}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{2}{5} \text{ 时, } PR + RQ \text{ 有最小值.}$$

例 9 如图 22-4 所示, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD = 5$, $BC = 14$, $AD = 8$, E 为 AD 中点, 动点 P 从点 D 出发, 沿着梯形的周界依次经过点 C, B , 最后到达点 A , 设点 P 所走过的路程为 x , $\triangle APE$ 的面积为 y , 试求出 y 与 x 的函数关系式.

解 过 D 作 BC 的垂线 DH , 垂足为 H , 设 $\triangle APE$ 中 AE 边上的高为 h , 则 $CH =$

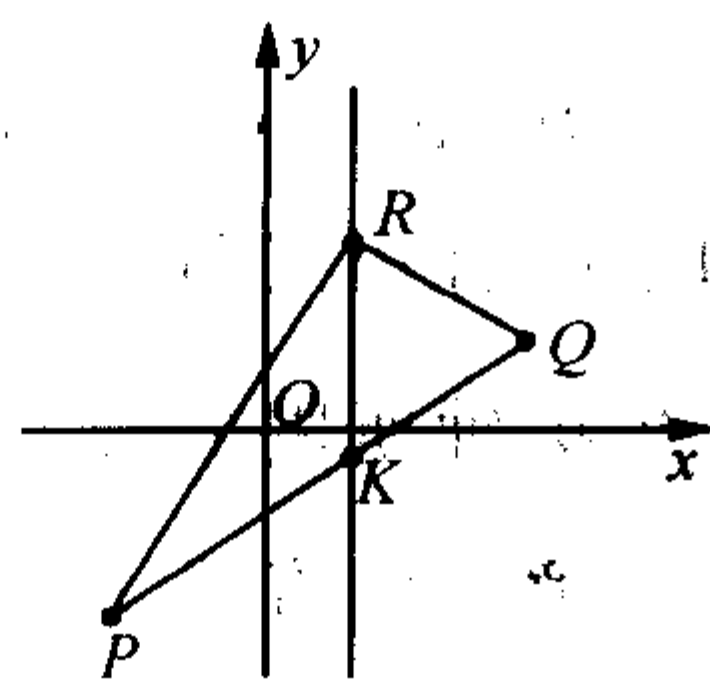


图 22-3

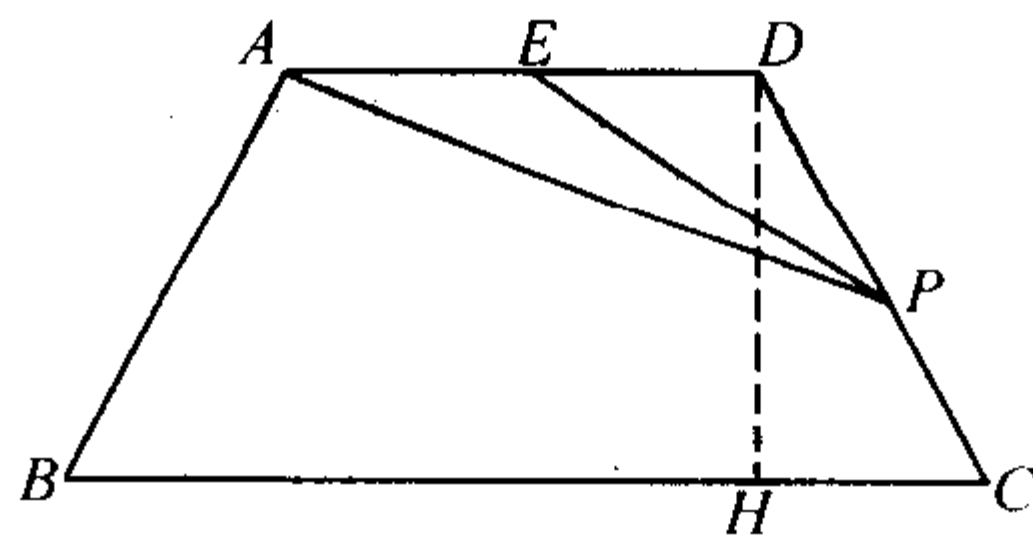


图 22-4



$$\frac{1}{2}(BC - AD) = 3.$$

又 $\because CD = 5, \therefore DH = 4.$

当 P 点在 CD 边上时, 即 $0 \leq x < 5$ 时, $\frac{h}{DH} = \frac{DP}{DC}.$

$$\therefore h = \frac{4}{5}x, \therefore y = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{5}x = \frac{8}{5}x.$$

当 P 在 BC 边上时, 即 $5 \leq x \leq 19$ 时, $h = 4. y = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8.$

当 P 点在 AC 边上时, 即 $19 < x \leq 24$ 时, $\frac{h}{DH} = \frac{AP}{AB}.$ 得 $h = \frac{4}{5}(24 - x).$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{5}(24 - x) = \frac{8}{5}(24 - x).$$

$$\text{综上所述可得 } y = \begin{cases} \frac{8}{5}x, & (0 \leq x < 5) \\ 8, & (5 \leq x \leq 19) \\ \frac{8}{5}(24 - x), & (19 < x \leq 24) \end{cases}$$

例 10 已知一次函数 $y = mx + n$ 的图像过二、三、四象限, 且图像与两坐标轴所围成的直角三角形中有一个角为 30° , 若这个直角三角形的面积是直线 $y = -2x + 4$ 与两坐标轴所围成的三角形的面积的 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 倍, 试求 m 和 n 的值.

解 设直线 $y = mx + n$ 与两坐标轴的交点分别为 $A(x, 0), B(0, y)$, 直线 $y = -2x + 4$ 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $S_1 = \frac{4^2}{|-2 \times 2|} = 4.$

\therefore 直线 $y = mx + n$ 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $S = 4 \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$

$$\therefore |xy| = 12\sqrt{3}.$$

\because 一次函数 $y = mx + n$ 的图像过二、三、四象限,

$$\therefore x < 0, y < 0.$$

当直线与 x 轴的夹角为 30° 时, $x = \sqrt{3}y.$ 即 $x = -6, y = -2\sqrt{3}.$

$$\therefore \begin{cases} -6 \cdot m + n = 0, \\ 0 \cdot m + n = -2\sqrt{3}. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ n = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

当直线与 y 轴的夹角为 30° 时, $y = \sqrt{3}x.$

$$\therefore x = -2\sqrt{3}, y = -6.$$

$$\therefore \begin{cases} -2\sqrt{3} \cdot m + n = 0, \\ 0 \cdot m + n = -6. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = -\sqrt{3}, \\ n = -6. \end{cases}$$



综上所述,当直线与 x 轴的夹角为 30° 时, $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $n = -2\sqrt{3}$; 当直线与 y 轴的夹角为 30° 时, $m = -\sqrt{3}$, $n = -6$.

例 11 如图22-5所示,已知一次函数 $y = mx + 4$ 具有性质: y 随 x 的增大而减小,又直线 $y = mx + 4$ 与直线 $x = 1, x = 4$ 相交于点 A, D ,且点 A 在第一象限内,直线 $x = 1, x = 4$ 分别与 x 轴交于 B, C 两点.

(1)要使四边形 $ABCD$ 为凸四边形,试求 m 的取值范围;

(2)已知四边形 $ABCD$ 为凸四边形,直线 $y = mx + 4$ 与 x 轴交于点 E ,当 $\frac{ED}{EA} = \frac{4}{7}$ 时,求这个一次函数的解析式;

(3)在(2)的条件下,设直线 $y = mx + 4$ 与 y 轴交于点 F ,求证:点 D 是 $\triangle EOF$ 的外心.

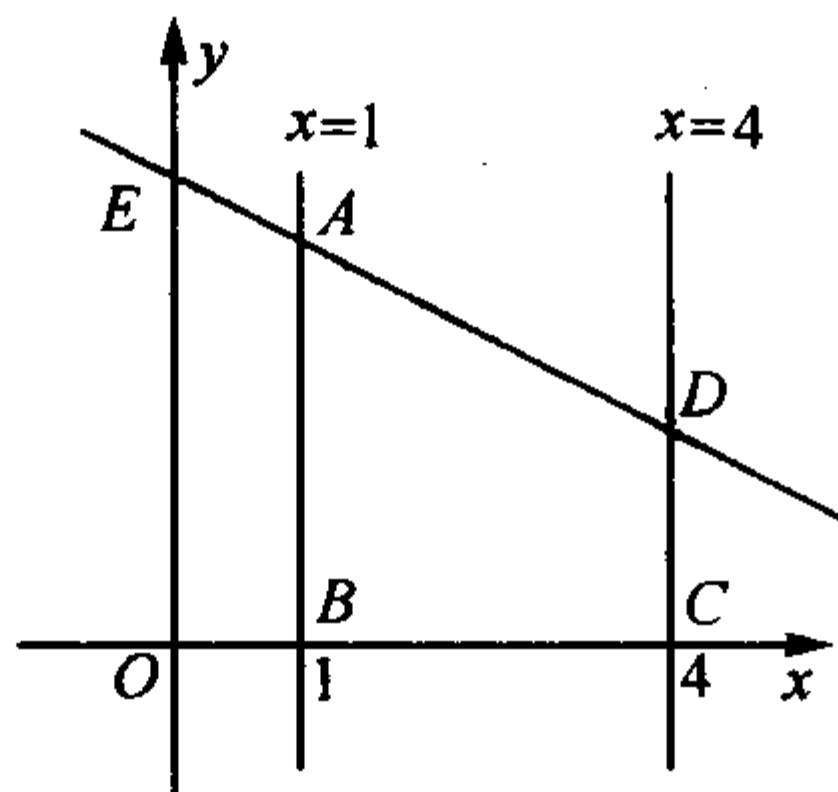


图 22-5

解 (1) $\because y$ 随 x 的增大而减小, $\therefore m < 0$.

\because 直线 $y = mx + 4$ 与直线 $x = 1, x = 4$ 相交于点 A, D ,

\therefore 解方程组 $\begin{cases} y = mx + 4, \\ x = 1, \end{cases} \begin{cases} y = mx + 4, \\ x = 4. \end{cases}$ 得坐标 $A(1, m + 4), D(4, 4 + 4m)$.

\because 点 A 在第一象限内,又要使四边形 $ABCD$ 为凸四边形,则点 A, D 都在第一象限内.

$\therefore \begin{cases} m + 4 > 0, \\ 4m + 4 > 0. \end{cases} \therefore \begin{cases} m > -4, \\ m > -1. \end{cases} \therefore m > -1. \therefore m$ 的取值范围为 $-1 < m < 0$.

(2) \because 四边形 $ABCD$ 为凸四边形, $\therefore 0 > m > -1$.

$\therefore AB = 4 + m, CD = 4 + 4m$.

$\because AB \perp BC, CD \perp BC, \therefore AB \parallel CD$.

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{EA}{ED} = \frac{7}{4} \therefore \frac{4 + m}{4 + 4m} = \frac{4}{7} \therefore m = -\frac{1}{2}$.

\therefore 一次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

(3) \because 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴的交点为 E, F ,

\therefore 解方程组 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4, \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4, \\ x = 0, \end{cases}$ 得坐标 $E(8, 0), F(0, 4)$.

\because 点 C 的坐标为 $(4, 0), \therefore C$ 为 OE 的中点.

又 \because 在 $Rt\triangle EOF$ 中, $CD \parallel OF, \therefore D$ 为 EF 中点.

$\therefore D$ 为 $Rt\triangle EOF$ 的外心.



例 12 汽车的油箱中有油 48kg, 如果工作时, 每小时耗油 6kg.

(1) 求出油箱中余油量 Q (kg) 与它工作的时间 t (时) 之间的关系式和自变量的取值范围, 并且画出它的图像 (假定汽车只能工作到余油 3kg).

(2) 利用图像说明, 当汽车的工作时间超过 4 小时后, 油箱内的余油情况;

(3) 要使汽车能连续行驶 1000km, 须加油多少 kg 以上? (其中汽车的速度为每小时 80km).

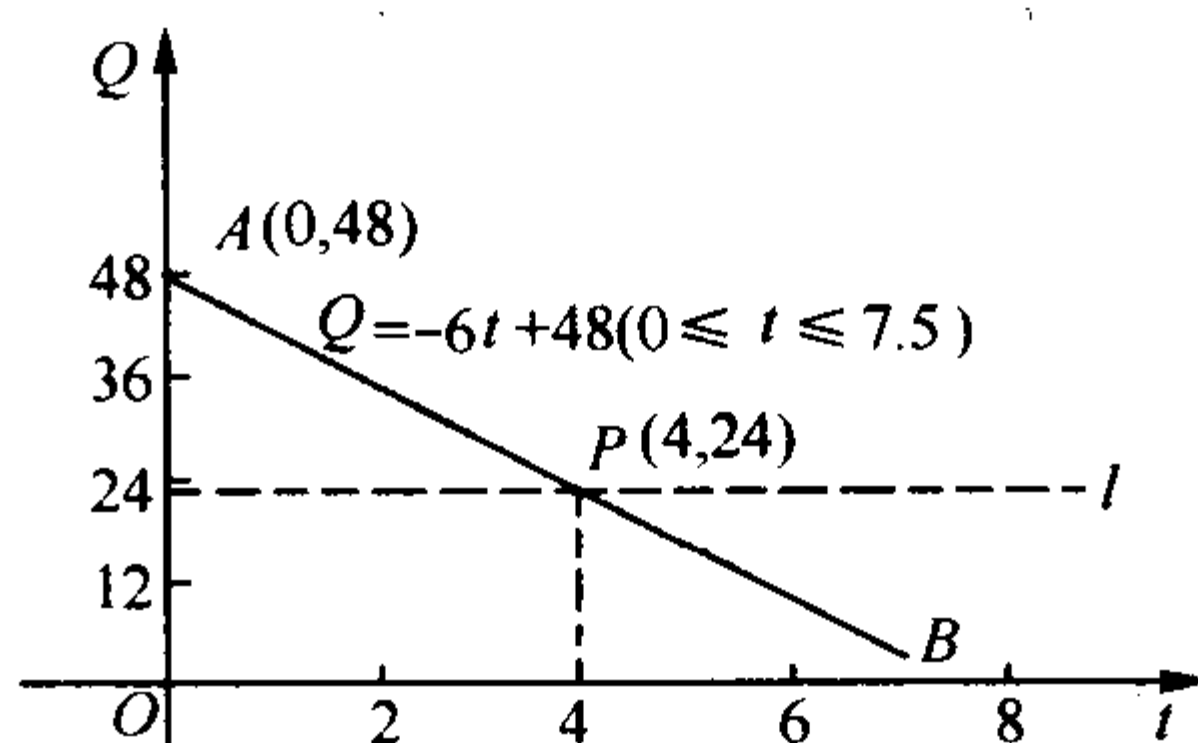


图 22-6

解 根据油箱中的余油量 Q 与汽车的工作时间 t 的关系, 可列式为 $Q = 48 - 6t$. 由于时间与余油量 Q 在实际问题中分别满足: $t \geq 0, Q \geq 3$, 结合关系式可得自变量时间 t 的取值范围为 $0 \leq t \leq 7.5$. 依据 $Q = 48 - 6t$, 可转化为 $Q = -6t + 48$, 得到 Q 是时间 t 的一次函数. 要画出它的图像, 结合一次函数的图像的实质是一条直线的知识, 可利用两点确定一条直线的几何知识, 在平面直角坐标系内画出图像, 同时不要忘记自变量的取值范围. 综合上述的几项因素, 可画出如图 22-6 所示的图像, 该图像是一条线段. (想一想为什么不是直线呢?) 由(2)的要求, 从图像上知, 函数 Q 随着时间 t 的增加而减少, 并且可求得当时间 $t = 4$ 时, Q 的值为 24, 即为图像上的点 P . 依据函数的性质, 当汽车工作的时间超过 4 小时, 即 $t > 4$ 时, 图像均在直线 l 的下方, 可得余油量 $3 \leq Q < 24$. 对于(3)中须先求出汽车行驶 1000km 所需的时间, 然后再求出所需的油量, 须加油 30kg 以上.



【能力训练】

1. 求函数 $y = \frac{\sqrt{3-x}}{(1-|x-1|)\sqrt{x-2}}$ 中自变量 x 的取值范围.

2. 若函数 $y = \lg\left(2 - \frac{m}{4}\right) \cdot x^{m^2-7m+11}$ 为正比例函数, 且函数图像过二、四象限, 求 m 的值.

3. 已知方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两个根为 a, b , 求经过点 $P(ab, a+b)$ 关于 x 轴的对称点 P' 的反比例函数解析式.

4. 设 x 与 y^2 成反比例, y 与 z^2 成正比例, 当 $x = 24$ 时, $y = 2$; 当 $y = 18$ 时, $z = 3$, 则 $z = 1$ 时, 求 x 的值.

5. 设函数 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) 的图像与函数 $y = bx + c$ ($b \neq 0$) 的图像在同一坐标系内, 求 a, b, c 为何值时, 图像①有两个交点; ②只有一个交点; ③没有交点.

6. 已知正比例函数 $y = kx$ ($k < 0$) 图像上的一点与原点的距离等于 $4\sqrt{3}$, 过这点向



x 轴作垂线,这点到垂足间的线段和 x 轴及该函数图像围成的图形的面积等于 $6\sqrt{3}$,求这个正比例函数的解析式.

7. 作出函数 $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ 的图像,并求其最小值,其中 $a > b > c$.

8. 已知一次函数 $y = (2m - 3)x + 4 - n$ 满足下列条件,分别求出字母 m, n 的取值范围:

- (1) 使得 y 随 x 的增大而减小;
- (2) 使得函数的图像与 y 轴交点在 x 轴上方;
- (3) 使得函数的图像经过第一、二、三象限.

9. 试写出符合下列条件的点的坐标或所在的位置:

- (1) 点 $P(x, y)$ 在 y 轴上,点 P 到 x 轴的距离等于 3;
- (2) 点 $M(x, y)$ 在第三象限,且点 M 到 x 轴的距离为 5,到 y 轴的距离为 $\frac{3}{2}$;
- (3) 点 $N(-2, \sqrt{3})$ 关于 x 轴对称的点.

10. 行星绕太阳一周的日数 T 的平方与行星离太阳的距离 R 的立方成正比例.已知地球绕太阳一周约需 365 日,地球离太阳的距离约是 150 百万千米,金星离太阳的距离约是 108 百万千米,求金星绕太阳一周约需多少日?

11. 地心作用于物体的引力与地心到这物体的距离的平方成反比例.如果一物体在地球表面重 9 千克,这物体离地面多高时就只有 4 千克重(地球半径 6400 千米).

12. 今年,杭州举办“西博会”,需要生产 4000 个工艺徽章,一名工人一天的产量为 5 至 8 个,若要在 40 天内完成这批徽章,那么大约需要多少工人?



二十三、统计和概率



【赛点目标】

1. 了解简单、常用的统计图表.
2. 理解统计初步的有关概念并能进行计算,能绘制频率直方图.
3. 了解概率的意义及其计算,并能简单应用.



【方法述要】

1. 能绘制统计表和条形、折线形、圆形统计图.
2. 理解总体、个体、样本、样本容量、平均数、方差、标准差、频率分布等概念;能进行平均数的几种计算、方差及方差的简化计算、标准差的计算,能绘制频率分布直方图.
3. 了解学习概率的意义,理解随机事件、不可能事件和必然事件,并能正确区分.
4. 理解概率的定义、统计算法和等可能事件的概率计算方法,并能运用它们解决简单的实际问题.
5. 本单元的重点是理解用样本的数据分析推断总体情况的统计思想,方差的意义及其计算,概率的概念以及简单随机事件概率的计算.频率分布的意义,直方图的绘制;等可能事件概率的计算比较复杂,是本单元的难点;计算繁复,紧密联系实际是本单元的特点.通过这单元内容的学习,加强爱国主义、社会主义思想教育和理论联系实际的学习意识的培养.



【赛题精讲】

例1 下列说法中正确的是().

(A) 有 m 个数的平均数是 a , n 个数的平均数是 b , 则 $(m+n)$ 个数的平均数是

$$\frac{1}{2}(a+b)$$

(B) 方差就是各数据与平均数的差的平方的平均数

(C) 连续两次抛掷一枚硬币,两次正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$

(D) 将数据分组后,频率就是落在各小组内的数据的个数

解 当 $m=n$ 时, (A) 结论成立, $m \neq n$ 时, (A) 结论错误; 连续两次抛掷硬币, 朝



上的有三种可能：一正面一负面，二正面，二负面，所以两次正面朝上的概率为 $\frac{1}{3}$ ；要区分频数与频率的意义，正确的结论是 B.

例 2 (1)如果有 n 个小组，每组 a 个学生，设 $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 分别代表第 i 组数学测验的平均分， \bar{x} 代表总平均分，试证明 $\bar{x} = \frac{1}{n}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n)$.

(2)若 $y_i = bx_i - a (i=1, 2, \dots, n)$ ，则 $S_y^2 = b^2 S_x^2$.

其中 S_x^2 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差， S_y^2 是 y_1, y_2, \dots, y_n 的方差.

$$\text{证明 (1)} \quad \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 a + \bar{x}_2 a + \dots + \bar{x}_n a}{\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \uparrow}} = \frac{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n) a}{na} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}.$$

$$\begin{aligned} (2) S_y^2 &= \frac{1}{n} [(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2] \\ &= \frac{1}{n} \{ [(bx_1 - a) - (b\bar{x} - a)]^2 + [(bx_2 - a) - (b\bar{x} - a)]^2 + \dots + [(bx_n - a) - (b\bar{x} - a)]^2 \} \\ &= \frac{1}{n} \{ b^2(x_1 - \bar{x})^2 + b^2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + b^2(x_n - \bar{x})^2 \} \\ &= b^2 \left\{ \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] \right\} = b^2 S_x^2. \end{aligned}$$

例 3 求 11.20, 11.28, 11.12, 11.20, 11.40 这 5 个数的平均数.

解法 1 利用平均数的定义 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 知

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{5}(11.20 + 11.28 + 11.12 + 11.20 + 11.40) \\ &= \frac{1}{5} \times 56.2 = 11.24. \end{aligned}$$

解法 2 设 $y_n = x_n - 11$ ，则

n	1	2	3	4	5
x_n	11.20	11.28	11.12	11.20	11.40
y_n	0.20	0.28	0.12	0.20	0.40

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(0.20 + 0.28 + 0.12 + 0.20 + 0.40) = \frac{1}{5} \times 1.20 = 0.24.$$

又 $\bar{y} = \bar{x} - 11$ ，即 $\bar{x} = 11 + \bar{y} = 11 + 0.24 = 11.24$.

解法 3 设 $z_n = 100(x_n - 11)$ ，则

n	1	2	3	4	5
z_n	20	28	12	20	40



$$\bar{z} = \frac{1}{5}(20 + 28 + 12 + 20 + 40) = \frac{1}{5} \times 120 = 24.$$

$$\therefore \bar{z} = 100(\bar{x} - 11), \text{ 即 } 24 = 100(\bar{x} - 11) \Rightarrow \bar{x} = 11.24.$$

说明 利用平均值的性质的简便算法求平均数,是实际中常用的行之有效的算法.希望对解法2、解法3倍加注意、熟练,并经常使用这个方法.

例4 初三年级4个班全体同学参加数学测验,结果如下:

1班 48人,平均分 90分;

2班 49人,平均分 88分;

3班 50人,平均分 85分;

4班 53人,平均分 83分;

求全年级的总平均分.

解 总平均分 \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{90 \times 48 + 88 \times 49 + 85 \times 50 + 83 \times 53}{48 + 49 + 50 + 53} = \frac{17281}{200} = 86.405 \approx 86.4(\text{分}).$$

说明 从上例不难体会到全年级4个班的平均成绩分别是 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$, 其全年级的总平均分不见得是 $\frac{1}{4}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$.

因为各班人数不见得相同,这个人数即“权”,代表在总体中所占的分量.

例5 从收集到的资料,已知测得光速的值有8个:

299792.3, 299792.5, 299793.1, 299794.2, 299792.6, 299793.0, 299795.1, 299789.8. 试估计光速及波动情况(求方差).

解 (1)用均值作光速的估计值.

设 $y_i = x_i - 299790$, 则 $y_1 = 2.3, y_2 = 2.5, y_3 = 3.1, y_4 = 4.2, y_5 = 2.6, y_6 = 3.0, y_7 = 5.1, y_8 = -0.2$.

$$\bar{y} = \frac{1}{8}(2.3 + 2.5 + 3.1 + 4.2 + 2.6 + 3.0 + 5.1 - 0.2) = \frac{1}{8} \times 22.6 = 2.825.$$

$$\therefore \bar{y} = \bar{x} - 299790,$$

$$\therefore \bar{x} = 299790 + \bar{y} = 299790 + 2.825 = 299792.825;$$

(2)用方差评估其波动.

$$\begin{aligned} S_x^2 &= S_y^2 = \frac{1}{8}(2.3^2 + 2.5^2 + 3.1^2 + 4.2^2 + 2.6^2 + 3.0^2 + 5.1^2 + 0.2^2) - 2.825^2 \\ &= \frac{1}{8} \times 80.6 - 2.825^2 \approx 2.094. \end{aligned}$$

例6 小强家的鱼塘中养了某种鱼2000条,为估计鱼塘中这种鱼的总质量,现从鱼塘中捕捞了3次,第一次15条,平均每条1.6千克;第二次15条,平均每条2.0千克;第三次10条,平均每条1.8千克.问鱼塘中这种鱼平均每条质量约多少千克? 所有这



种鱼总质量约多少千克?若将这些鱼不分大小,按每千克 7.5 元的价格出售,小强家约可收入多少元?

解 用捕捞样本的平均数来估计鱼塘中这种鱼平均每条的质量

$\bar{x} = \frac{1}{15+15+10} \times (1.6 \times 15 + 2.0 \times 15 + 1.8 \times 10) = 1.8$ (千克/每条). 总质量约 $1.8 \times 2000 = 3600$ (千克). $7.5 \times 3600 = 27000$ (元), 小强家出售这批鱼约可收入 27000 元.

数据多次重复求平均数时,可利用公式 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n)$, 使计算简便; 当一组数都接近于某一常数 a 时, 可利用公式 $\bar{x} = \bar{x}' + a$ 计算它们的平均数.

例 7 篮球队教练员对该队某队员投 3 分球的测试记录如下表:

投篮次数	10	50	100	150	200
命中次数	9	40	70	108	144

(1) 根据此表, 求出该队员投一次 3 分球命中的概率;

(2) 根据此表, 假如该队员有 5 次投 3 分球的机会, 估计能得多少分?

解 在大量重复进行同一试验时, 用某一事件发生的频率近似地作为该事件发生的概率, 这是计算随机事件发生概率的基本方法. 该队员投一次 3 分球命中的概率为命中次数除以投篮次数的商, 由表中数据依次可得: 0.9, 0.8, 0.7, 0.72, 0.72. 该队员投一次 3 分球命中的概率为 0.72; 投篮 5 次, 该得分 $3 \times 5 \times 0.72 = 10.8$ (分). 所以估计能得分为 9 分或 12 分.

例 8 有甲、乙两组课外活动小组, 每组 10 人, 同时测量某建筑物高度, 结果如统计图 23-1 所示, (1) 分别求各组每人测得建筑物高度的平均数和方差; (2) 哪一组测得的数据较为稳定?

解 当已知条件以统计图形式给出时, 应先根据统计图列出统计表, 这样为下面的计算带来方便, 当数据较为接近时, 经过适当处理 (如每个数据都减去 5), 在求方差计算中, 要方便得多.

由统计图可得如下统计表:

h	4.8	4.9	5.0	5.1
组别	-0.2	-0.1	0	0.1
甲组	1	3	2	4
乙组	3	2	3	2

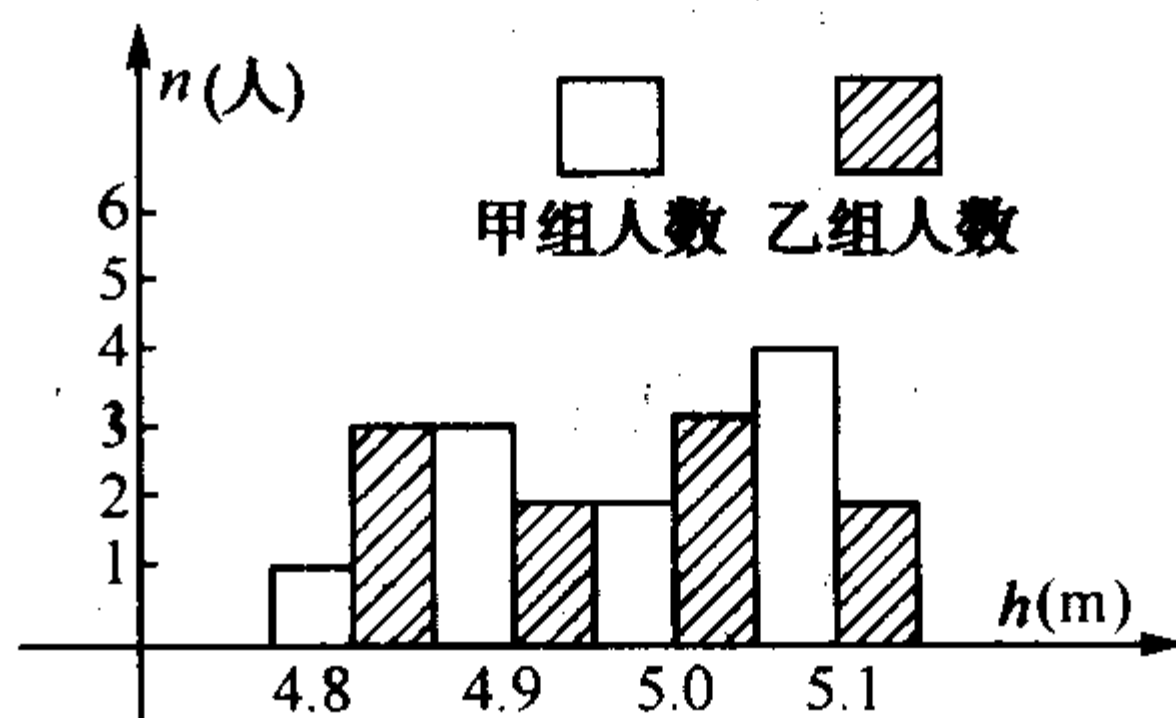


图 23-1



计算可得 $\bar{h}_{\text{甲}} = 4.99(\text{m})$, $\bar{h}_{\text{乙}} = 4.94(\text{m})$, $S_{\text{甲}}^2 = 0.0109(\text{m}^2)$, $S_{\text{乙}}^2 = 0.0124(\text{m}^2)$.

$\because S_{\text{乙}}^2 > S_{\text{甲}}^2$, \therefore 甲组测量的数据比较稳定.

例 9 长为 1, 2, 3, 4, 5 的线段各有一条, 共 5 条, 从这 5 条线段中任取 3 条, 求: (1) 不能构成三角形的概率; (2) 构成直角三角形的概率; (3) 构成钝角三角形的概率.

解 由于任选 5 条线段中的 3 条组成一组, 是等可能性事件, 可以用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 计算. 其中等可能性结果总数 $n = 10$. 因为取线段不能重复, 所以有以下 10 组: 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 3, 4; 1, 3, 5; 1, 4, 5; 2, 3, 4; 2, 3, 5; 2, 4, 5; 3, 4, 5. 凡不符合三角形三边关系的组合均不能构成三角形. 所以 $P(A) = \frac{7}{10}$, 又 $3^2 + 4^2 = 5^2$. $P(B) = \frac{1}{10}$, 而 $2^2 + 3^2 < 4^2$, $2^2 + 4^2 < 5^2$, 所以 $P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

例 10 某班数学测验成绩如下:

分数	5	4	3	2	1
人数	56	32	10	2	0

这里指定的范围有 5 个: 得 5 分的, 得 4 分的, 得 3 分的, 得 2 分的, 得 1 分的. 试求 5 个分数值的频数和频率.

解 5 个分数值的频数分别为 56, 32, 10, 2, 0;

得 5 分的频率为 $\frac{56}{56 + 32 + 10 + 2 + 0} = \frac{56}{100} = 0.56$;

得 4 分的频率为 $\frac{32}{100} = 0.32$;

得 3 分的频率为 $\frac{10}{100} = 0.10$;

得 2 分的频率为 $\frac{2}{100} = 0.02$;

得 1 分的频率为 $\frac{0}{100} = 0$.

说明 注意这些频率有如下特点:

(1) 频率均为非负数: $0.56 \geq 0, 0.32 \geq 0, 0.10 \geq 0, 0.02 \geq 0, 0.00 = 0$;

(2) 诸频率之和为 1: $0.56 + 0.32 + 0.10 + 0.02 + 0.00 = 1$.

例 11 下面给出 50 个数据:

-0.40, -1.80, -2.14, 0.40, -1.40, -1.40, 0.67, -1.40, -1.51,
1.40, -1.38, -1.40, 1.20, -2.14, -0.60, -2.33, 1.24, -0.40,
-0.32, -0.22, -1.60, -1.40, -0.51, -0.20, -1.40, -1.72,
-1.60, -1.20, -1.80, 1.20, -1.40, -0.80, -1.72, -0.71,



$-1.40, -1.20, -0.91, 0.69, -1.60, -1.39, -2.20, -1.40,$
 $-0.40, 0.40, -1.80, -1.80, -1.60, 0, -1.95, 1.20.$

这 50 个数据是 10 欧姆电阻名义值与实测值之差. 求 28 个值的频数与频率.

解 (1) 将数据作一整理, 上面 50 个数据, 实际上只有 28 个值:

$-2.33, -2.20, -2.14, -1.95, -1.80, -1.72, -1.60,$
 $-1.51, -1.40, -1.39, -1.38, -1.20, -0.91, -0.80,$
 $-0.71, -0.60, -0.51, -0.40, -0.32, -0.22, -0.20,$
 $0, 0.40, 0.67, 0.69, 1.20, 1.24, 1.40.$

(2) 它们的频数分别为

$1, 1, 2, 1, 4, 2, 4,$
 $1, 9, 1, 1, 2, 1, 1,$
 $1, 1, 1, 3, 1, 1, 1,$
 $1, 2, 1, 1, 3, 1, 1.$

(3) 频率分别为

$\frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \frac{2}{50}, \frac{1}{50}, \frac{4}{50}, \frac{2}{50}, \frac{4}{50},$
 $\frac{1}{50}, \frac{9}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \frac{2}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50},$
 $\frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \frac{3}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50},$
 $\frac{1}{50}, \frac{2}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}, \frac{3}{50}, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}.$

例 12 用某仪器间接测量温度, 重复测量 5 次得

$1250^\circ, 1265^\circ, 1245^\circ, 1260^\circ, 1275^\circ.$

求均值、方差及修正方差.

解 (1) 设 $y_i = x_i - 1260$, 则 $y_1 = -10, y_2 = 5, y_3 = -15, y_4 = 0, y_5 = 15.$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(-10 + 5 - 15 + 0 + 15) = -1.$$

又 $\bar{y} = \bar{x} - 1260$, 因此 $\bar{x} = 1260 + \bar{y} = 1260 + (-1) = 1259;$

(2) $\because y_i = x_i - 1260 (i = 1, 2, 3, 4, 5),$

S^2 的求出, S 也跟着能求出, 关键也在求出 \bar{x} 来.

解法 1 $\bar{x} = 99.7$, 列表.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	和
x_n	99.3	98.7	100.5	101.2	98.4	99.7	99.3	100.5	797.6
$x_n - \bar{x}$	-0.4	-1	0.8	1.5	-1.3	0	-0.4	0.8	



n	1	2	3	4	5	6	7	8	和
$(x_n - \bar{x})^2$	0.16	1	0.64	2.25	1.69	0	0.16	0.64	6.54

$$S^2 = \frac{1}{8} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_8 - \bar{x})^2] = \frac{1}{8} \times 6.54 = 0.8175.$$

解法 2 列表.

$$S^2 = \frac{1}{8} (x_1^2 + \cdots + x_8^2) - \bar{x}^2 = \frac{1}{8} \times 79527.26 - 99.7^2 = 9940.9075 - 9940.09 = 0.8175.$$

n	1	2	3	4	5
x_n	99.3	98.7	100.5	101.2	98.4
x_n^2	9860.49	9741.69	10100.25	10241.44	9682.56
n	6	7	8	和	
x_n	99.7	99.3	100.5	797.6	
x_n^2	9940.09	9860.49	10100.25	$79527.26 = x_1^2 + \cdots + x_8^2$	

解法 3 设 $y_i = 10(x_i - 100)$ ($i = 1, 2, \cdots, 8$), 此处 $b = 10, n = 8$

$$y_1 = 7, y_2 = -13, y_3 = 5, y_4 = 12, y_5 = -16, y_6 = -3, y_7 = -7, y_8 = 5.$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{1}{8} (-7 - 13 + 5 + 12 - 16 - 3 - 7 + 5) = \frac{1}{8} \times (-24) = -3.$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{8} [(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_8 - \bar{x})^2] \\ &= \frac{1}{10^2} \left[\frac{1}{8} (y_1 - \bar{y})^2 + \cdots + \frac{1}{8} (y_8 - \bar{y})^2 \right] \\ &= \frac{1}{800} [(-7 + 3)^2 + (-13 + 3)^2 + (5 + 3)^2 + (12 + 3)^2 + (-16 + 3)^2 + (-3 + 3)^2 + (-7 + 3)^2 + (5 + 3)^2] \\ &= \frac{1}{800} \times 654 = 0.8175. \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{0.8175} \approx 0.904.$$

说明 方差、标准差反映了样本和总体的波动大小,波动小表明状态较稳定,其计算繁琐,可利用计算器,更应注意利用简化计算公式.



【能力训练】

1. 测得数据:

99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.4, 99.7, 99.3, 100.5, 求平均值 \bar{x} .

2. 一个样本的容量为 6, 样本数据分别为 a, b, b, c, c, c , 则此样本的平均数 $\bar{x} =$



3. 甲、乙、丙三数的平均数是 8, 甲、乙二数的平均数是 6, 乙、丙二数的平均数是 5, 则甲、丙二数的平均数是_____.

4. 有一个学生花了很多时间求出了 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2003}$ 等 2003 个数的平均数为 2000, 后来这个学生粗心地将这个平均数又混入到这 2003 个数中, 于是他又求出这 2004 个数的平均数, 问这 2004 个数的平均数是多少?

5. 已知两组数 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 的平均数分别是 \bar{x} 和 \bar{y} , a 是常数 ($a \neq 0$), $y_i = ax_i$, 求 y_1, y_2, \dots, y_n 的平均数 \bar{y} .

6. 已知三组数据,

$x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_n.$

它们的平均数分别是 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

求 $x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n$ 的平均数 \bar{w} .

7. 某学习小组共 8 人, 在一次数学测验中, 得 100 分的 1 人, 得 90 分的 2 人, 得 74 分的 4 人, 得 64 分的 1 人, 那么这个小组的平均成绩是_____.

8. 有 n 个由小到大排列的数 x_1, x_2, \dots, x_n , 求它们的中位数.

9. 试证明等差数列 $x_i = a + (i-1)d (i=1, 2, \dots, n): x_1 = a, x_2 = a + d, x_3 = a + 2d, \dots, x_n = a + (n-1)d$, 它们的平均数等于它们的中位数.

10. 为了解某地区初三毕业学生的视力情况, 卫生部门从该地区初三毕业生中抽了 200 名学生, 检查了他们的视力, 然后去估计这一地区所有初三毕业学生的平均视力水平, 在这个问题中, 总体、个体、样本、样本容量各指什么?

11. 判断下列事件是必然事件、不可能事件, 还是随机事件.

(1) 11 号强台风明晚在我省沿海地区登陆;

(2) 任意抛掷一只可口可乐纸杯, 杯口朝下;

(3) 国际奥委会决定 2008 年夏季奥运会在中国北京举行;

(4) 长度为 1cm, 2cm, 3cm, 6cm 的四条线段可以围成一个四边形;

(5) 从 2, 3, 4, 6 四个数字中任选 2 个数, 其中必有一个数是偶数.

12. 当今市场竞争激烈, 产品质量是企业生存的根本, 红星厂和中天厂为争取建国南路的扩建用砖的市场, 请质量监测单位对两家产品的抗断强度进行测定, 下面是一次检测中的一组数据(单位: 千克/平方厘米).

红星厂: 32.50, 29.66, 31.64, 30.00, 31.77, 31.01, 30.76, 31.24, 31.87, 31.05;

中天厂: 31.00, 29.56, 32.02, 33.00, 29.32, 30.37, 29.98, 31.35, 32.86, 32.04.

试评定两个厂产品质量的优劣.



二十四、二次根式



【赛点目标】

1. 了解二次根式和最简二次根式的概念.
2. 理解二次根式的性质.
3. 掌握二次根式的化简方法.
4. 能熟练地进行二次根式的加、减、乘、除及混合运算.
5. 能运用分母有理化的方法进行二次根式的除法运算.
6. 能综合运用二次根式的运算,化简含二次根式的代数式或求值.



【方法述要】

1. 二次根式的运算归根结底是数的运算. 在二次根式的运算中, 数的运算顺序、运算法则、运算律和去括号法则等均能应用, 反映了矛盾的普遍性包含于矛盾的特殊性之中.
2. 会根据算式的形式特征, 设计计算程序, 利用整式、分式的变形方法, 使计算简便.
3. 能将分母(或分子)有理化技巧, 合理地运用于二次根式的除法或其他变形中.
4. 本节的重点是二次根式的混合运算及其应用. 难点是当分母中根式为多项或分母为负值时的分母有理化计算. 关键是计算之前科学地审题, 确定合理的计算步骤, 使运算简化, 从中培养综合分析能力, 打好代数式的运算基础.
5. 有理化因式
若两个二次根式的乘积不含二次根式, 我们就称这两个二次根式互为有理化因式, 如 $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ 互为有理化因式.
6. 分母有理化常用的几种方法:
(1) 分子、分母同时乘以分母的有理化因式;
(2) 将分子、分母进行因式分解约分后再有理化;
(3) 先求原根式的倒数, 再进行分母有理化.
7. 对双重根号的根式的化简, 主要是将其根号下的根式凑成完全平方式; 对多重根号的根式, 一层一层地去根号即可.
8. 在根式的化简求值中, 先将已知的根式化简或变形, 再代入需求代数式中求值.



【赛题精讲】

例1 x 是什么实数时,下列各式在实数范围内有意义?

- (1) $\sqrt{|x|-3}$; (2) $\sqrt{4x^2-4x+3}$;
 (3) $\frac{\sqrt{5+x}}{\sqrt{4x-1}}$; (4) $\sqrt{1-x} + \sqrt{3x-1} - \frac{1}{3x-2}$.

解 求二次根式中字母的取值范围的依据是被开方式为非负数,分母不为零.一般途径是转化为解不等式(或组),当被开方式经配方后是非负数时,根号内字母可取全体实数.

(1) 由 $|x|-3 \geq 0$, 得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -3$ (应明确怎样得到这个结论);

(2) 由 $4x^2-4x+3 = (2x-1)^2+2$, 得 x 可取全体实数;

(3) 由 $\begin{cases} 5+x \geq 0, \\ 4x-1 > 0, \end{cases}$ 得 $x > \frac{1}{4}$;

(4) 由 $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 3x-1 \geq 0, \\ 3x-2 \neq 0, \end{cases}$ 得 $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 且 $x \neq \frac{2}{3}$.

例2 化简: $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{4x^2+4x+1} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$.

分析 欲化简的式子中出现的被开方式都可以写成完全平方式,利用性质 $\sqrt{a^2} = |a|$ 可分别去掉根号转化为绝对值问题,再利用已知条件 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 去掉绝对值符号.

解 因 $\sqrt{x^2-2x+1} = |x-1|$, $\sqrt{x^2-6x+9} = |x-3|$, $\sqrt{4x^2+4x+1} = |2x+1|$, 由 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 得 $x-1 \leq 0$, $x-3 < 0$, $2x+1 \geq 0$.

所以 原式 $= -(x-1) - (x-3) + (2x+1) = 5$.

说明 把被开方式配成完全平方式,并根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 移到根号外是解决根式化简问题的一种重要办法,在一定条件下,它可使根式转化为有理式.此外,一般情况下化简得到的结果不应带有绝对值符号.为此,本题给出了限制条件 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

如果题目未给出这一条件,则需要作如下讨论:

① 当 $x > 3$ 时, $x-1 > 0$, $x-3 > 0$, $2x+1 > 0$, 所以, 原式 $= (x-1) + (x-3) + (2x+1) = 4x-3$;

② 当 $1 < x \leq 3$ 时, $x-1 > 0$, $x-3 \leq 0$, $2x+1 > 0$, 所以, 原式 $= (x-1) - (x-3) + (2x+1) = 2x+3$;



③当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时, 原式 = 5;

④当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $x-1 < 0, x-3 < 0, 2x+1 < 0$.

$$\text{原式} = -(x-1) - (x-3) - (2x+1) = -4x+3.$$

例 3 化简 $\sqrt{y+2} + 3\sqrt{2y-5} - \sqrt{y-2} + \sqrt{2y-5}$.

分析 注意到原式中只含有一个字母 y 并且 $\sqrt{2y-5}$ 出现了两次, 如果设 $\sqrt{2y-5} = t$, 则 $y+2$ 与 $y-2$ 都可用 t 的代数式表示, 这样复合二次根式就化为单重二次根式了.

解 令 $\sqrt{2y-5} = t$, 则 $2y-5 = t^2 (t \geq 0)$. 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sqrt{\frac{t^2+5}{2} + 2} + 3t - \sqrt{\frac{t^2+5}{2} - 2} + t = \sqrt{\frac{t^2+6t+9}{2}} - \sqrt{\frac{t^2+2t+1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(t+3)^2} - \sqrt{(t+1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(t+3) - (t+1)}{\sqrt{2}} \quad (\because t \geq 0) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

说明 在上述解法中“换元”起到了化难为易的作用. 还应该注意: (1) 由二次根式 $\sqrt{2y-5}$ 的非负性可得 $t \geq 0$, 这在解题中需要用到; (2) 本题化简的结果恰好不含有 t , 否则应把 $\sqrt{2y-5}$ 代回.

例 4 化简 $\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$.

分析 设法将两个根式的根指数化为相同的, 有两种办法: 一是将 $15+4\sqrt{14}$ 写成完全平方的形式: $(\sqrt{7}+2\sqrt{2})^2$, 并将幂指数 2 与根指数 6 相约; 二是将 $\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$ 改写成 6 次根式, 但要注意 $\sqrt{7}-2\sqrt{2} < 0$ 这一情况.

$$\begin{aligned} \text{解法 1} \quad \text{原式} &= \sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{7}+2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{7}+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{-1} = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 2} \quad \text{原式} &= -\sqrt[3]{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[6]{15+4\sqrt{14}} = -\sqrt[6]{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[6]{15+4\sqrt{14}} \\ &= -\sqrt[6]{15-4\sqrt{14}} \cdot \sqrt[6]{15+4\sqrt{14}} = -\sqrt[6]{15^2 - (4\sqrt{14})^2} \\ &= -\sqrt[6]{1} = -1. \end{aligned}$$

说明 $\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$ 是一个负数的 3 次方根, 它是一个负数. 因此, 应将 $\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$ 转化为正数的 3 次方根的相反数, 才可利用根式的性质将被开方数平方并将根指数乘以 2.

例 5 $x = \frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$, 试求 $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ 的值.



解 细察分母 $\sqrt{19+8\sqrt{3}} = \sqrt{(4+\sqrt{3})^2} = 4+\sqrt{3}$, 于是 $x = \frac{13}{4+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{3}$.

(方法一) $x = 4-\sqrt{3}$ 变形为 $x-4 = -\sqrt{3}$, $(x-4)^2 = 3$. $\therefore x^2 = 8x-13$. 用此等式分别对所求分式的分子、分母降次, 化简.

(方法二) 由已知得 $x^2 - 8x + 13 = 0$, 于是用多项式除法分别求分子、分母的值. 原分母 $= (x^2 - 8x + 13) + 2 = 2$. 原分子 $= (x^2 - 8x + 13) \cdot (x^2 + 2x + 1) + 10 = 10$. \therefore 原式 $= 5$.

(方法三) 由已知得 $x = 4-\sqrt{3}$, 构造代数式 $y = 4+\sqrt{3}$, 于是 $x+y = 8$, $xy = 13$.

原分母 $= x^2 - 8x + 15 = x^2 - (x+y)x + 15 = -xy + 15 = -13 + 15 = 2$.

原分子 $= x^4 - (x+y)x^3 + 2x^3 - 2(x+y)x^2 + 14x^2 - (x+y)x + 26x + 23$
 $= -13x^2 - 26x + 14x^2 - x^2 - 13 + 26x + 23 = 10$.

\therefore 原式 $= 5$.

例 6 已知 $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$, $y = \frac{2}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, 求 $\frac{x^4 y^4}{x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4}$ 的值.

解 原式 $= \frac{x^4 y^4}{(x+y)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^4}$.

又 $\because x = \frac{2}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$, $y = \frac{2}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2+\sqrt{3}$.

\therefore 原式 $= \frac{1}{(2+\sqrt{3})^4} = (2-\sqrt{3})^4 = 97 - 56\sqrt{3}$.

例 7 已知 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, 求证: $a^2 + b^2 = 1$.

证明 $\because a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, $\therefore a\sqrt{1-b^2} = 1 - b\sqrt{1-a^2}$.

$\therefore a^2 - a^2 b^2 = 1 - 2b\sqrt{1-a^2} + b^2 - a^2 b^2$.

$\therefore 1 + b^2 - a^2 = 2b\sqrt{1-a^2}$.

$\therefore 1 + a^4 + b^4 - 2a^2 + 2b^2 - 2a^2 b^2 = 4b^2 - 4a^2 b^2$.

$\therefore 1 + a^4 + b^4 - 2a^2 - 2b^2 + 2a^2 b^2 = 0$,

$\therefore (a^2 + b^2 - 1)^2 = 0$, $\therefore a^2 + b^2 = 1$.

例 8 计算: $\sqrt{12-\sqrt{24}+\sqrt{39}-\sqrt{104}} - \sqrt{12+\sqrt{24}+\sqrt{39}+\sqrt{104}}$.

解 $\because \sqrt{12-\sqrt{24}+\sqrt{39}-\sqrt{104}} = \sqrt{\frac{1}{2}(3+8+13-2\sqrt{3\times 8}+2\sqrt{3\times 13}-2\sqrt{8\times 13})}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{13}+\sqrt{3}-2\sqrt{2})$.



同理可得 $\sqrt{12 + \sqrt{24} + \sqrt{39} + \sqrt{104}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{13} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})$.

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{13} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{13} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = -4.$$

例 9 计算: $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \therefore \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

例 10 设 k 是正整数, $a = 3k^2 + 1$, 求证: $\frac{\sqrt[3]{a + \frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}} - \sqrt[3]{a - \frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}}{\sqrt[3]{a + \frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}}$

的值为正整数.

$$\text{证明} \quad \because a = 3k^2 + 1, \therefore \sqrt[3]{a + \frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}} = \sqrt[3]{3k^2 + 1 + (k^2 + 3)k} = k + 1.$$

$$\therefore \sqrt[3]{a - \frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}} = \sqrt[3]{3k^2 + 1 - (k^2 + 3)k} = 1 - k.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{(k+1) - (1-k)}{(k+1) + (1-k)} = k. \therefore \text{命题成立}.$$

例 11 如图 24-1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle$, $\angle ABC = 30^\circ$. 延长 CB 至 D , 使 $BD = AB$, 连结 AD , 设 $AC = 1$. 求: (1) 线段 AD 的长; (2) $\frac{AC}{DC}, \frac{DC}{AD}$ 的值.

解 由图形中已知条件及勾股定理: $AB = BD = 2, BC = \sqrt{3}, DC = 2 + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{1 + (2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{2}. \end{aligned} \quad \frac{AC}{DC} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}; \quad \frac{DC}{AD} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

本题实质上计算了 $\tan 15^\circ$ 和 $\cos 15^\circ$ 的三角函数的值. 二次根式的计算、化简在几何、三角及其他学科的学习中是一种必不可少的工具.

例 12 设 a, b 为正实数, 且 $a \neq \sqrt{2}b$. (1) 求证: $\sqrt{2}$ 必在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间; (2) 试问这两个数中, 哪一个更接近于 $\sqrt{2}$?

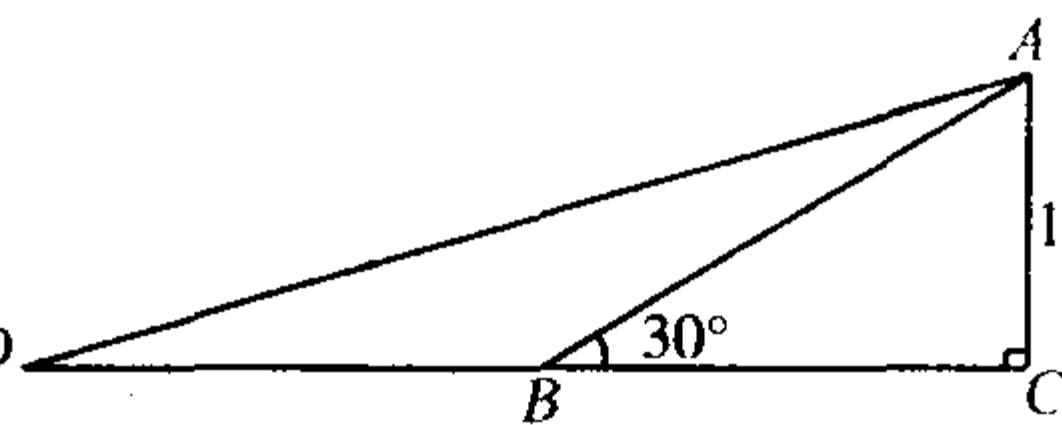


图 24-1



$$(1) \text{ 证明 } \because \left(\sqrt{2} - \frac{a}{b} \right) \left(\sqrt{2} - \frac{a+2b}{a+b} \right) = \frac{\sqrt{2}b-a}{b} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)a + (\sqrt{2}-2)b}{a+b} \\ = \frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}b-a)^2}{b(a+b)} < 0,$$

$\therefore \sqrt{2}$ 必在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间.

$$(2) \text{ 解 } \left| \frac{a+2b}{a+b} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{(\sqrt{2}b-a)(1-\sqrt{2})}{a+b} \right| < \left| \frac{\sqrt{2}b-a}{a+b} \right| < \left| \frac{\sqrt{2}b-a}{b} \right| = \left| \frac{a}{b} - \sqrt{2} \right|. \therefore \frac{a+2b}{a+b} \text{ 更接近 } \sqrt{2}.$$



【能力训练】

一、选择题

1. 若 $x < 1$, 则 $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(2-x)^2}$ 等于().
(A) 1 (B) $3-2x$ (C) $2x-3$ (D) -2
2. 若 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边之长, 则化简 $\sqrt{(a-b-c)^2} + \sqrt{(b-c-a)^2} + \sqrt{(c-a-b)^2}$ 的结果是().
(A) $a+b-c$ (B) $b+c-a$ (C) $c+a-b$ (D) $a+b+c$
3. $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 的值为().
(A) $14\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{3}$
4. 若 $a > 1$, $p = \sqrt{1999a+1} - \sqrt{1999a}$, $q = \sqrt{1999a-1} - \sqrt{1999a}$, $r = \sqrt{1999a} - \sqrt{1999a+1}$, $s = \sqrt{1999a} - \sqrt{1999a-1}$. 则 p, q, r, s 中取值最小的一个是().
(A) p (B) q (C) r (D) s

二、填空题

5. 已知 $y = 5\sqrt{x-3} + \frac{\sqrt{3-x}}{2} + \sqrt{7x+4}$, 求代数式 $3(x-1)^2 + (2y-7)(2y+7)$ 的值为_____.
6. 已知 $4\sqrt{x+2} + 6\sqrt{y-1} = x+y+14$, 则 $x+y$ 的值为_____.
7. 化简 $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} + \sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} =$ _____.
8. 在实数范围内, 设 $x = \left[\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)} + \sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1 + \frac{1}{1-a}} + \frac{5a+1}{1-a} \right]^{1999}$, 则 x 个位上的数字是_____.



三、解答题

9. 计算: $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}} (5 \leq x \leq 8)$.

10. 已知 $x = \sqrt{19-8\sqrt{3}}$, 求 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ 的值.

11. 已知 $x = \sqrt{5+\sqrt{5}}$, $y = \sqrt{5-\sqrt{5}}$, 求 $x^6 + y^6$ 的值.

12. 已知圆台的轴截面梯形底角为 60° , 中位线长为 $\sqrt{6}$, 上、下底面的面积之比为 $2:3$, 求圆台的高线长和侧面积.



二十五、二次方程



【赛点目标】

1. 了解高次方程、二次根式方程的概念.
2. 掌握可化为一元一次方程和一元二次方程的简单的高次方程的解法.
3. 会解各种类型的二次根式方程.
4. 了解二元二次方程、二元二次方程组的概念.
5. 理解二元二次方程的解与二元二次方程组的解的区别与联系.
6. 会用代入法、加减法和其他特殊方法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程或由两个二元二次方程组成的方程组.
7. 会根据二元二次方程的系数特征, 选用适当方法进行消元或降次.



【方法述要】

1. 解简单的高次方程时, 首先要使方程的一边为零, 另一边进行因式分解, 不能约去含未知数的因式, 防止失根.

2. 解二次根式方程, 要利用二次根式的非负性及未知数的取值范围, 判断方程有无实数根; 化根式为整式时, 要适当移项、变形, 尽可能减少两边平方的次数, 或用换元法避免出现高次方程; 验根是解根式方程必不可少的重要步骤, 必须重视.

3. 换元法是数学中最基本的也是最常用的方法之一, 它具有化高次为低次, 化复杂为简单, 化难为易的功效, 在本节中运用尤为突出, 应注意观察, 根据方程的结构特征, 进行适当的变形来构造元, 使计算更简便.

4. 运用韦达定理求有关已知方程两根的对称式的值的关键是将所给代数式用两根和与两根积来表示. 下列变形是常用的: (1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; (2) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$; (3) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$; (4) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$; (5) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}}$ 等 ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).

5. 在运用韦达定理时, 一定要考虑到 $\Delta \geq 0$ (在运用判别式时, 应首先考虑到方程的二次项系数不为零), 根据需要可验证是否 $\Delta \geq 0$, 也可由 $\Delta \geq 0$ 先求出字母的取值范围.



6. 讨论方程的根时,要注意条件转换的等价性.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 x_2 < 0; \quad \begin{cases} x_1 > 3, \\ x_2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x_1 - 3 > 0, \\ x_2 - 3 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 3) + (x_2 - 3) > 0, \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0 \end{cases} \quad \text{等等. 要注意: } \begin{cases} x_1 > 3, \\ x_2 > 3 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} x_1 + x_2 > 6, \\ x_1 x_2 > 9 \end{cases} \text{ 不等价.} \end{aligned}$$

7. 在解方程与函数、几何的综合问题时,关键是找到函数与方程的结合点(二次函数的图像与 x 轴交点的横坐标即为相应二次方程的实根),几何图形与方程的结合点(几何图形的性质转化为方程的两根之和与两根之积).

【赛题精讲】

例 1 解方程:(1) $x^3 - 2x^2 = 15x$; (2) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.

解 一元高次方程可以先把方程变形为一边为零,再把另一边分解因式,转化为一元一次或一元二次方程来解. 题(1)移项、提取公因式,得 $x(x^2 - 2x - 15) = 0$, 所以原方程有三个根: $x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 5$. 题(2)是只含有未知数的偶次项的一元四次方程,又叫双二次方程,可用换元来降低次数,用 y 代替方程里的 x^2 , 使这个双二次方程变为关于 y 的一元二次方程: $y^2 + 5y - 6 = 0$, 从而解得 $y_1 = -6, y_2 = 1$. 而 $y = -6$ 时, $x^2 = -6$ 无实数解, 所以题(2)的解是: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

例 2 解下列方程:(1) $\sqrt{x^2 + 7} = 1 - \sqrt{2}x$; (2) $3x^2 - 6x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 4} = -4$.

解 这类二次根式方程,应通过两边平方转化为整式方程来解,但这样的方程变形有可能产生增根,必须验根. 题(1)两边直接平方,整理得: $x_1 = 3\sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$, 经检验, $x = 3\sqrt{2}$ 是增根, 所以原方程的根为 $x = -\sqrt{2}$.

题(2)虽只有一个根式,但采用题(1)的平方法会比较复杂,观察 $\sqrt{x^2 - 2x + 4}$ 中的 $x^2 - 2x + 4$ 与 $3x^2 - 6x$, 可将方程整理为 $3(x^2 - 2x + 4) - 2\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 8 = 0$, 所以采用换元法, 设 $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = y$, 则原方程变形为 $3y^2 - 2y - 8 = 0, y_1 = 2, y_2 = -\frac{4}{3}$. 当 $y = 2$ 时, $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = 2$. 当 $y = -\frac{4}{3}$ 时, $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = -\frac{4}{3}$ 无解, 经检验 $x_1 = 0, x_2 = 2$ 都是原方程的解.

例 3 解方程组:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0, & \textcircled{1} \\ y^2 - 4x - 1 = 0; & \textcircled{2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 = 5, & \textcircled{1} \\ x^2 + xy - 3y^2 = 3. & \textcircled{2} \end{cases}$$

解 这两题都是特殊的由两个二元二次方程组成的方程组,可以直接用代入消元或加减消元来解. 题(1)将 $\textcircled{2}$ 式变形为 $y^2 = 4x + 1$ 代入 $\textcircled{1}$, 消去 y^2 项, 或由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 消去



y^2 项,化为一元二次方程.题(2)将①+②,可消去 xy 项和 y^2 项,得 x 的一元二次方程,两题的解分别是:

$$(1) \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = \sqrt{5}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -\sqrt{5}. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -\frac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

例4 已知方程 $x^2 - 2x - a = 0$ 无实数根,试判断方程 $x^2 + 2ax + 1 + 2(a^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$ 的根的情况.

分析 考察两个方程的判别式即可.

解 因为方程 $x^2 - 2x - a = 0$ 无实根,所以 $\Delta_1 = 4 - 4(-a) < 0$,即 $a < -1$.

第二个方程整理,得 $(2a^2 - 1)x^2 + 2ax + (2a^2 - 1) = 0$.

当 $a < -1$ 时, $2a^2 - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 4a^2 - 4(2a^2 - 1)^2 = -4[(2a^2 - 1)^2 - a^2] \\ &= -4(2a - 1)(a + 1)(2a + 1)(a - 1), \end{aligned}$$

且当 $a < -1$ 时, $2a - 1 < 0$, $a + 1 < 0$, $2a + 1 < 0$, $a - 1 < 0$,所以 $\Delta_2 < 0$.

所以方程 $x^2 + 2ax + 1 + 2(a^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$ 没有实数根.

例5 就 k 的取值范围讨论方程组 $\begin{cases} y = kx^2, & \text{①} \\ x^2 - xy - 2x + y + 1 = 0 & \text{②} \end{cases}$ 在实数范围内有无解;在有解的情况下,确定解的个数并求出这时的解.

解 方程组解的问题,通过消元转化为关于 x 的一元二次方程后,讨论该一元二次方程的实根问题,与判别式 Δ 有关.将①代入②得 $x^2 - xkx^2 - 2x + kx^2 + 1 = 0$.整理得 $(x - 1)(kx^2 - x + 1) = 0$.③, $\therefore x - 1 = 0$ 或 $kx^2 - x + 1 = 0$.讨论 $kx^2 - x + 1 = 0$ 中 k 的取值与方程③的根.

(1) $k = 0$ 时,方程③有两个相等的根 $x_1 = x_2 = 1$, \therefore 方程组只有一组解 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

(2) $k \neq 0$ 时, $\Delta = 1 - 4k$,当 $\Delta = 0$ 时, $k = \frac{1}{4}$,方程③的根是 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2$,

\therefore 方程组有两组解 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

例6 已知某二次项系数为1的一元二次方程的两实根 a, b 满足关系式:

$$\begin{cases} a + b + ab = 5, \\ ab(a + b) = 6. \end{cases} \quad \text{①} \text{试求这个一元二次方程.}$$

解 要构造以 a, b 为两根的一元二次方程,由韦达定理知,只需求出 $a + b$ 和 ab 的值.于是只需将方程组①转化为关于 $a + b$ 和 ab 的方程组,现令 $s = a + b, t = ab$,则

①为 $\begin{cases} s + t = 5, \\ st = 6. \end{cases}$ 再把 s, t 看作一元二次方程 $z^2 - 5z + 6 = 0$ 的两根,解得 $z_1 = 3, z_2 = 2$,



因此得: $\begin{cases} s=3, \\ t=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s=2, \\ t=3. \end{cases}$ (不合题意,为什么?)

于是,所求的一元二次方程为: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

思考 若将例6中的关系式①改为 $\begin{cases} 2a + 2b + 3\sqrt{a+b} = 14, \\ a^2 + b^2 = 14 \end{cases}$, 请读者自行解决.

例7 若关于 x 的二次方程 $x^2 + 2px + 2q = 0$ 有实根,其中 p, q 为奇数,证明此方程必有两个无理根.

分析 在确定方程根的性质时,除了运用判别式和韦达定理的知识外,有时还需要用到整数的有关性质,综合运用这些知识才能解决有关问题.

证明 (用反证法)

假设方程两实根 x_1, x_2 都是有理数,则其方程的判别式 $\Delta = (2p)^2 - 4(2q) = 4(p^2 - 2q)$ 必为整数的完全平方.

设 $p^2 - 2q = k^2$. 因为 p, q 均为奇数,所以 k 为奇数.

又 $p^2 - k^2 = 2q$, 所以 $(p+k)(p-k) = 2q$, 且 $p+k$ 和 $p-k$ 均为偶数. 令 $p+k = 2s, p-k = 2t$ (s, t 为整数). 所以 $4st = 2q$. 所以 $q = 2st$ 为偶数. 这与已知 q 为奇数矛盾.

所以方程两根都是无理根.

例8 首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0, \quad ①$$

$$(b-1)x^2 - (b^2+2)x + (b^2+2b) = 0. \quad ②$$

(其中 a, b 是自然数)有一个公共根,试求 $\frac{a^b + b^a}{a^{-b} + b^{-a}}$ 的值.

解法1 设 m 是两方程的公共根,则

$$(a-1)m^2 - (a^2+2)m + (a^2+2a) = 0, \quad ③$$

$$(b-1)m^2 - (b^2+2)m + (b^2+2b) = 0. \quad ④$$

③ $\times (b-1)$ - ④ $\times (a-1)$ 消去平方项,整理得

$$(a-b)(ab-a-b-2)(m-1) = 0.$$

因为 $a-1 \neq b-1$, 所以 $a \neq b$, 即 $a-b \neq 0$.

所以 $m=1$, 或 $ab-a-b-2=0$.

若 $m=1$, 代入原方程, 得 $a=1$ 或 $b=1$. 与已知矛盾. 所以 $m \neq 1$.

若 $ab-a-b-2=0$, 即 $(a-1)(b-1)=3$, 由 a, b 为自然数, 得 $\begin{cases} a-1=3, \\ b-1=1; \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} a-1=1, \\ b-1=3. \end{cases} \quad \text{所以 } a=4, b=2 \text{ 或 } a=2, b=4.$$



$$\text{所以 } \frac{a^b + b^a}{a^{-b} + b^{-a}} = \frac{a^b + b^a}{\frac{a^b + b^a}{a^b \cdot b^a}} = a^b \cdot b^a = 256.$$

解法 2 由已知条件可知 $a > 1, b > 1$, 且 $a \neq b$. 解方程①得两根为 $a, \frac{a+2}{a-1}$; 解方程②得两根为 $b, \frac{b+2}{b-1}$. 因为 $a \neq b$, 根据有公共根, 得 $a = \frac{b+2}{b-1}$, 或 $b = \frac{a+2}{a-1}$.

经化简, 得 $ab - a - b - 2 = 0$. 以下同解法 1.

例 9 是否存在实数 k , 使关于 x 的方程 $9x^2 - (4k - 7)x - 6k^2 = 0$ 的两个实根 x_1, x_2 满足 $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{3}{2}$? 如果存在, 试求出所有满足条件的 k 的值; 如果不存在, 请说明理由.

解 这是一个探索性问题, 本题中的实数 k 是否存在, 可以通过计算来说明. 设法建立关于 k 的方程(或方程组), 若该方程有实数解, 则 k 就存在, 否则, k 就不存在. 由

$$\begin{cases} \Delta = (4k - 7)^2 - 4 \times 9 \times (-6k^2) \geq 0, & \text{①} \\ x_1 + x_2 = \frac{4k - 7}{9}, & \text{②} \\ x_1 x_2 = -\frac{6k^2}{9}, & \text{③} \\ \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{3}{2}. & \text{④} \end{cases}$$

题意并应用韦达定理可得:

由③得, $\frac{x_2}{x_1} < 0$, 所以④即为 $-\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{2}$, 可设 $x_1 = 3a, x_2 = -2a$, 代入②、③并消去 a , 便可得关于 k 的方程: $7k^2 - 56k + 49 = 0$, 解得 $k = 1$ 或 $k = 7$, 代入①可知均满足.

例 10 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x + y - 3 = 0, & \text{①} \\ 2x^2 + 5y^2 - 4x + y - 6 = 0; & \text{②} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 81, & \text{①} \\ x^2 + 2xy = 72. & \text{②} \end{cases}$$

分析 解二元二次方程组的基本思想是“消元”和“降次”.

解 (1) 因含 x 的项的系数成比例, 于是可消去 x , 得 $y^2 - y = 0$. 所以 $y = 0$ 或 1 . 分别代入其中一个方程, 得对应的 x 值是 $3, -1$ 和 $0, 2$. 故原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

(2) 因方程缺一次项, 可考虑“降次”.

$$\text{①} + \text{②} \times 2, \text{得 } (2x + y)^2 = 225, \text{即 } 2x + y = \pm 15. \quad \text{③}$$

$$\text{①} - \text{②}, \text{得 } (x - y)^2 = 9, \text{即 } x - y = \pm 3. \quad \text{④}$$

由③、④可组成四个二元一次方程组:



$$\begin{cases} 2x+y=15, \\ x-y=3; \end{cases} \begin{cases} 2x+y=15, \\ x-y=-3; \end{cases} \begin{cases} 2x+y=-15, \\ x-y=3; \end{cases} \begin{cases} 2x+y=-15, \\ x-y=-3. \end{cases}$$

分别解得 $\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=3; \end{cases} \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=7; \end{cases} \begin{cases} x_3=-4, \\ y_3=-7; \end{cases} \begin{cases} x_4=-6, \\ y_4=-3. \end{cases}$

例 11 解方程组: $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{12}{x-y}. \end{cases}$ ①

解 由②得 $x^2-y^2-(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=12$. ②

当 $x>y$ 时, ③式化为 $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0$. ③

设 $\sqrt{x^2-y^2}=A$, 则④式化为 $A^2-A-12=0$. ④

解得 $A=4$, 或 $A=-3$ (舍去). $\therefore \begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\sqrt{18}, \\ y=\pm\sqrt{2}; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\sqrt{18}, \\ y=\pm\sqrt{2}. \end{cases}$ (舍去)

当 $x<y$ 时, ③式化为 $x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-12=0$. ⑤

设 $\sqrt{x^2-y^2}=A$, 则⑤式化为 $A^2+A-12=0$.

解得 $A=3$, 或 $A=-4$ (舍去).

$\therefore \begin{cases} x^2-y^2=9, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{58}, \\ y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}; \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}\sqrt{58}, \\ y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}. \end{cases}$

经检验, 原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{18}, \\ y_1=\sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} x_2=\sqrt{18}, \\ y_2=-\sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{58}, \\ y_3=\frac{1}{2}\sqrt{11}; \end{cases} \begin{cases} x_4=-\frac{1}{2}\sqrt{58}, \\ y_4=-\frac{1}{2}\sqrt{11}. \end{cases}$$

例 12 解方程组: $\begin{cases} y=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}, \\ x=\sqrt{y-\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}. \end{cases}$

解 由方程表达式可知 $x>0, y>0$, 设 $x>y$, 则

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}>\sqrt{y-\frac{1}{y}}, \sqrt{1-\frac{1}{x}}>\sqrt{1-\frac{1}{y}}.$$



$$\therefore \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \sqrt{y - \frac{1}{y}} + \sqrt{1 - \frac{1}{y}}, \text{ 即 } y > x.$$

$\therefore x > y$ 不成立. 由对称性可知 $x < y$ 也不成立, $\therefore x = y$.

$$\text{代入原方程得 } x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \therefore x - \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = 0.$$

$$\text{配方得 } \frac{1}{2} \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{x}} - 1 = 0, \\ \sqrt{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0. \end{cases}$$

两方程都化为 $x^2 - x - 1 = 0$. 解得 $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (负值舍去).

\therefore 原方程组的解为 $x = y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



【能力训练】

1. 解方程 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

2. 当 a, b 为何值时, 方程 $x^2 + 2(1+a)x + 3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2 = 0$ 有实根?

3. 已知方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ 的两实根的平方和等于 7, 求 m 的值.

4. 解方程: $\sqrt{2x^2 - 7x + 1} - \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = 1$.

5. 解方程: $\sqrt{1 + \frac{1}{x+2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x+3}} = \frac{3}{2}$

6. 解方程组: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$

7. 解方程: $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$.

8. 已知 $m^2 + 2m - 1 = n^4 - 2n^2 - 1 = 0$, 且 $mn^2 \neq 1$, 求 $\left(\frac{mn^2 + n^2 + 1}{m} \right)^{1999}$ 的值.

9. 当 k 为何实数时, 方程组 $\begin{cases} x = k + y, & \text{①} \\ x^2 - 3y^2 + y = \frac{1}{4} & \text{②} \end{cases}$ 有惟一的一组解?

10. 解方程组: $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, & \text{①} \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. & \text{②} \end{cases}$

11. 已知二次函数 $y = x^2 + 2ax - 2b + 1$ 和 $y = -x^2 + (a-3)x + b^2 - 1$ 的图像都经过 x 轴上两个不同的点 M, N , 求这个两个函数的解析式.

12. 甲、乙两人同时解方程 $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = 7$. 抄题时, 甲错抄成 $\sqrt{x-a} +$



$\sqrt{x+b}=7$, 结果得其一解为 12; 乙错抄成 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+d}=7$, 结果得其一解为 13. 又知两人除抄错题外, 解题过程都是正确的, 其中 a, b, d 都是整数. 求 a, b 的值.



二十六、二次函数



【赛点目标】

1. 了解二次函数的概念,并知道二次函数解析式的三种不同形式及其含义.
2. 能通过五点法(其特殊点)画二次函数图像.
3. 理解二次函数的性质,并会利用图像判断其函数值随自变量变化的情况,会求其最大值和最小值.
4. 掌握二次函数与一元二次方程之间的内在联系,会利用这种联系解决有关问题.
5. 会运用二次函数的性质解决一些与几何有关的综合题,求一些实际问题中的最大值或最小值.



【方法述要】

1. 记住二次函数解析式的三种形式:① $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$; ② $y = a(x + m)^2 + k (a \neq 0, \text{其中 } m = \frac{b}{2a}, k = \frac{4ac - b^2}{4a})$; ③ $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0, \text{其中 } x_1, x_2 \text{ 是方程 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的两根})$; 了解其中常数 a, b, c 的几何意义,确定抛物线的开口方向;能合理地选取式子,用待定系数法求二次函数的解析式.
2. 能熟练运用配方法及公式法将一般式转换为顶点式,确定图像的顶点坐标,对称轴位置,能用五点法作图.
3. 能正确判断二次函数的函数值随自变量变化的情况;会求二次函数的最大值或最小值;会利用二次函数的图像确定自变量为何值时,函数值等于零、大于零及小于零.
4. 理解二次函数与二次方程之间的关系,会求二次函数的图像与 x 轴的交点坐标.
5. 能正确判断 $y = ax^2$ 与 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像之间的联系(平移).
6. 二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 与二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 、二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之间的关系:
 - (1) 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两解 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$, ①若 $a > 0$,则由二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像得不等式的解集为 $x > \alpha$ 或 $x < \beta$, ②若 $a < 0$,则由二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像得不等式的解集为 $\alpha > x > \beta$;
 - (2) 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一解 α , ①若 $a > 0$,则由二次函数 $f(x) = ax^2 +$



$bx+c$ 的图像得不等式的解集为 $x \neq \alpha$, ②若 $a < 0$, 则由二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像得不等式的解集为空集;

(3) 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无解, ①若 $a > 0$, 则由二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像得不等式的解集为全体实数, ②若 $a < 0$, 则由二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像得不等式的解集为空集.

其他形式的二次不等式的解集可由同样的方法得到.

7. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之间的关系:

(1) 若二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两解, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴相交, 若二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一解, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴相切, 若二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无解, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴相离;

(2) 在二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中, 若 $b^2 - 4ac > 0$, ①若 $f(\alpha) < 0$, 则二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一根大于 α 、有一根小于 α , ②若 $f(\alpha) > 0$, 则二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两根, 当二次函数的对称轴在 $x = \alpha$ 右侧时, 两根同大于 α , 当二次函数的对称轴在 $x = \alpha$ 左侧时, 两根同小于 α ;

(3) 若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的值 $f(\alpha)f(\beta) < 0$, 则二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一根在 α 与 β 之间.

【赛题精讲】

例 1 已知抛物线过点 $A(-3, 3)$, $B(1, 3)$ 和点 $C(0, \frac{3}{2})$, 求这个二次函数的解析式.

解法一 用一般式.

设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$, 依题意得

$$\begin{cases} 3 = a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c, \\ 3 = a \times 1^2 + b \times 1 + c, \\ \frac{3}{2} = a \times 0^2 + b \times 0 + c, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 1, \\ c = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

\therefore 函数解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

解法二 用顶点式.

\therefore 抛物线过点 $A(-3, 3)$, $B(1, 3)$,

\therefore 由抛物线的对称性知抛物线的对称轴为 $x = -1$.

\therefore 可设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)^2 + n$.



又 \because 抛物线过点 B, C ,

$$\therefore \begin{cases} 3 = a(1+1)^2 + n, \\ \frac{3}{2} = a(0+1)^2 + n. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ n = 1. \end{cases}$$

\therefore 函数解析式为 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

解法三 用双根式.

依题意可设抛物线方程为 $y = a(x+3)(x-1) + 3$,

又 \because 抛物线过点 C , $\therefore \frac{3}{2} = a(0+3)(0-1) + 3$. 解得 $a = \frac{1}{2}$.

\therefore 函数解析式为 $y = \frac{1}{2}(x-1)(x+3) + 3$, 即 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

例 2 请研究二次函数 $y = x^2 + 4x + 3$ 的图像及其性质, 并尽可能多地写出有关结论.

解 这是一道结论开放题. 函数图像如图 26-1, 得到:

- (1) 图像的开口方向: 向上.
- (2) 对称轴: 直线 $x = -2$.
- (3) 顶点坐标: $(-2, -1)$.
- (4) 图像与 x 轴的交点坐标为: $(-3, 0)$ 、 $(-1, 0)$.
- (5) 图像与 y 轴的交点坐标为 $(0, 3)$.
- (6) 图像与 y 轴的交点关于对称轴的对称点坐标为 $(-4, 3)$.
- (7) 最大值或最小值: 当 $x = -2$ 时, y 有最小值 -1 .
- (8) 当 $x = -3$ 或 -1 时, $y = 0$, 当 $-3 < x < -1$ 时 $y < 0$, 当 $x > -1$ 或 $x < -3$ 时, $y > 0$.
- (9) 图像的平移: 抛物线 $y = x^2$ 向左平移 2 个单位, 再向下平移 1 个单位得到抛物线 $y = x^2 + 4x + 3$.
- (10) 图像在 x 轴上截得的线段长为 2.
- (11) 对称抛物线: 抛物线 $y = x^2 + 4x + 3$ 关于 x 轴对称的抛物线为 $y = -(x+3) \cdot (x+1)$. 当然, 读者还可以思考对原二次函数作更多的研究.

例 3 如图 26-2, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴交于 B, C 两点, 与 y 轴交于点 A .

- (1) 根据图像判断 a, b, c 的符号并说明理由;
- (2) 如果 A 的坐标为 $(0, -3)$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, 求这个函数解析式.

解 (1) 由抛物线的开口方向可知 $a > 0$, 由于对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 在 y 轴的左侧, 所以

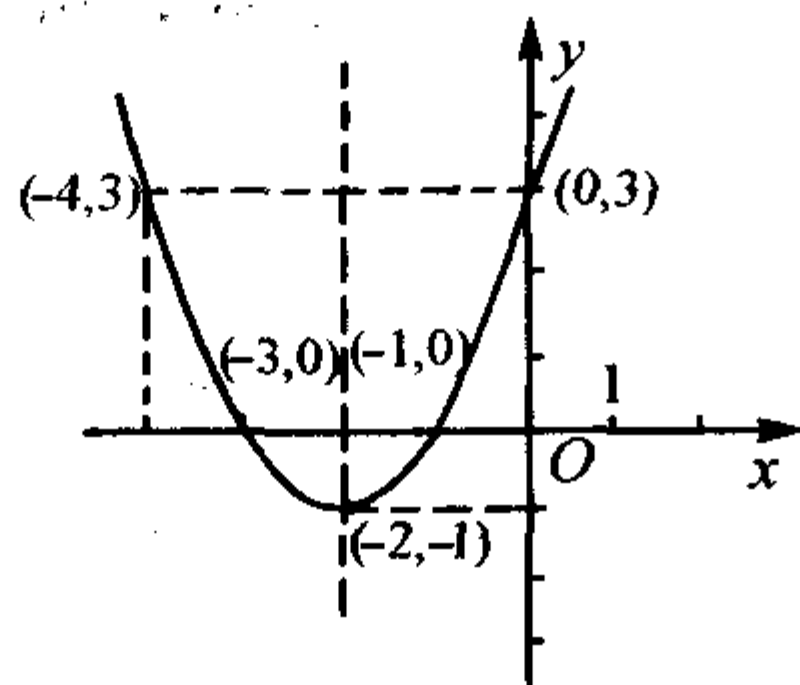


图 26-1



$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow a, b$ 同号, 故 $b > 0$, 抛物线与 y 轴的交点 $(0, c)$ 在 y 轴的负半轴上, 故 $c < 0$.

(2) 由点 A 的坐标为 $(0, -3)$, 可知 $OA = 3$, 通过解直角三角形 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 可得 $B(-3, 0), C(\sqrt{3}, 0)$. 可设两根式为 $y = a(x - \sqrt{3})(x + 3)$, 把 $(0, -3)$ 代入得 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以解

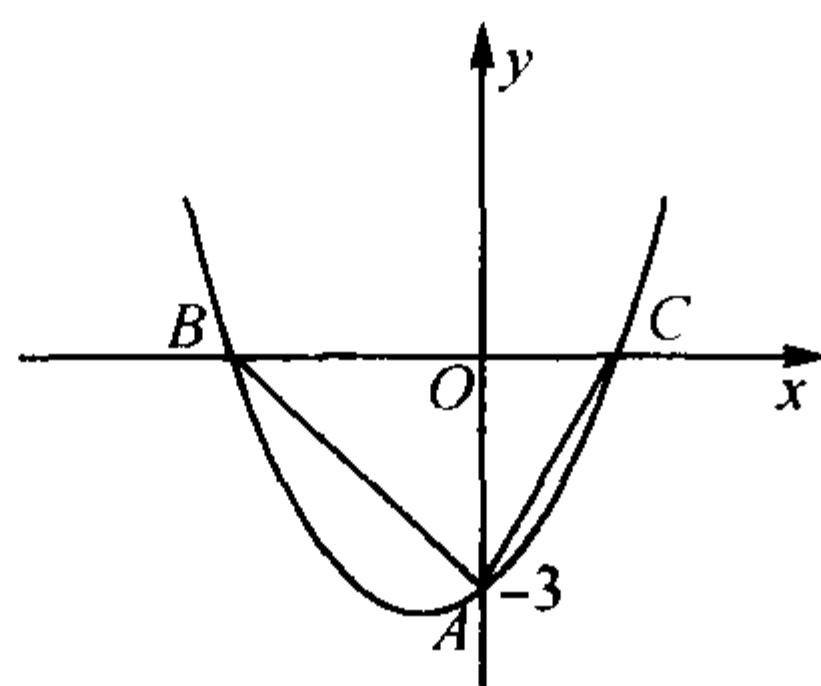


图 26-2

析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3})(x + 3)$.

例 4 (1) 二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 6$, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 恒有 $f(x) \geq a$, 求 a 的取值范围;

(2) 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 5x + m = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3$, 求 m 的取值范围. 若 m 为整数, 求方程的解.

解 (1) 原函数可化为 $f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 6$.

\therefore 当 $-2 < a < 2$ 时, 函数最小值为 $f(x)_{\min} = -a^2 + 6$.

$\therefore -a^2 + 6 \geq a$, 即 $-3 \leq a \leq 2$. $\therefore -3 \leq a \leq 2$.

当 $a \geq 2$ 时, 函数最小值为 $f(x)_{\min} = 2^2 - 4a + 6$.

$\therefore 10 - 4a \geq a$, $\therefore a \leq 2$. $\therefore a = 2$.

当 $a \leq -2$ 时, 函数最小值为 $f(x)_{\min} = (-2)^2 + 4a + 6$.

$\therefore 10 + 4a \geq a$. $\therefore a \geq -\frac{10}{3}$. $\therefore -\frac{10}{3} \leq a \leq -2$.

综上所述可得 a 的取值范围为 $-\frac{10}{3} \leq a \leq 2$.

(2) 设二次函数 $f(x) = mx^2 - 5x + m$, 依题意得

$$\begin{cases} f(0) \cdot f(1) < 0, \\ f(1) \cdot f(3) < 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} m \cdot (2m - 5) < 0, \\ (2m - 5)(10m - 15) < 0. \end{cases}$$

解得 $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$.

若 m 为整数, 则 $m = 2$, 则原方程为 $2x^2 - 5x + 2 = 0$, 解得 $x_1 = 2, x_2 = 0.5$.

$\therefore m$ 的取值范围为 $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$. 当 m 为整数时, 方程的解为 $x_1 = 2, x_2 = 0.5$.

例 5 设 x_1, x_2 是抛物线 $y = mx^2 - (2m + 1)x + m - \frac{1}{2}$ 与 x 轴的两个交点的横坐标, 且 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 4$, 求实数 m 的值.

解 x_1, x_2 是抛物线 $y = mx^2 - (2m + 1)x + m - \frac{1}{2}$ 与 x 轴的两个交点的横坐



标,即 x_1, x_2 是一元二次方程 $mx^2 - (2m+1)x + m - \frac{1}{2} = 0$ 的两个实根,由韦达定理

得: $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m}, x_1 x_2 = \frac{m - \frac{1}{2}}{m}$, 将已知条件 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 4$ 用 m 来表示得关于 m 的

方程: $2m^2 - 9m = 0$. 解得 $m_1 = 0$ (不合题意,为什么?), $m_2 = \frac{9}{2}$. 因此抛物线与 x 轴有两个交点,所以必须考虑到 $\Delta > 0$, 即 $m > -\frac{1}{6}$. 故 $m = \frac{9}{2}$.

思考 对于二次函数 $y = mx^2 - (2m+1)x + m - \frac{1}{2}$, 不论 x 为何实数,函数值均小于 0, 求 m 的取值范围.

例 6 求证:对任意实数 p , 抛物线族 $y = x^2 + (p+1)x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$ 都过定点,而且这些抛物线的顶点都在一条确定的抛物线上.

证明 由 $y = x^2 + (p+1)x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$ 得 $y - x^2 - x - \frac{1}{4} = p\left(x + \frac{1}{2}\right)$, 对任意实数 p , 要使抛物线族过定点, 则

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0, \\ y - x^2 - x - \frac{1}{4} = 0. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = 0. \end{cases} \quad \therefore \text{抛物线族过定点 } M\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

由 $y = x^2 + (p+1)x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$ 得 $y = \left(x + \frac{p+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}p^2$.

\therefore 抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{p+1}{2}, -\frac{1}{4}p^2\right)$.

设抛物线顶点坐标为 (x, y) , 则 $\begin{cases} x = -\frac{p+1}{2}, \\ y = -\frac{1}{4}p^2. \end{cases}$ 消去 p 得 $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

\therefore 对任意的实数 p , 抛物线族的顶点都在抛物线 $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 上.

例 7 如图 26-3, 设抛物线 $y = x^2 + px + q$ ($q \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C . 显然, $\triangle ABC$ 的形状由系数 p, q 的值所确定. 你能找出关于 $\triangle ABC$ 的形状和 p, q 之间的关系吗? 你不妨大胆地进行猜想, 但你应该想办法证明或否定你的猜想.

解 由题意知 $\Delta = p^2 - 4q > 0$, 这是讨论此问题的前提.

(1) 当 $q > 0$ 时, 由韦达定理知 x_1 和 x_2 同号, 此时 $\triangle ABC$ 必

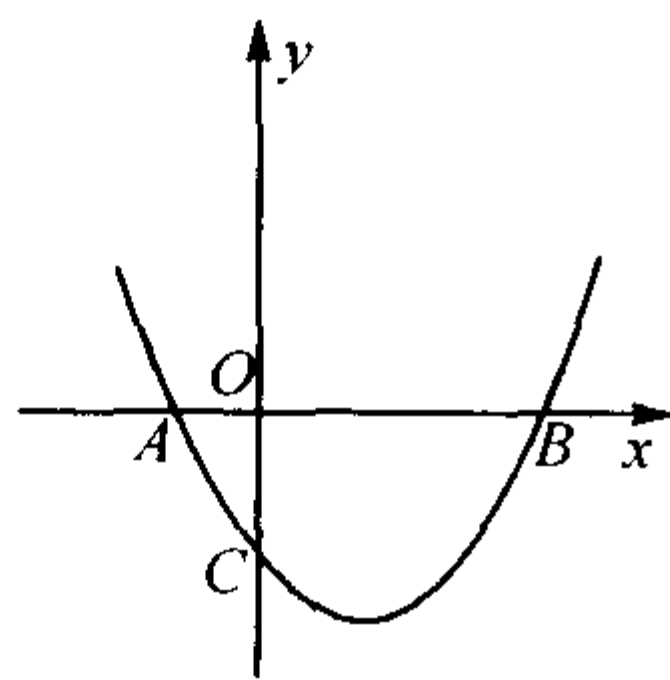


图 26-3



为钝角三角形.(为什么?)

(2)当 $-1 < q < 0$ 时, $\triangle ABC$ 为钝角三角形,

$$\because AC^2 + BC^2 = x_1^2 + q^2 + x_2^2 + q^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2q^2,$$

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2q.$$

当 $-1 < q < 0$ 时, $q(q+1) < 0$ 即 $q^2 < -q$, 即 $2q^2 < -2q$.

于是 $AC^2 + BC^2 < AB^2$. $\therefore \triangle ABC$ 为钝角三角形.

(3)当 $q = -1$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(4)当 $q < -1$ 时, $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

(5)当 $p = 0, q < 0$ 时, $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

特别又 $q = -3$ 时, $\triangle ABC$ 为等边三角形.

(以上结论(3)~(5)由读者自己证明).

思考 1. 当 p, q 满足什么条件时, $AB = BC$ (或 $AB = AC$), 即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形?

2. 若抛物线 $y = x^2 + px + q$ ($q < 0$) 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , $\angle ACB = 90^\circ$, 且 $\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC}$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积.

例 8 已知抛物线 $y = ax^2 - (a-1)x + a-1$ 与直线 $y = 1-2x$ 至少有一个整点 (横坐标、纵坐标均为整数) 交点, 试确定整数 a 的值, 并求出这时的整点交点.

解 由 $\begin{cases} y = ax^2 - (a-1)x + a-1, \\ y = 1-2x, \end{cases}$ 得方程 $ax^2 - (a-3)x + a-2 = 0$.

又 \because 抛物线与直线有整点交点, \therefore 方程有整数解.

$$\therefore \Delta = (a-3)^2 - 4a(a-2) = -3a^2 + 2a + 9 = -3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{28}{3} \text{ 为完全平方数.}$$

$$\therefore \Delta = 9 \text{ 或 } \Delta = 4 \text{ 或 } \Delta = 1 \text{ 或 } \Delta = 0.$$

(1)当 $\Delta = 9$ 时, $a = 0$ 或 $a = \frac{2}{3}$. 不合题意.

(2)当 $\Delta = 4$ 时, $a = -1$ 或 $a = \frac{5}{3}$. $\therefore a = -1$.

$$\text{当 } a = -1 \text{ 时, 方程组的整数解为 } \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=3, \\ y=-5. \end{cases}$$

\therefore 整点交点坐标为 $A(1, -1)$ 和 $B(3, -5)$.

(3)当 $\Delta = 1$ 时, $a = 2$ 或 $a = -\frac{4}{3}$. $\therefore a = 2$.

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, 方程组的整数解为 } \begin{cases} x=0, \\ y=1. \end{cases} \therefore \text{整点交点坐标为 } P(0, 1).$$

(4)当 $\Delta = 0$ 时, $a = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$ 或 $a = \frac{1-2\sqrt{7}}{3}$. 不合题意.



综上可得, $a = -1$, 这时整点交点坐标为 $A(1, -1)$ 和 $B(3, -5)$; 或 $a = 2$, 这时整点交点坐标为 $P(0, 1)$.

例 9 已知函数 $y = x^2 + (a+1)^2 + |x+a+1|$ 的最小值 $y_{\min} > 3$, 求实数 a 的取值范围.

解 (1) 若 $x+a+1 \geq 0$, 即 $x \geq -a-1$, 则原函数可化为 $y = x^2 + (a+1)^2 + x + a + 1 = x^2 + x + a^2 + 3a + 2$.

① 当 $-a-1 \geq -\frac{1}{2}$ 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = 2(a+1)^2 > 3$.

$\therefore a > \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$ 或 $a < -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \therefore a < -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1$.

② 当 $-a-1 \leq -\frac{1}{2}$ 即 $a \geq -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a^2 + 3a + 2 > 3$.

$\therefore a > \frac{-3+\sqrt{14}}{2}$ 或 $a < \frac{-3-\sqrt{14}}{2} \therefore a > \frac{-3+\sqrt{14}}{2}$.

(2) 若 $x+a+1 \leq 0$, 即 $x \leq -a-1$, 则原函数可化为 $y = x^2 + (a+1)^2 - (x+a+1) = x^2 - x + a^2 + a$.

① 当 $-a-1 \geq \frac{1}{2}$ 即 $a \leq -\frac{3}{2}$ 时, $y_{\min} = a^2 + a - \frac{1}{4} > 3$.

$\therefore a > \frac{-1+\sqrt{14}}{2}$ 或 $a < \frac{-1-\sqrt{14}}{2} \therefore a < \frac{-1-\sqrt{14}}{2}$.

② 当 $-a-1 \leq \frac{1}{2}$ 即 $a \geq -\frac{3}{2}$ 时, $y_{\min} = 2(a+1)^2 > 3$.

$\therefore a > \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$ 或 $a < -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \therefore a > \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$.

综上可得 $a > \frac{-3+\sqrt{14}}{2}$ 或 $a < \frac{-1-\sqrt{14}}{2}$.

例 10 在距 A 城市 45km 的 B 地发现金属矿, 现知由 A 城市至某一方向有一直线铁路 AX, B 地到该铁路的距离为 27km, 欲运物资于 AB 之间, 拟在铁路线 AX 上的某一点 C 筑一公路到 B 地, 已知公路运费是铁路运费的 2 倍, 问点 C 到点 A 的距离为多少时, 总运费最低?

解 依题意可得示意图, 如图 26-4 所示, $AB = 45\text{km}$, B 地到 AX 的距离 $BD = 27\text{km}$.

$\therefore AD = \sqrt{45^2 - 27^2} = 36$.

设点 C 到点 A 的距离为 $x\text{km}$, 铁路吨千米运费为 1 个单位, 则公路吨千米运费为 2 个单位, 总运费为 y 个单位.

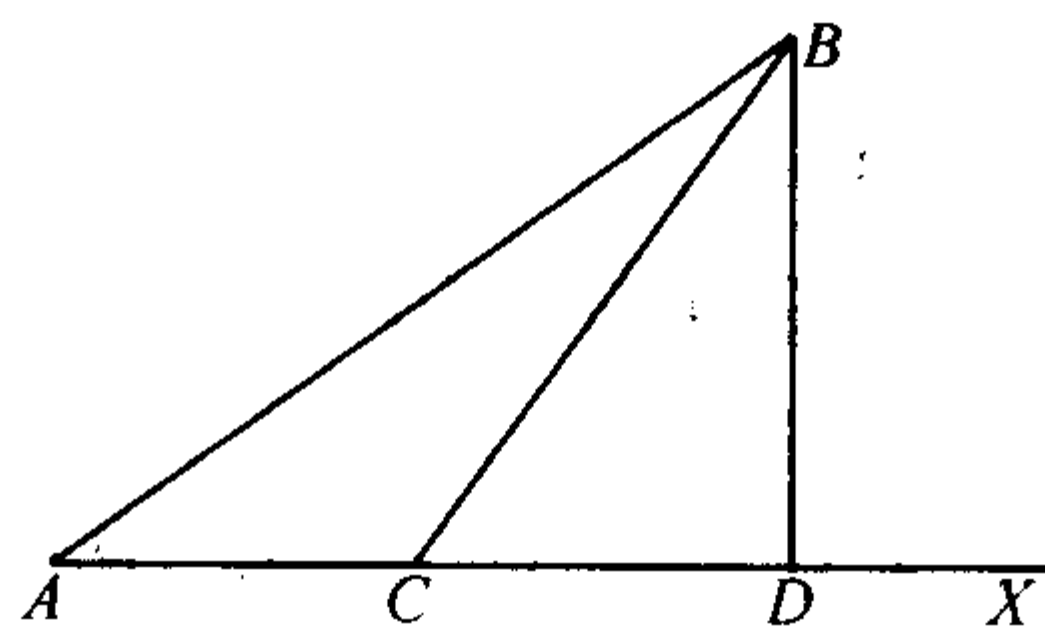


图 26-4



$$\therefore BC = \sqrt{27^2 + (36-x)^2} \therefore y = x + 2\sqrt{27^2 + (36-x)^2}.$$

$$\therefore 4[27^2 + (36-x)^2] = y^2 - 2xy + x^2.$$

$$\therefore 3x^2 + 2(y-144)x + 8100 - y^2 = 0.$$

$$\text{又} \because \text{此方程有解, 则 } \Delta \geq 0. \therefore 4(y-144)^2 - 4 \times 3 \times (8100 - y^2) \geq 0.$$

$$\therefore y \geq 36 + 27\sqrt{3} \text{ 或 } y \leq 36 - 27\sqrt{3}.$$

$$\text{又} \because y > 0,$$

$$\therefore y \text{ 的最小值为 } 36 + 27\sqrt{3}, \text{ 此时 } x = 36 - 9\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到点 } A \text{ 的距离为 } x = (36 - 9\sqrt{3})\text{km} \text{ 时, 总运费最低.}$$

例 11 已知抛物线 $y = -x^2 + 2(m+1)x + m+3$ 与 x 轴有两个交点 A, B , 且 A 点在 x 轴正半轴上, B 点在 x 轴负半轴上, 设 OA 的长为 a , OB 的长为 b .

(1) 求 m 的取值范围; (2) 若 a, b 满足 $a:b=3:1$, 求 m 的值;

(3) 由(2)所得的抛物线与 y 轴交于点 C , 问在抛物线上是否存在点 P , 使得 $\triangle PAC \cong \triangle OAC$? 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

解 (1) 依题意得

$$\begin{cases} \Delta = 4(m+1)^2 + 4(m+3) > 0, \\ m+3 > 0. \end{cases} \text{ 解得 } m > -3.$$

$$(2) \text{ 依题意得 } \begin{cases} a-b=2(m+1), \\ -ab=-(m+3), \\ a:b=3:1. \end{cases}$$

$$\therefore 3(m+1)^2 = m+3. \therefore m=0 \text{ 或 } m=-\frac{5}{3}.$$

$$\text{当 } m=-\frac{5}{3} \text{ 时, } a=-2, b=-\frac{2}{3}. \therefore m=0.$$

$$(3) \text{ 当 } m=0 \text{ 时, 抛物线方程为 } y = -x^2 + 2x + 3.$$

$$\text{点 } C \text{ 坐标为 } (0, 3), \text{ 点 } A \text{ 坐标为 } (3, 0), \text{ 点 } B \text{ 坐标为 } (-1, 0).$$

$$\therefore \triangle OAC \text{ 为直角三角形.}$$

若存在 P 点, 使得 $\triangle PAC \cong \triangle OAC$, 则四边形 $OCPA$ 为正方形. \therefore 点 P 坐标为 $(3, 3)$.

$$\text{又} \because -3^2 + 2 \times 3 + 3 = 0 \neq 3, \therefore \text{点 } P \text{ 不在抛物线上.}$$

$$\therefore \text{抛物线上不存在点 } P \text{ 使得 } \triangle PAC \cong \triangle OAC.$$

例 12 如图 26-5 所示, 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 直角边 OA 在 x 轴负半轴上, OC 在 y 轴上, 点 F 在 OA 上, 以 F 为圆心的圆与 y 轴、 AC 边相切, 切点分别为 O, D , $\odot F$ 与 x 轴的另一个交点为 E , 若 $\tan A = \frac{3}{4}$, $\odot F$ 的半径为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求过 A, C 两点的一次函数的解析式;



(2)求过 E, D, O 三点的二次函数的解析式;

(3)证明(2)中抛物线的顶点在直线 AC 上.

(1)解 连结 DF , 则 $DF = \frac{3}{2}$.

$$\because \tan A = \frac{3}{4}, \therefore AD = 2. \therefore AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \frac{5}{2}.$$

$\therefore AO = 4. \therefore$ 点 A 坐标为 $(-4, 0). \therefore CO = 3. \therefore$ 点 C 坐标为 $(0, 3)$.

设过 A, C 两点间的一次函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} -4k + b = 0, \\ 0 \cdot k + b = 3, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} k = \frac{3}{4}, \\ b = 3. \end{cases}$$

\therefore 过 A, C 两点间的一次函数解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$.

(2)解 过点 D 作 AO 的垂线交 AO 于点 P , 则 $DP \parallel CO$.

$$\therefore \frac{DP}{CO} = \frac{AD}{AC}.$$

又 \because 在 $Rt\triangle AOC$ 中, $AO = 4, CO = 3, \therefore AC = 5. \therefore DP = \frac{6}{5}$.

又 $\because D$ 在直线 AC 上, 解方程 $\frac{6}{5} = \frac{3}{4}x + 3$, 得 $x = -\frac{12}{5}$.

\therefore 点 D 坐标为 $(-\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$.

设过 E, D, O 三点的抛物线方程为 $y = ax^2 + bx + c$, 则

$$\begin{cases} c = 0, \\ 9a - 3b + c = 0, \\ \frac{144}{25}a - \frac{12}{5}b + c = 0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{5}{6}, \\ b = -\frac{5}{2}, \\ c = 0. \end{cases}$$

\therefore 抛物线方程为 $y = -\frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{2}x$.

(3)证明 在(2)中抛物线的顶点坐标为 $(-\frac{3}{2}, \frac{15}{8})$.

把 $(-\frac{3}{2}, \frac{15}{8})$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 中, 右边 $= \frac{3}{4} \times (-\frac{3}{2}) + 3 = \frac{15}{8} =$ 左边.

\therefore 抛物线的顶点在直线 AC 上.

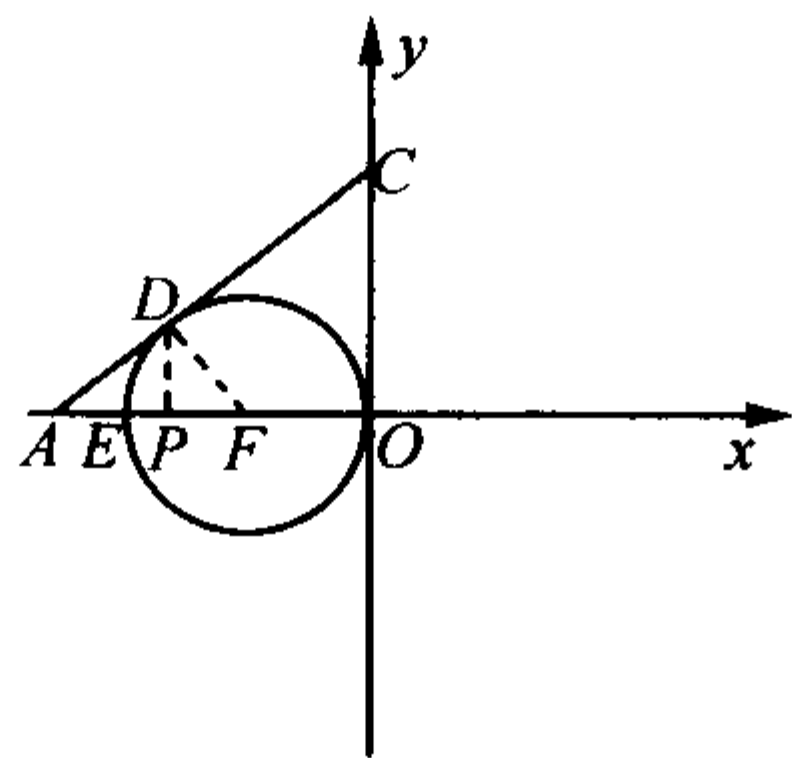


图 26-5



【能力训练】

1. 已知二次函数的图像在 x 轴上截得的线段长为 4, 图像的顶点坐标为 $P(3,$



-2), 求这个函数的解析式.

2. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向下平移 2 个单位, 再向左平移 6 个单位, 所得到的抛物线顶点为 $(-3, -1)$, 并且 $a + b + c = 9$, 求 a, b, c 的值.

3. 已知二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $-2 < x < 3$, 求二次不等式 $cx^2 + bx + a \leq 0$ 的解集.

4. 当 k 为何值时, 对任意实数 x , 不等式 $kx^2 - (k-2)x + k > 0$ 都成立?

5. 若关于 x 的一元二次方程 $2kx^2 - 2x - 3k - 2 = 0$ 的一根大于 1, 另一根小于 -1, 试求 k 的取值范围.

6. 已知抛物线 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 y 轴上的截距为 -2, 在 x 轴上的一截距是另一截距的两倍, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$, 求抛物线方程.

7. 当 k 为何值时, 方程 $x^2 + 4x + 4k - k^2 = 0$ 的一根大于 3, 另一根小于 3?

8. 对满足 $0 \leq p \leq 4$ 的所有实数 p , 求使不等式 $x^2 + px > 4x + p - 3$ 成立的 x 的取值范围.

9. 设 a 为实数, 若二次函数 $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3a$ 的最小值为 m , 当 a 满足 $0 \leq a^2 - 4a - 2 \leq 10$ 时, 求 m 的最大值.

10. 求证: 若 $a < b < c$, 则二次方程 $(x-a)(x-c) + (x-b)^2 = 0$ 有两个不同的实根, 并且有一根在 a 与 b 之间, 另一根在 b 与 c 之间.

11. 某环形道路上顺次排列有四所中学: A_1, A_2, A_3, A_4 , 它们顺次有彩电 15 台、8 台、5 台、12 台, 为使各校的彩电数相同, 允许一些中学向相邻中学调出彩电. 问怎样调配才能使调出的彩电总台数最少? 并求出这个最少总台数.

12. 某商场以每件 45 元的价格购进一种服装, 根据试销情况得知, 这种服装每天的销售量 T (件) 与每件的销售价 x (元/件) 可看成是一次函数关系: $T = -3x + 207$ ($45 \leq x \leq 69$). (1) 写出商场卖这种服装每天的销售利润 y 与每件的销售价 x 之间的函数关系式; (2) 问商场要想每天获得最大的销售利润, 每件的销售价定为多少最合适? 最大销售利润是多少?



二十七、相似三角形



【赛点目标】

1. 了解相似三角形的概念.
2. 理解相似三角形的判定.
3. 理解直角三角形相似的判定.
4. 理解直角三角形中的成比例线段.



【方法述要】

1. 判定三角形相似,一般先找等角,当难以发现等角或仅能判定一组等角时,则应转向证明边对应成比例.我们要熟悉每一个判定定理,并能根据条件熟练选用,不能偏废.

2. 要重视观察,善于分析图形,抓住特征,综合运用三角形、四边形和圆的知识,发现等角和比例线段.分析综合法是学习相似三角形的基本方法.

3. 射影定理揭示了直角三角形中的成比例线段.利用射影定理,不但可以计算未知线段的长,而且可以进行等量(线段的积或平方)代换.在直角三角形中,常设线段的比为 k ,利用射影定理和勾股定理进行计算,把几何问题转化为代数问题来解.

4. 证明三点共线的一般方法有:

- (1) 当 $AB \pm BC = AC$ 时, A, B, C 三点共线;
- (2) 当 $\angle PBA + \angle PBC = 180^\circ$ 时, A, B, C 三点共线;
- (3) 若 B 在 PQ 上, A, C 在其两侧,若 $\angle PBA = \angle QBC$, 则 A, B, C 三点共线;
- (4) 连结 AB, AC , 证明 AB, AC 两直线重合得 A, B, C 三点共线;
- (5) 中心对称图形中两个对称点与对称中心三点共线;
- (6) 由梅涅劳斯定理逆定理证明三点共线.

5. 证明三线共点的一般方法有:

- (1) 证明两条直线的交点在第三条直线上;
- (2) 确定两条直线的交点与第三条直线上的另外两点,将其转化为证明三点共线问题;
- (3) 构造三角形使这三条线为其三条中线(高线或角平分线),则这三线共点;
- (4) 由塞瓦定理逆定理可得三线共点.



另外,由三点共线或三线共点,应用梅涅劳斯定理(要注明哪条直线截哪个三角形)或塞瓦定理(在哪个三角形中,哪三线共点)来证明或计算一些线段的比例关系.



【赛题精讲】

例 1 (梅涅劳斯定理)若直线截 $\triangle ABC$ 的三边 AB, BC, CA (或其延长线),所得交点分别为 X, Y, Z ,则有 $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$.

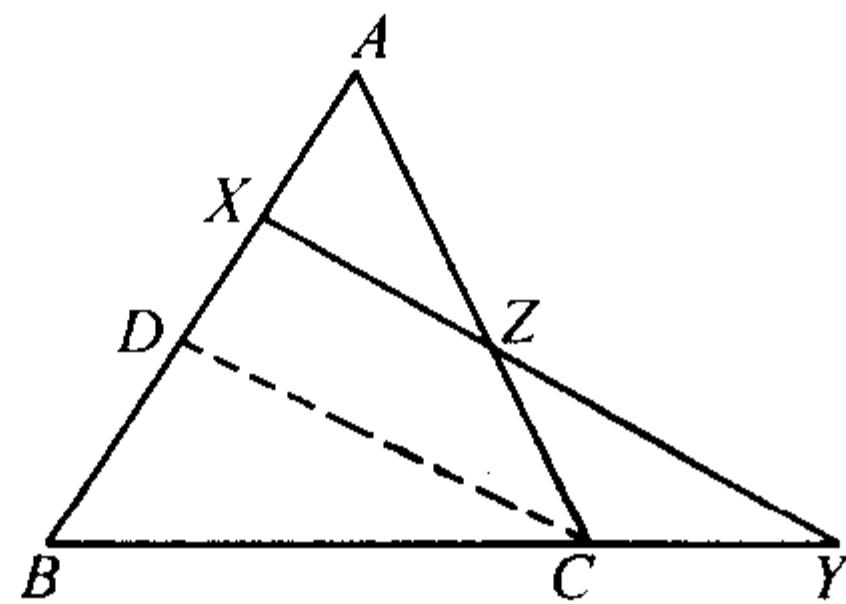


图 27-1

证明 如图 27-1 所示,过点 C 作 $CD \parallel XY$ 交 AB 于点 D , 则

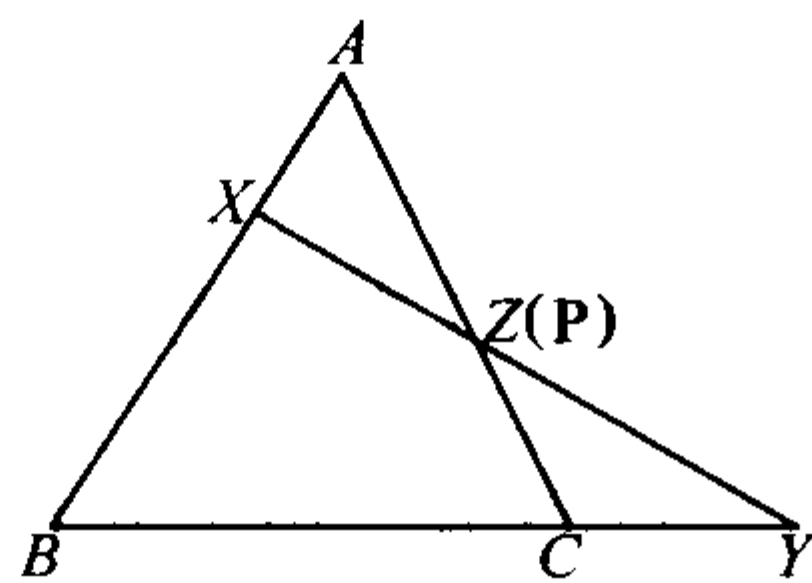
$$\left. \begin{array}{l} CD \parallel XY \Rightarrow \frac{BY}{CY} = \frac{BX}{DX} \\ CD \parallel XZ \Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{DX}{AX} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{AX}{BX} \cdot \frac{BX}{DX} \cdot \frac{DX}{AX} = 1.$$


图 27-2

(梅涅劳斯定理逆定理)如图 27-2 所示,在 $\triangle ABC$ 三边 AB, BC, CA (或它们的延长线)上分别取点 X, Y, Z ,若

$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$, 求证: X, Y, Z 三点共线.

证明 (用同一法)连结 XY 交 AC 于点 P , 直线 XPY 截 $\triangle ABC$, 由梅涅劳斯定理得

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \\ \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{CZ}{ZA} \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{CZ}{AC} \Rightarrow CP = CZ, \text{ 即 } P, Z \text{ 重合. } \therefore X, Y, Z \text{ 三点共线.}$$

例 2 (塞瓦定理)如图 27-3 所示, 设 O 是 $\triangle ABC$ 内任一点, AO, BO, CO 分别交对边于点 X, Y, Z , 求证 $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

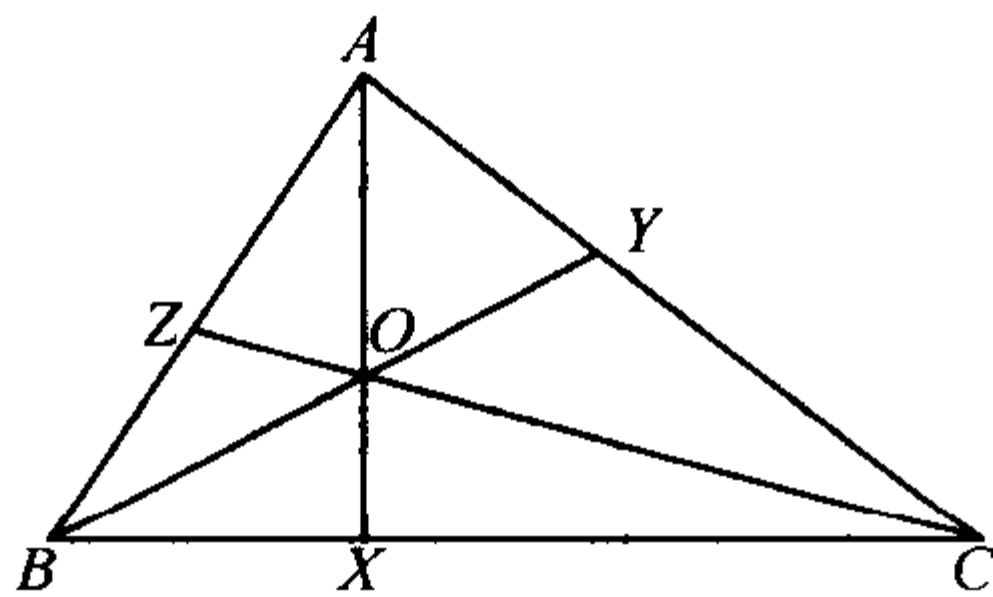


图 27-3

证明 $\frac{BX}{CX} = \frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle ACX}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{BX}{CX} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ACO}} \\ \frac{BX}{CX} = \frac{S_{\triangle OBX}}{S_{\triangle OCX}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

同理可得 $\frac{CY}{YA} = \frac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle BAO}}, \frac{AZ}{ZB} = \frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BCO}}$



$$\frac{AZ}{ZB} = 1.$$

(塞瓦定理逆定理)如图 27-4 所示,设 X, Y, Z 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的点,且 $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$. 求证: AX, BY, CZ 相交于一点.

证明 (用同一法)设 AX, BY 交于点 O , 连结 CO 并延长交 AB 于点 D , 则

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AX, BY, CD \text{ 三线共点} &\Rightarrow \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1. \\ \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} &= 1. \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AZ}{ZB} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AZ}{AB} \Rightarrow AD = AZ, \text{ 即 } D, Z \text{ 重合.}$$

$\therefore AX, BY, CZ$ 相交于 O 点.

例 3 如图 27-5 所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 425, BC = 450, CA = 510$, P 为 $\triangle ABC$ 内的一点, DE, FG, HI 为过点 P 且长度都相等的线段,若 $DE \parallel BC, FG \parallel AC, HI \parallel AB$, 求 DE 的长.

解 $\left. \begin{aligned} FG \parallel AC \\ HP \parallel AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{四边形 } AHPG \text{ 为平行四边形} \Rightarrow AG = HP$

同理可得 $BD = PI$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

$$FG \parallel AC \Rightarrow \frac{FG}{AC} = \frac{BG}{AB}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{DE}{BC} + \frac{FG}{AC} + \frac{HI}{AB} &= \frac{AD}{AB} + \frac{BG}{AB} + \frac{AG}{AB} + \frac{BD}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{2}{DE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} \\ AB &= 425, BC = 450, CA = 510 \end{aligned} \right\} \Rightarrow DE = 306.$$

例 4 如图 27-6 所示,在梯形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与腰 BC 相等, M 是底边 AB 的中点, L 是 DA 延长线上一点,连结 LM 并延长交 BD 于点 N , 求证: $\angle ACL = \angle BCN$.

证明 延长 DC, LN 交于点 G , 延长 CN 交 AB 于点 F , 设 CL 交 AB 于点 E , LG 交 BC 于点 H , 则

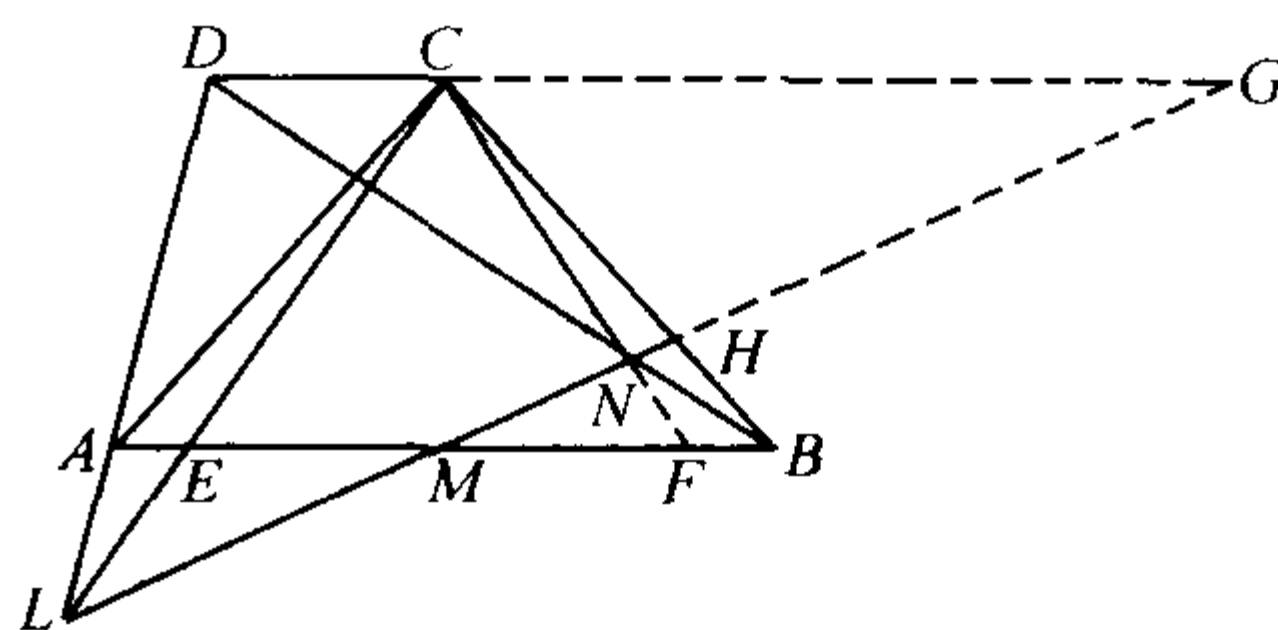


图 27-6



$$AB \parallel CD \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \triangle LAM \sim \triangle LDG \Rightarrow \frac{LA}{LD} = \frac{AM}{DG} \\ \triangle BMN \sim \triangle DNG \Rightarrow \frac{BM}{DG} = \frac{BN}{DN} \\ AM = BM \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{LA}{LD} = \frac{BN}{DN}$$

$$\text{同理可得 } \frac{LA}{LD} = \frac{AE}{CD}, \frac{BN}{DN} = \frac{BF}{CD}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AE}{CD} = \frac{BF}{CD} \Rightarrow AE = BF \\ AC = BC \Rightarrow \angle CAE = \angle CBF \\ AC = BC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CAE \cong \triangle CBF \Rightarrow \angle ACL = \angle BCN.$$

例 5 如图 27-7 所示, BD, CD 为 $\triangle ABC$ 的两条角平分线, 过点 D 作直线分别交 AB, AC 于点 E, F , 若 $AE = AF$, 求证: $EF^2 = 4BE \cdot CF$.

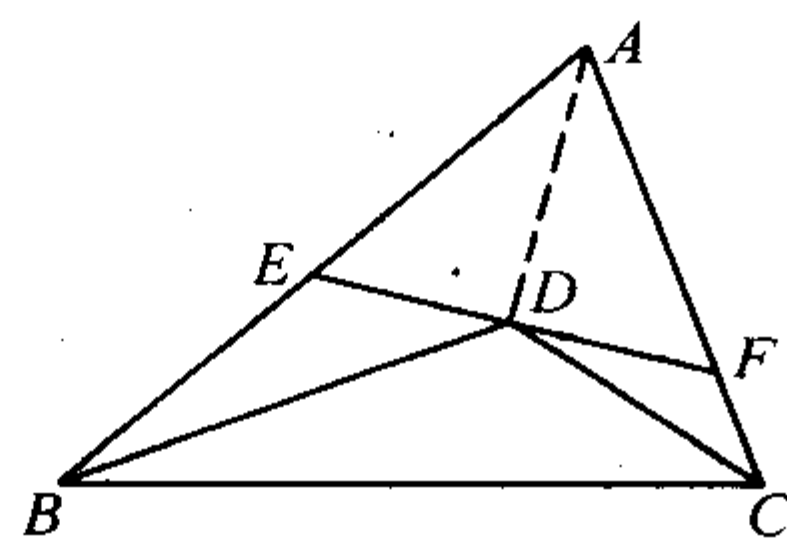


图 27-7

证明 连结 AD , 则

$$\left\{ \begin{array}{l} AD \text{ 平分 } \angle BAC \Rightarrow \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC \\ CD \text{ 平分 } \angle ACB \Rightarrow \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB \\ \angle ADC + \angle ACD + \angle CAD = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB)$$

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AE = AF \\ AD \text{ 平分 } \angle BAC \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} DE = DF \\ \angle ADF = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CDF = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle DBE$$

$$AE = AF \Rightarrow \angle AEF = \angle AFE \Rightarrow \angle CFD = \angle DEB$$

$$\Rightarrow \triangle CFD \sim \triangle DEB = \frac{DF}{BE} = \frac{CF}{DE}$$

$$DE = DF = \frac{1}{2} EF \Rightarrow EF^2 = 4BE \cdot CF.$$

例 6 如图 27-8 所示, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, M, N 分别为 BG, CG 的中点, 延长 AC 至点 E , 使 $AC = 2CE$, 延长 AB 至点 F , 使 $AB = 2BF$, 求证: AG, ME, NF 三线共点.

证明 延长 CG 交 AB 于点 P , 设 FN 交 BC 于点 D ,

$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\therefore AP = BP, CG = 2GP$.

$\because AB = 2BF, \therefore PB = BF. \because CN = GN, \therefore PG = GN$.



$\therefore BG$ 为 $\triangle FNP$ 的中位线 $\therefore BG \parallel FN$.

$\therefore DN$ 为 $\triangle BCG$ 的中位线.

$\therefore D$ 为 BC 的中点. 即 FN 过 BC 的中点.

同理可得 EM 过 BC 的中点.

$\therefore AG$ 过 BC 边的中点, $\therefore AG, ME, FN$ 三线共点.

例 7 求证: 三角形的外心、重心、垂心三点共线(欧拉线).

已知: 如图 27-9 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, G 为其重心, H 为其垂心, O 为其外心. 求证: H, G, O 三点共线.

证明 连结 OG 并延长至点 M , 使 $GM = 2GO$, 连结 AG 并延长交 BC 于点 D , 连结 AH, OD , 则

$$\left. \begin{array}{l} G \text{ 为重心} \Rightarrow AG = 2GD \\ GM = 2GO \\ \angle AGM = \angle DGO \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AGM \sim \triangle DGO$$

$$\Rightarrow \angle GAM = \angle GDO \Rightarrow AM \parallel DO$$

O 为外心 $\Rightarrow OD \perp BC$

连结 BG , 同理可得 $BM \perp AC$

M, H 重合为 $\triangle ABC$ 的重心.

$\therefore H, G, O$ 三点共线.

例 8 如图 27-10 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是底边 BC 上的一点, E 是 AD 上的一点, 且 $\angle BED = 2\angle CED = \angle BAC$, 求证: $BD = 2CD$.

证明 过点 D 作 $DF \parallel AC$ 交 AB 于点 F ,

在 BD 上取一点 G , 使 $BG = CD$, 连结 AG, EG, FG , 则

$$\left. \begin{array}{l} \angle BED = \angle BAE + \angle ABE \\ \angle BED = \angle BAC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ABE = \angle CAD$$

$$DF \parallel AC \Rightarrow \angle ADF = \angle CAD$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABE = \angle ADF \\ \angle BAE = \angle DAF \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADF \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB \\ BG = CD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CAD \cong \triangle BAG \Rightarrow AG = AD$$

$$\angle CAE = \angle BAG$$

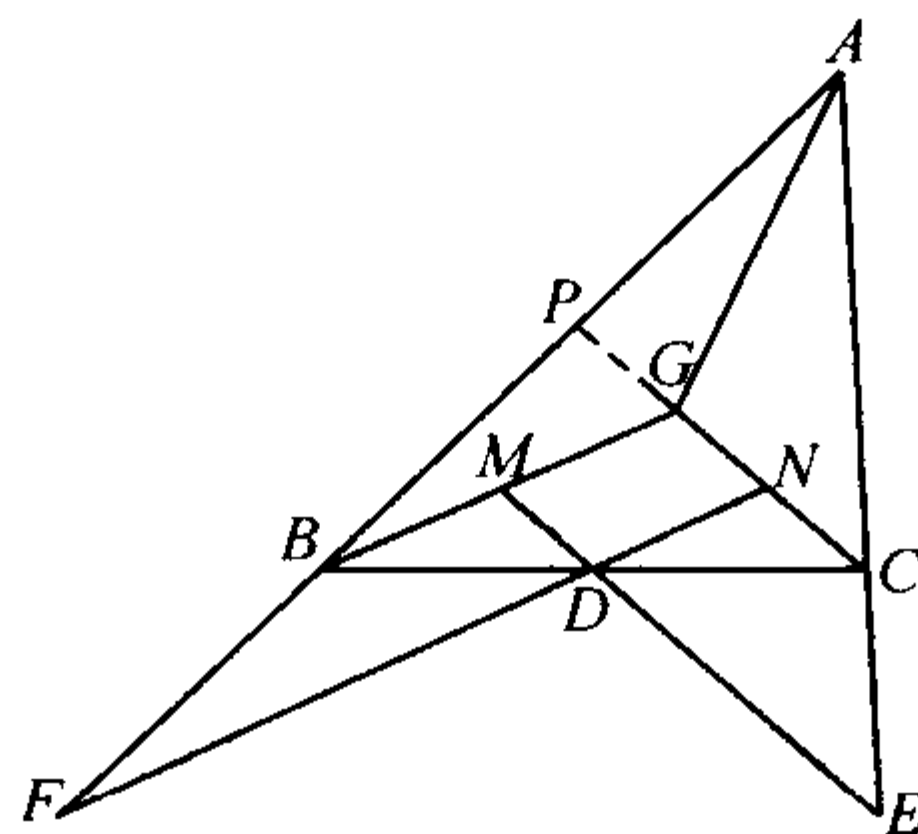


图 27-8

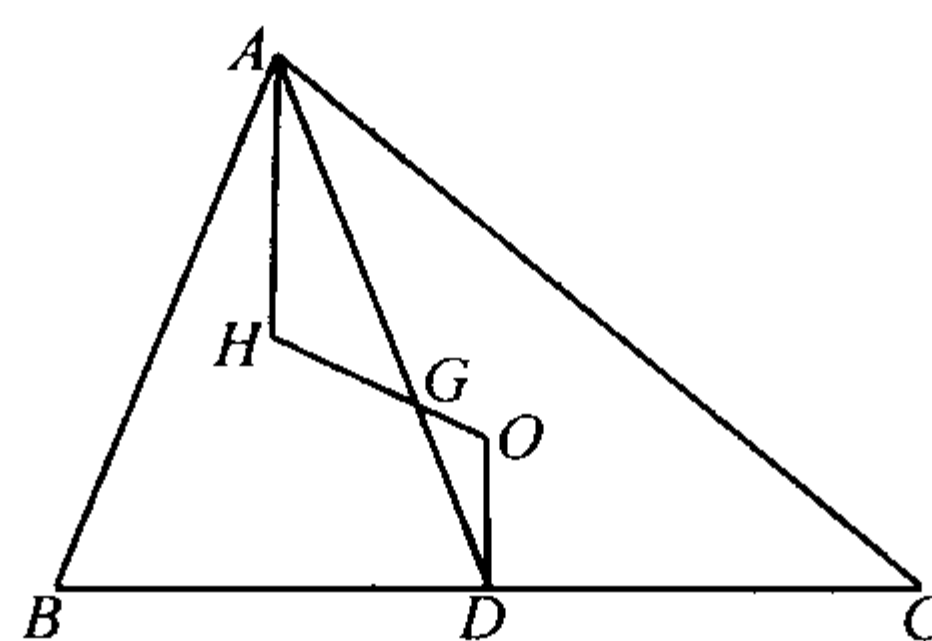


图 27-9

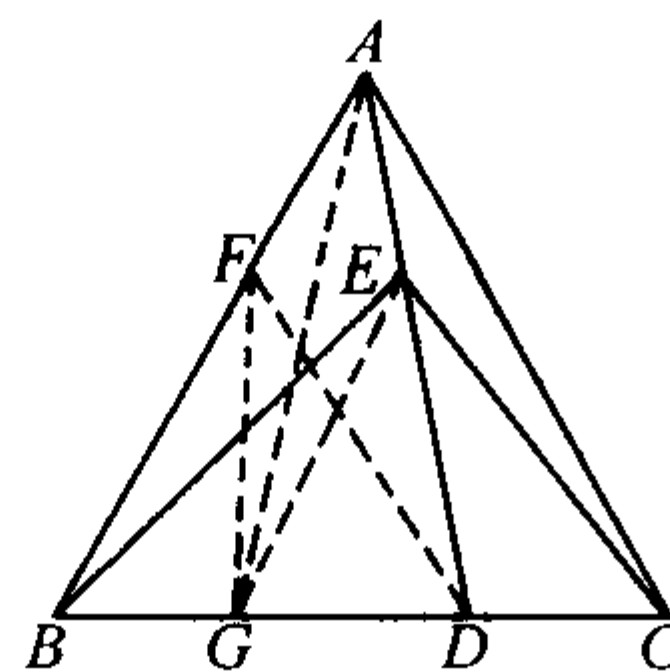


图 27-10



$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle AGF \Rightarrow \angle AEC = \angle AFG \Rightarrow \angle CED = \angle BFG = \frac{1}{2} \angle BAC \} \\ DF \parallel AG \Rightarrow \angle BFD = \angle BAC \} \\ \Rightarrow FG \text{ 平分 } \angle BFD \\ \angle ABC = \angle ACB = \angle BDF \Rightarrow BF = DF \} \Rightarrow BG = GD \\ \triangle CAD \cong \triangle BAG \Rightarrow BG = CD \} \Rightarrow BD = 2CD. \end{aligned}$$

例 9 如图 27-11 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BC 边上的高 $AD = 5$, M 为 AD 上一点, $MD = 1$, 且 $\angle BMC = 3\angle BAC$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

解 过点 M 作 $ME \parallel AB$ 交 BC 于点 E , $MF \parallel AC$ 交 BC 于点 F , 设 $ME = x$, $DE = y$, 则

$$\begin{aligned} AD = 5, MD = 1 \\ ME \parallel AB \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{DE}{DB} = \frac{DM}{DA} = \frac{EM}{AB} \\ \angle MED = \angle ABC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} AB = 5ME \\ BD = 5DE \Rightarrow BE = 4ED \end{aligned} \right. \\ \text{同理可得: } \left\{ \begin{aligned} \angle MFD = \angle ACB \\ AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \angle MED = \angle MFD \\ MD \perp EF \end{aligned} \right\} \Rightarrow DE = DF \end{aligned}$$

$$BE = 2EF$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \angle EMD = \angle BAD \\ \angle FMD = \angle CAD \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle EMD = \angle FMD \\ AD \text{ 垂直平分 } BC \Rightarrow BM = CM \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \angle BMD = \angle CMD \\ \angle BMC = 3\angle BAC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle BME = \angle EMF = \angle FMC \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{BM} = \frac{EF}{BE} \Rightarrow BM = 2MF.$$

在 $Rt\triangle EMD$ 和 $Rt\triangle BMD$ 中, 由勾股定理得

$$\begin{cases} 1 + y^2 = x^2, \\ 1 + 25y^2 = 4x^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7}\sqrt{14}, \\ y = \frac{\sqrt{7}}{7}. \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } AB + AC + BC = 10ED + 10ME = \frac{10}{7}$$

$$\sqrt{7} + \frac{20}{7}\sqrt{14}.$$

例 10 如图 27-12 所示, 在任意 $\triangle ABC$ 的外部作 $\triangle BPC$, $\triangle CQA$ 和 $\triangle ARB$, 使 $\angle PBC = \angle CAQ = 45^\circ$, $\angle BCP = \angle QCA = 30^\circ$, $\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ$, 求证: (1) $RP = RQ$; (2) $\angle PRQ = 90^\circ$.

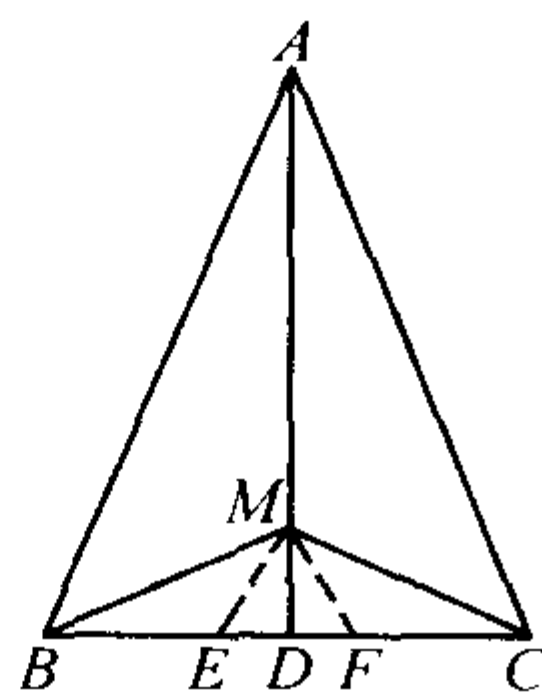


图 27-11

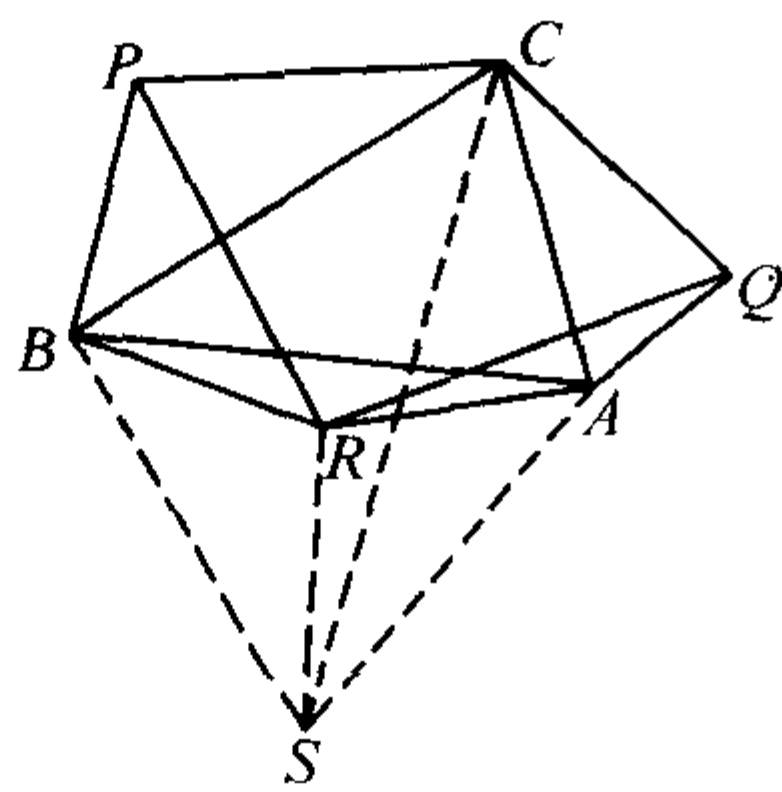


图 27-12



证明 在 $\triangle ABC$ 外作正 $\triangle ABS$,连结 CS, RS ,则

$$(1) \left. \begin{array}{l} AS = BS \\ \angle ABR = \angle BAR \Rightarrow AR = BR \end{array} \right\} \Rightarrow RS \text{ 垂直平分 } AB \Rightarrow \angle BSR = 30^\circ = \angle BCP$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABS = 60^\circ \\ \angle ABR = 15^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle RBS = 45^\circ = \angle PBC$$

$$\Rightarrow \triangle BRS \sim \triangle BPC \Rightarrow \frac{BR}{BS} = \frac{PB}{BC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CBS = 60^\circ + \angle CBA = \angle PBR \\ \Rightarrow \triangle PBR \sim \triangle CBS \Rightarrow \frac{PR}{CS} = \frac{BR}{BS} \end{array} \right\}$$

$$\text{同理可得 } \frac{QR}{CS} = \frac{AR}{AS} \Rightarrow PR = QR.$$

$$AS = BS, AR = BR$$

$$(2) \left. \begin{array}{l} \triangle PBR \sim \triangle CBS \Rightarrow \angle PRB = \angle CSB \\ \triangle QAR \sim \triangle CAS \Rightarrow \angle QRA = \angle CSA \end{array} \right\}$$

$$\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ \Rightarrow \angle ARB = 150^\circ \Rightarrow \angle PRQ = 150^\circ - \angle PRB - \angle QRA$$

$$\Rightarrow \angle PRQ = 150^\circ - \angle ASB = 90^\circ.$$

例 11 如图27-13, D 是 BC 上一点, $BD = 2DC$, G 是 AD 的中点, BG, CG 的延长线与 AC, AB 分别交于 E, F .

(1)图中,除 BC, AD 被分成的两条线段的比已知外,试尽可能多地求出其他线段比;(2)你能发现图中哪些线段成比例吗?

解 (1)图中 BE, CF 分别被 G 分成两条线段, AC, AB 分别被 E, F 分成两条线段,添适当的辅助平行线,便能把每一对线段的比与已知比发生联系.如连结 G 与 BD 的中点 M ,就有 $GM \parallel AB$,由 $BD = 2DC$ 得 $BM = \frac{1}{3}BC$,

$$\therefore \frac{FG}{GC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2};$$

利用这一结论,作 $FN \parallel AD$,便有 $\frac{ND}{DC} = \frac{FG}{GC} = \frac{1}{2}$,故 $BD = 2DC = 4ND$,

$$\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{ND}{BN} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{同理可得 } \frac{BE}{GE} = 5, \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}.$$

利用合比定理,还可把以上四对线段的比化为更多的线段比.如果不计这些变式,可以得到以上四组线段比.

(2)根据已知条件和(1)的结论,我们有 $\frac{GF}{GC} = \frac{CD}{BD}, \frac{AF}{FB} = \frac{FG}{FC}, \frac{AE}{EC} = \frac{CG}{CF}, \frac{AE}{EC} = \frac{BD}{BC}$ 等等.为了不遗漏,不重复,考察时,可在 AB, AC, BC, AD, BE, CF 这 6 条线段中,任

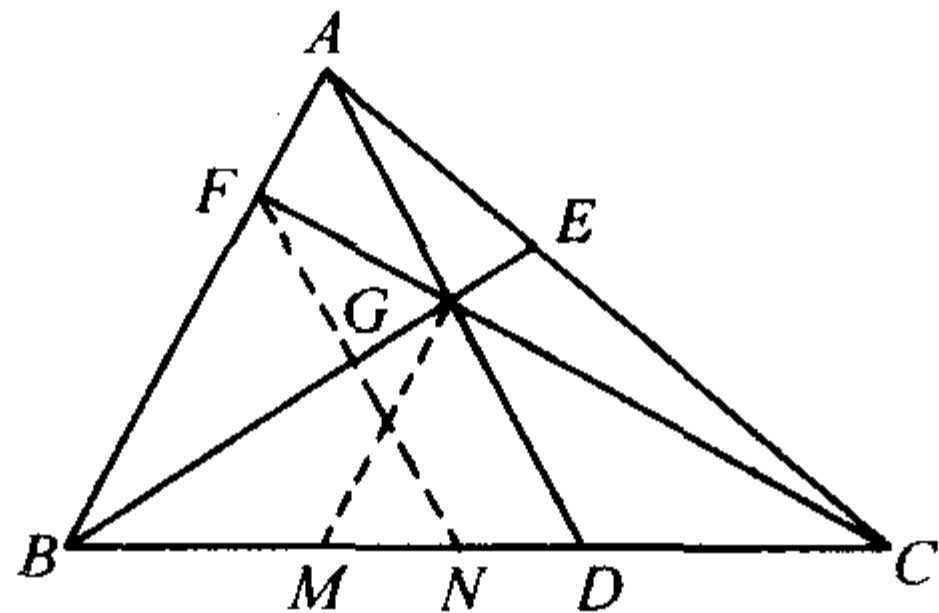


图 27-13



取 2 条进行判断,发现成比例线段.

例 12 在正 $\triangle ABC$ 内画一个内接正三角形,使其面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{2}$,你有哪些办法?(指出内接正三角形顶点位置即可)

解 若以 A 为一个顶点画出 $\triangle ADE$,则 D, E 必在 AB, AC 上,并且 $DE \parallel BC$,如图 27-14(甲).

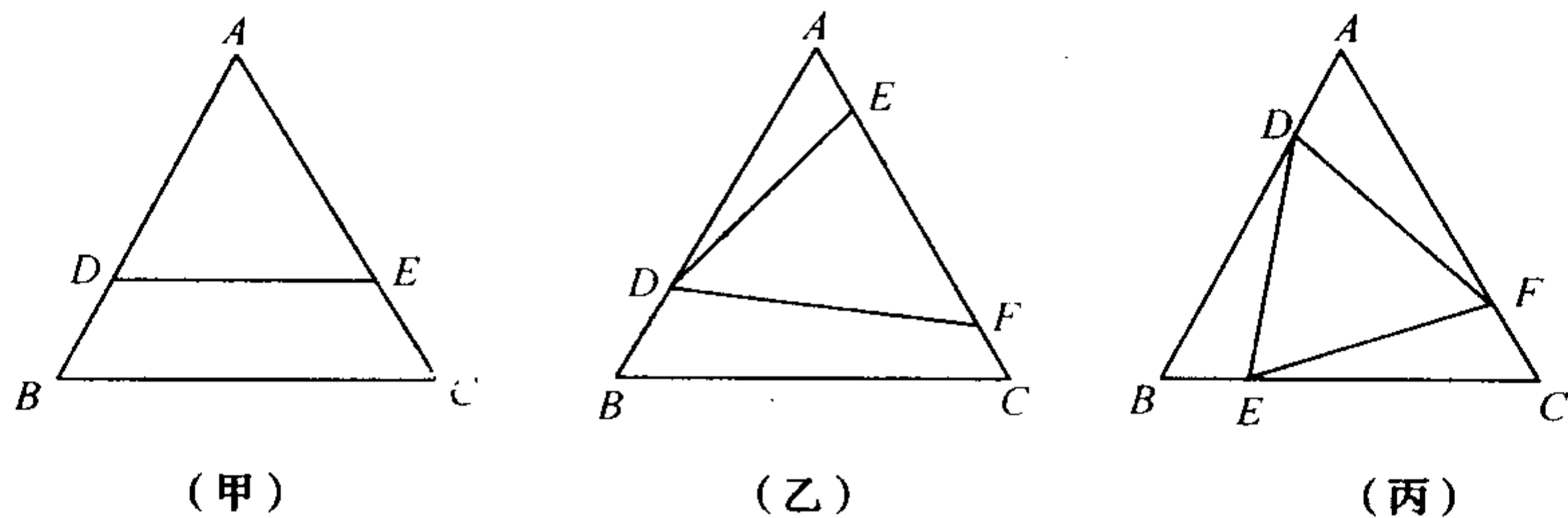


图 27-14

因正三角形都相似,且 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$,故 $AD : AB = AE : AC = 1 : \sqrt{2}$;

若正 $\triangle DEF$ 的顶点 D 在 AB 上(与 A, B 不重合), E, F 在 AC 上,如图 27-14(乙),则根据三角形外角性质 $\angle DEF > \angle A$,即 $\angle DEF > 60^\circ$,这与 $\triangle DEF$ 是正三角形矛盾,可见这种情形不可能出现;

若正 $\triangle DEF$ 的顶点 D, E, F 分别在 AB, BC, AC 上,如图 27-14(丙),则 $\angle BDE + \angle ADF = 120^\circ$, $\angle AFD + \angle ADF = 120^\circ$,

$$\therefore \angle BDE = \angle AFD.$$

又 $\angle B = \angle A$, $DE = FD$, $\therefore \triangle ADF \cong \triangle BED$. 同理 $\triangle ADF \cong \triangle CFE$.

设 $AB = a$, $AD = ka$ ($0 < k < 1$), 则 $BE = ka$, 由 $3S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 得

$$3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} k(1-k)a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \text{化简得 } 6k^2 - 6k + 1 = 0,$$

$$\therefore k = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

若 $AD < DB$, 则 $AD : AB = BE : BC = CF : CA = (3 - \sqrt{3}) : 6$.

综上所述,符合条件的内接正三角形只有图 27-14 中图(甲)、(丙)两类,共能画出 5 个.



【能力训练】

1. 如图 27-15 所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D , $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 求证: $\angle AFE = \angle ABC$.



2. 如图 27-16, AD, BE 是 $\triangle ABC$ 的高线, 过 D 作 AB 的垂线, 垂足为 F , 与 BE 及 AC 的延长线分别相交于 M, N . 求证: $DF^2 = FM \cdot FN$.

3. 如图 27-17, AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的角平分线, $\angle C = 90^\circ$, 求证: $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{2BD}$.

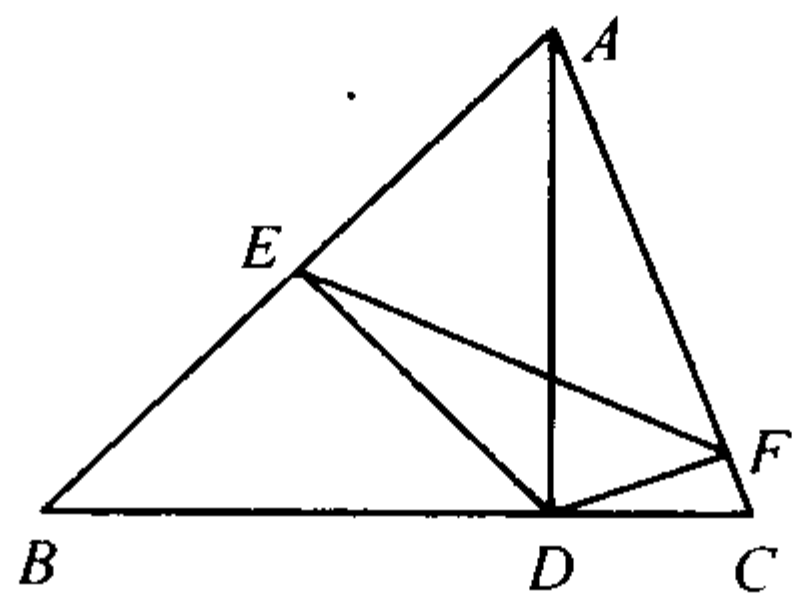


图 27-15

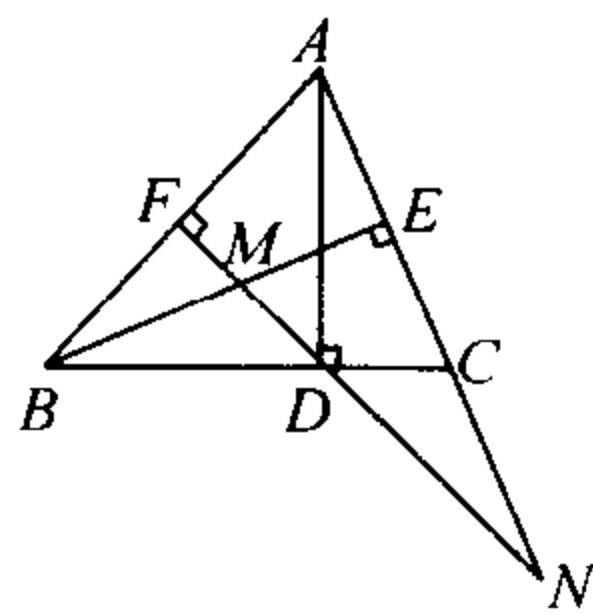


图 27-16

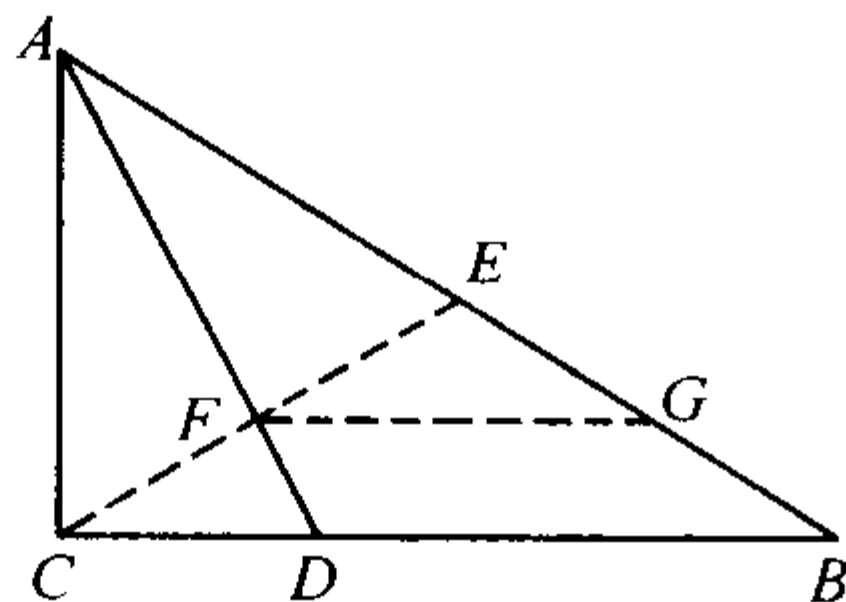


图 27-17

4. 如图 27-18 所示, 在四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 交于点 O , 过点 O 作 AB 的平行线, 分别交 AD, BC 及 DC 的延长线于点 E, F, G , 求证: $GO^2 = GE \cdot GF$.

5. 如图 27-19 所示, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 过 CD 上任意一点 F 作 $EG \parallel AB$, 分别交 AC, AD 的延长线于点 G, E , 作 $FH \parallel AC$ 交 AB 于点 H , 求证: $HG = BE$.

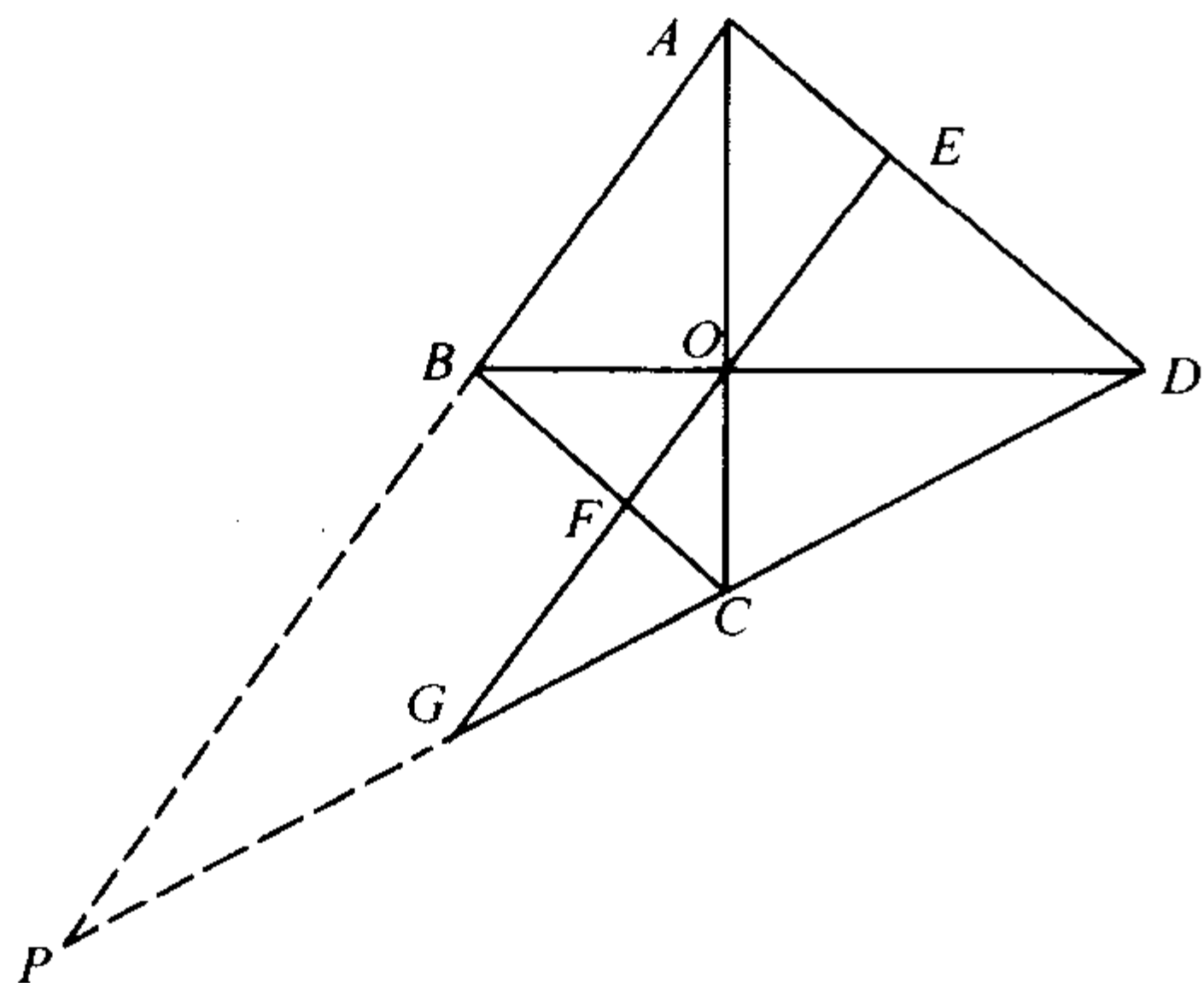


图 27-18

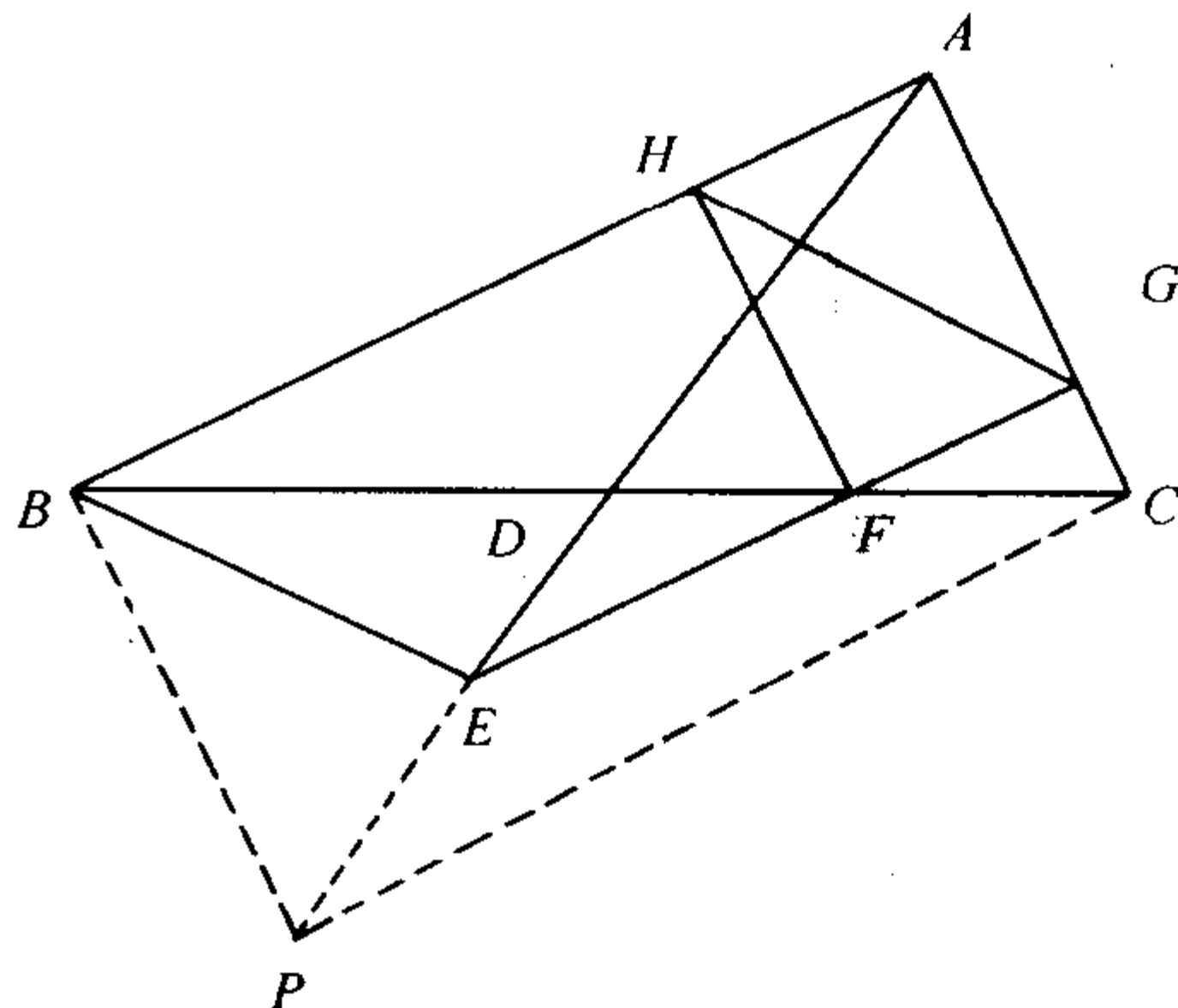


图 27-19

6. 如图 27-20 所示, D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 的中点, $\angle ADB, \angle ADC$ 的平分线分别交 AB, AC 于点 M, N , 求证: $\frac{1}{EF} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{MN}$.

7. 如图 27-21 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC, \angle ABC$ 的平分线 AD, BE 分别交 BC, CA 于点 D, E , CF 为 $\angle ACB$ 的外角 $\angle BCG$ 的平分线, 它与 AB 边的延长线的交点为 F , 求证: D, E, F 三点共线.

8. 如图 27-22, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, AD \perp BC$ 于 $D, DE \perp AC$ 于 E, F 是 DE 的中点, BE 交 AD 于 G , 交 AF 于 H . 试从图中发现尽可能多的相似三角形, 并说明你的判断是正确的.

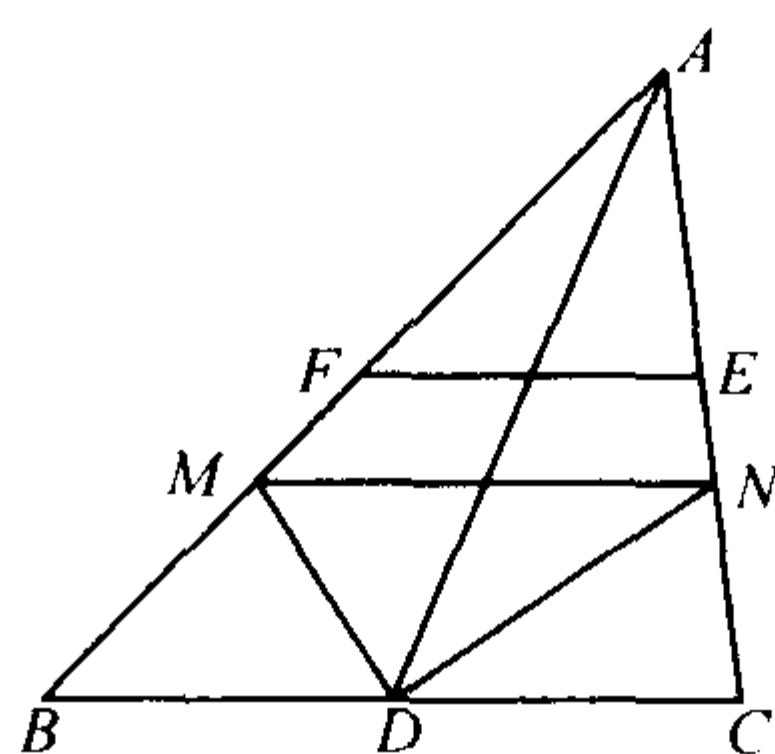


图 27-20

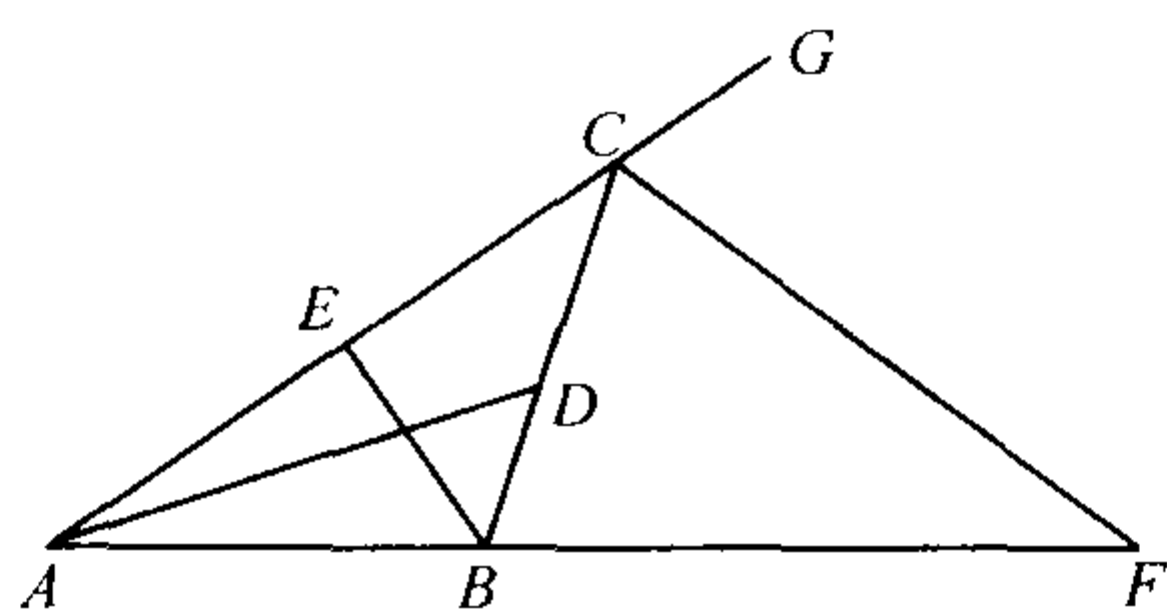


图 27-21

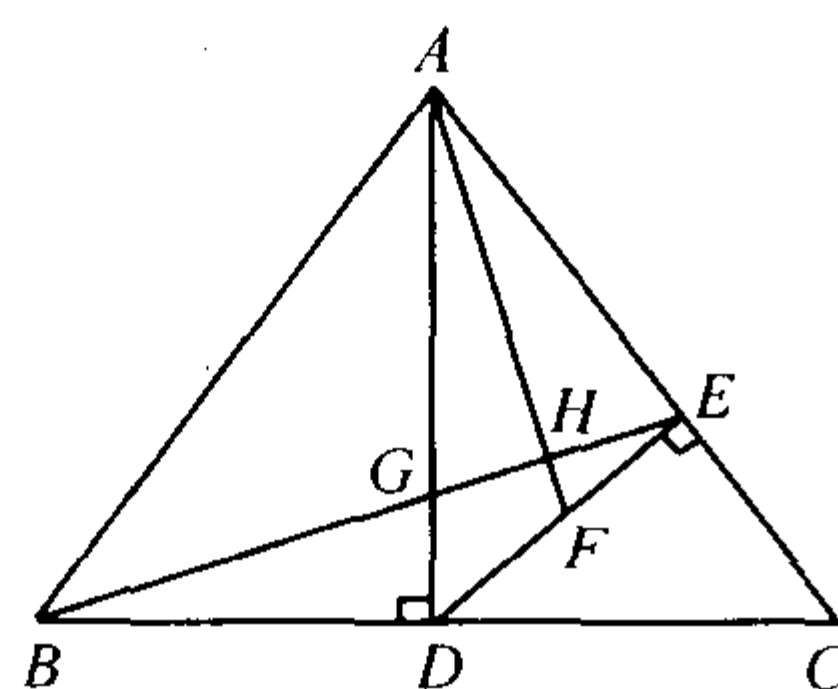


图 27-22

9. 如图 27-23 所示, AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高, O 是 AD 上任一点, 连结 BO, OC , 并分别延长交 AC, AB 于点 E, F , 连结 DE, DF , 求证: $\angle EDO = \angle FDO$.

10. 如图 27-24 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, BE, CF 分别为 AC, AB 边上的中线, D 为 BC 边上一点, 过点 D 作 $DP \parallel CF$ 交 AB 于点 P , 作 $DQ \parallel BE$ 交 AC 于点 Q , PQ 分别交 BE, CF 于点 R, S , 求证: $PQ = 3RS$.

11. 如图 27-25 所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ ($AD < BC$), AC 和 BD 交于点 M , 过点 M 作 $EF \parallel BC$, 分别交 AB, CD 于点 E, F , EC, FB 交于点 N , 过点 N 作 $GH \parallel BC$, 分别交 AB, CD 于点 G, H . 求证: $\frac{1}{AD} + \frac{2}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{2}{GH}$.

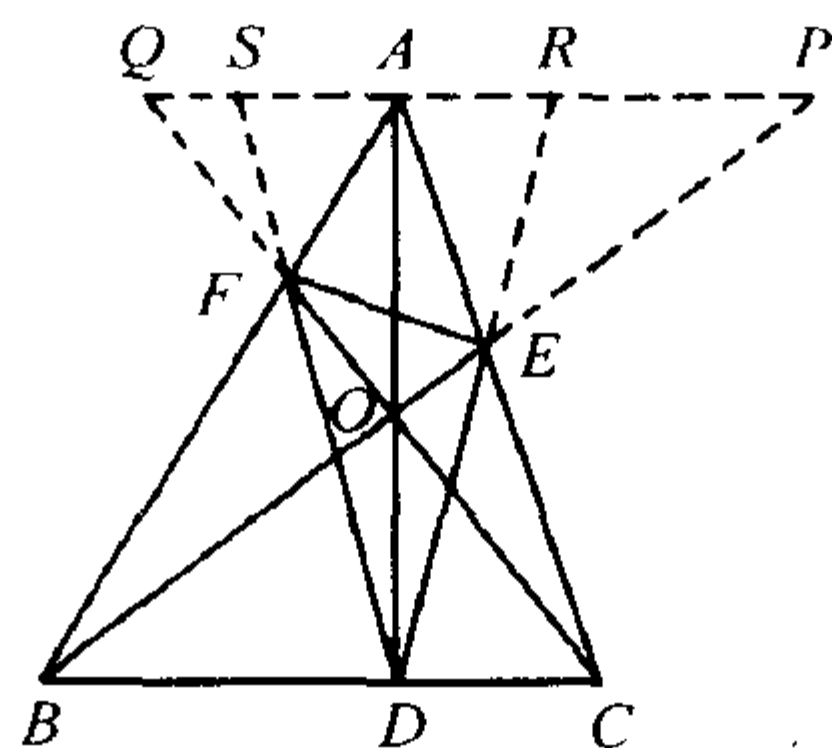


图 27-23

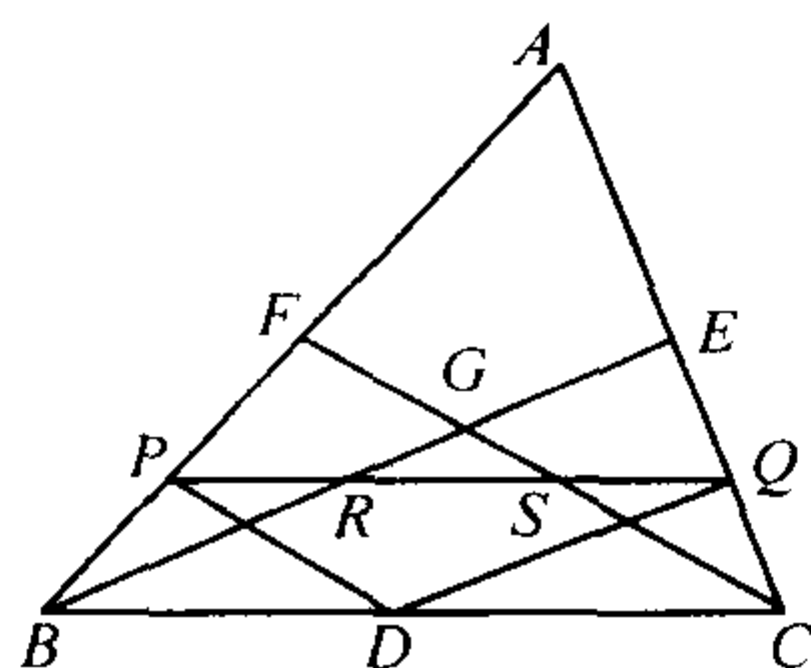


图 27-24

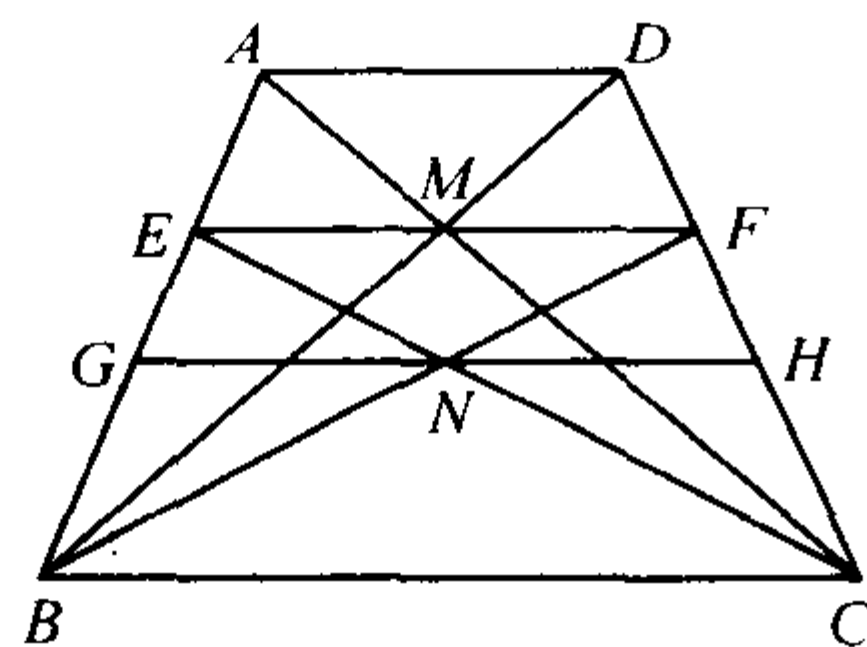


图 27-25

12. 如图 27-26 所示, 在阳光下, 电视发射塔 AB 的影子投影到一幢大楼墙面上的 C 处, C 离地面的高度 $CD = 10$ 米. 塔底到墙面的水平距离 $BD = 64$ 米. 已知当时 1 米高的直立标杆在水平地面上的影长为 0.8 米, 求电视塔的高度.

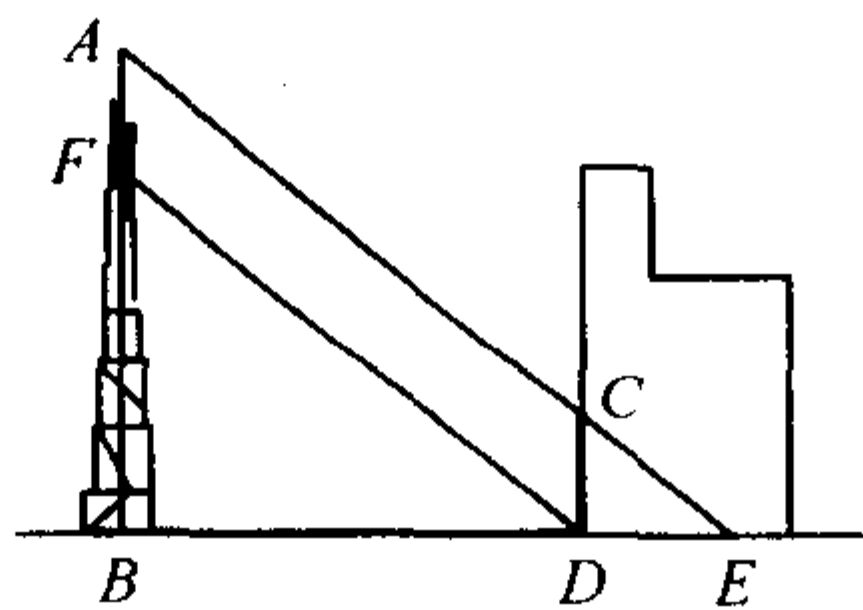


图 27-26



二十八、解直角三角形



【赛点目标】

1. 在一个直角三角形中, 已知一条边和一锐角, 或者已知两条边, 可以求出其他的边和角, 这就是解直角三角形. 有时, 还可以把非直角三角形的问题转化为直角三角形的问题求解.

2. 如图 28-1, 在直角三角形 ABC 中, $\angle C = \text{Rt}\angle$, 有下列边角间的关系:

三边的关系(勾股定理): $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

内角间的关系: $\angle A + \angle B = \angle C = 90^\circ$;

边与角之间的关系:

$$\sin A = \cos B = \frac{BC}{AB}; \cos A = \sin B = \frac{AC}{AB}; \tan A =$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC}; \cot A = \tan B = \frac{AC}{BC}.$$

3. 在三角形 ABC 中, 如果 $\angle A$ 是锐角, $AB = b$, $AC = c$, $\triangle ABC$ 的面积是 S , 那么, $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.

4. 在解直角三角形时经常接触到的一些名称:

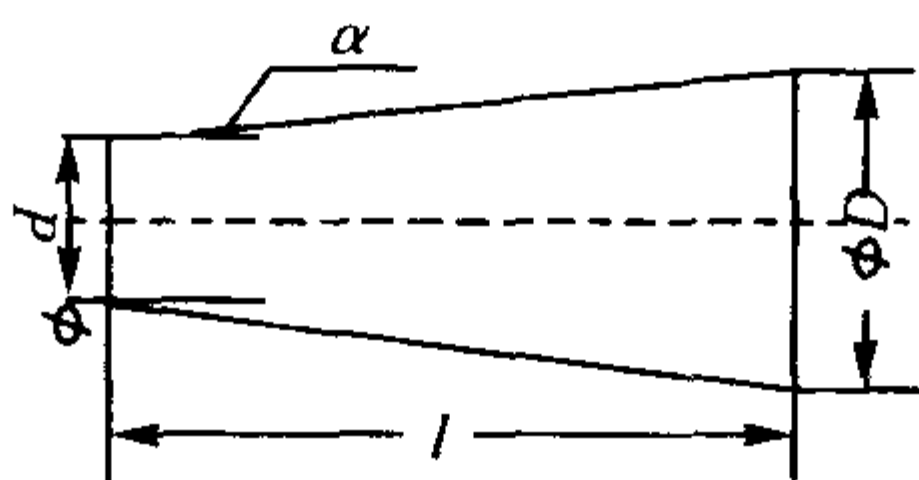


图 28-2

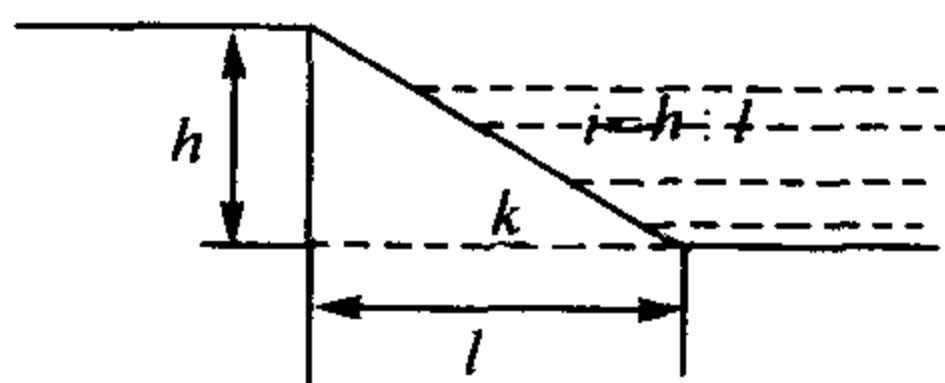


图 28-3

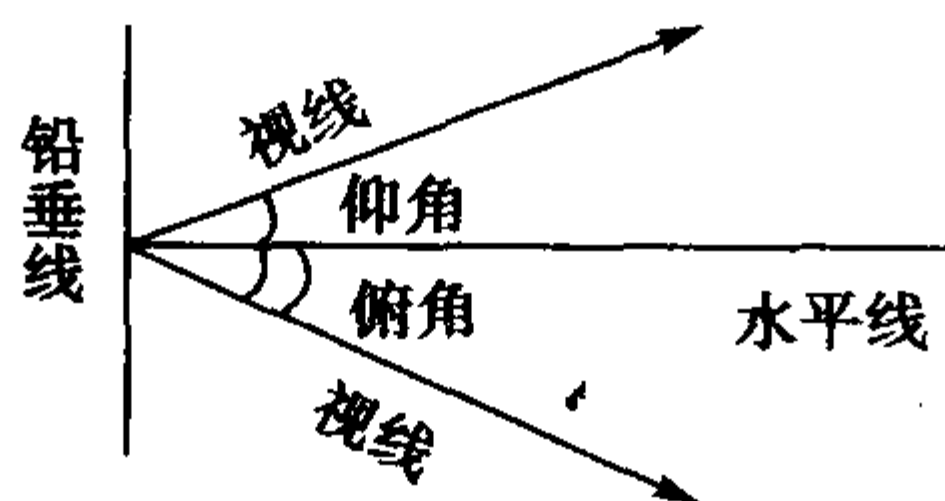


图 28-4

锥度 如图 28-2, 锥形零件的大头直径 D 与小头直径 d 的差与锥形部分的长度 l 之比叫做锥度(k), 即 $k = \frac{D-d}{l}$ (图中 α 叫做斜角).

坡度 如图 28-3, 坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比值叫做坡度(i), 即 $i = \frac{h}{l}$ (图中 k 叫做坡角).

仰角和俯角 如图 28-4, 在视线与水平线所成的角中, 视线在水平线上方的叫做



仰角,视线在水平线下方的叫做俯角.

方向角 如图 28-5,点 A 在点 O 的北偏东 30° ,点 B 在点 O 的南偏西 45° .

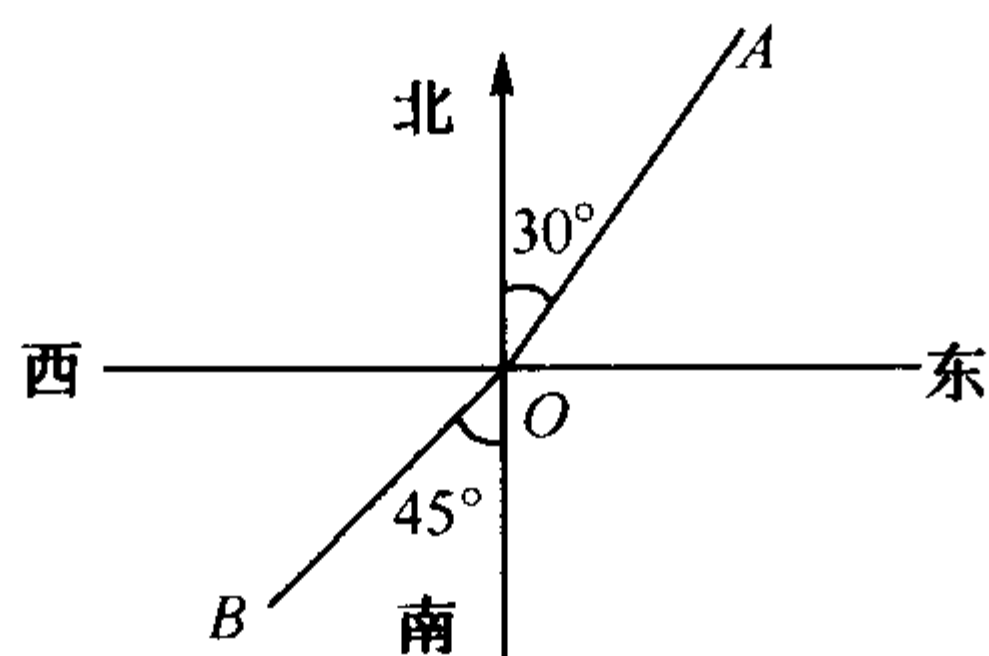


图 28-5

【方法述要】

1. 解直角三角形用到如下知识:

(1) 锐角三角函数的定义: 根据直角三角形两边之比确定一个锐角的三角函数值.

(2) 锐角三角函数的性质: ① 同角三角函数的性质: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$; ② 互余的两个角的三角函数性质: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$, $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$.

(3) 特殊角, 如 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 等的三角函数值, 必须记住并能熟练地进行运算.

此外, 直角三角形的有关性质定理(如勾股定理等)在解直角三角形中也经常用到. 在实际问题中, 还应掌握仰角、俯角、坡角、坡度(坡比)等概念.

2. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. 其中 a, b, c 为三角形三边之长, A, B, C 为边 a, b, c 的对角, R 为三角形外接圆的半径.

$$\text{变形(1): } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

$$\text{变形(2): } a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C;$$

$$\text{变形(3): } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}.$$

3. 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos A; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A.$$

$$\text{变形: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

4. 三角形的面积公式

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C;$$

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R}.$$

【赛题精讲】

例 1 比较下列各组中两式的大小:

(1) $\cot 56^\circ, \cot 57^\circ$; (2) $\sin 48^\circ, \cos 48^\circ$; (3) $\sin 79^\circ, \tan 79^\circ$.



解 比较两个锐角三角函数值的大小,有下列方法可选择:

a. 查三角函数表,直接比较大小,这对(1)、(2)、(3)都适用,有 $\cot 56^\circ > \cot 57^\circ$, $\sin 48^\circ > \cos 48^\circ$, $\sin 79^\circ < \tan 79^\circ$;

b. 根据同名三角函数值随角度变化的规律,直接比较大小. 如(1),因为 $0^\circ < 56^\circ < 57^\circ < 90^\circ$,所以 $\cot 56^\circ > \cot 57^\circ$;

c. 找到一个中间值,使它夹在要比较的两个三角函数值之间. 如 $\sin 48^\circ > \sin 45^\circ$, $\cos 48^\circ < \cos 45^\circ$,而 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$,结论即可得出;

d. 构造一个直角三角形,利用锐角三角函数的定义进行比较. 如对于(2),可以作一个如图 28-6 的直角三角形,其斜边 AB 长是 1, $\angle A = 48^\circ$,则 $\angle B = 42^\circ$, $\therefore BC > AC$,而 $\sin 48^\circ = \sin A = \frac{BC}{AB} = BC$, $\cos 48^\circ = \cos A = \frac{AC}{AB} = AC$, $\therefore \sin 48^\circ > \cos 48^\circ$.

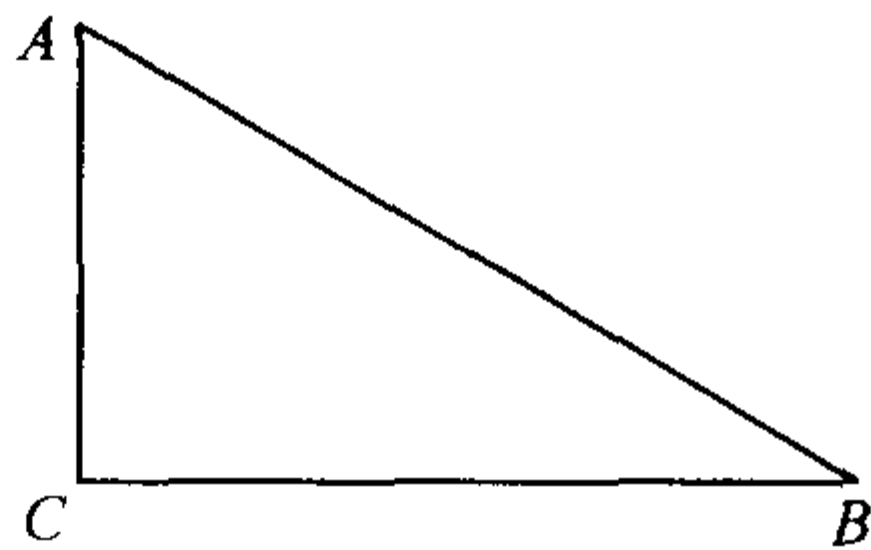


图 28-6

例 2 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (α 为锐角), 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值.

解法一 $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (α 为锐角), $\therefore \alpha = 60^\circ$.

$$\therefore \cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cot \alpha = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法二 如图 28-7 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle$,

$$\angle A = \alpha, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{AB}.$$

设 $BC = \sqrt{3}k$, 则 $AB = 2k$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = k$.

$$\therefore \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}, \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}, \cot \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

解法三 $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (α 为锐角), $\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}; \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

说明 已知一个角的某个三角函数值,求这个角的其他三角函数值,在以上的三种解法中,解法一具有特殊性,即只有 α 为特殊角时这种方法才适用,而解法二和解法三就分别根据三角函数的定义和三角函数关系式求解,具有一般性.

例 3 已知 $\angle ABC$ 的顶点 B 与直角坐标系的原点重合,边 AB 与 x 轴正半轴重合,另一边 BC 在第一象限,又点 P 为射线 BC 上任意一点.

(1) 若 P 为 $(2, 1)$, 求 $\sin \angle ABC$ 和 $\cos \angle ABC$ 的值;

(2) 若 P 为 (x, y) , 用 x, y 表示 $\sin \angle ABC$ 和 $\cos \angle ABC$;

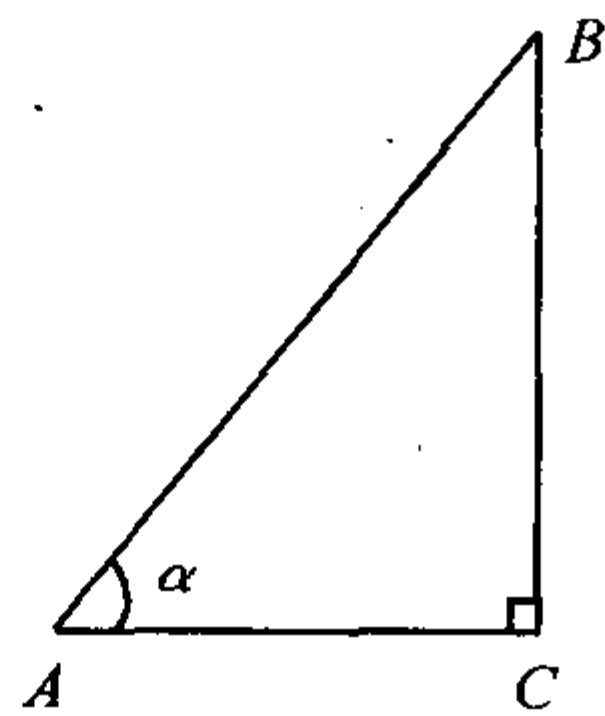


图 28-7



(3) 若 P 为 $(x, \sqrt{5})$, 且 $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{4}x$, 求 $\sin \angle ABC$ 的值.

解 如图 28-8, 由坐标的意义可构造 $\text{Rt} \triangle APB$.

(1) 由勾股定理得 $PA = \sqrt{5}$,

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{PB}{PA} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \cos \angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(2) $PA = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\therefore \sin \angle ABC = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\cos \angle ABC =$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(3) $PA = \sqrt{x^2 + 5}$, $\therefore \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{4}x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$, $\because x > 0$, 解得 $x = \sqrt{3}$,

$$\therefore PA = 2\sqrt{2}, \therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

例 4 不查表, 求 $\sin 18^\circ$ 和 $\cos 36^\circ$ 的值.

分析 本题是要求 $\sin 18^\circ$ 和 $\cos 36^\circ$ 的准确值, 可以构造一个直角三角形, 使它的一个锐角为 18° (或 36°), 再求出三边之比, 从而确定 $\sin 18^\circ$ (或 $\cos 36^\circ$) 的值.

解 如图 28-9 所示, 构造 $\triangle ABC$, 使 $AB = AC = 1$, $\angle A = 36^\circ$, 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于点 E , 则 $\angle 1 = \angle 2 = 36^\circ$, $\angle 3 = 18^\circ$.

设 $BC = a$, 则 $BE = AE = a$.

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}, \therefore \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \therefore a^2 + a - 1 = 0.$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) (a > 0).$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1). \therefore \sin \angle 3 = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ 即 } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 中, 因为 } AE = BE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1), AB = 1, \text{ 易求 } \cos \angle 1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), \text{ 即 } \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

例 5 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $\sin A, \sin B$ 是方程 $x^2 - \sqrt{2}x - k = 0$ 的两根, 求 $\angle A, \angle B$ 和 k 的值.

解 由韦达定理得 $\sin A + \sin B = \sqrt{2}$, $\sin A \cdot \sin B = -k$.

$$\text{又 } \because A + B = 90^\circ, \therefore \sin B = \cos A.$$

$$\therefore \sin A + \cos A = \sqrt{2}, \sin A \cdot \cos A = -k.$$

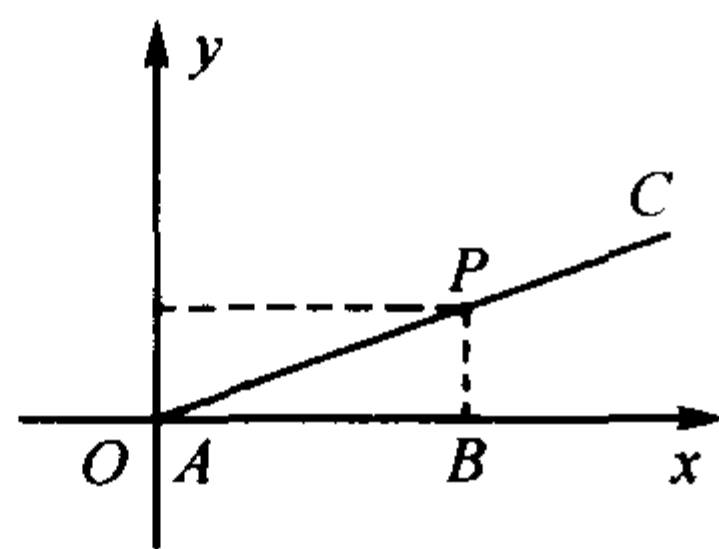


图 28-8

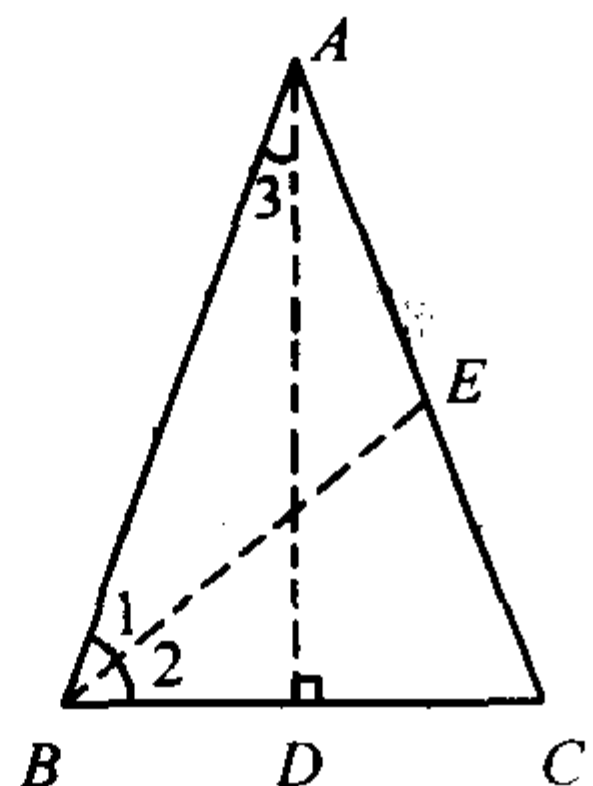


图 28-9



$$(\sin A + \cos A)^2 = \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cdot \cos A = 2.$$

$$\therefore 1 - 2k = 2. \therefore k = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{于是原方程为 } x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0. \text{ 解得 } x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \sin A = \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}. \therefore \angle A = \angle B = 45^\circ.$$

例 6 如图28-10所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 120^\circ$, $BC = 4$, $AC = 6$, 求 AB 和 $S_{\triangle ABC}$.

分析 解斜三角形(锐角三角形或钝角三角形), 通常是构造直角三角形(作一边上的高), 转化为解直角三角形. 本题是已知两边夹角, 解钝角三角形.

解 过点 A 作 $AD \perp BC$ 交 BC 延长线于点 D , 则

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle 1 = 60^\circ$, $AC = 6$,

$$\therefore AD = AC \cdot \sin \angle 1 = 6 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

$$CD = AC \cdot \cos \angle 1 = 6 \times \cos 60^\circ = 3.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = 3\sqrt{3}$, $BD = BC + CD = 7$, 由勾股定理得

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{49 + 27} = 2\sqrt{19}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

例 7 如图28-11所示, $ABCD$ 是正方形, 在 AD , AC 上分别取点 E 和 F , 使 $\frac{DE}{DA} = \frac{2CF}{CA}$, 求证: $\triangle BEF$ 是等腰直角三角形.

证明 设 $AB = 1$, $DE = k$,

$$\text{则 } \frac{2CF}{CA} = \frac{DE}{DA} = k.$$

由正方形的性质得 $AC = \sqrt{2}$.

$$\therefore CF = \frac{\sqrt{2}}{2}k, AE = 1 - k, AF = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}k.$$

由余弦定理可得

$$EF = \sqrt{AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{1 - k + \frac{1}{2}k^2}.$$

$$BF = \sqrt{AB^2 + AF^2 - 2AB \cdot AF \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{1 - k + \frac{1}{2}k^2}.$$

$$\therefore EF = BF.$$

又 $\because BE^2 = AB^2 + AE^2 = 1 + (1 - k)^2 = 2 - 2k + k^2 = EF^2 + BF^2$, 则 $\angle BFE = 90^\circ$.

$\therefore \triangle BEF$ 是等腰直角三角形.

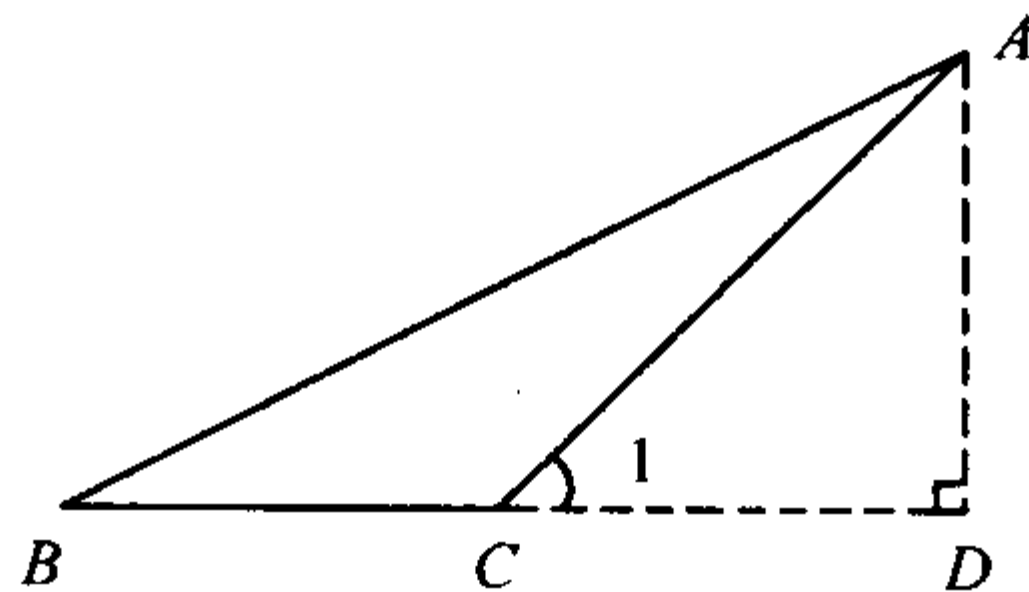


图 28-10

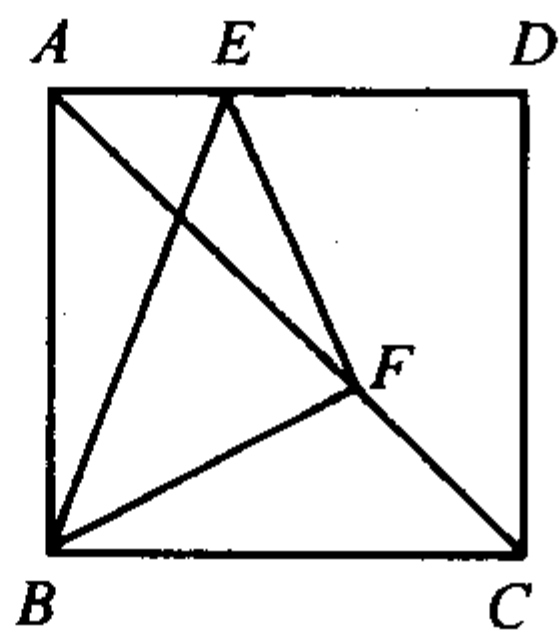


图 28-11



例 8 如图 28-12 所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AC = 1$, $AB = c$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R \leq 1$, 求证: $\cos A < c \leq \cos A + \sqrt{3} \sin A$.

证明 作 AB 边上的高 CD ,

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

\therefore 点 D 位于 AB 之间, 且不与 A, B 重合.

$\because AC = 1, \therefore c = AB > AD = AC \cdot \cos A = \cos A$.

由余弦定理得

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 1 + c^2 - 2c \cdot \cos A.$$

又由正弦定理及 $R \leq 1$, 得 $BC = 2R \sin A \leq 2 \sin A, \therefore 1 + c^2 - 2c \cdot \cos A \leq 4 \sin^2 A$.

$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \therefore (c - \cos A)^2 \leq 3 \sin^2 A$.

$\because c > \cos A, \therefore c - \cos A \leq \sqrt{3} \sin A$, 即 $c \leq \cos A + \sqrt{3} \sin A$.

$\therefore \cos A < c \leq \cos A + \sqrt{3} \sin A$.

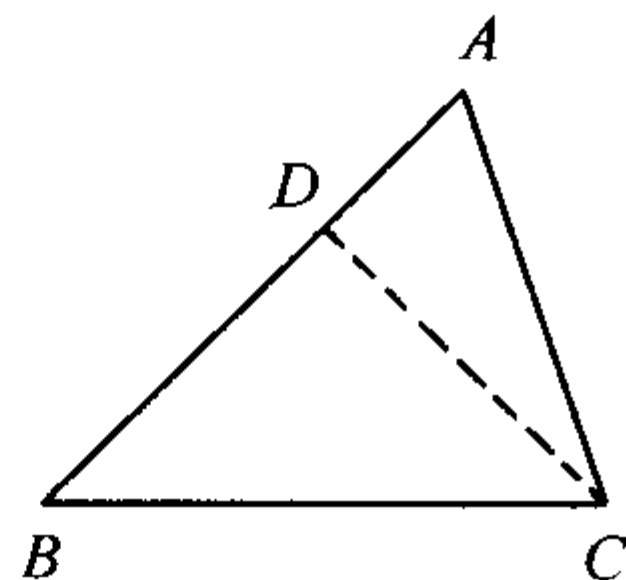


图 28-12

例 9 如图 28-13 所示, 一艘轮船向正东航行, 在 A 处望见某岛 C 在北偏东 60° , 前进 6 海里到达 B 点, 测得该岛在北偏东 30° , 已知该岛周围 6 海里内有暗礁, 问若船继续向东航行, 有无触礁危险? 说明理由.

分析 船向正东航行时, 船离小岛的最近距离为 CD , 若 $CD \leq 6$ 海里, 船有触礁危险; 若 $CD > 6$ 海里, 则无触礁危险.

解 过点 D 作 $CD \perp AB$ 交 AB 延长线于点 D , 根据题意, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle CBD = 60^\circ$, $AB = 6$.

$\because \angle ACB = \angle CBD - \angle CAD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ, \therefore BC = BA = 6$.

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, $\sin \angle CBD = \frac{CD}{BC}$.

$\therefore CD = BC \cdot \sin \angle CBD = 6 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

$\because (3\sqrt{3})^2 = 27 < 36 = 6^2, \therefore CD < 6$.

\therefore 若船继续向东航行, 会有触礁危险.

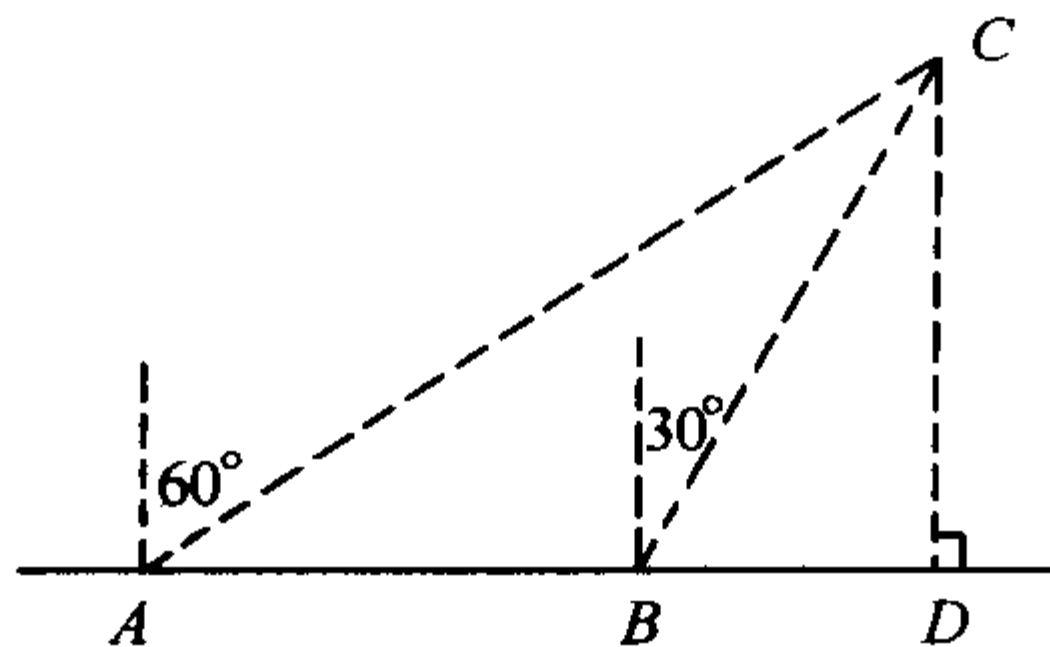


图 28-13

例 10 (1) 已知 AB 是 $\odot O$ 的内接正五边形的一边, AC 是 $\odot O$ 的内接正四边形的一边, 问 BC 是否可能是 $\odot O$ 的内接正多边形的一边? 如果可能, 请求出是正几边形的一边; 如果不可能, 请说明理由;

(2) 在同一圆周上, 按顺时针排列有 A, B, C 三个点, 且 AB 是圆的内接正 m 边形的一边, BC 是圆的内接正 n 边形的一边, AC 是圆的内接正 p 边形的一边, 请你找到一组符合条件的数 m, n, p .

解 (1) 当我们画出图形时, 会发现有两种情况: 点 B 在劣弧 AC 上和点 B 在劣弧



外. 在第一种情况, 由于劣弧 \widehat{AC} 是圆周的 $\frac{1}{4}$, 劣弧 \widehat{AB} 是圆周的 $\frac{1}{5}$, 所以劣弧 \widehat{BC} 是圆周的 $\frac{1}{20}$, 所以 BC 是该圆的内接正 20 边形的一边; 在第二种情况, 劣弧 \widehat{BC} 是圆周的 $\frac{9}{20}$, 因而 BC 不可能是该圆的内接正多边形的一边.

本题也可以从计算 BC 所对的圆心角着手来讨论问题.

(2) 从(1)的讨论中我们不难看出, 只要 m, n, p 满足条件 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ 就可以. 我们想到有一组数“6, 3, 2”满足条件: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. 但是, 正多边形的边数 ≥ 3 , 为达到这一要求, 可在该等式两边同除以一个正整数, 如除以 2, 则得 $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

所以, $m = 12, n = 6, p = 4$ 符合条件.

例 11 如图 28-14 所示, 已知 CD 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高, 分别以 AC, BD 为直径的两个圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 在 $\triangle ABC$ 内交于另一点 P , 求证: $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAD}$.

证明 $\because AC, BD$ 分别为 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的直径, 且 $CD \perp AB$ 于点 D , $\therefore \angle PBD = \angle PDC = \angle PAC = \alpha$

$$\angle BPD = \angle APC = 90^\circ.$$

则 $\angle BPC + \angle APD = 180^\circ$, 即 $\angle BPC = 180^\circ - \angle APD$.

设 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 r_1 和 r_2 ,

在 $Rt\triangle BPD$ 和 $Rt\triangle APC$ 中,

$$BP = 2r_2 \cos \alpha, DP = 2r_2 \sin \alpha, AP = 2r_1 \cos \alpha, CP = 2r_1 \sin \alpha.$$

$$\text{则 } S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} AP \cdot DP \sin \angle APD = 2r_1 r_2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \angle APD.$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle PBC} &= \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin \angle BPC = \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin(180^\circ - \angle APD) \\ &= 2r_1 r_2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \angle APD. \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAD}.$$

例 12 如图 28-15 所示, 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点, 且 $AD = 2, BD = \sqrt{3} + 1, \angle C = 45^\circ, \angle ADB = 60^\circ$, 求证: AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

证明 $\because \angle ADB = 60^\circ, \therefore \angle BDC = 120^\circ, \angle CBD = 15^\circ$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{BD}{\sin 45^\circ}$.

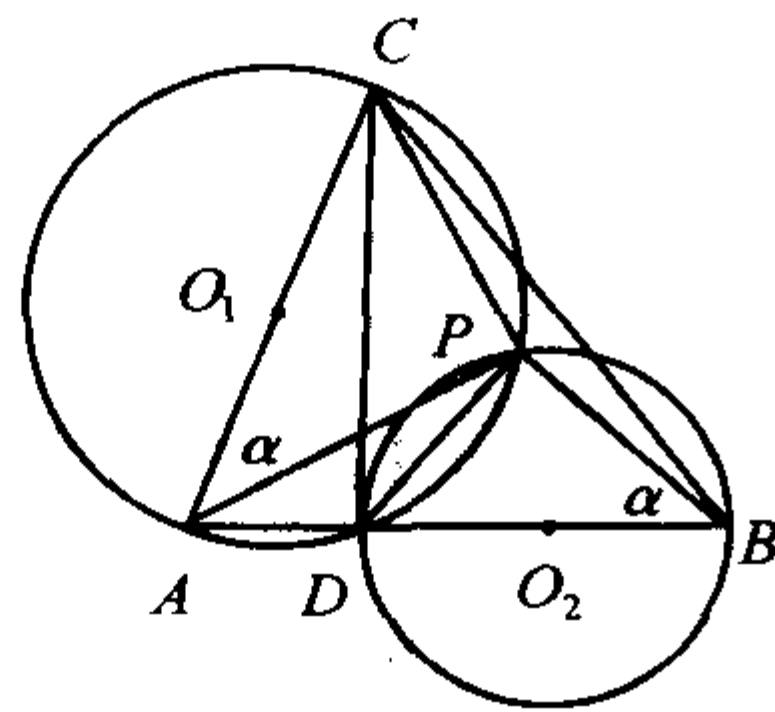


图 28-14

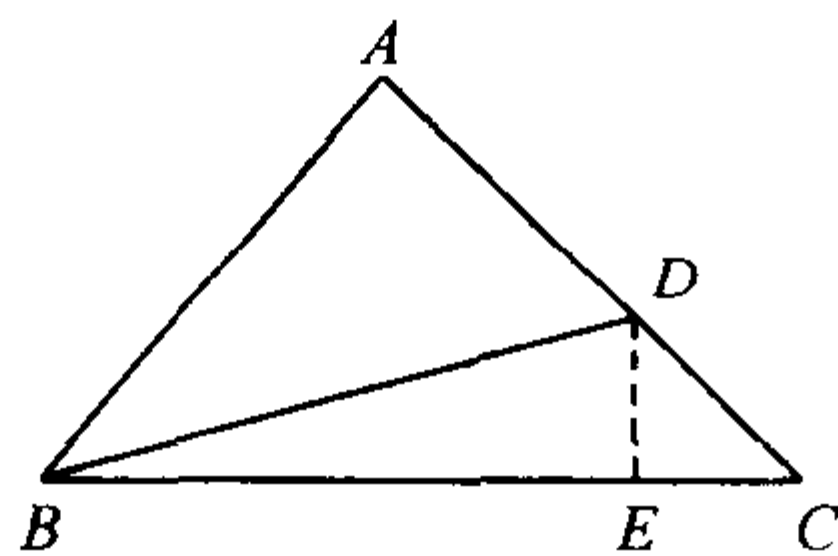


图 28-15



$$\text{则 } BC = \frac{(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}.$$

过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 设 $DE = x$, 则 $CE = x$.

$$\text{由勾股定理得 } x^2 + \left(\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 = (\sqrt{3}+1)^2.$$

$$\text{整理得 } 2x^2 - (\sqrt{6}+3\sqrt{2})x + \sqrt{3}+2 = 0. \text{ 解得 } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\because \angle BDE > \angle DBE, \therefore BE > DE. \therefore DE = x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 则 } DC = \sqrt{2}DE = 1.$$

$$\therefore AD \cdot AC = 2 \cdot (2+1) = 6.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB \\ &= 4 + (\sqrt{3}+1)^2 - 4(\sqrt{3}+1) \cdot \cos 60^\circ = 6. \end{aligned}$$

则 $AB^2 = AD \cdot AC$, $\therefore AB$ 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.



【能力训练】

1. 如图 28-16 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $BC = 2$, 求 $\cos A$ 和 $\sin B$.
2. 如图 28-17 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , 已知 $CD = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{3}$, 求 AC , AB 的值.
3. 如图 28-18 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$, 已知 $CD = \sqrt{3}$, $BD = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

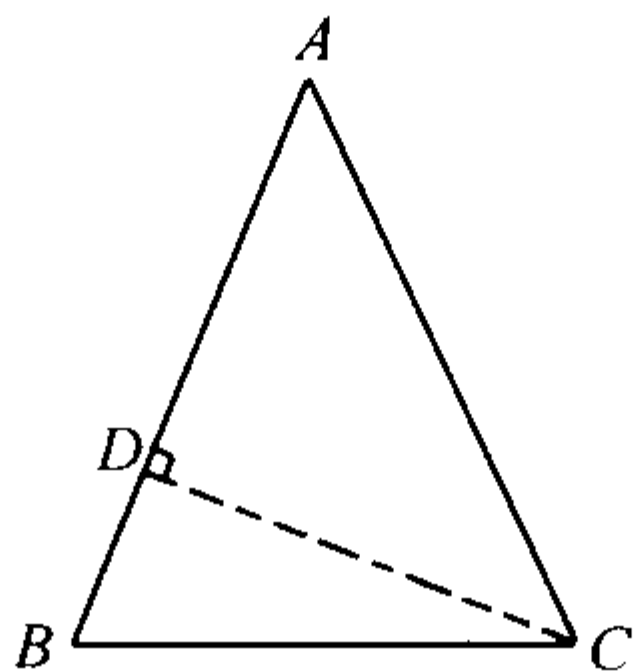


图 28-16

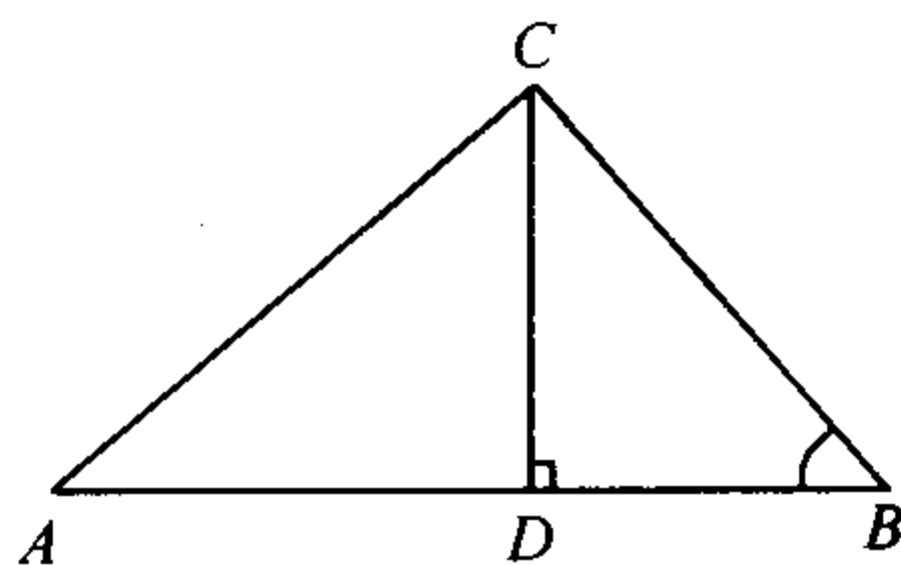


图 28-17

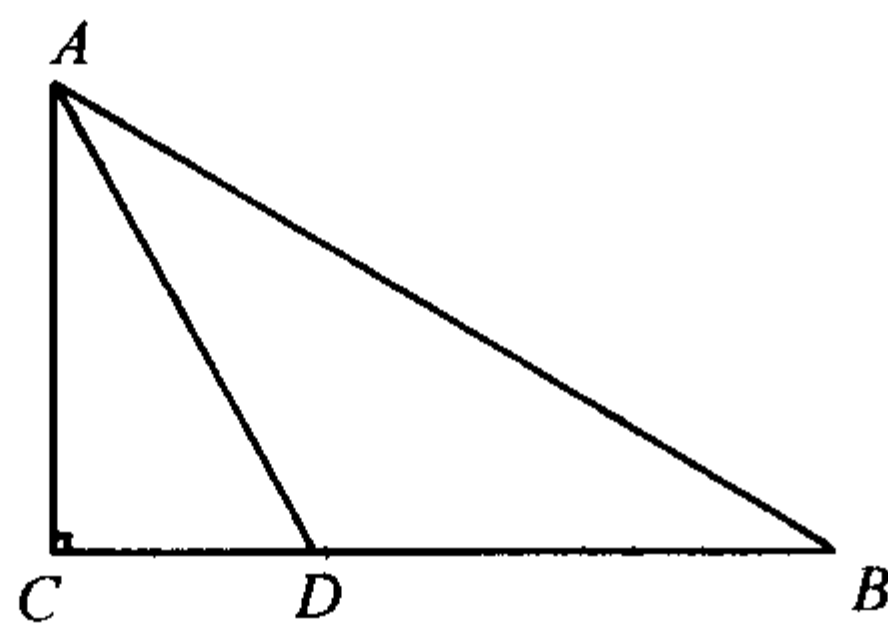


图 28-18

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c^2 = a^2 + b^2 + ab$, $S_{\triangle ABC} = 15\sqrt{3}$, $c = 14$, 求 a 和 b 的值.
5. 如图 28-19, $\odot O$ 的弦 AD , BC 互相垂直, 垂足为 E , $AC = 2$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, 且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$. (1) 求 EC 的长; (2) 求 AD 的长.
6. 如图 28-20 所示, 点 A 在半径为 R 的 $\odot O$ 上, 以 A 为圆心, r 为半径作 $\odot A$, 设 $\odot O$ 的弦 PQ 与 $\odot A$ 相切, 求证: $PA \cdot QA$ 为定值.



7. 如图 28-21 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=5$, $AC=12$, $AB=13$, 在边 AB , AC 上分别取点 D , E , 使线段 DE 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 试求这样的线段 DE 的最小长度.

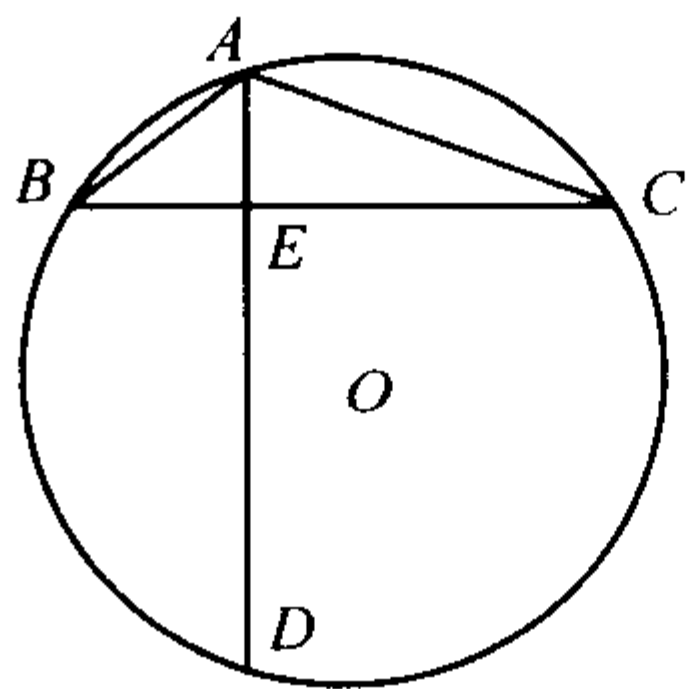


图 28-19

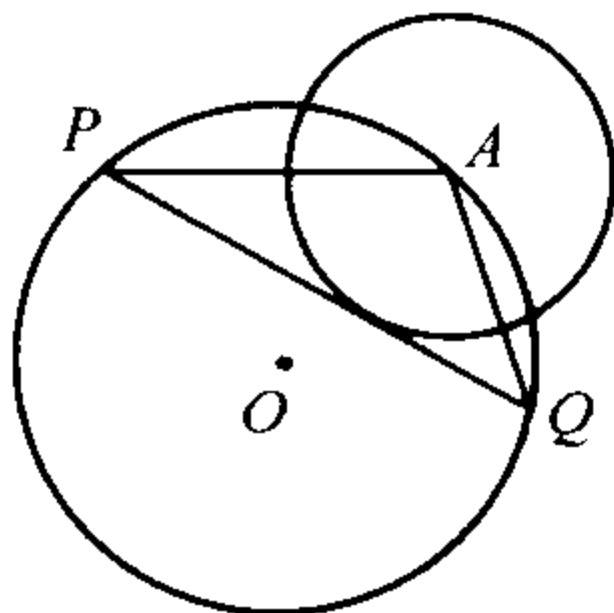


图 28-20

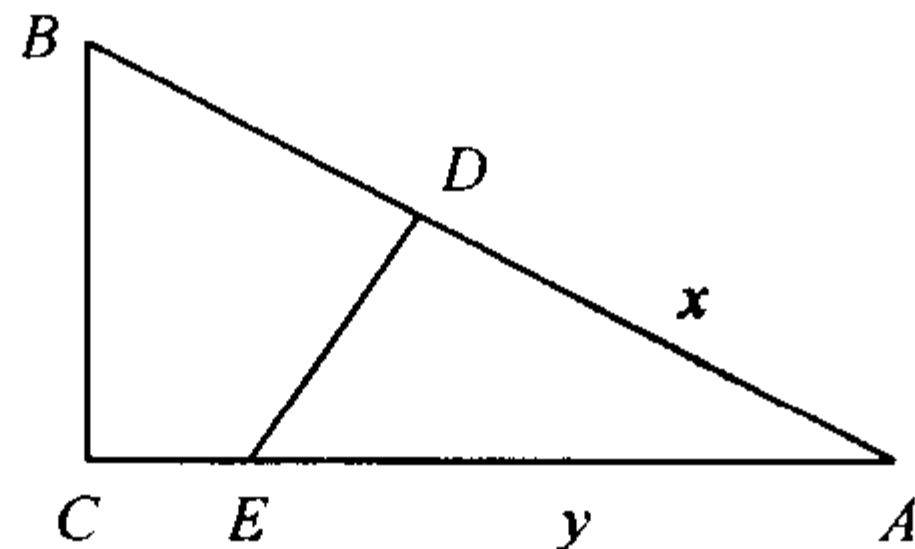


图 28-21

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 方程 $(\sin B - \sin A)x^2 + (\sin A - \sin C)x + (\sin C - \sin B) = 0$ 的两根相等, 求证: $B \leq 60^\circ$.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 最大边与最小边的边长分别是方程 $3x^2 - 27x + 32 = 0$ 的两根, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆的面积.

10. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 46^\circ$, $AB = 10$, 且 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, 也不是等腰三角形.

(1) 请另外再给出一个条件, 使 $\triangle ABC$ 的其他的边和角都能求出, 并在这个条件下, 求出 $\triangle ABC$ 的其他的角和边 (保留两位有效数字);

(2) 你给出的条件能使这个三角形惟一确定吗? 如果不能, 请举例; 如果能惟一确定, 请说明理由, 并请你重新设置一个条件, 使这种三角形至少有两个, 并予以说明.

11. 如图 28-22 所示, 为了测出河对岸 C , D 两地距离, 在相距 100m 的 A , B 两地测得 $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle CAD = \angle DBC = 60^\circ$, 求 C , D 两地距离.

12. 如图 28-23 所示, E 是四边形 $DBCA$ 中 AD 边上的一点, 已知 $AE = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{3} + 1$, $\angle D = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$,

$S_{\text{四边形}AEBC} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$, 求 AB 和 $\angle BAE$.

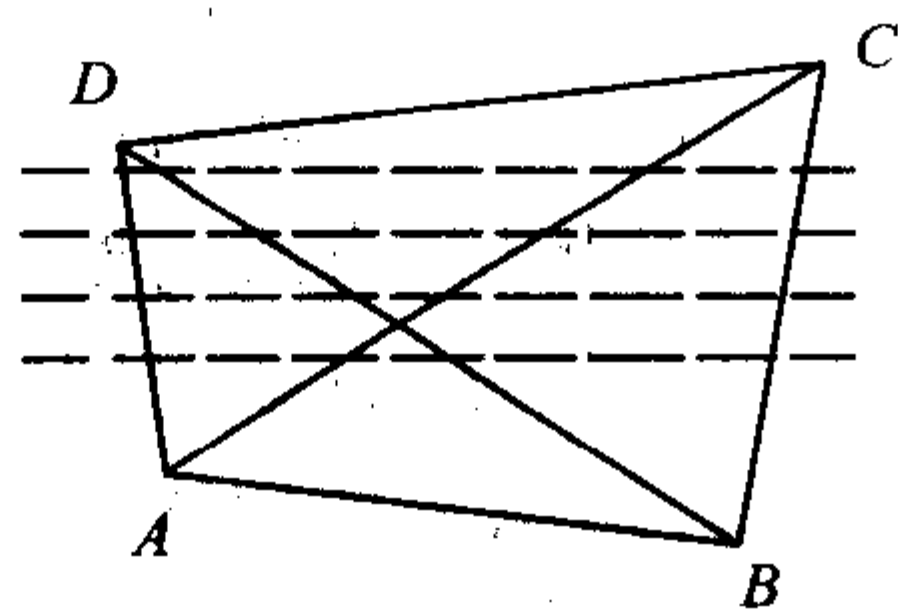


图 28-22

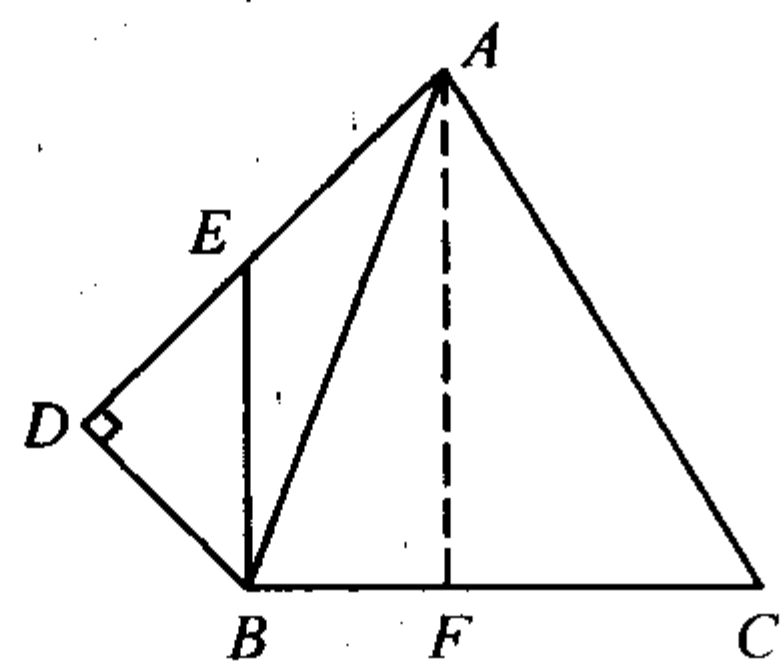


图 28-23



二十九、直线与圆的位置关系



【赛点目标】

1. 理解圆的切线、切线长、三角形内切圆及内心、弦切角等概念.
2. 能判定直线与圆的三种位置关系.
3. 熟练掌握切线的判定与性质.
4. 学会用弦切角定理、相交弦定理、切割线定理来解决一般的几何命题.



【方法述要】

1. 判定直线和圆的三种位置关系(设圆的半径为 r , 圆心到直线的距离为 d):
 - (1) 相离(直线与圆没有公共点) $\Leftrightarrow d > r$;
 - (2) 相切(直线与圆有惟一公共点) $\Leftrightarrow d = r$;
 - (3) 相交(直线与圆有两个公共点) $\Leftrightarrow d < r$.
2. 熟练掌握切线的判定定理: 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线. 同时记住过圆上一点的切线的画法(经过该点画半径的垂线), 以及三角形内切圆的画法(以两个角平分线的交点为圆心, 该交点到任一边的距离为半径).
3. 熟练掌握切线的性质:
 - (1) 经过圆心垂直于切线的直线必经过切点;
 - (2) 圆的切线垂直于经过切点的半径;
 - (3) 经过切点垂直于切线的直线必经过圆心.
4. 熟练掌握:
 - (1) 弦切角定理: 弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半;
 - (2) 相交弦定理: 圆内的两条相交弦被交点分成的两条线段长的积相等;
 - (3) 切割线定理: 从圆外一点引圆的切线和割线, 切线长是这点到割线与圆的交点的两条线段长的比例中项.
5. 能应用切线长定理: 从圆外一点引圆的两条切线, 它们的切线长相等. 同时还有结论: 经过圆外一点和圆心的直线, 平分从这点向圆所作的两条切线所夹的角.



【赛题精讲】

例 1 如图 29-1, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD = 8$, $AB = CD = 6$, 以 $\angle B$ 和



$\angle C$ 的平分线交点 O 为圆心, 以 O 到 BC 的距离 OE 为半径画圆, 试判定直线 AD 与 $\odot O$ 的位置关系(要说明理由).

解 本题的关键是求出 $\odot O$ 的半径 OE , 并将 OE 和梯形 $ABCD$ 的高线加以比较. 延长 BA, CD 交于 P , 由题意知, $\odot O$ 即为 $\triangle PBC$ 的内切圆, 因为 $AD \parallel BC, BC = 2AD$, 所以 AD 是 $\triangle PBC$ 的中位线, 故 $PB = PC = 12$. 可以求得 $\odot O$ 的半径为 $2\sqrt{2}$ (求三边已知的等腰三角形内切圆的半径, 可以作底边上的高线, 利用切割线定理求得; 或利用

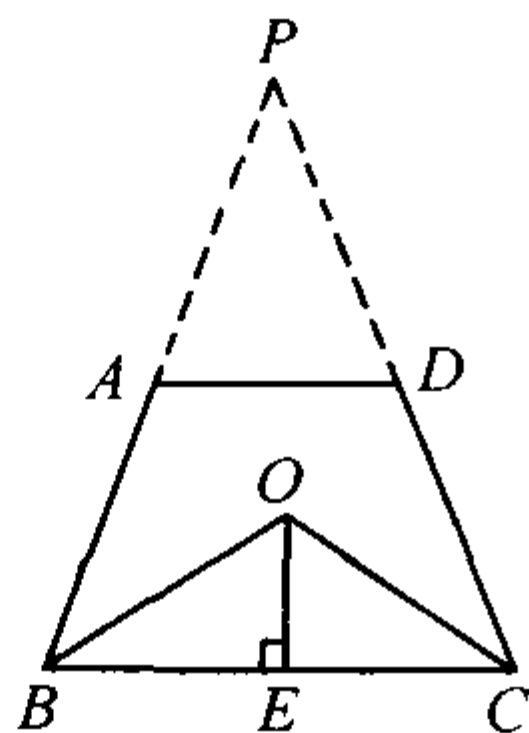


图 29-1

$S_{\triangle} = \frac{1}{2}r(a+b+c)$, 其中 a, b, c 为三角形三边长, r 为内切圆半径求得), 梯形 $ABCD$ 的高线长为 $4\sqrt{2}$, 所以直线 AD 与 $\odot O$ 相切.

例 2 如图 29-2, AB 为 $\odot O$ 的直径, D 在 $\odot O$ 上, $DE \perp AB$ 于 E , C 为 AB 延长线上一点, $\angle CDB = \angle BDE$. 试判断 CD 和 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由.

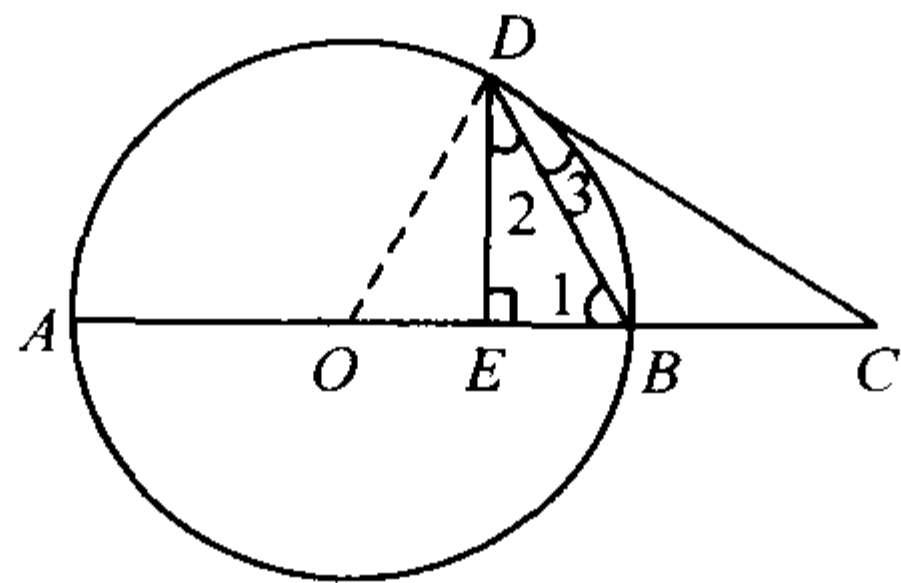


图 29-2

解 CD 和 $\odot O$ 已有一个交点 D , 所以 CD 和 $\odot O$ 不可能相离. 于是只剩下相交和相切两种情况. 由已知条件, 要判断 CD 和 $\odot O$ 相交, 只要找到 CD 和 $\odot O$ 有两个交点或说明 O 到 CD 的距离小于 $\odot O$ 的半径, 似乎无从着手, 于是猜想 CD 和 $\odot O$ 相切, 连结 OD , 要说明 CD 是 $\odot O$ 的切线, 只要说明 $OD \perp CD$. 由条件 $DE \perp AB, \angle 2 = \angle 3$, 知 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$. 而 $\angle 1 = \angle ODB$, 故 $\angle ODB + \angle 3 = 90^\circ$, 即 $OD \perp CD$, CD 和 $\odot O$ 相切成立.

例 3 如图 29-3 所示, 在 $\odot O$ 中, 直径 AB 与弦 CD 相交于点 M , 且 M 是 CD 的中点, 点 P 在 DC 的延长线上, PE 是 $\odot O$ 的切线, E 是切点, AE 与 CD 相交于点 F , 求证: $PF^2 = PC \cdot PD$.

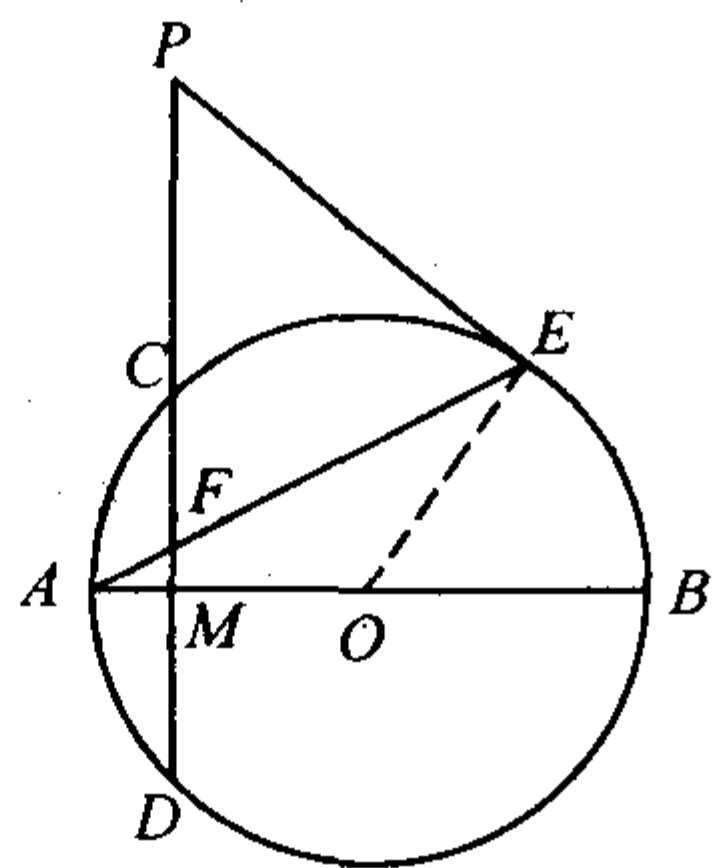


图 29-3

证明 连结 OE ,

$\because PE$ 切 $\odot O$ 于 E ,

$\therefore OE \perp PE. \therefore \angle PEF + \angle AEO = 90^\circ$.

$\because OA = OE, \therefore \angle A = \angle AEO$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, M 是 CD 的中点,

$\therefore AB \perp CD. \therefore \angle A + \angle AFM = 90^\circ$.

$\therefore \angle AFM = \angle PEF$.

$\because \angle AFM = \angle PFE, \therefore \angle PEF = \angle PFE$.

$\therefore PF = PE$.

由切割线定理得 $PE^2 = PC \cdot PD$.



$$\therefore PF^2 = PC \cdot PD.$$

例 4 如图29-4所示,已知四边形 $ABCD$ 内接于直径为 3 的 $\odot O$, 对角线 AC 是直径, 对角线 AC 和 BD 的交点是 P , $AB = BD$, 且 $PC = 0.6$, 求四边形 $ABCD$ 的周长.

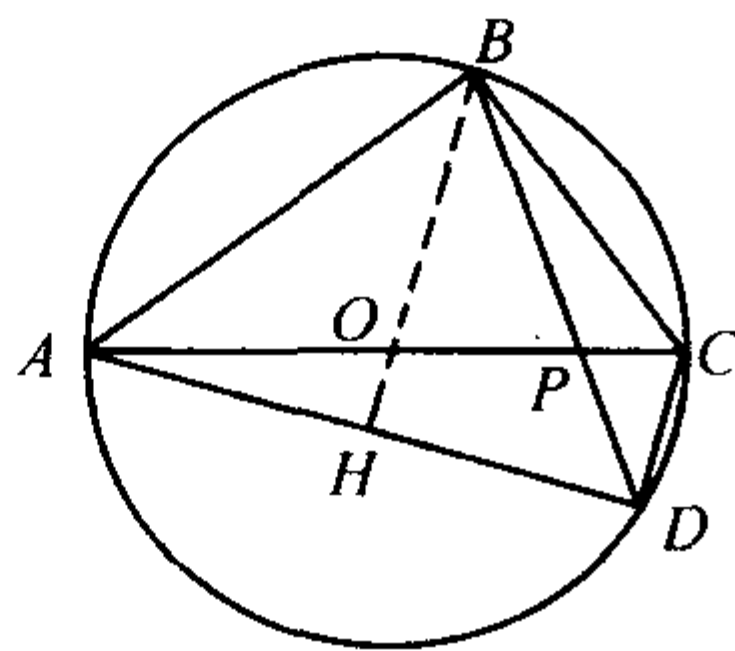


图 29-4

解 设圆心为 O , 连结 BO 并延长交 AD 于点 H ,

$\because AB = BD, O$ 是圆心, $\therefore BH \perp AD$.

又 $\because AC$ 为直径, 则 $\angle ADC = 90^\circ \therefore BH \parallel CD$.

从而 $\triangle OPB \sim \triangle CPD, \frac{CD}{BO} = \frac{CP}{PO}$.

即 $\frac{CD}{1.5} = \frac{0.6}{1.5 - 0.6}$. 故 $CD = 1$.

于是 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$.

又 $\because OH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}, \therefore AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}$.

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}.$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 的周长为 $1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

例 5 在一个四边形中, 如果一组对边之和等于另一组对边之和, 那么这个四边形必有内切圆.

已知: 四边形 $ABCD$ 中, $AB + CD = AD + BC$.

求证: 四边形 $ABCD$ 必有内切圆.

证明 若 $AB = AD$, 则有 $CD = BC$. 这时四边形 $ABCD$ 为菱形, 必有内切圆.

若 $AB > AD$, 那么 $AB - AD = BC - CD$.

在 AB 上取 $AE = AD$, 在 CB 上取 $CF = CD$, 连 DE, DF, EF .

容易看出 $\triangle ADE, \triangle BEF, \triangle CDF$ 都是等腰三角形. 它们的顶角平分线就是它们底边的中垂线, 也就是 $\triangle DEF$ 的各边的中垂线. 由于 $\triangle DEF$ 各边的中垂线交于一点 O , O 也就是 $\angle DAE, \angle ABF, \angle BCD$ 角平分线的交点. 于是 O 到 CD 与 AD, AB, BC 各边距离相等, 所以四边形 $ABCD$ 有内切圆.

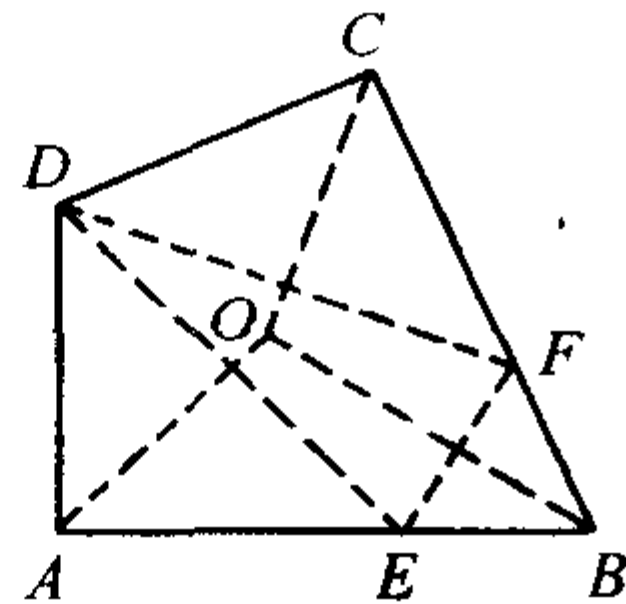


图 29-5

例 6 如图29-6所示, 凸边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的交点为 M , 过点 M 作 AD 的平行线分别交 AB, CD 于点 E, F , 交 BC 的延长线于点 O , P 是以 O 为圆心 OM 为半径的圆上一点, 求证: $\angle OPF = \angle OEP$.

证法一 过点 M 作 $MK \parallel CD$ 交 OB 于点 K , 连结 EK , 则有 $\frac{BE}{EA} = \frac{BM}{MD} = \frac{BK}{KC}$.

故 $KE \parallel AC$.



$$\therefore \frac{OF}{OM} = \frac{OC}{OK} = \frac{OM}{OE}.$$

即 $OM^2 = OF \cdot OE$. 又 $\because OM = OP$,

$$\therefore OP^2 = OE \cdot OF. \text{ 又 } \because \angle EOP = \angle FOP,$$

$$\therefore \triangle OPF \sim \triangle OEP. \therefore \angle OPF = \angle OEP.$$

证法二 过点 M 作 $MG \parallel AB$ 交 OB 于点 G , 如图 29-7 所示, 则有

$$\frac{OE}{OM} = \frac{EB}{MG} = \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AB}{MG} = \frac{BM}{BD} \cdot \frac{AC}{CM}.$$

过点 M 作 $MH \parallel DC$ 交 OB 于点 H , 则有

$$\frac{OM}{OF} = \frac{MH}{FC} = \frac{MH}{DC} \cdot \frac{DC}{FC} = \frac{BM}{BD} \cdot \frac{AC}{CM}.$$

$$\therefore \frac{OE}{OM} = \frac{OM}{OF}. \text{ 又 } \because OM = OP,$$

$$\therefore \frac{OE}{OP} = \frac{OP}{OF}. \text{ 又 } \because \angle POF = \angle EOP,$$

$$\therefore \triangle OPF \sim \triangle OEP.$$

$$\therefore \angle OPF = \angle OEP.$$

证法三 作 $MN \parallel OB$, $EQ \parallel OB$, 连结 NQ , 如图 29-8 所示, 则有

$$\frac{CN}{DN} = \frac{BM}{DM} = \frac{BE}{AE} = \frac{CQ}{AQ}.$$

$$\text{即 } \frac{CN}{DN} = \frac{CQ}{AQ}.$$

$$\therefore NQ \parallel AD. \text{ 又 } \because OE \parallel AD,$$

$$\therefore NQ \parallel OE. \text{ 则 } \frac{CF}{CN} = \frac{CM}{CQ}.$$

$$\text{而 } \frac{OF}{OM} = \frac{CF}{CN}, \frac{OM}{OE} = \frac{CM}{CQ}, \text{ 则 } \frac{OF}{OM} = \frac{OM}{OE}.$$

$$\text{即 } \frac{OF}{OP} = \frac{OP}{OE}.$$

(以下证明略)

例 7 如图 29-9 所示, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点, $AD:DC = 2:1$, $\angle C = 45^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$, 求证: AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

证法一 作 $\triangle BCD$ 的外接圆, 设圆心为 O , 连结 OB, OC, OD , OD 与 BC 相交于点 E .

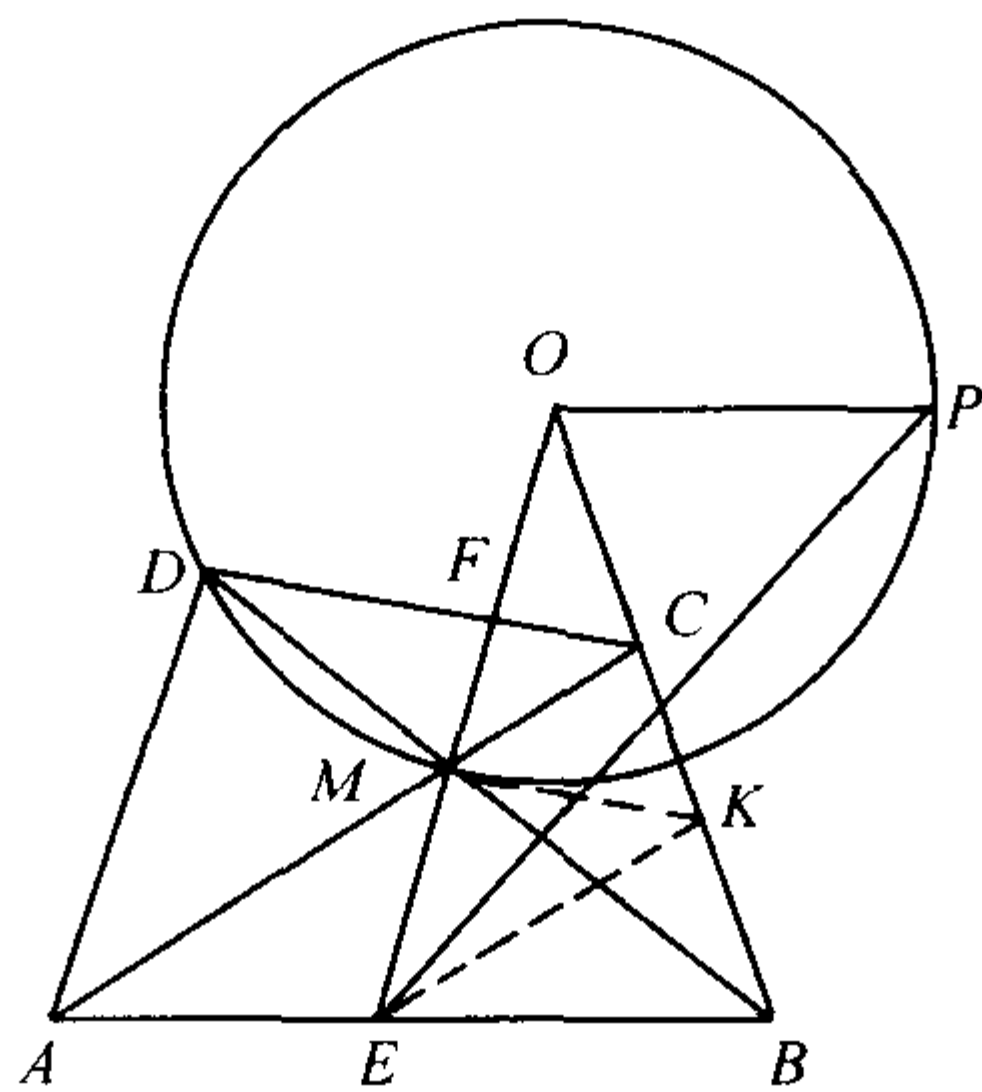


图 29-6

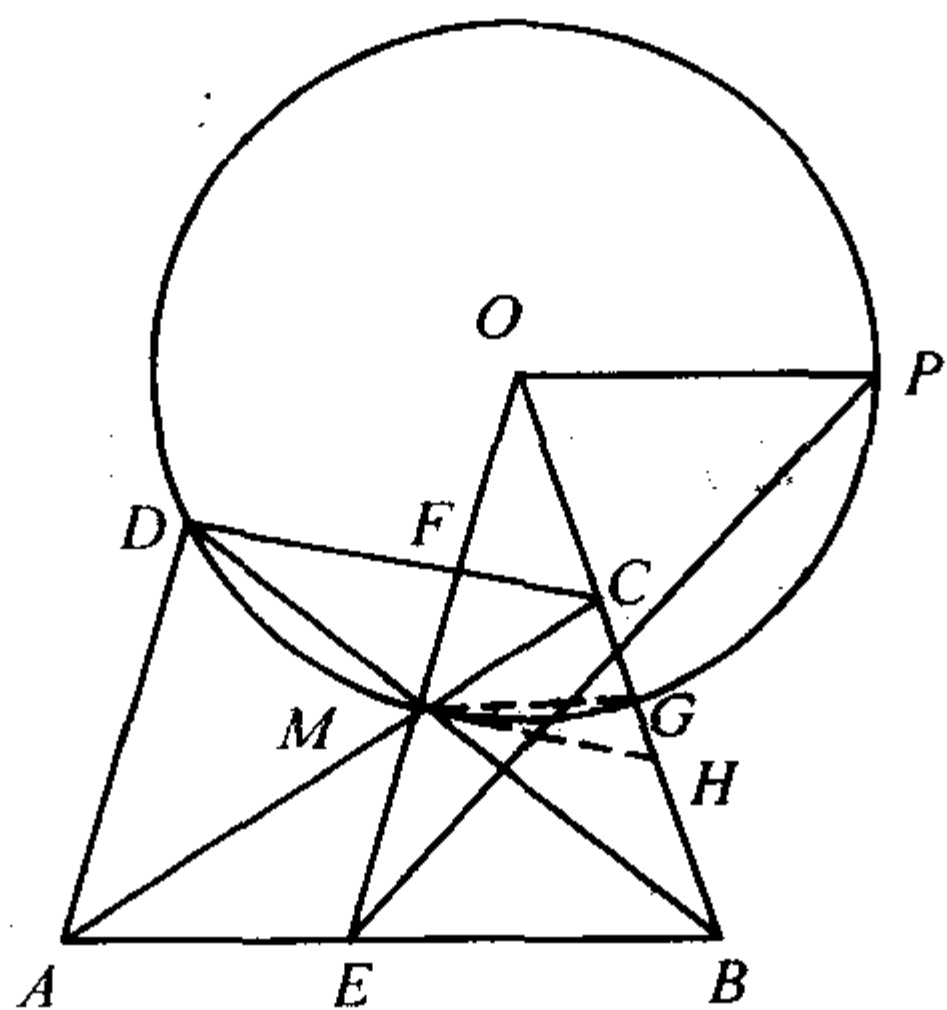


图 29-7

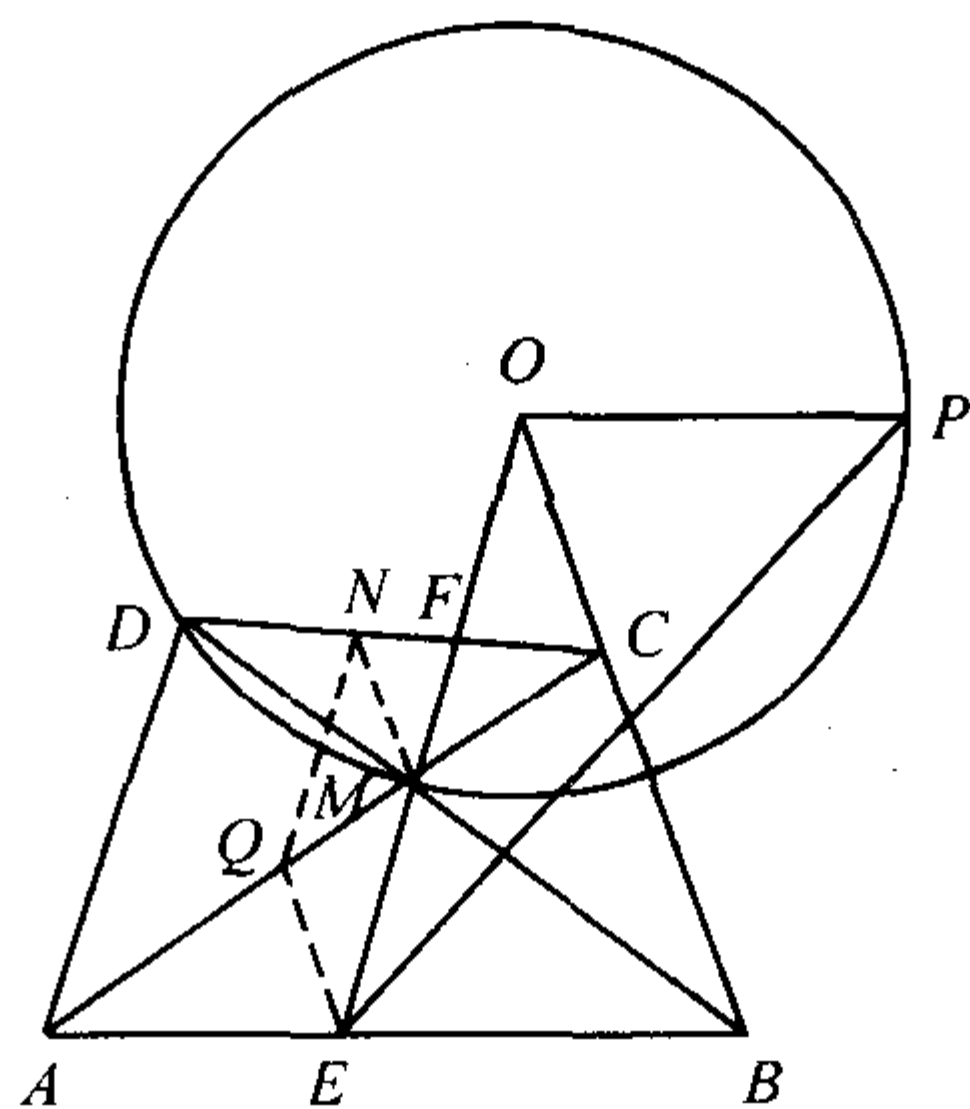


图 29-8



$\because \angle DCB$ 是 \widehat{BD} 上的圆周角, $\angle BOD$ 是 \widehat{BD} 所对的圆心角, $\angle BCD = 45^\circ$, $\therefore \angle BOD = 90^\circ$.

同理 $\because \angle DBC = \angle ADB - \angle ACB = 15^\circ$,

$\therefore \angle DOC = 30^\circ$.

$\therefore \angle BOC = 120^\circ$. 又 $\because BO = OC$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

在 $\triangle OEC$ 中, $\angle EOC = \angle ECO = 30^\circ$,

$\therefore OE = EC$.

在 $\triangle BOE$ 中, $\angle BOE = \angle BOD = 90^\circ$, $\angle EBO = 30^\circ$,

$\therefore BE = 2EO = 2EC$.

$\therefore \frac{CE}{EB} = \frac{1}{2} = \frac{CD}{DA}$.

$\therefore AB \parallel DO$. 从而 $\angle ABO = 90^\circ$.

$\therefore AB$ 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

证法二 过点 A 作 $AE \perp BD$ 于点 E , 连结 EC , 如图 29-10 所示.

在 $\triangle ADE$ 中, $\angle AED = 90^\circ$, $\angle ADE = 60^\circ$,

$\therefore AE = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \sqrt{3} DC$, $DE = \frac{1}{2} AD = DC$.

$\therefore \triangle EDC$ 是等腰三角形.

$\therefore \angle EDC = 180^\circ - \angle ADB = 120^\circ$,

$\therefore \angle DCE = 30^\circ$, $\angle ECB = \angle EBC = 15^\circ$.

$\therefore BE = EC$.

又 $\because \angle DCE = \angle DAE = 30^\circ$, $\therefore AE = EC$.

$\therefore BE = EC = AE$.

即 $\triangle AEB$ 是等腰直角三角形, $\angle ABE = \angle ACB = 45^\circ$.

由弦切角逆定理得 AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

证法三 设 $AD = 2$, $DC = 1$, 作 $BE \perp AC$ 交 AC 于点 E , 如图 29-11 所示, 设 $ED = x$,

$\because \angle EDB = 60^\circ$, $\therefore BE = \sqrt{3}x$.

又 $\because \angle ECB = 45^\circ$, $\therefore BE = EC = 1 + x$.

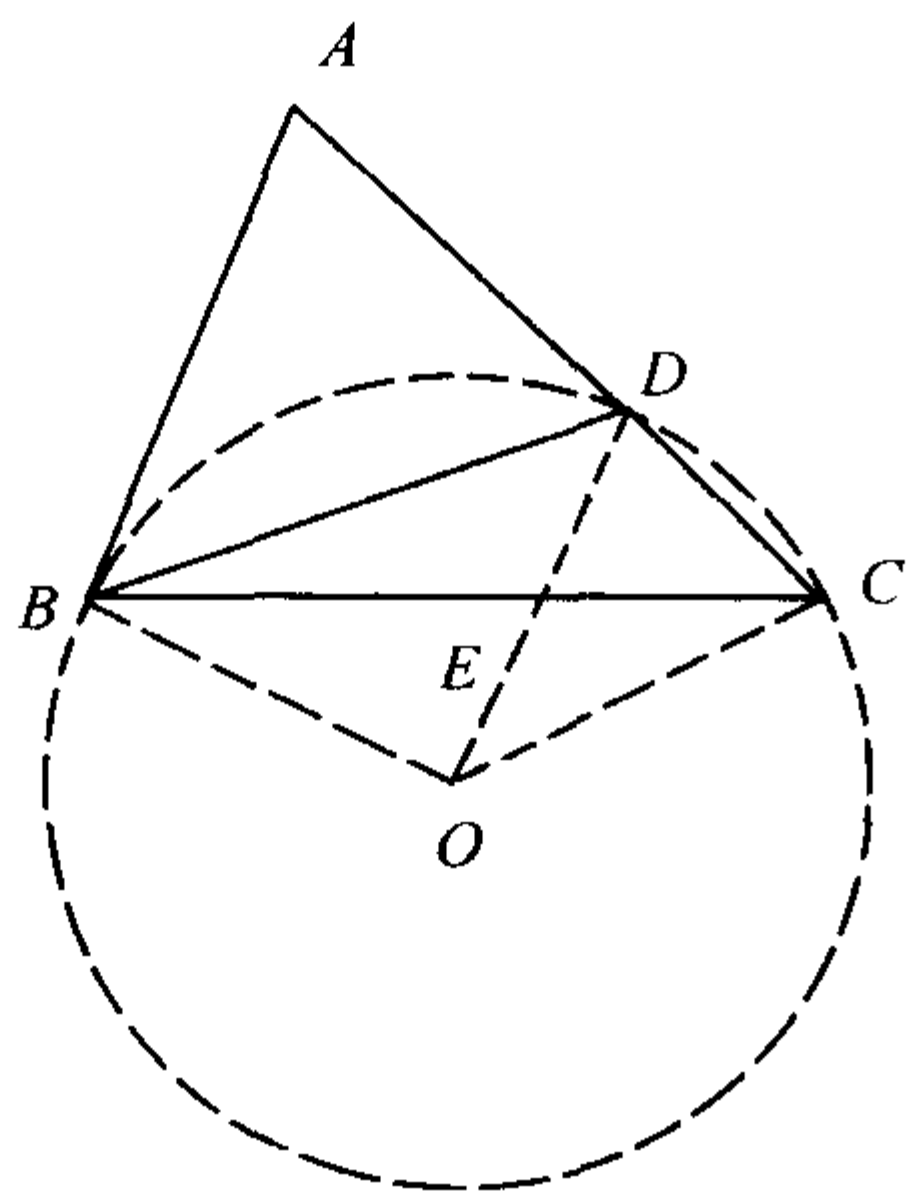


图 29-9

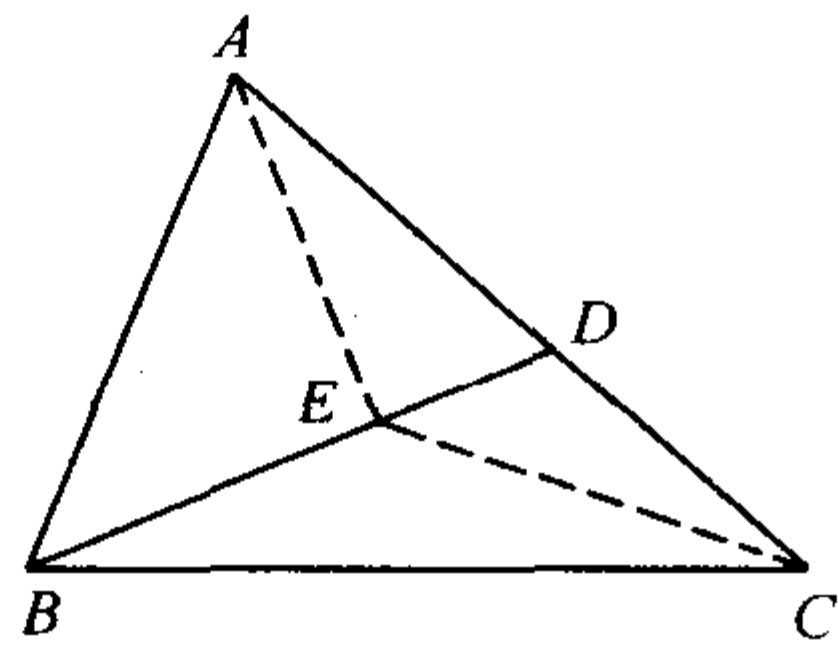


图 29-10

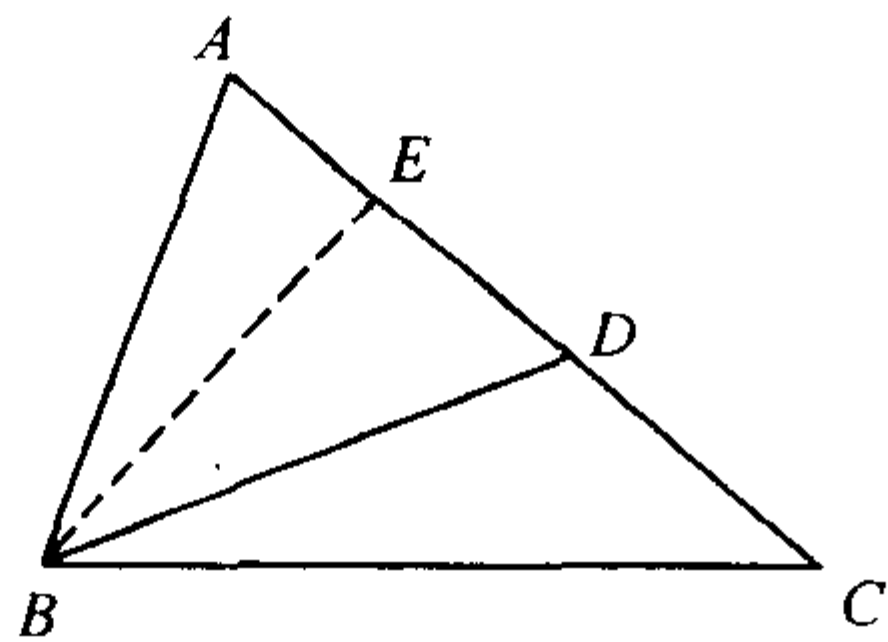


图 29-11



$$\therefore 1+x=\sqrt{3}x \cdot x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

在 $\triangle ABE$ 中, $BE=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$, $AE=AD-ED=2-x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $\angle AEB=90^\circ$,

$$\therefore AB^2=AE^2+BE^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2=6.$$

又 $\because AD \cdot AC=2 \times (2+1)=6$,

$$\therefore AB^2=AD \cdot AC.$$

由切割线逆定理得 AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

例 8 如图 29-12, 在正方形 $ABCD$ 中有一直径为 BC 的半圆, $BC=2\text{cm}$, 现有两点 E, F , 分别从点 B , 点 A 同时出发, 点 E 沿线段 BA 以 1cm/s 的速度向点 A 运动, 点 F 沿折线 $A-D-C$ 以 2cm/s 的速度向点 C 运动, 设点 E 离开点 B 的时间为 $t(\text{s})$.

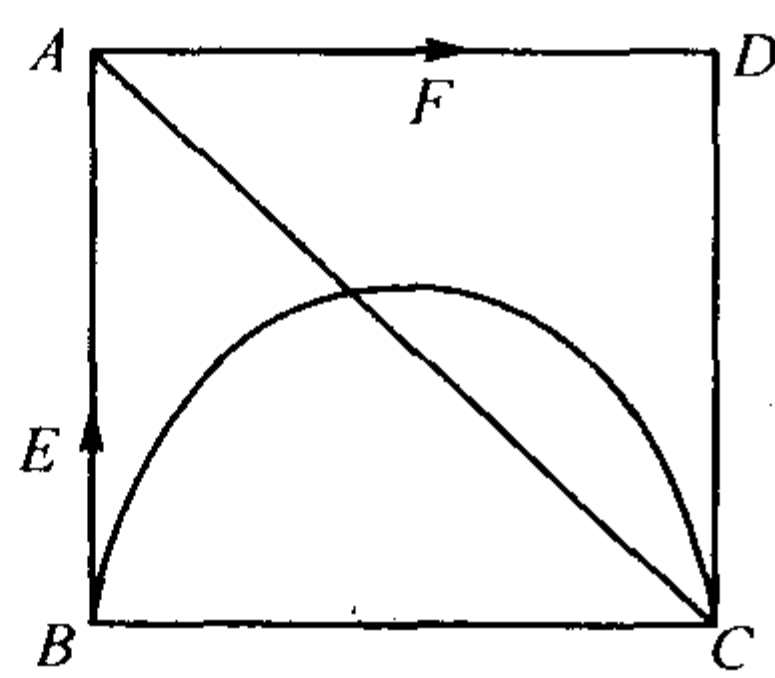


图 29-12

(1) 当 t 为何值时, 线段 EF 与 BC 平行?

(2) 设 $1 < t < 2$, 当 t 为何值时, EF 与半圆相切?

(3) 当 $1 \leq t \leq 2$ 时, 设 EF 与 AC 交于点 P , 问点 E, F 运动时, 点 P 的位置是否发生变化? 若发生变化, 请说明理由; 若不发生变化, 请给予证明, 并求 $AP:PC$ 的值.

解 (1) 要使 $EF \parallel BC$, 只需点 F 在 CD 上, 点 E 在 AB 上, 且满足 $AD+DF+BE=4$. 设 $BE=t$, 由条件可得 $DF=2t-2$, 代入等式得方程 $2+2t-2+t=4$, 解得 $t=\frac{4}{3}$.

(2) 当 $1 < t < 2$ 时, 点 E 在 AB 线段上, F 在 CD 线段上, EF 与半圆相切只能是如图 29-13 所示的情况. EF 与半圆相切, 相当于 $CF+BE=EF$.

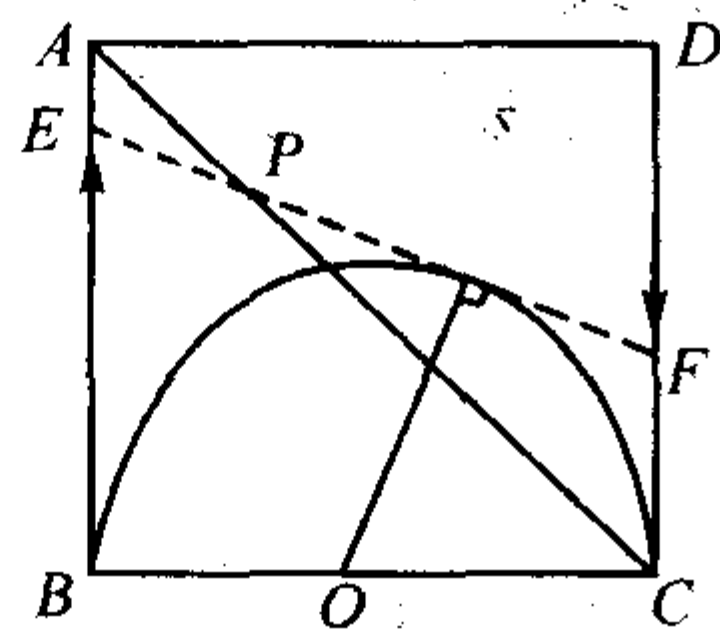


图 29-13

设 $BE=t$, 则 $CF=4-2t$, $EF=\sqrt{4+(3t-4)^2}$ ($t > \frac{4}{3}$), 代

入等式得: $4-t=\sqrt{4+(3t-4)^2}$, 即 $2t^2-4t+1=0$, 解得 $t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore t > \frac{4}{3}$, $\therefore t=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\text{s}$, 即当 $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\text{s}$ 时, EF 与半圆相切.

(3) 由 $\triangle APE \sim \triangle CPF$, 得 $\frac{AP}{PC}=\frac{AE}{FC}=\frac{1}{2}$ (定值), \therefore 点 P 的位置不会发生变化, 且 $AP:PC=1:2$.

例 9 已知: 如图 29-14, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, I 为内心, $ID \perp BC$ 于点 D , $CE \perp AI$ 于点 E , $BF \perp AI$ 于点 F , O 是 BC 边的中点. 求证: D, E, F 三点都在以 O 点为圆心



的同一圆上.

证明 连结 OE 、 OF , 并延长 CE 交 AB 于点 G , 延长 BF 交 AC 的延长线于点 H .

$$\because \angle GAE = \angle CAE, AE \perp EC, \therefore AG = AC, GE = EC.$$

$$\text{又} \because O \text{ 为 } BC \text{ 的中点}, \therefore OE = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}(AB - AG) = \frac{1}{2}(AB - AC).$$

$$\text{同理可得 } OF = \frac{1}{2}(AB - AC).$$

$$\therefore OE = OF.$$

$\because I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $ID \perp BC$ 于点 D , $\therefore D$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 边的切点. 所以 $BD = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$.

$$\therefore OD = BD - BO = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB - AC).$$

故 $OD = OE = OF$, 即 D, E, F 三点都在以 O 为圆心的同一圆上.

例 10 设一四边形同时内接、外切于圆.

将其内切圆不相邻的两切点用线段连结, 则这两条线段所在的直线互相垂直.

证法一 连结 EF, FG, EH , 如图 29-15 所示, 由切线长定理及弦切角定理得 $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4, \angle 2 = \angle 5 = \angle 6$.

$$\because \angle A + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore 2(\angle 3 + \angle 5) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$$\text{因此, } \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \therefore \angle EPF = 90^\circ.$$

即 $EG \perp FH$ 成立.

证法二 设四边形内切圆为 O , 连结 OE, OF, OG, OH . 如图 29-16 所示, 则 $\angle OEB = \angle OFB = 90^\circ$, O, E, B, F 共圆.

$$\therefore \angle EOF + \angle B = 180^\circ.$$

$$\text{同理可得 } \angle HOG + \angle D = 180^\circ.$$

$$\because \angle B + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF + \angle HOG = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle HEG + \angle FHE$$

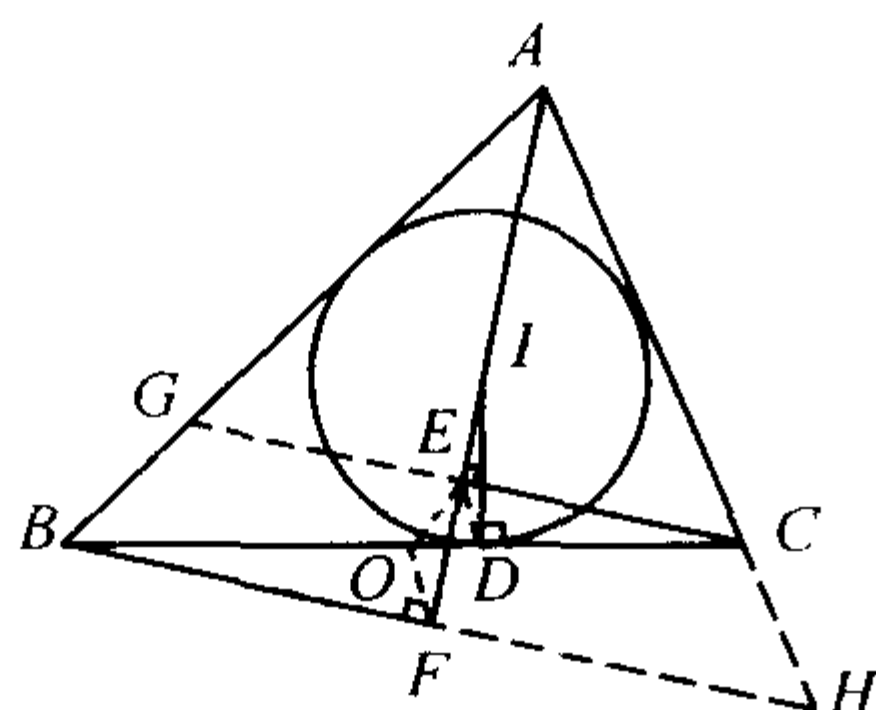


图 29-14

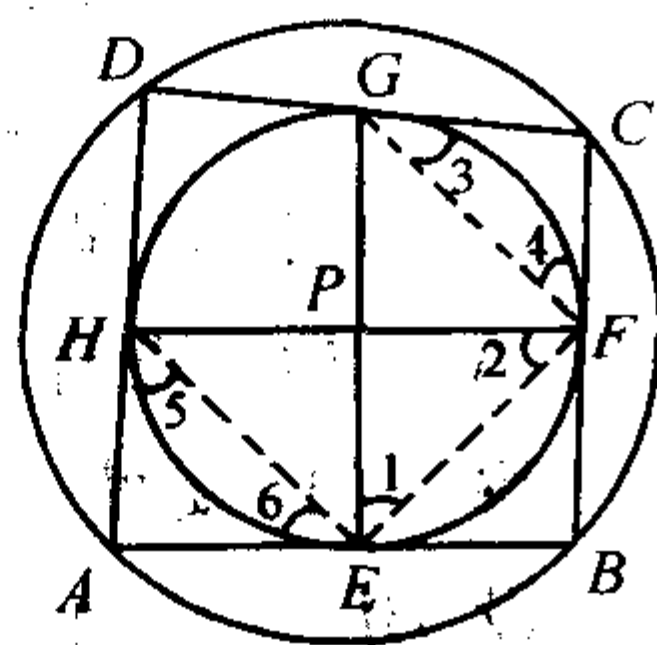


图 29-15



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \widehat{HG} + \frac{1}{2} \widehat{EF} \cdot \frac{1}{2} \angle HOG + \frac{1}{2} \angle EOF \\
 &= \frac{1}{2} (\angle HOG + \angle EOF) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ.
 \end{aligned}$$

$\therefore \angle HPE = 90^\circ$, 即 $EG \perp FH$ 成立.

例 11 如图 29-17, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的内角平分线分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 A_1, B_1, C_1 , AA_1 与 B_1C_1 , BB_1 与 C_1A_1 , CC_1 与 A_1B_1 的交点分别为 A_0, B_0, C_0 .

求证: $\triangle ABC$ 的内心 I 也是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的内心.

证明 连 AC_1 , 则 $\angle AC_1B_1 = \angle ABB_1 = \frac{1}{2} \angle ABC$. $\angle C_1AB = \angle C_1CB = \frac{1}{2} \angle ACB$, $\angle BAA_1 = \frac{1}{2} \angle BAC$.

$\therefore \angle AC_1B_1 + \angle A_1AC_1 = \angle AC_1B_1 + \angle C_1AB + \angle BAA_1 = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC) = 90^\circ$, 即 $\angle C_1A_0A = 90^\circ$.

$\therefore AA_0 \perp B_1C_1$. 同理 $B_1B_0 \perp A_1C_1$, $C_1C_0 \perp A_1B_1$.

$\therefore I$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.

$\therefore A_0, C_1, B_0, I$ 四点共圆.

$\therefore \angle B_0A_0I = \angle B_0C_1I = \angle C_0B_1I = \angle C_0A_0I$.

$\therefore \angle B_0A_0I = \angle C_0A_0I$. 同理 $\angle A_0B_0I = \angle C_0B_0I$.

$\therefore \angle B_0C_0I = \angle A_0C_0I$, 即 I 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的内心.

例 12 已知: 如图 29-18, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 30^\circ$, O 是外心, I 是内心, 点 D 在 AC 上, 点 E 在边 BC 上, 且 $AD = BE = AB$. 求证: $OI \perp DE$, 且 $OI = DE$.

证明 延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 M , 连 BD, OM, OB, BM, BI .

$\therefore I$ 是 $\triangle ABC$ 内心, 则 AM 平分 $\angle BAC$. $\therefore \widehat{BM} = \widehat{MC}$.

$\therefore \angle MOB = \angle BAC$. 又 $AB = 2R \sin C = 2R \sin 30^\circ = R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径).

$\therefore AD = BE = AB = OB = OM$. $\therefore \triangle DAB \cong \triangle MOB$. 故 $MB = BD$.

又 $\therefore \angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle ABC) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle C) = \frac{1}{2} (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$, 且 $\angle BMI = \angle ACB = 30^\circ$, $\therefore \angle MIB = 75^\circ$.

$\therefore \angle MIB = \angle MBI$. $\therefore MB = MI$.

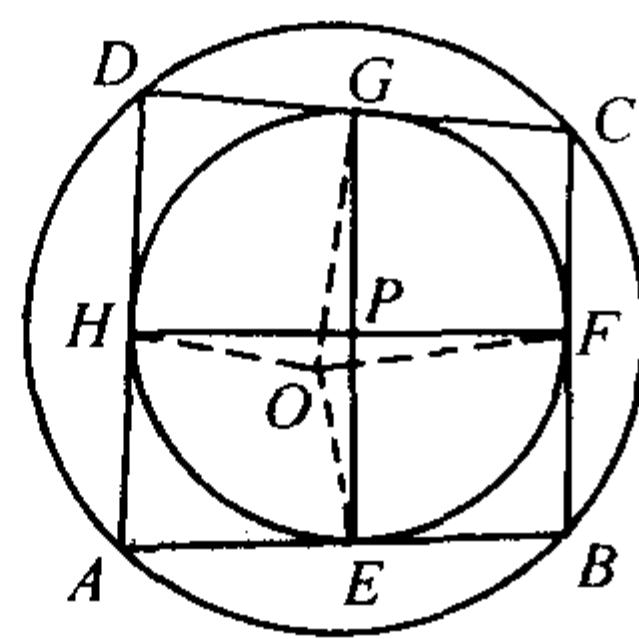


图 29-16

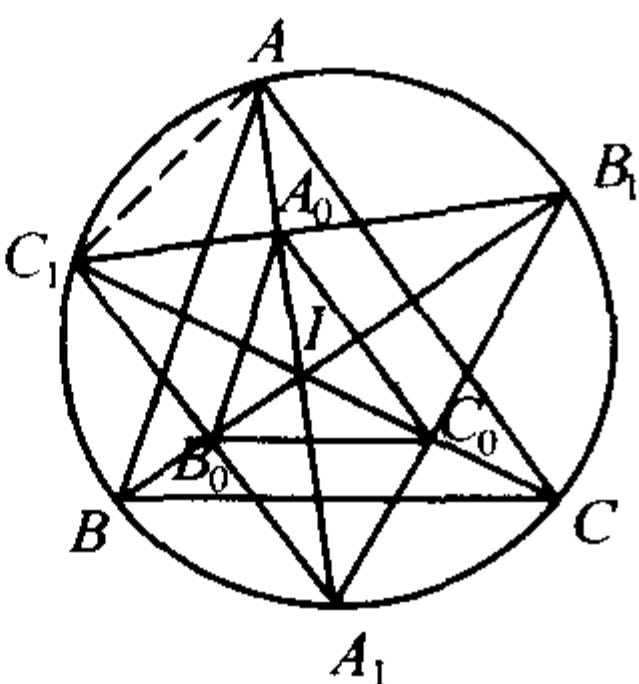


图 29-17

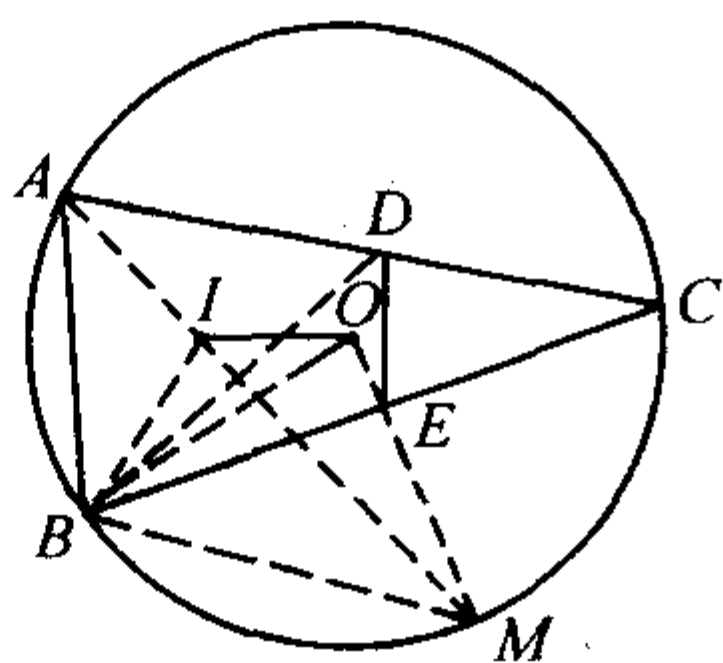


图 29-18



又 $\because I$ 为 $\triangle ABC$ 内心, $\therefore AI$ 平分 $\angle BAC$.

$\because AD = AB, \therefore BD \perp AI$, 即 $BD \perp IM$.

又 $\because BD = MB = IM, OM \perp BE, OM = BE$,

$\therefore \angle OMI$ 和 $\angle EBD$ 的两边分别垂直且相等. 又它们都是锐角, $\therefore \triangle OMI \cong \triangle EBD$, 且通过旋转 90° 和平移可使两三角形重合.

$\therefore OI \perp OE$, 且 $OI = OE$.



【能力训练】

1. 如图 29-19, AB 是 $\odot O$ 的直径, CB 切 $\odot O$ 于 B , $DB = DE$, 若 $\angle CBD = 25^\circ$, 求 $\angle ADE$ 的度数.

2. 如图 29-20, PA, PB, ED 分别切 $\odot O$ 于 A, B, C , $\odot O$ 半径为 6cm . 求 $\triangle PDE$ 的周长.

3. 如图 29-21, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, O 是 AB 上一点, 以 O 为圆心, OB 为半径的圆切 AC 于 D , 交 AB 于 E , $AD = 2, AE = 1$. 求 CD 的长.

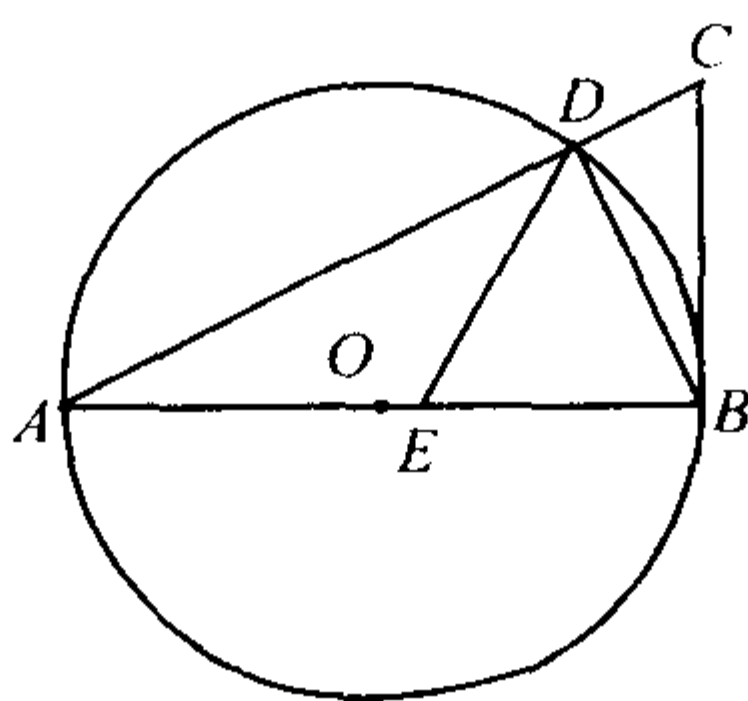


图 29-19

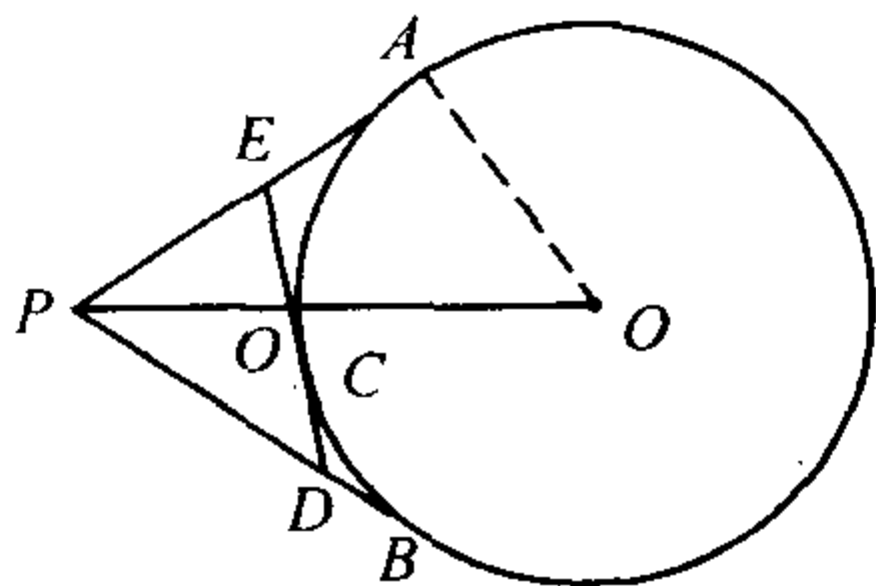


图 29-20

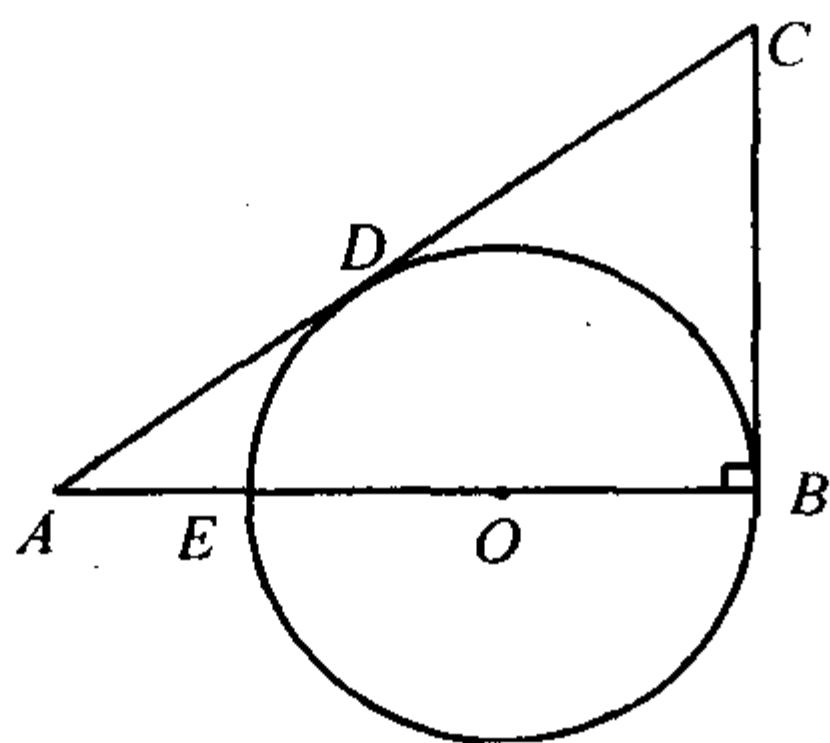


图 29-21

4. 如图 29-22, AB 是 $\odot O$ 直径, $CB \perp AB$ 于 B , AC 交 $\odot O$ 于 D , DE 切 $\odot O$ 于 D , 交 BC 于 E . 求证: (1) $BE = CE$; (2) $DE^2 = \frac{1}{4} CD \cdot CA$.

5. 如图 29-23 所示, 从 $\odot O$ 外一点 A 向 $\odot O$ 引切线 AC , 从 OA 上一点 B 作 $\odot O$ 的切线 BE , 切点为 E , 且 $BE = AB$, 求证: $AC^2 = 2AO \cdot AB$.

6. 如图 29-24 所示, AD, DBC 分别是圆的切线和割线, E 是 AB 的中点, 连结 DE 并延长交 AC 于点 F , 求证: $\frac{BD^2}{AD^2} = \frac{AF}{FC}$.

7. 如图 29-25, AB 切 $\odot O$ 于 A , 割线 BCE 交 $\odot O$ 于点 C, E , D 是 CE 上一点, $DC = CB = 6, AB = 12, OD = 4$. 求: $\odot O$ 的半径 r .

8. 如图 29-26 所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle C = 60^\circ, BC = 1$, 以 CD 为直径作圆与 AB 边相切于点 M , 且交 BC 边于点 E , 求 BE 的长.

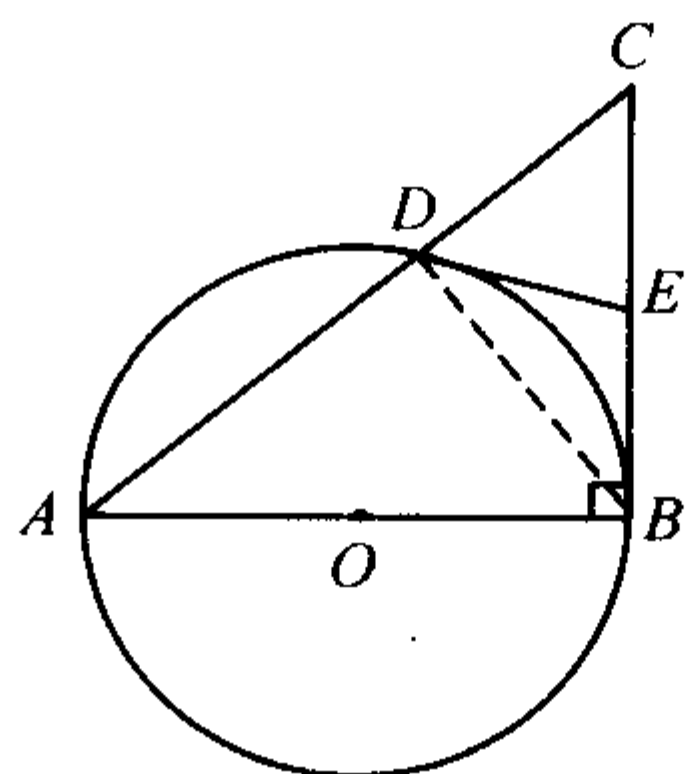


图 29-22

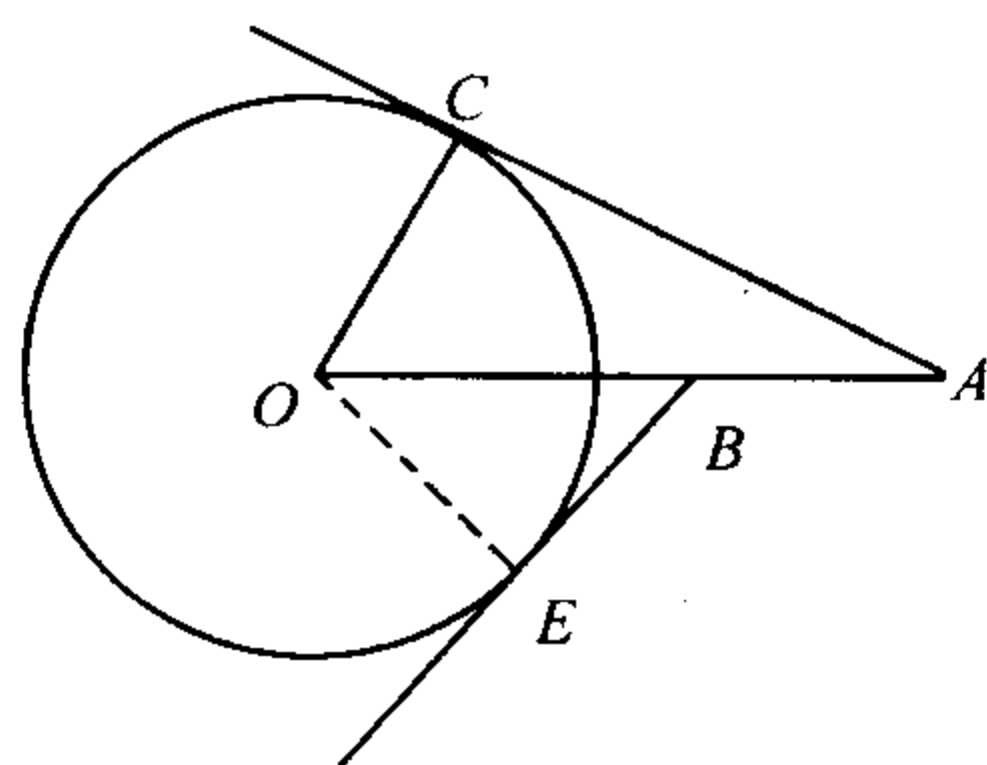


图 29-23

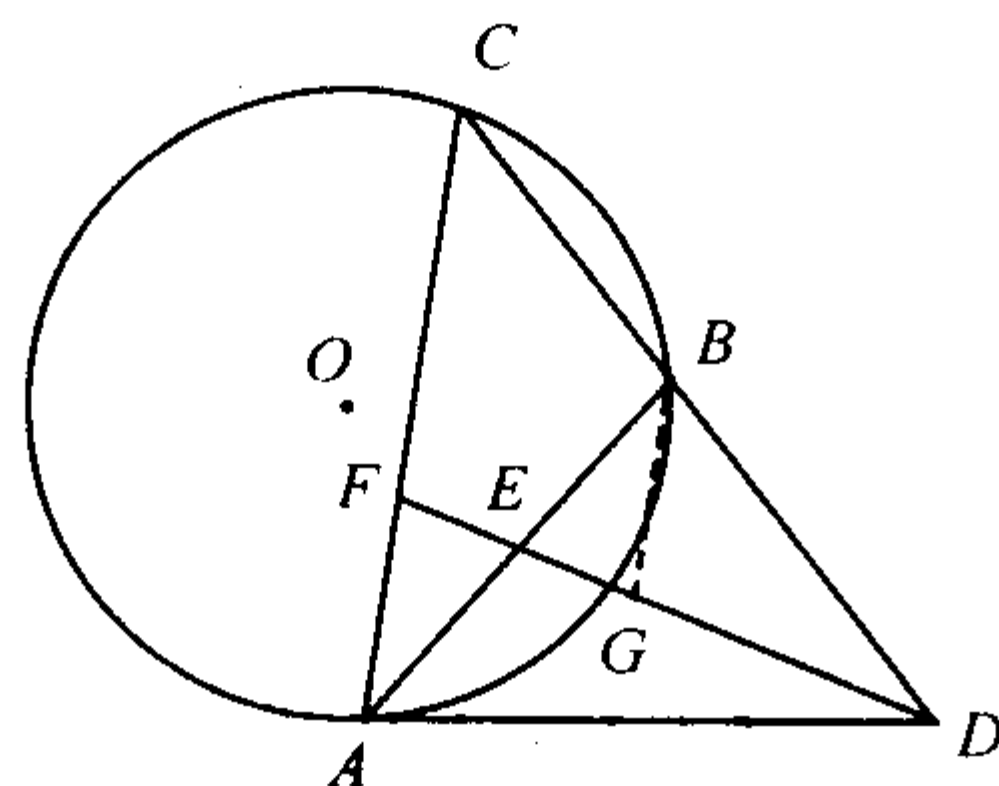


图 29-24

9. 如图 29-27 所示, $\triangle ABC$ 是直角三角形, 点 D 在斜边 BC 上, $BD = 4DC$, 已知圆过点 C 且与 AC 相交于点 F , 与 AB 相切于 AB 的中点 G , 求证: $AD \perp BF$.

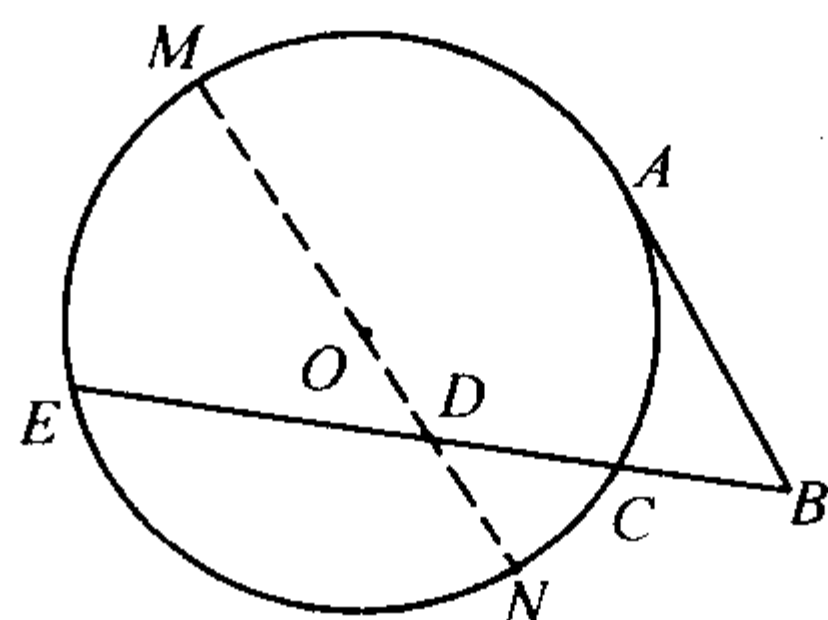


图 29-25

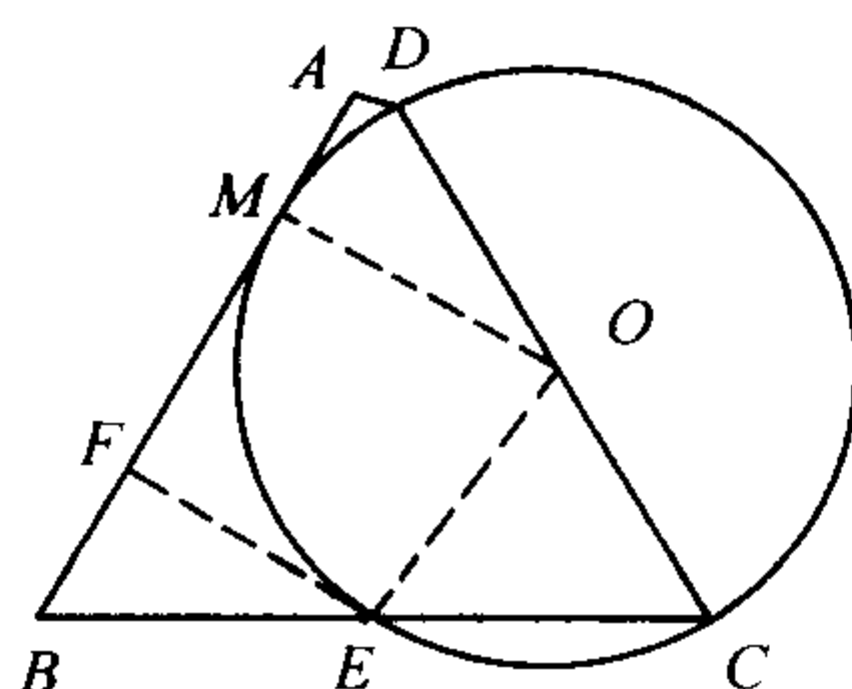


图 29-26

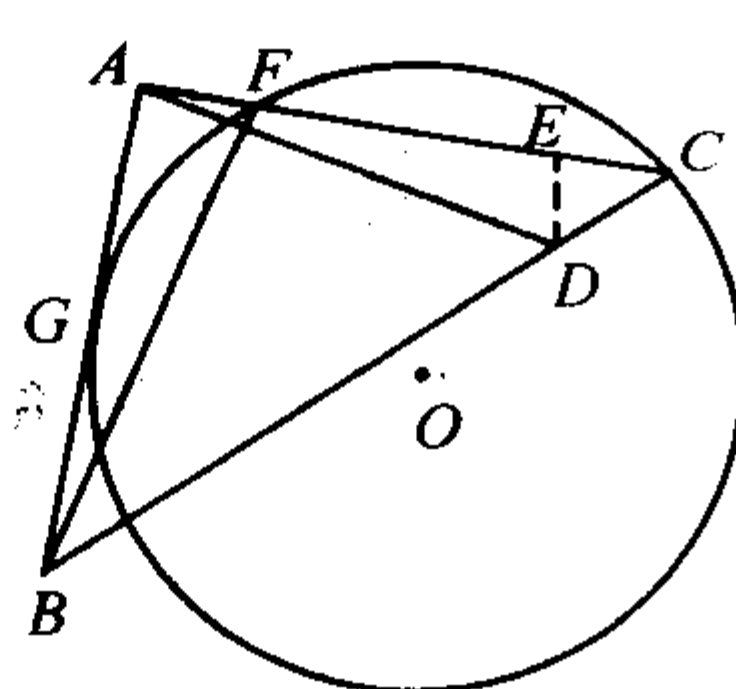


图 29-27

10. 如图 29-28, 大圆与小圆相内切 (即小圆在大圆内部, 且两圆仅有一个公共点 M), 大圆的弦 AB 切小圆于 C , 求证: MC 平分 $\angle AMB$.

11. 如图 29-29, 在同一直线上顺次取 $AB = BC = CD$, 以 BC 为直径作 $\odot O$, 从 A 作 $\odot O$ 的一条切线 AE , 切点为 M , 求证: $\angle AMB = \angle EMD$.

12. 如图 29-30, $ABCD$ 为圆外切四边形, AC 为对角线. 那么 $\triangle ABC$ 的内切圆和 $\triangle ADC$ 的内切圆与 AC 切于同一点.

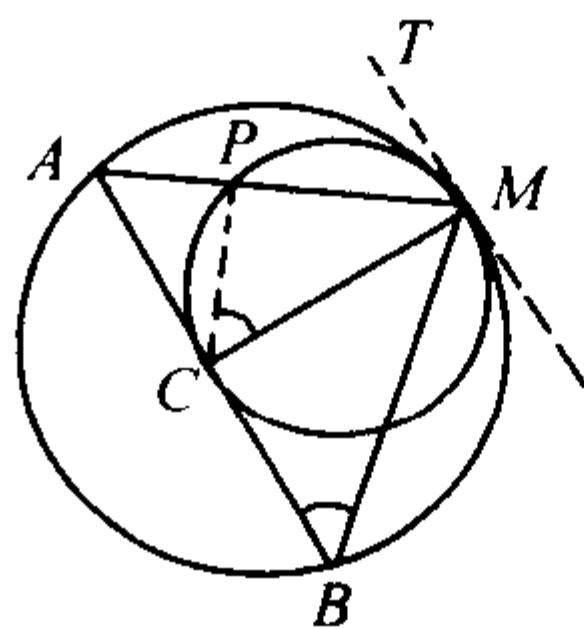


图 29-28

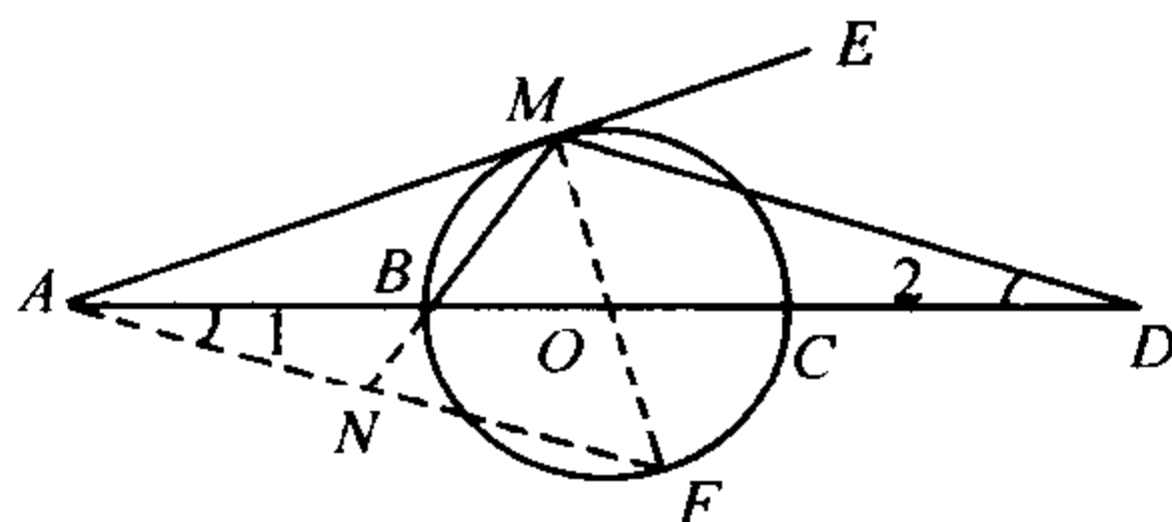


图 29-29

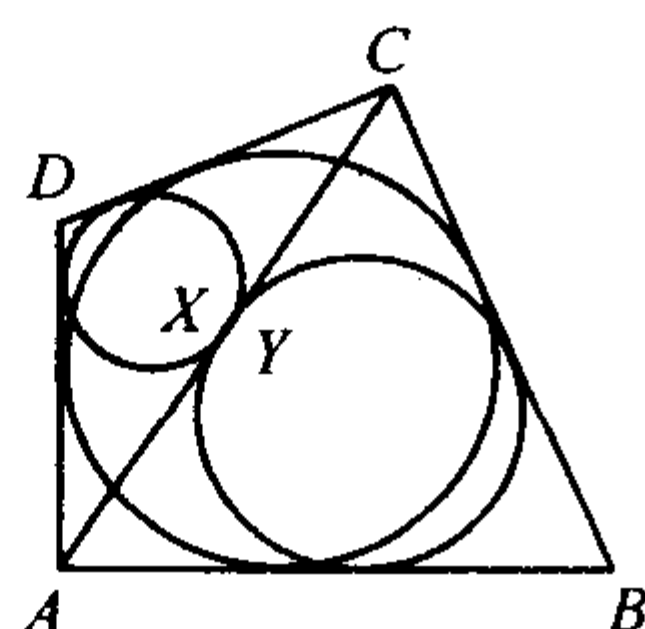


图 29-30



三十、圆与圆的位置关系



【赛点目标】

1. 理解两圆的五种位置关系以及两圆公切线的概念.
2. 掌握两圆的连心线的性质.
3. 掌握两圆公切线长的计算.
4. 了解轨迹的概念与五种基本轨迹,能利用轨迹知识进行有关的作图.
5. 能综合运用所学知识解决与圆有关的几何问题.



【方法述要】

1. 判定两圆的五种位置关系(设两圆的半径分别为 R 和 r , 圆心距为 d):

(1) $d > R + r \Leftrightarrow$ 两圆外离(两个圆没有公共点,且每个圆上的点都在另一个圆的外部);

(2) $d = R + r \Leftrightarrow$ 两圆外切(两个圆有惟一公共点,且除切点外,每个圆上的点都在另一个圆的外部);

(3) $R - r < d < R + r (R \geq r) \Leftrightarrow$ 两圆相交(两个圆有两个公共点);

(4) $d = R - r \Leftrightarrow$ 两圆内切(两个圆有惟一公共点,且除切点外,一个圆上的点都在另一个圆的内部);

(5) $d < R - r (R > r) \Leftrightarrow$ 两圆内含(两个圆没有公共点,且一个圆上的点都在另一个圆的内部).

注意 两圆相切包含外切和内切,两圆相离包含外离和内含.

2. 两圆的连心线有如下重要性质:

(1) 相切两圆的连心线必经过切点;

(2) 相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦.

3. 两圆的公切线有外公切线(两个圆在公切线同旁)和内公切线(两个圆在公切线两旁)之分. 设两圆的半径分别为 R 和 $r (R > r)$, 圆心距为 d , 则公切线长的计算公式是:

(1) 两圆的外公切线长 $= \sqrt{d^2 - (R - r)^2} (d > R - r)$;

(2) 两圆的内公切线长 $= \sqrt{d^2 - (R + r)^2} (d > R + r)$.



4. 四点共圆的判定定理:

- (1) 若两直角三角形有公共斜边, 则四顶点共圆;
- (2) 若两三角形有公共底边, 且在公共底边同侧又有相等的顶角, 则四顶点共圆;
- (3) 若四边形的两个对角互补, 则四顶点共圆;
- (4) 若四边形的一个外角等于它的内对角, 则四顶点共圆;
- (5) 若二线段 AB 和 CD 相交于点 P , 且 $AP \cdot PB = CP \cdot PD$, 则 A, B, C, D 四点共圆;
- (6) 若四点 A, B, C, D 与某一定点等距, 则 A, B, C, D 四点共圆.

5. 五种基本轨迹

- (1) 定理 1 到定点的距离等于定长的点的轨迹, 是以定点为圆心, 定长为半径的圆.
- (2) 定理 2 和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹, 是这条线段的中垂线.
- (3) 定理 3 在一个角的内部(包括顶点和角边), 到这个角两边的距离相等的点的轨迹, 是这个角的平分线.
- (4) 定理 4 到一条已知直线距离等于定长的点的轨迹, 是平行于这条直线, 并且到这条直线的距离等于定长的两条直线.
- (5) 定理 5 到两条平行线距离相等的点的轨迹, 是和这两条平行线距离相等的一条平行线.

6. 利用轨迹的知识作图, 在生产和生活中都有广泛的应用, 因此应掌握这方面的作图技能. 如掌握求作一个圆, 使它经过已知点、或和已知圆相切(包括内切和外切)、或和已知直线相切、或同时满足几个条件. 还要会作满足某些已知条件的三角形、梯形等其他几何图形.

7. 综合运用代数、几何、三角等知识, 并采用分析和综合相结合的逻辑推理方法, 仍是解题中的一个重要手段.



【赛题精讲】

例 1 (1) 如图 30-1, 已知 $\odot O$ 和定长 r , 直线 l 和 $\odot O$ 相离, 求作一个半径为 r 的圆, 使它与 $\odot O$ 外切, 并且与直线 l 相切(只要作出图形, 并保留作图痕迹);

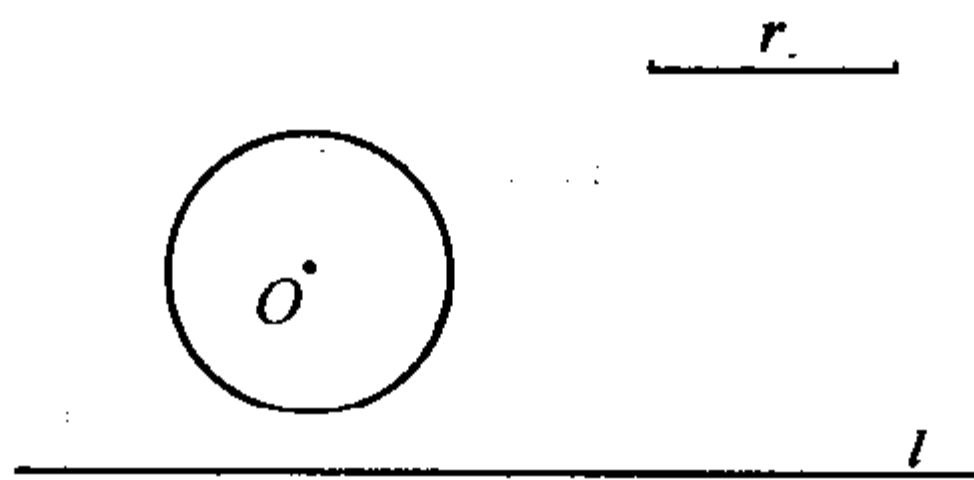


图 30-1

(2) 如图 30-2, 已知两个等圆相交于 A, B , 求与这两个等圆都外切的动圆圆心的轨迹, 并作出轨迹(只要作出图形, 并保留作图痕迹).

解 (1) 求作圆, 关键是确定圆心, 因为所求圆与 $\odot O$ 外切, 故圆心必在以 O 为圆心, $\odot O$ 半径与 r 之和为半径的圆上; 又因为所求圆与 l 相切, 故圆心又在平行于 l , 且到 l 的距离等于 r 的一条直线上, 前述两个轨迹的交点(有两个取一个即可), 即为所求



圆的圆心.

(2)与这两个等圆都外切的圆心必在 O_1O_2 的中垂线上,而直线 AB 就是这条中垂线,所以其动圆圆心的轨迹为直线 AB 上但不包括线段 AB 部分的所有的点.

例 2 相交两圆半径分别为15和13,圆心距为14,求两圆公共弦的长.

解 如图 30-3,设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A, B 两点, O_1O_2 与 AB 交于 C , 则 $AB \perp O_1O_2$, $AC = CB$. 在 $\text{Rt}\triangle AO_1C$ 中, $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2$, 在 $\text{Rt}\triangle AO_2C$ 中, $AC^2 = O_2A^2 - O_2C^2$, $\therefore O_1A^2 - O_1C^2 = O_2A^2 - O_2C^2$, 将 $O_1A = 15$, $O_2A = 13$, $O_2C = 14 - O_1C$ 代入得 $15^2 - O_1C^2 = 13^2 - (14 - O_1C)^2$, 解得 $O_1C = 9$, $\therefore AC = 12$, $AB = 24$, 即两圆公共弦的长为 24.

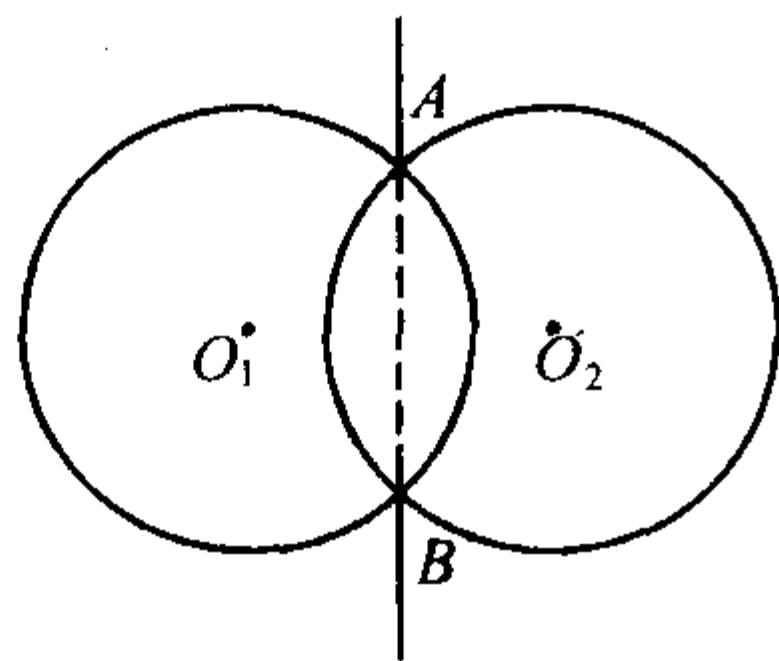


图 30-2

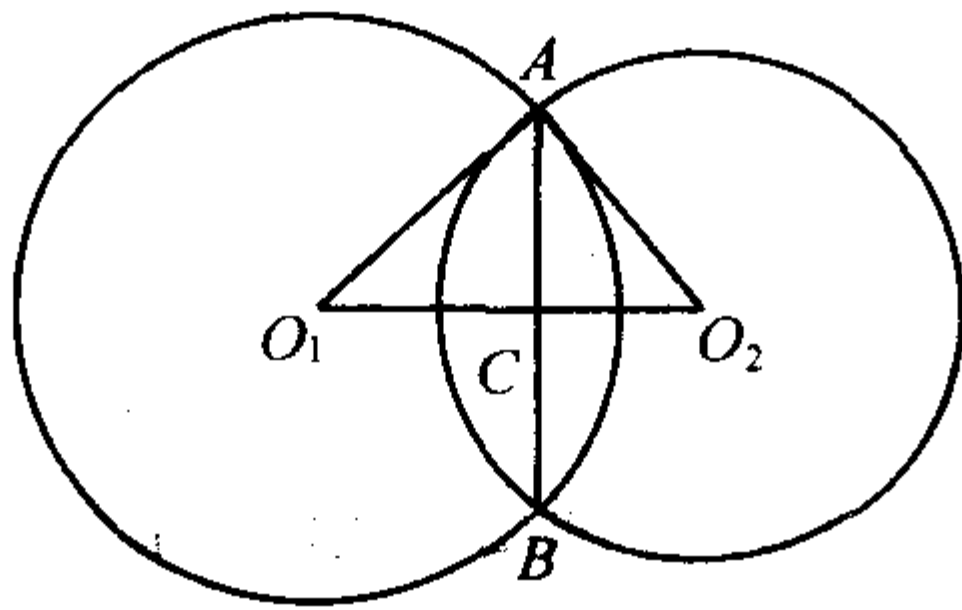


图 30-3

例 3 如图30-4所示, A, B 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的交点, AC 是 $\odot O_1$ 的直径, D, E 分别为 CA, CB 的延长线与 $\odot O_2$ 的交点, 已知 $AC = 12$, $BE = 30$, 且 $BC = AD$.

(1)求 $\angle C$ 的度数; (2)求 DE 的长.

解 (1)连结 AB ,

$\because AC$ 是直径, 则 $\angle ABC = 90^\circ$, 设 $BC = AD = x$, 对于 $\odot O_2$, 由割线定理得 $CA \cdot CD = CB \cdot CE$.

则 $12(12 + x) = x \cdot (30 + x)$.

解得 $x = 6$, 或 $x = -24$ (不符合题意, 舍去).

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle C = 60^\circ$.

(2) $\because A, B, E, D$ 在 $\odot O_2$ 上,

$\therefore \angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$. 又 $\because \angle ACB = \angle DCE$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCE$.

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}$, 即 $\frac{\sqrt{12^2 - 6^2}}{DE} = \frac{6}{6 + 12}$. $\therefore DE = 18\sqrt{3}$.

例 4 如图30-5所示, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, E 是 BC 中点, $EF \perp BC$ 交 AD 的延长线于点 F , 求证: A, B, F, C 四点共圆.

证明 连结 FB, FC , 过点 F 分别作 $FG \perp AB$ (或延长线) 于点 G , $FH \perp AC$ (或延长线) 于点 H ,

$\because EF$ 垂直平分 BC , $\therefore FB = FC$.

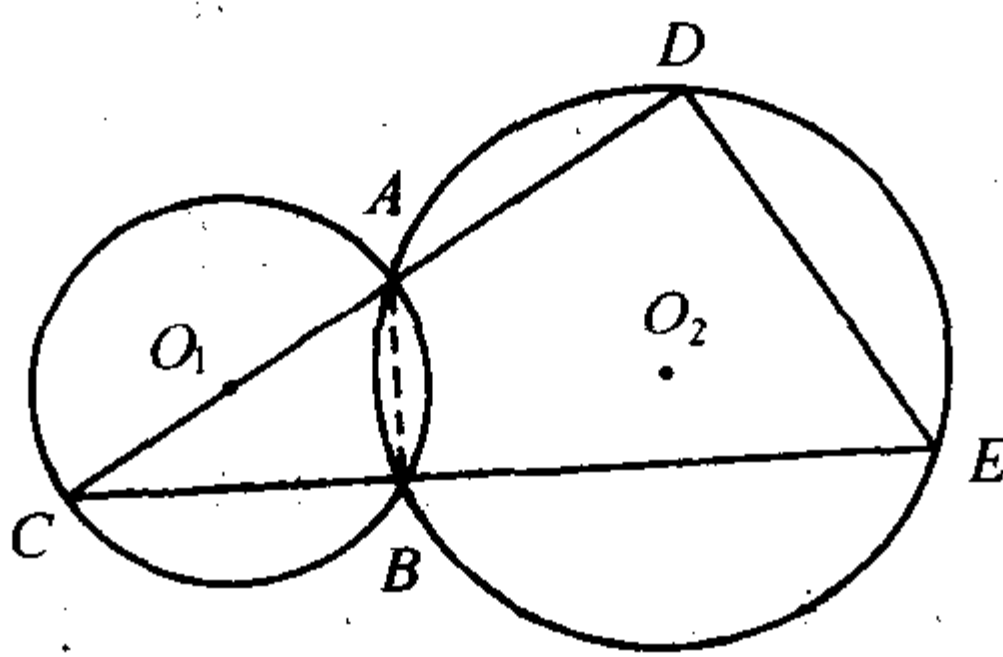


图 30-4

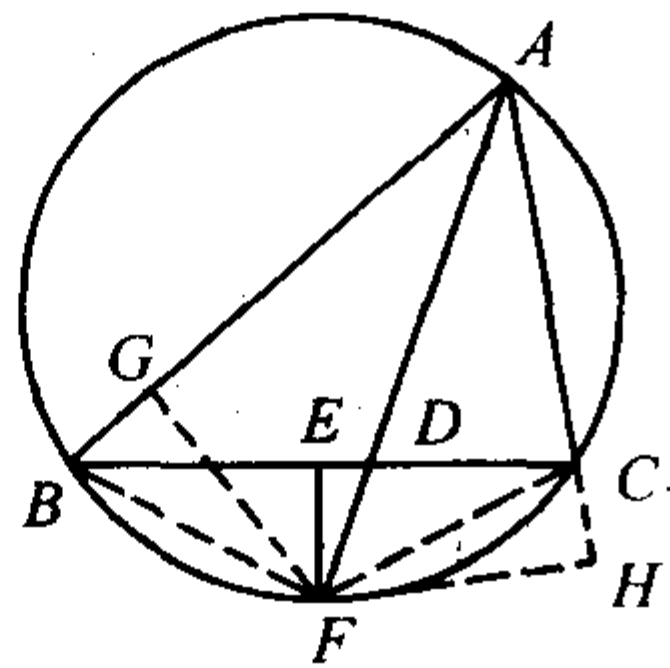


图 30-5



又 $\because FA$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore FG = FH$.

$\therefore \text{Rt}\triangle FBG \cong \text{Rt}\triangle FCH$. $\therefore \angle FBG = \angle FCH$.

$\therefore A, B, F, C$ 四点共圆.

例 5 如图30-6所示, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A , P 是 $\odot O_1$ 上一点, PT 切 $\odot O_2$ 于点 T , PA 交 $\odot O_2$ 于点 B , 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别是 R 和 r , 求证: $\frac{PA^2}{PT^2} = \frac{R}{R-r}$.

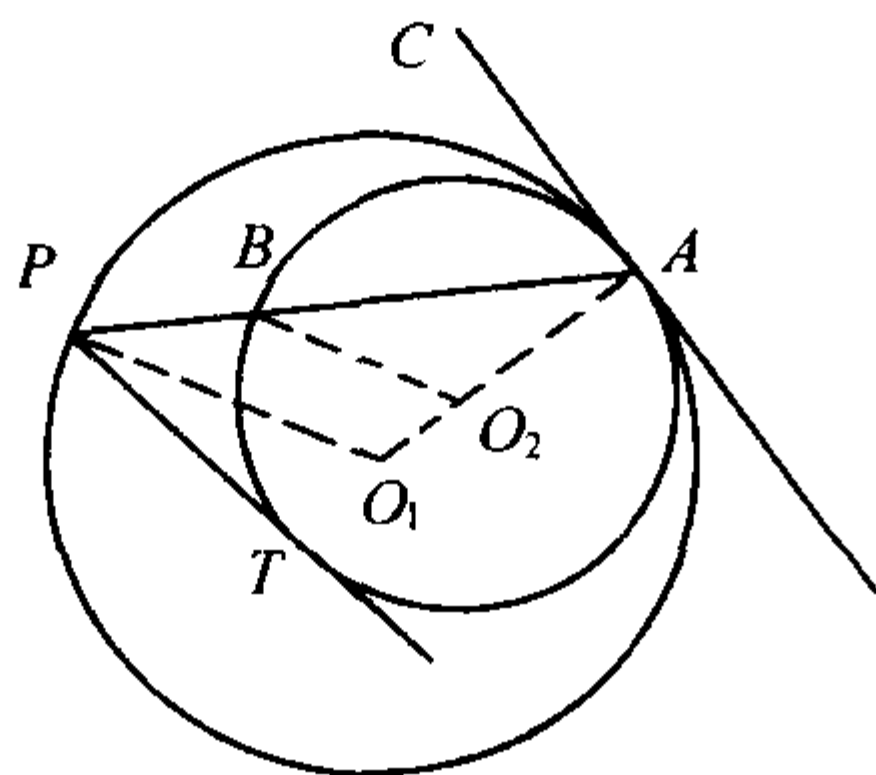


图 30-6

证明 $\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A ,

$\therefore A, O_1, O_2$ 三点共线. 连结 A, O_2, O_1 , 过点 A 作两圆的公切线 AC , 则 $\angle BO_2A = 2\angle PAC = \angle PO_1A$.

$\therefore BO_2 \parallel PO_1$.

$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{O_1A}{O_1O_2}$, 即 $\frac{PA}{PB} = \frac{R}{R-r}$.

由切割线定理得 $PT^2 = PB \cdot PA$.

$\therefore \frac{PA^2}{PT^2} = \frac{PA^2}{PA \cdot PB} = \frac{PA}{PB} = \frac{R}{R-r}$.

例 6 如图30-7所示, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 的乘积等于两组对边 AB, CD 与 AD, BC 的乘积的和, 求证: 四边形 $ABCD$ 内接于圆.

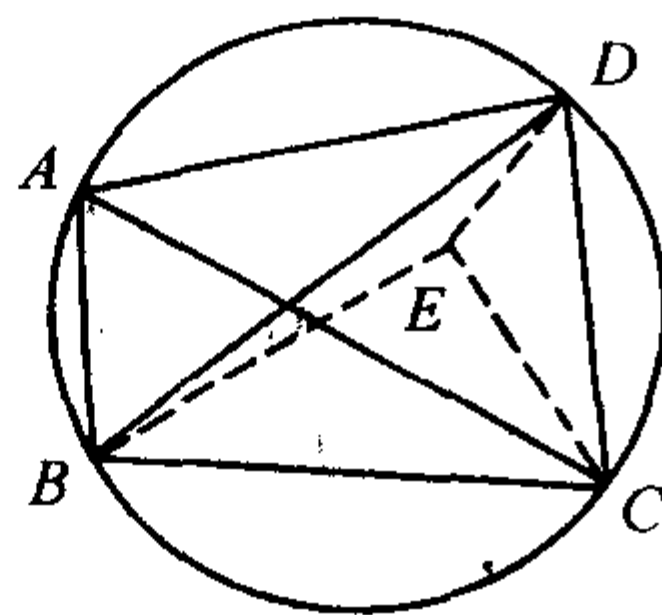


图 30-7

证明 作 $\angle ECD = \angle ACB$, $\angle EBC = \angle CAD$. 则 $\triangle BCE \sim \triangle ADC$.

$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}$, 即 $BE \cdot AC = AD \cdot BC$, ①

$\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, 又 $\because \angle DCE = \angle BCA$, $\therefore \triangle ACB \sim \triangle DCE$.

$\therefore \angle BAC = \angle EDC$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$. 则 $DE \cdot AC = AB \cdot DC$. ②

由①、②得 $(BE + DE) \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot DC$.

又 $\because BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot DC$, $\therefore BD = DE + EB$.

故点 E 在 BC 上, 即 $\angle EDC$ 与 $\angle BDC$ 重合.

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$.

$\therefore A, B, C, D$ 四点共圆.

例 7 如图30-8所示, $\odot O$ 过 $\triangle ABC$ 顶点 A, C , 且与 AB, BC 交于点 K, N (点 K 与点 N 不同), $\triangle ABC$ 外接圆和 $\triangle BKN$ 外接圆相交于点 B 和点 M , 求证: $BM \perp MO$.

证明 连结 OC, OK, MC, MK , 延长 BM 到点 G ,

$\because M, B, A, C$ 四点共圆,



N, K, A, C 四点共圆,

M, B, K, N 四点共圆,

$\therefore \angle GMC = \angle BAC = \angle BNK = \angle BMK$.

而 $\angle COK = 2\angle BAC = \angle GMC + \angle BMK = 180^\circ - \angle CMK$,

则 $\angle COK + \angle CMK = 180^\circ \therefore C, O, K, M$ 四点共圆.

又 $\because OC = OK$, 则 $\widehat{OC} = \widehat{OK}$. 则 $\angle OMC = \angle OMK$.

又 $\because \angle GMC = \angle BMK, \therefore \angle BMO = 90^\circ$.

即 $BM \perp MO$.

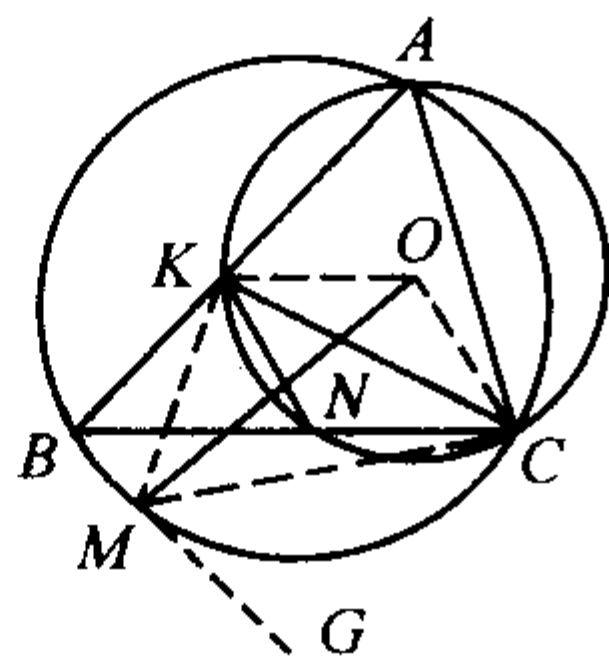


图 30-8

例 8 如图30-9所示, C 是半圆 ACB 上一点, $CD \perp AB$, $\odot O_1$ 分别与 CD, BC, DB 切于点 E, F, G , 求: $AC = AD + DE$.

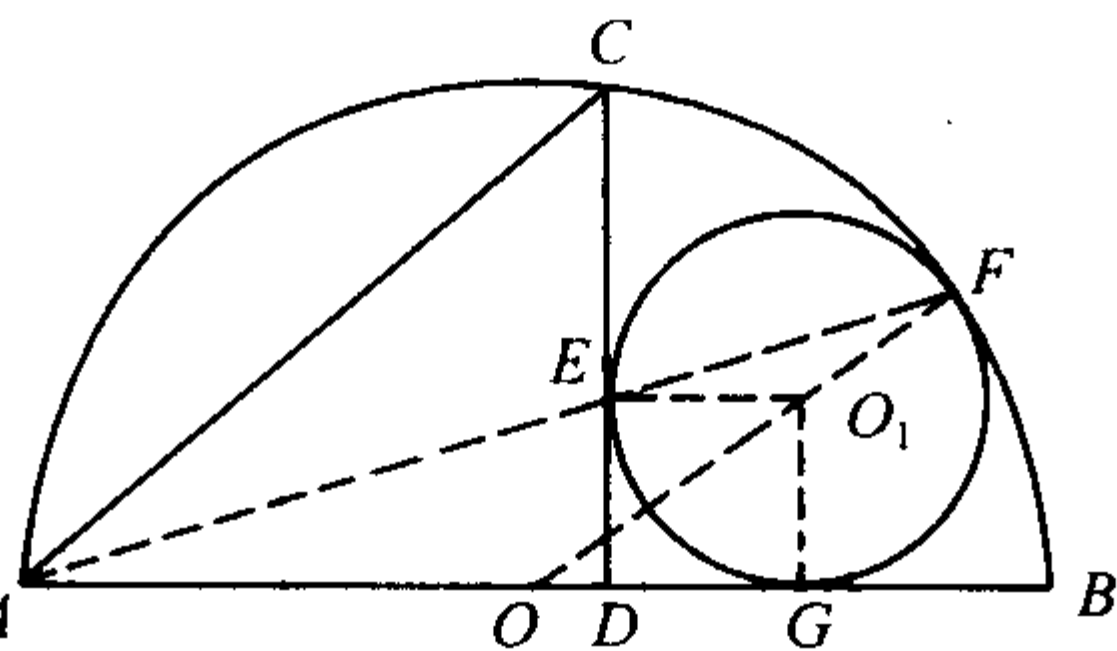


图 30-9

证明 连结 O_1O , 由 $\odot O_1$ 与半圆相切, 可知 $\odot O_1$ 过点 F , 连结 EO_1, AF ,

$\because CD$ 与 $\odot O_1$ 相切于点 E ,

$\therefore O_1E \perp CD$. 又 $\because CD \perp AB, \therefore O_1E \parallel AB, \therefore \angle EO_1F = \angle AOF$.

又 $\because AO = OF, EO_1 = O_1F, \therefore \triangle EO_1F \sim \triangle AOF$.

$\therefore \angle FEO_1 = \angle FOA, \therefore A, E, F$ 三点共线.

又 $\because AG$ 是 $\odot O_1$ 的切线, $\therefore AG^2 = AE \cdot AF$.

$\because AB$ 是半圆的直径, $CD \perp AB, \therefore CD$ 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高.

故 $AC^2 = AD \cdot AB$.

又 $\because \angle AFB = \angle CDB = 90^\circ$, 即 $\angle AFB + \angle CDB = 180^\circ$,

$\therefore E, F, B, D$ 四点共圆.

$\therefore AE \cdot AF = AD \cdot AB$.

$\therefore AG^2 = AC^2$. 即 $AG = AC$.

又 $\because DE = DG$,

$\therefore AG = AD + DG = AD + DE$.

$\therefore AC = AD + DE$.

例 9 如图30-10所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 以 AB 为直径的圆与 AB 边的高 CC' 及其延长线交于点 M, N , 以 AC 为直径的圆与 AC 边的高 BB' 及其延长线交于点 P, Q , 求证: M, N, P, Q 四点共圆.

证法一 连结 AN, AP ,

$\because NC' \perp AB$ 于 $C', PB' \perp AC$ 于 B' ,

$\therefore AN^2 = AC' \cdot AB, AP^2 = AB' \cdot AC$.



又 $\because \text{Rt}\triangle ABB' \sim \text{Rt}\triangle ACC'$, $\therefore AC' \cdot AB = AB' \cdot AC$.
 $\therefore AN' = AP^2$, 即 $AN = AP$. 又 $\because AB \perp MN$, $\therefore AM = AN$.

同理 $AP = AQ$. 又 $\because AN = AP$,
 $\therefore AM = AP = AN = AQ$, 即 M, N, P, Q 在以 A 为圆心、以 $AM = R$ 为半径的圆上.

证法二 设 BB' 与 CC' 相交于点 H , 如图 30-11 所示, 则点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 连结 AH 并延长交 BC 于点 D .

$\because AB, AC$ 分别是两圆的直径,

\therefore 点 D 在两圆上, 即两圆交于点 D .

则 $HM \cdot HN = HA \cdot HD$. $HP \cdot HQ = HA \cdot HD$.

$\therefore HM \cdot HN = HP \cdot HQ$.

$\therefore M, N, P, Q$ 四点共圆.

例 10 如图 30-12 所示, 直线上接顺序有 4 个点 A, B, C, D , 且 $AB:BC:CD = 2:1:3$, 分别以 AC, BD 为直径作 $\odot O_1, \odot O_2$, 两圆相交于点 E, F , 求 $ED:EA$ 的值.

解法一 连结 EB, EC , 过点 C 作 CG 垂直于 BE 交 AE, BE 于点 G, H .

$\because DE \perp BE$, $\therefore DE \parallel CG$.

$\because AB:BC:CD = 2:1:3$, $\therefore AC = CD$.

则 $AG = GE$, $CH:DE = BC:BD = 1:4$.

$CG:DE = AC:AD = 1:2$.

$\therefore CH:CG = 1:2$. 即 H 是 CG 的中点.

$\therefore EB$ 垂直平分 CG . 又 $\because \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle GEC$ 为等腰直角三角形, 且 $\angle ECG = 45^\circ$.

$\therefore ED:EA = 2CG:2EG = CG:EG = \sqrt{2}$.

解法二 连结 EF 交 AD 于点 H , 连结 EO_1, EB, EC, EO_2 , 如图 30-13 所示, 则 $EF \perp O_1O_2$.

设 $BC = 2$,

则 $AO_1 = \frac{1}{2}AC = 3, O_2D = \frac{1}{2}BD = 4$.

$O_2H + O_1H = O_1O_2 = AD - AO_1 - O_2D = 5$. ①

$O_2H^2 - O_1H^2 = (O_2E^2 - EH^2) - (O_1E^2 - EH^2) = O_2E^2 - O_1E^2 = 7$. ②

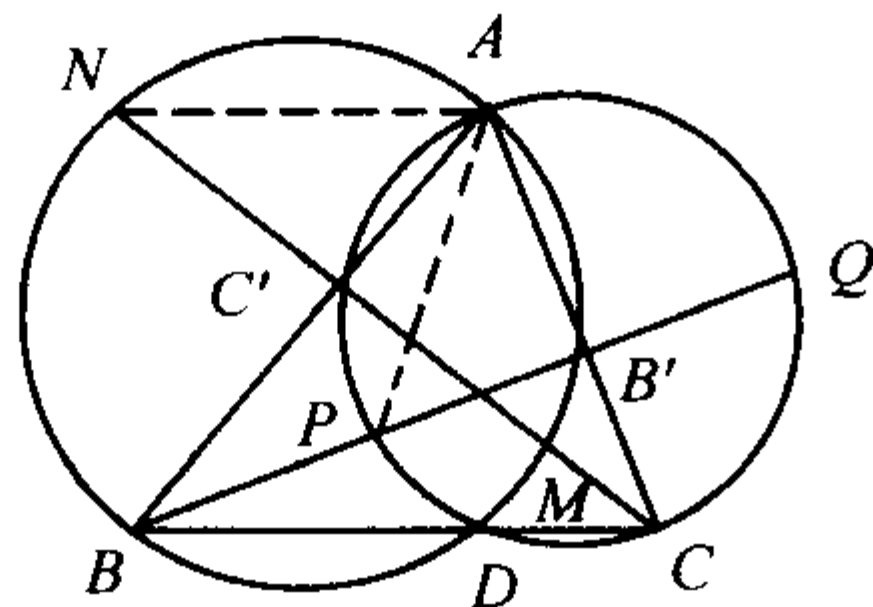


图 30-10

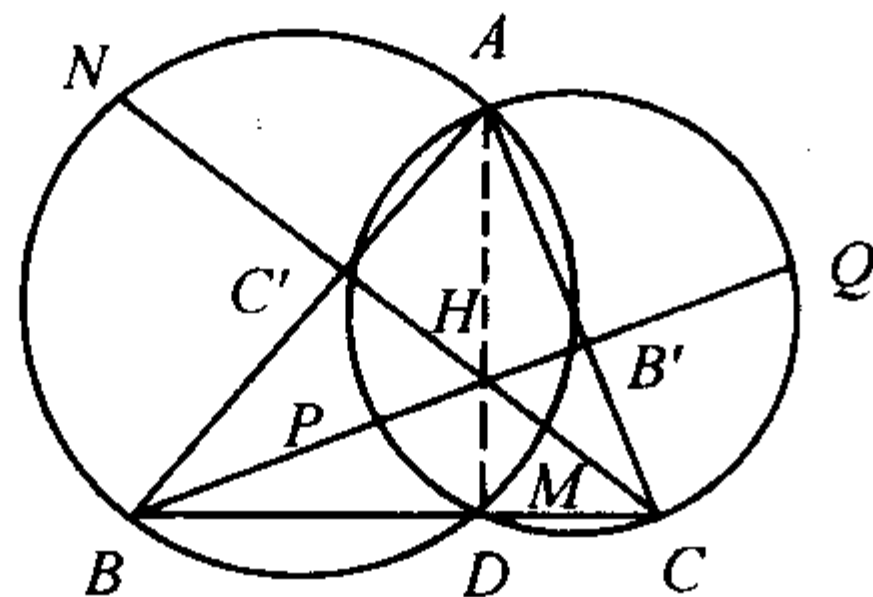


图 30-11

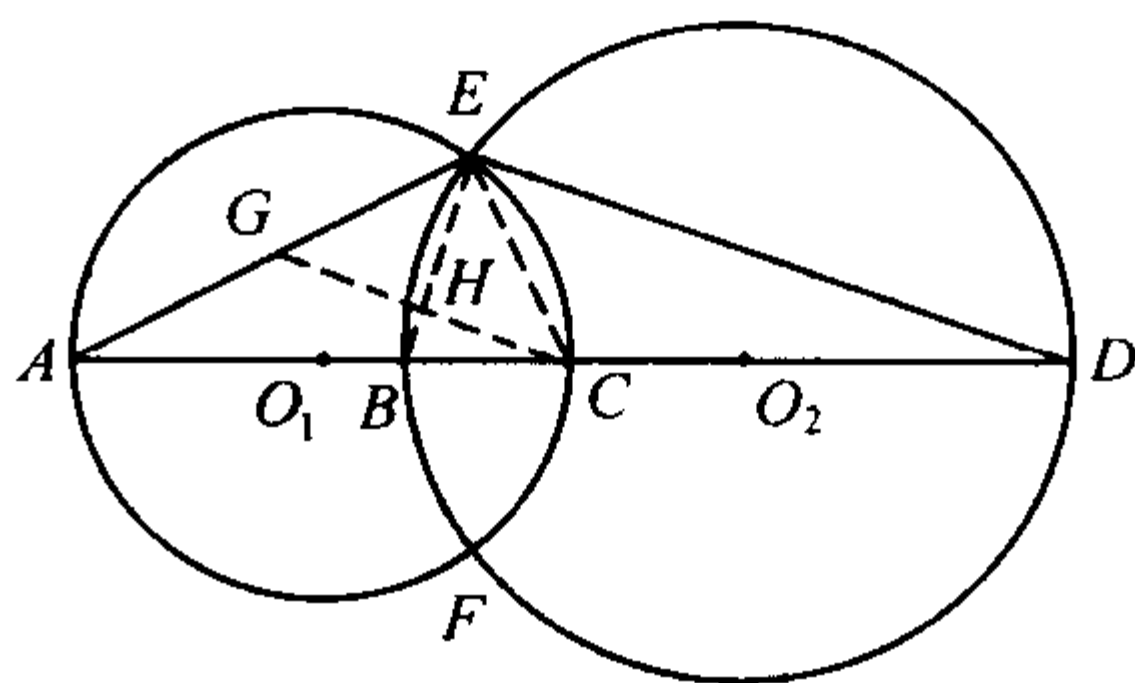


图 30-12

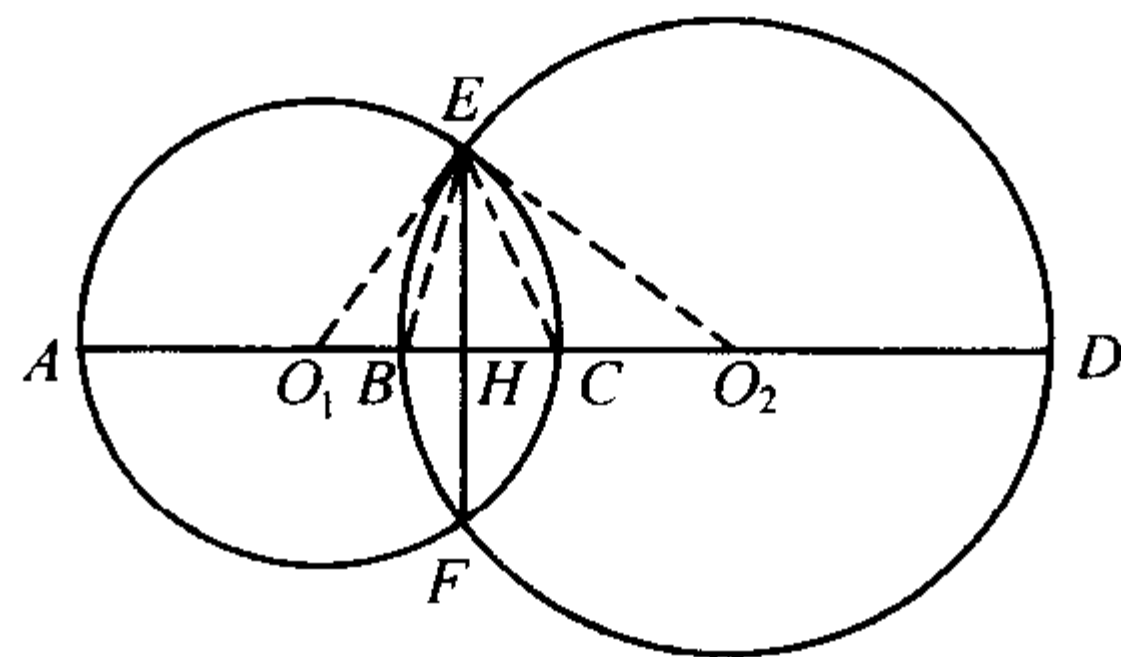


图 30-13



由①、②可解得 $O_2H = \frac{16}{5}, O_1H = \frac{9}{5}$.

在 $Rt\triangle EBD$ 中, $ED^2 = DH \times DB = \left(4 + \frac{16}{5}\right) \times 8 = 8 \times \frac{36}{5}$.

在 $Rt\triangle EAC$ 中, $EA^2 = AH \times AC = \left(3 + \frac{9}{5}\right) \times 6 = 6 \times \frac{24}{5}$.

$\therefore ED^2 : EA^2 = 2$, 即 $ED : EA = \sqrt{2}$.

例 11 (1) 如图 30-14 所示, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A, B , O_1A 交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 D , O_2A 交 $\odot O_1$ 于点 E , 交 $\odot O_2$ 于点 F , 求证: CE, BA, FD 三线共点.

证明 延长 CE, FD 交于点 P , 连结 PA, DE, BC, BF ,

$\because AC, AF$ 为直径, $\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$.

即 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

$\therefore C, B, F$ 三点共线,

P, E, A, D 四点共圆,

A, B, F, D 四点共圆,

E, C, F, D 四点共圆.

$\therefore \angle PAD = \angle PED = \angle CFD = \angle BFD$.

又 $\because \angle DAB + \angle BFD = 180^\circ, \angle PAD + \angle DAB = 180^\circ$.

$\therefore P, A, B$ 三点共线.

又 $\because P$ 为 CE 与 FD 的交点, $\therefore CE, BA, FD$ 三线共点.

(2) 如图 30-15 所示, 已知 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, BE, CF 为 AC, BA 边上的高, 自垂足 E, F 分别作 AB, AC 的垂线, 垂足为 G, H , EG 与 FH 相交于点 K , 求证: A, K, O 三点共线.

证明 连结 AK, AO, GH, EF, OB ,

$\because E, F, G, H$ 是垂足,

$\therefore B, C, E, F$ 四点共圆, E, F, G, H 四点共圆, A, G, K, H 四点共圆.

则 $\angle GAK = \angle GHK = \angle GEF = 90^\circ - \angle GFE$.

又 $\because \angle GFE = \angle BCE, \therefore \angle GAK = 90^\circ - \angle BCE$.

又 $\because \angle AOB = 2\angle BCE$,

则 $\angle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle BCE) = 90^\circ - \angle BCE$.

$\therefore \angle GAK = \angle BAO$.

则 AK 与 AO 重合. $\therefore A, K, O$ 三点共线.

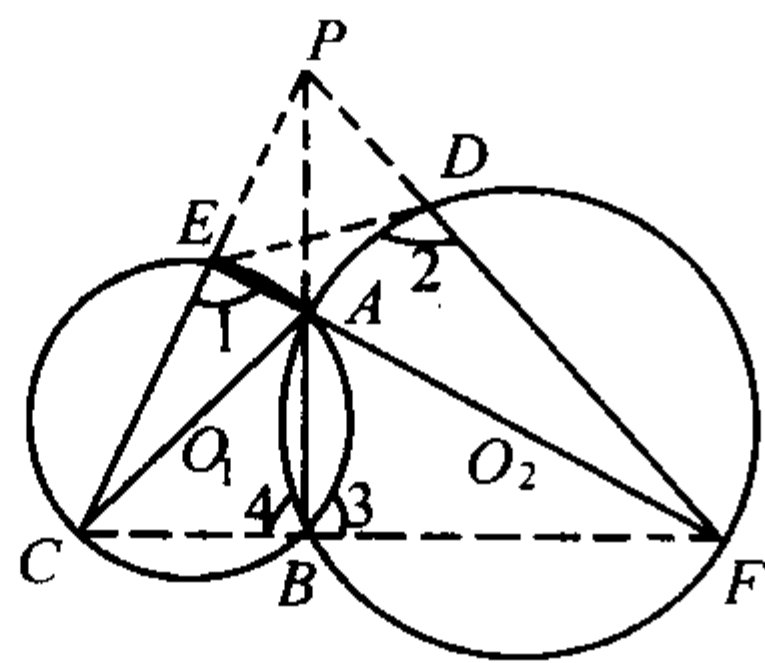


图 30-14

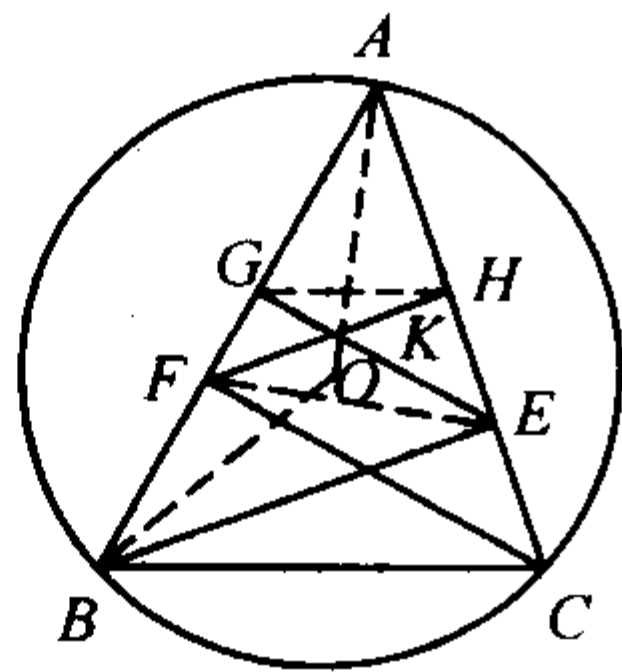


图 30-15



例 12 如图30-16所示, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A , 半径分别为 r_1 和 r_2 , PB 和 PC 分别为两圆的切线, B, C 为切点, $PB:PC = r_1:r_2$, PA 交 $\odot O_2$ 于点 E , 求证: $\triangle PAB \sim \triangle PEC$.

证法一 连结 $O_1A, O_1B, PO_1, PO_2, O_2A, O_2C$, 则 O_1, A, O_2 三点共线.

$$\because PB:PC = r_1:r_2,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle PBO_1 \sim \text{Rt}\triangle PCO_2.$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4, PO_1:PO_2 = r_1:r_2 = O_1A:O_2A.$$

于是 PA 为 $\angle O_1PO_2$ 的平分线, 即 $\angle 1 = \angle 2$.

连结 O_2E , 由 $\angle O_1AP = \angle O_2EP$ 得

$$\triangle O_1AP \sim \triangle O_2EP. \therefore PA:PE = r_1:r_2.$$

$$\text{即 } PA:PE = PB:PC.$$

又由 $\angle 3 = \angle 4, \angle 1 = \angle 2$, 可知 $\angle BPA = \angle CPE$.

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PEC.$$

证法二 如图 30-17 所示, 延长 BA 交 $\odot O_2$ 于点 B' , 过点 B' 作直线平行于 PB 交 PA 延长线于点 P' , 交 PC 于点 Q . 连结 O_1B, O_1A, O_2A, O_2B' , 则由 O_1, A, O_2 三点共线, 得 $\angle O_1AB = \angle O_2AB'$,

$$\therefore \angle O_1AB = \angle O_2B'A.$$

从而 $O_1B \parallel O_2B'$.

又 $\because BP \parallel B'P', O_1B \perp PB$,

$\therefore O_2B' \perp P'Q$. 即 $P'Q$ 为 $\odot O_2$ 的切线, B' 为切点.

$\because PB \parallel P'B', \triangle ABP \sim \triangle AB'P'$,

$$\therefore PB:P'B' = AB:AB'.$$

由 $\triangle AO_1B \sim \triangle AO_2B'$, 得 $AB:AB' = r_1:r_2$.

又 $\because PB:PC = r_1:r_2, \therefore PB:P'B' = BP:PC$.

从而 $P'B' = PC$. 又 $\because QC = QB', \therefore QP' = QP$.

设 QO_2 交 PA 于点 F , 则 FQ 为 $\angle Q$ 的平分线.

$$\therefore O_2F \perp AE, AF = FE.$$

从而 $P'F = FP$.

$$\therefore P'A = PE. \text{ 又 } \because \angle B'P'A = \angle CPE, P'B' = PC,$$

$$\therefore \triangle P'AB' \cong \triangle PEC. \therefore \triangle PAB \sim \triangle PEC.$$

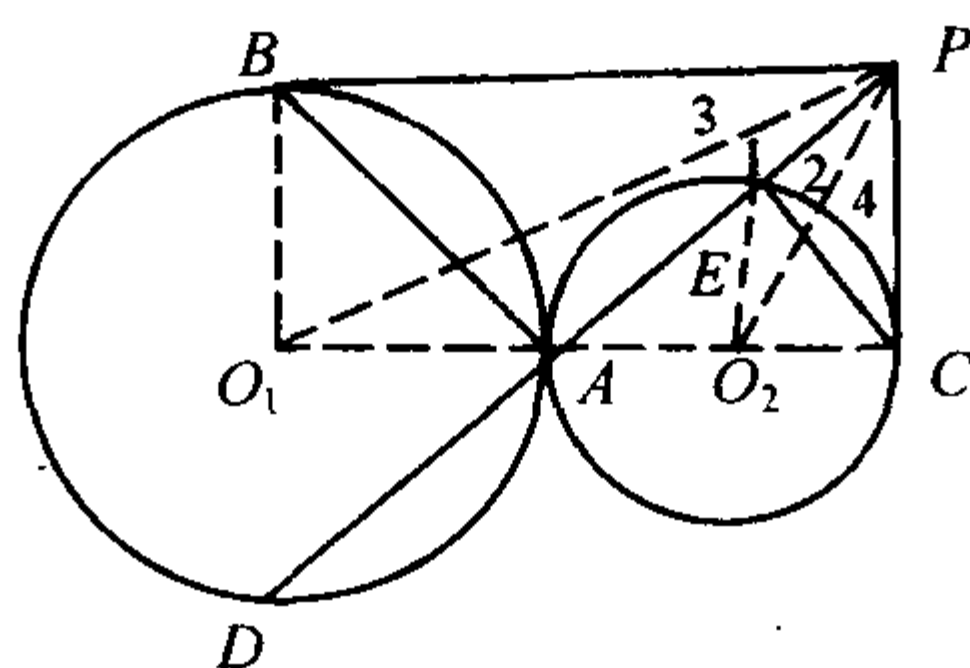


图 30-16

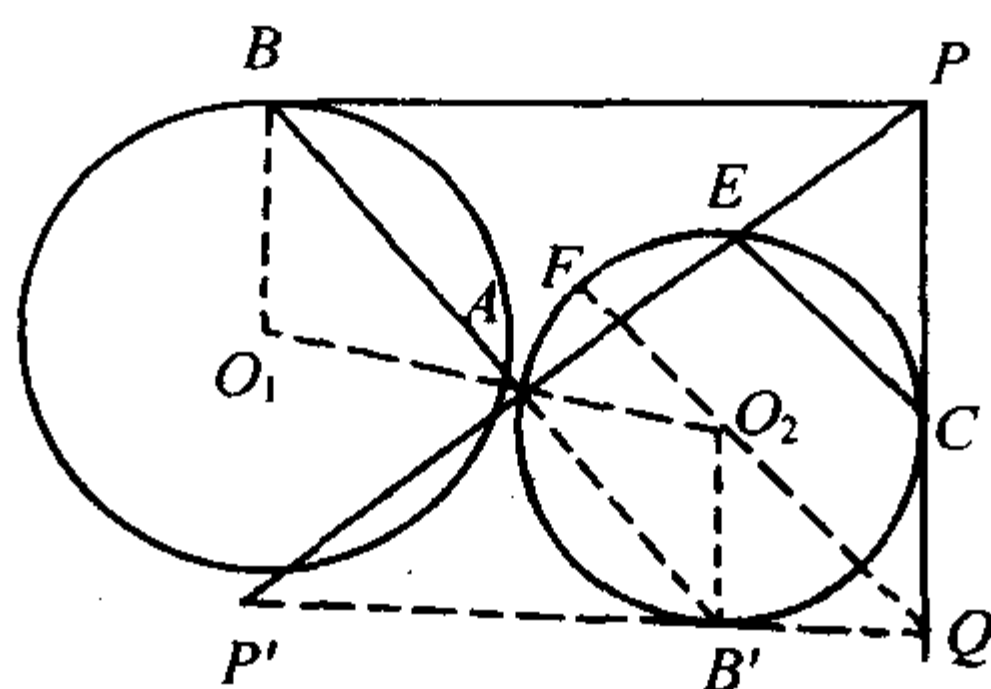


图 30-17



【能力训练】

1. 已知两圆外切, 圆心距为 15cm , 一条外公切线的长为 $10\sqrt{2}\text{cm}$, 求这两个圆的半径.
2. 如图 30-18, $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于 A , 过 A 的直线交 $\odot O$ 于 B , 交 $\odot O'$ 于 E , BC 切 $\odot O'$ 于 C , 交 $\odot O$ 于 D . 求证: $\angle CAE = \angle CAD$.
3. 如图 30-19, $\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 A, B 两点, 过点 A 的直线分别交 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 于 C, D 两点, E 是 CD 的中点, BE 交 $\odot O'$ 于 G , 延长 BE 交 $\odot O$ 于 F . 求证: $EF = EG$.
4. 如图 30-20 所示, A, B, C 三点共线, 点 O 在直线外, 点 O_1, O_2, O_3 分别为 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ 的外心, 求证: O_1, O_2, O_3, O 四点共圆.

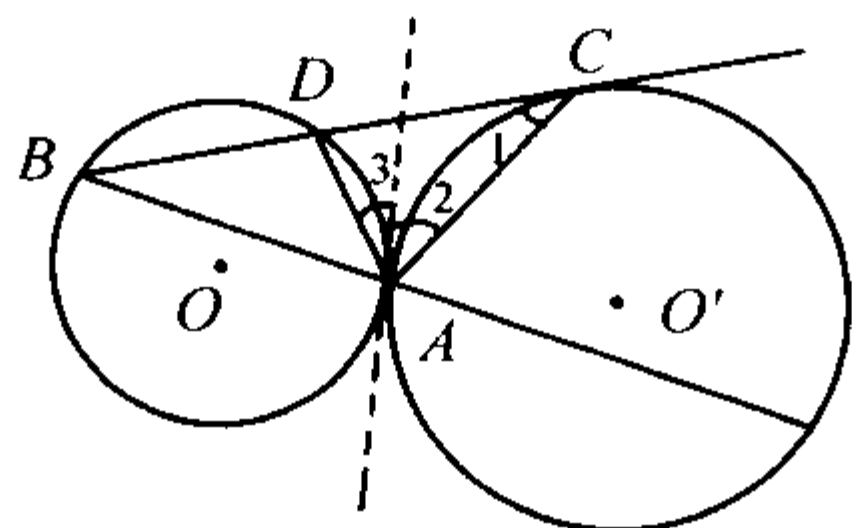


图 30-18

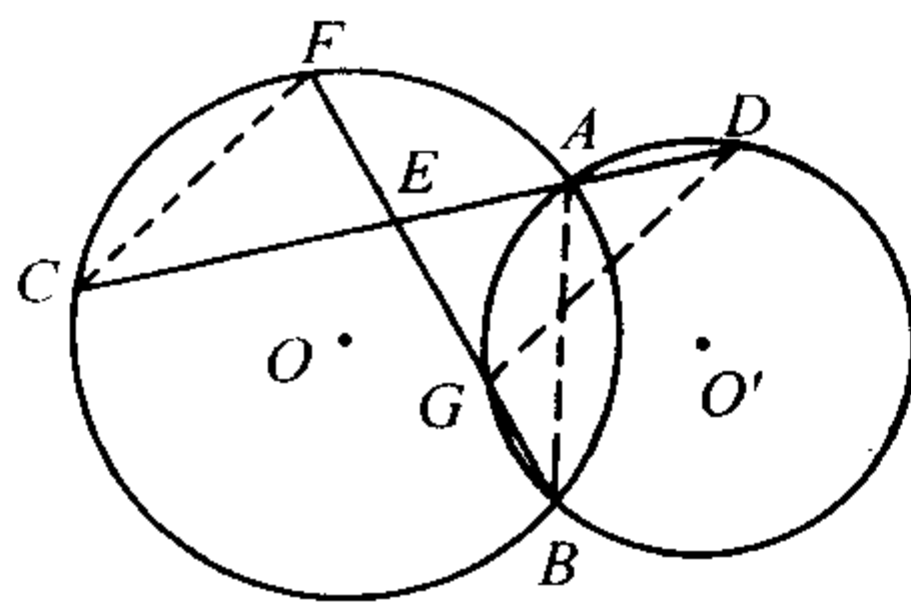


图 30-19

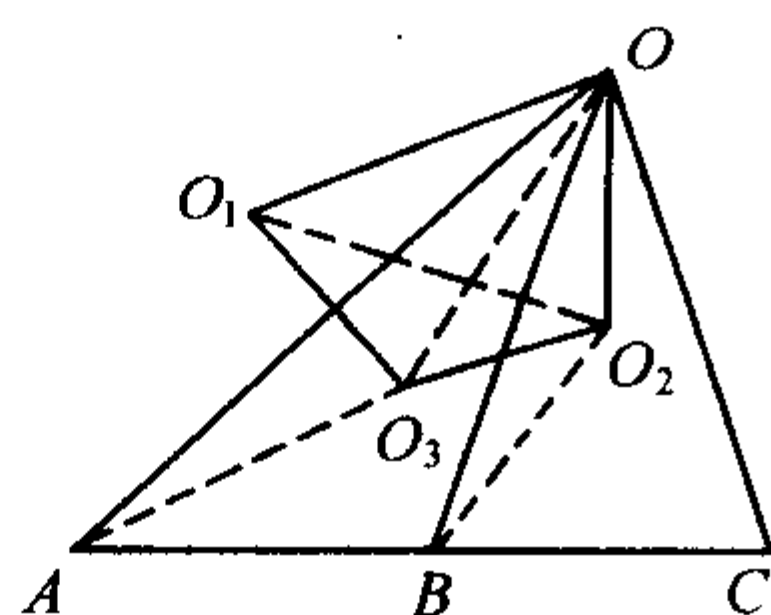


图 30-20

5. 如图 30-21 所示, 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, AB 边的中垂线交直线 AC 于点 E , AC 边的中垂线交直线 AB 于点 F , 求证: B, E, C, O, F 五点共圆.
6. 如图 30-22 所示, 四边形 $ABCD$ 内接于圆, 另一圆的圆心 O 在 AB 上且与其余三边相切. 求证: $AD + BC = AB$.
7. 如图 30-23 所示, 在正方形 $ABCD$ 中, M 为 AB 边上一点, N 为 BC 边上一点, 并且 $BM = BN$, 自点 B 作 $BP \perp CM$, 垂足为点 P , 求证: $DP \perp PN$.

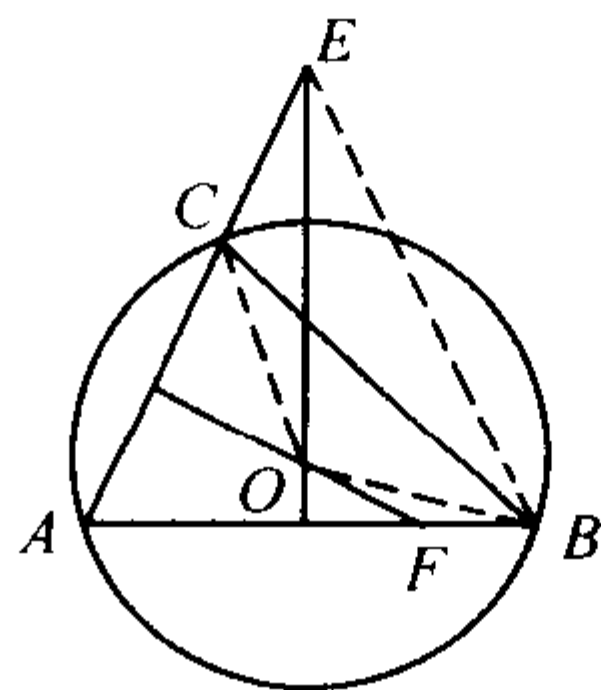


图 30-21

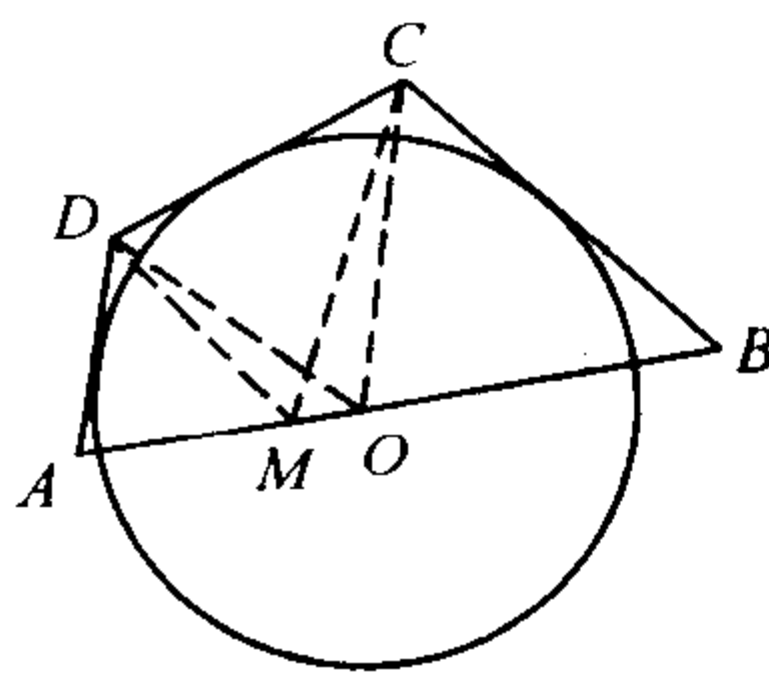


图 30-22

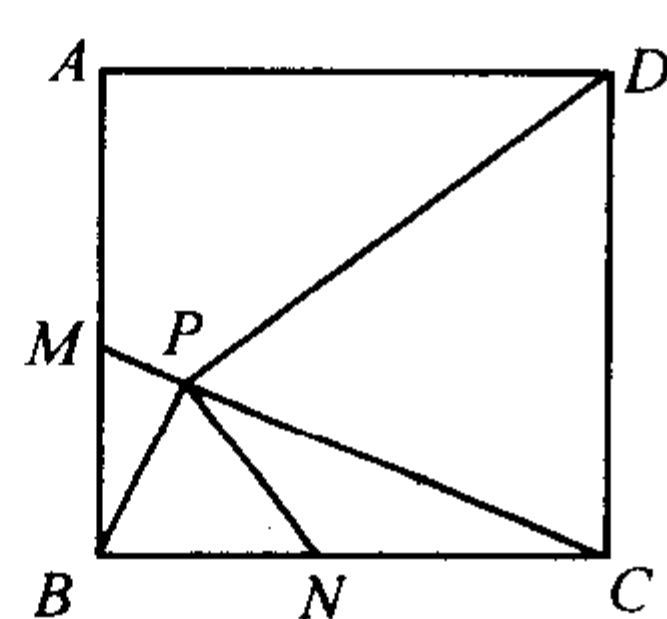


图 30-23

8. 如图 30-24 所示, 已知 $\angle ACE = \angle CDE = 90^\circ$, 点 B 在 CE 上, $CA = CB = CD$, 过 A, C, D 三点的圆交 AB 于点 F , 求证: F 为 $\triangle CDE$ 的内心.



9. 如图 30-25, $\triangle ABC$ 内接 $\odot O$, $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $BC = 3 + \sqrt{3}$, 动圆 $\odot O'$ 内切 $\odot O$ 于点 A , 且与 AB 边交于 D , 与 AC 边交于 E , 过 A 作两圆公切线交 DE 延长线于 P . (1) 求 AB, AC 的长; (2) 设 $DE = x$, $PE = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

10. 如图 30-26 所示, 在定线段 AB 上选取点 P , 并在 AB 的同一侧选取点 X 和 Y , 使 $XA \perp AB$, $YB \perp BA$, 连结 XY , 并作 $PN \perp XY$, N 是垂足, 求证: 不管如何选取点 P, X, Y , 只要 $AX \cdot BY = AP \cdot BP$, 那么线段 AB 上一定有一个定点 Q , 使得 QN 的长度为定值.

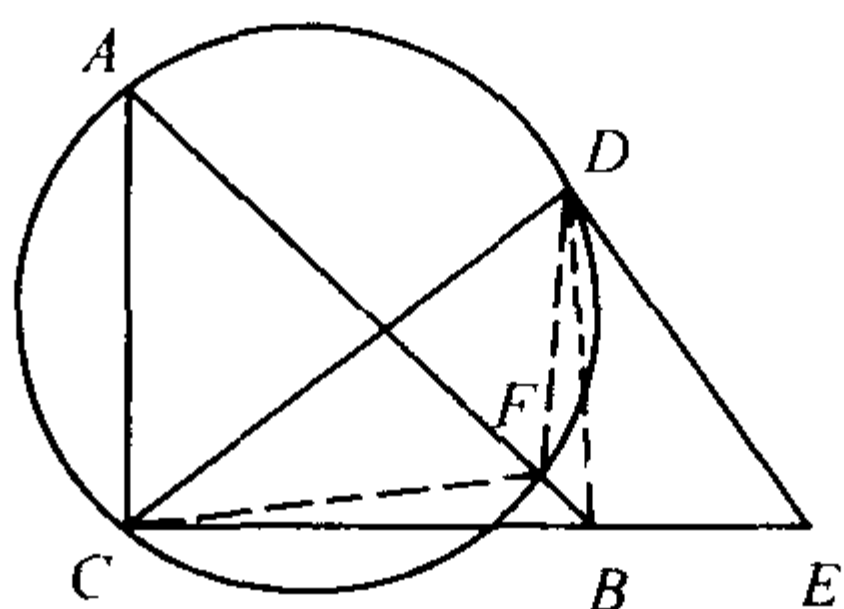


图 30-24

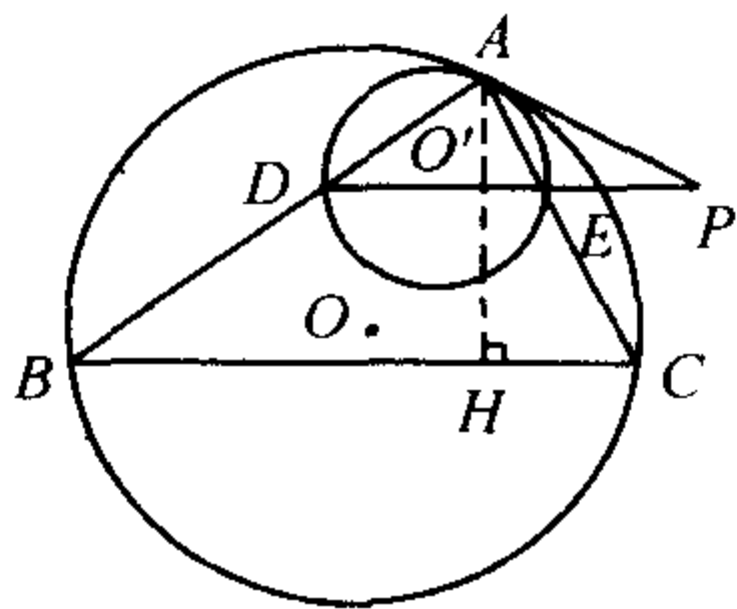


图 30-25

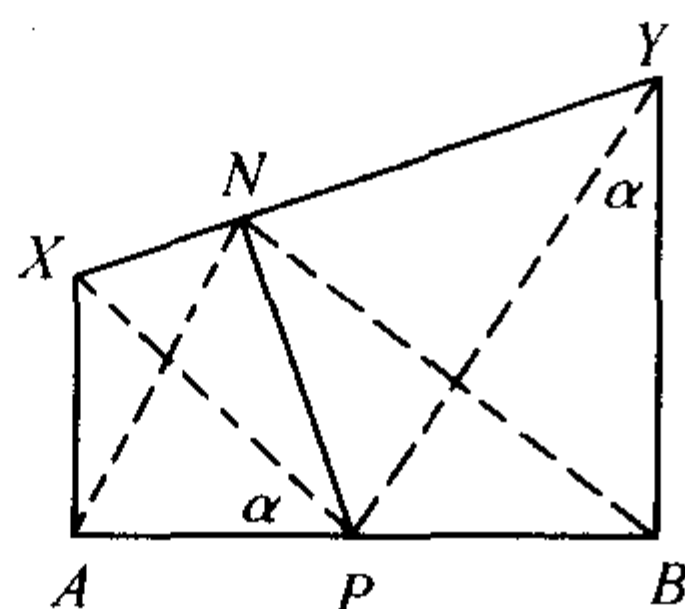


图 30-26

11. 如图 30-27 所示, 已知 $\angle YOX$ 的两边上, 分别有定点 A, B 和 C, D , $\angle ADB = 90^\circ$, M 为 AB 的中点, 且 $OC \cdot OD = OM^2 - AM^2$, 求证 $\tan \angle BAD \cdot \tan \angle BAC$ 为定值.

12. 如图 30-28 所示, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 P , 过 $\odot O_1$ 上的一点 B 作 $\odot O_1$ 的切线, 交 $\odot O_2$ 于点 C, D , 直线 BP 交 $\odot O_2$ 于点 A .

(1) 求证: $\angle CBP = \angle ADP$; (2) 求证: $AD^2 + BC \cdot BD = AB^2$;

(3) 设 $\odot O_1$ 的半径为 r , $\odot O_2$ 的半径为 R , 若 $BP = 2$, $AD = 4\sqrt{3}$, 求 $\frac{r}{R}$ 的值.

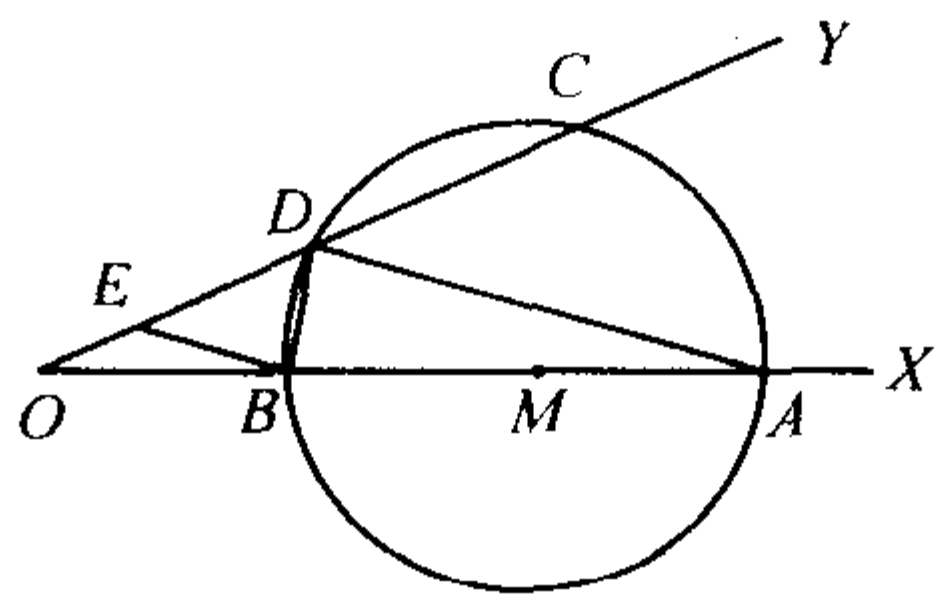


图 30-27

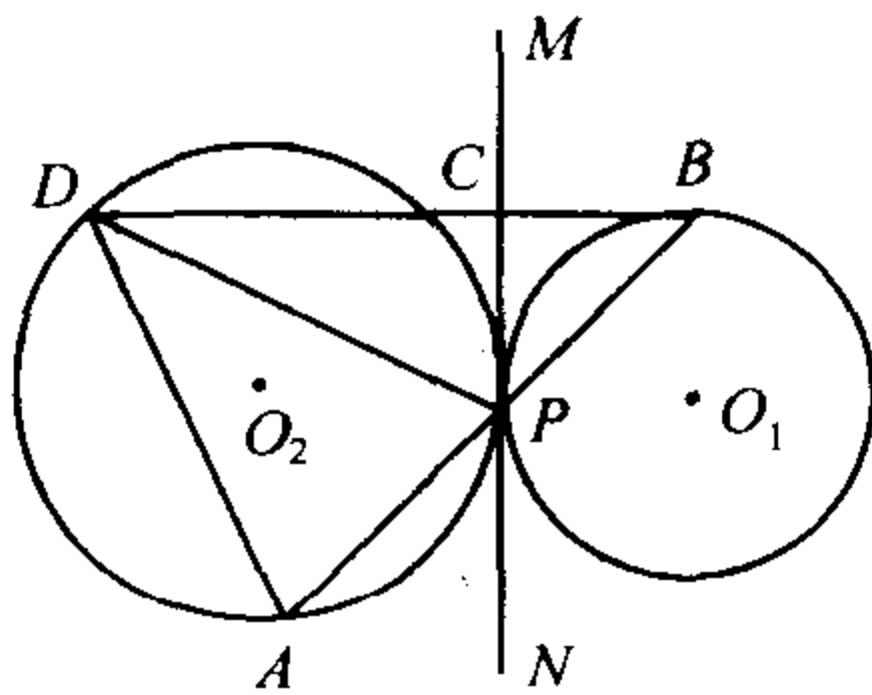


图 30-28

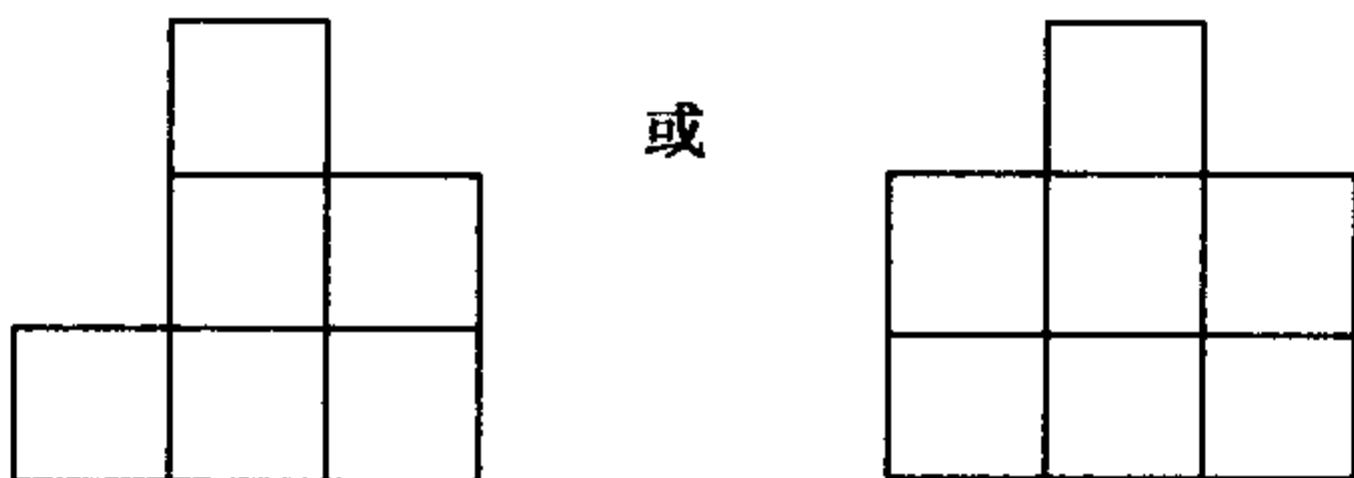


附录 参考答案

一、丰富的图形世界

1. B 2. D 3. 100

4. 结合俯视图和左视图, 可得 $x=1$ 或 2 ; $y=3$, 所以主视图有两种, 如下图

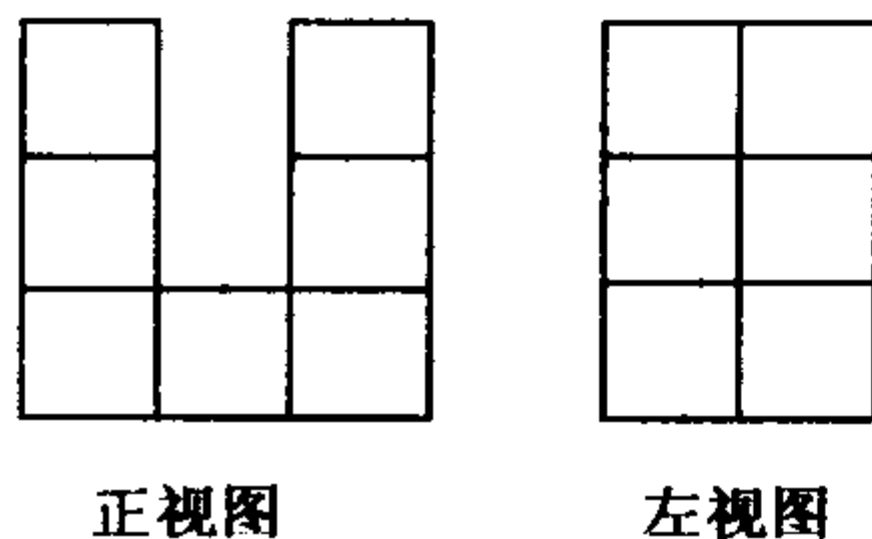


5. 21 6. 2

7. 因为有 9 个小方块, 共有 $6 \times 9 = 54$ 个小方块表面, 如果我们根据图形一个一个去数, 很容易数错, 不如用排除法将一些表面重合的小方块数去掉. 从原图看清有三层, 第一层与第二层有 3 对重合小方块表面, 第二层和第三层有 1 对重合的小方块表面; 从侧面看有两层, 两层中有 3 对重合的小方块表面; 从前向后也有三层, 同样有 4 对重合的小方块表面, 于是总共有 11 对重合的小方块表面, 所以没有重合的小方块表面有 $54 - 11 \times 2 = 32$ (个).

8. 不包括第二行的三个小正方形时, 第二行可数出 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 个长方形, 第三行也可数出 15 个长方形. 第二行与第三行联在一起也可数出 15 个长方形. 包括第一行时, 每一短行有 $3 + 2 + 1 = 6$ 个, 共有 3 行, 共有 $3 \times 6 = 18$ 个小长方形, 共计 $45 + 18 = 63$ 个.

9.



(第 9 题)

10. 显然三角形可分为尖向上与尖向下两大类, 两类中三角形的个数相等, 尖向上的三角形又可分为 6 类:

最大的三角形 1 个 (即 $\triangle ABC$);

第二大的三角形有 $1 + 2 = 3$ (个);

第三大的三角形有 $1 + 2 + 3 = 6$ (个);



第四大的三角形有 $1+2+3+4=10$ (个);

第五大的三角形有 $1+2+3+4+5=15$ (个);

最小的三角形有 $1+2+3+4+5+6+3=24$ (个).

计算数是有规律的.当然,要注重在 $\triangle ABC$ 外面还有三个最小的尖向上的三角形(左、右、下各一个),所以最小的三角形不是21个,而是24个.

于是尖各上的三角形共 $1+3+6+10+15+24=59$ (个)

图中共有三角形 $59 \times 2 = 118$ (个).

11.(1)1条直线最多将平面分成2个部分;2条直线最多将平面分成4个部分;3条直线最多将平面分成7个部分;现在添上第4条直线,它与前面的3条直线最多有3个交点,这3个交点将第4条直线分成4段,其中第一段原来所在平面部分一分为二.如图1-23所示,所以,4条直线最多将平面分成 $7+4=11$ 个部分.

完全类似地,5条直线最多将平面分成 $11+5=16$ 个部分;6条直线最多将平面分成 $16+6=22$ 个部分;7条直线最多将平面分成 $22+7=29$ 个部分;8条直线最多将平面分成 $29+8=37$ 个部分.

所以,8条直线最多将平面分成37个部分.

一般地, n 条直线最多将平面分成 $2+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 部分.

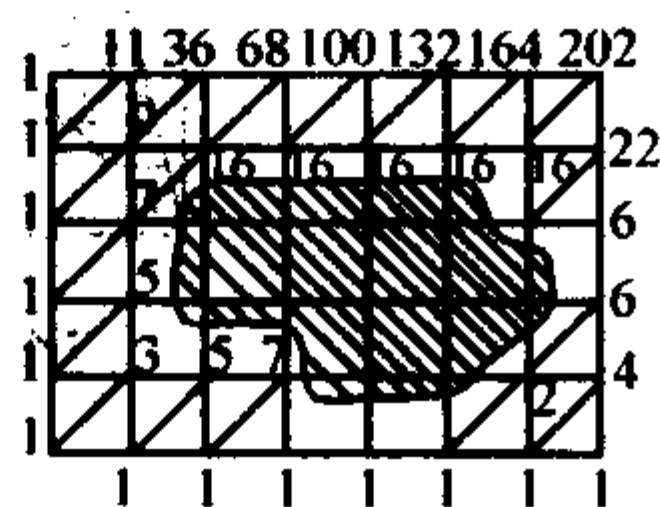
(2)1个圆最多能把平面分成2个部分;2个圆最多能把平面分成4个部分;3个圆最多能把平面分成8个部分,现在加入第4个圆,为使分成的部分最多,第4个圆必须与前面3个圆都有两个交点,如图1-24所示.因此得6个交点,这6个交点将第4个圆的圆周分成6段圆弧,而每一段弧将原来的部分一分为二,即增加了一个部分,于是4个圆最多将平面分成 $8+6=14$ 个部分.

同样的道理,5个圆最多将平面分成 $14+8=22$ 个部分.

所以5个圆最多将平面分成22个部分.

用上面类似的方法,我们可计算出 n 个圆最多分平面的部分数为 $2+1 \times 2+2 \times 2+\cdots+(n-1) \times 2=2[1+2+\cdots+(n-1)]=n^2-n+2$.

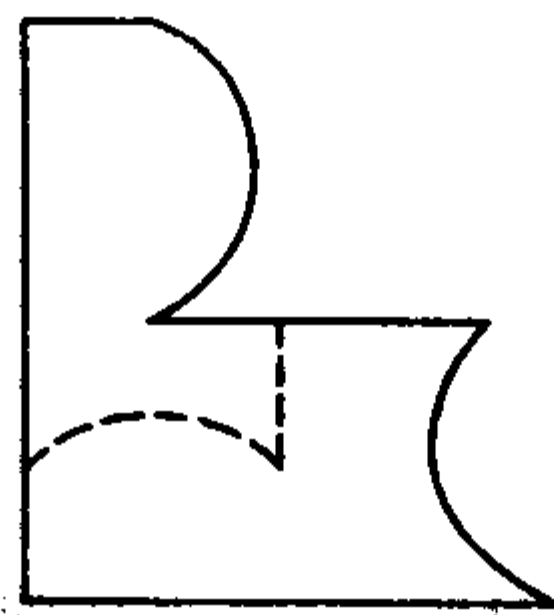
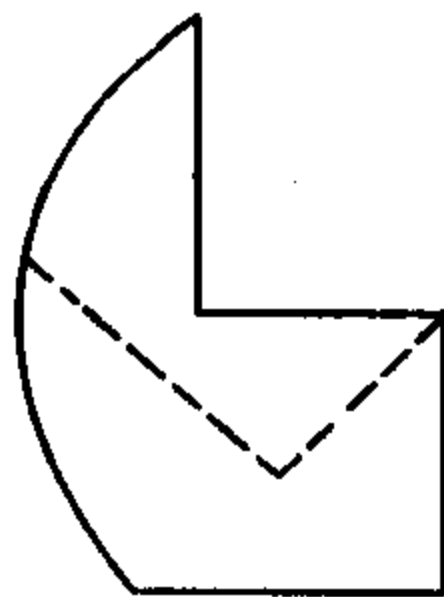
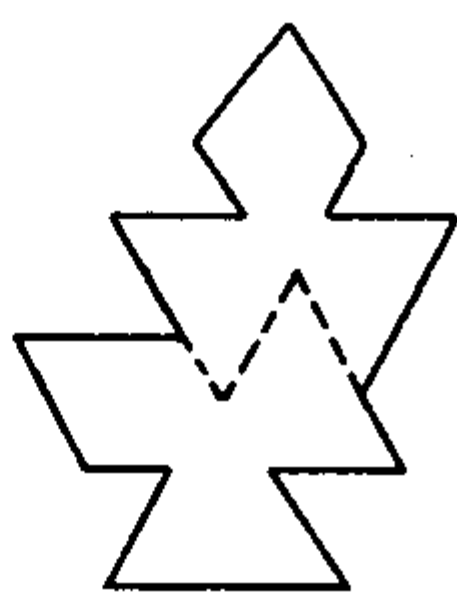
12.如图所示,在每一点标上从A到达该点的路径的总数,标数满足 $x=a+b+c$,则结果如图所示,共有202条路径.



二、图形的拼拼与凑凑

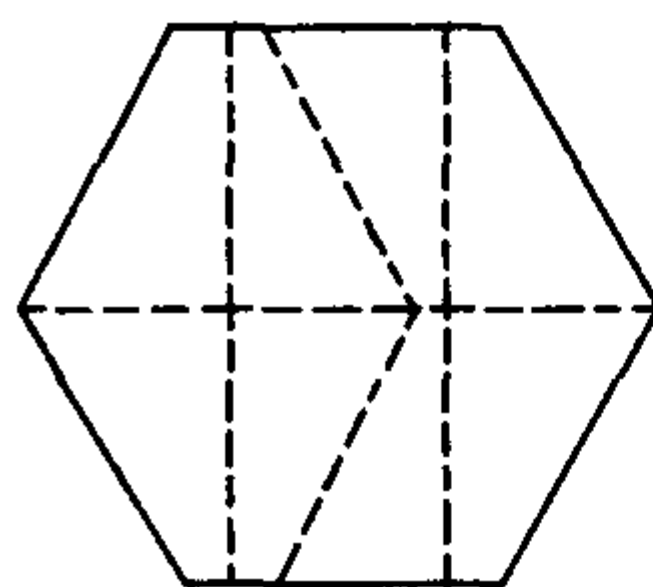
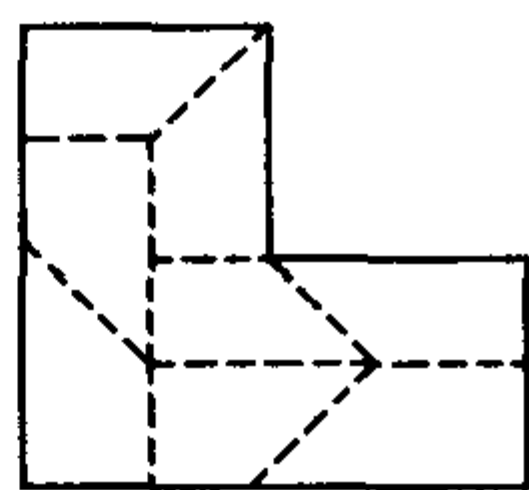
(第12题图)

1.



(第1题图)

2.

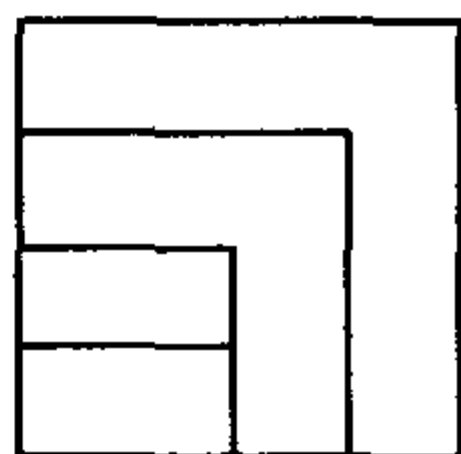
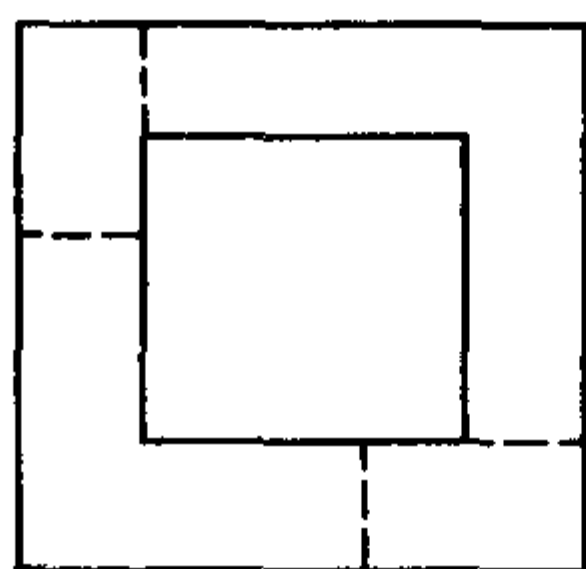


(第2题图)

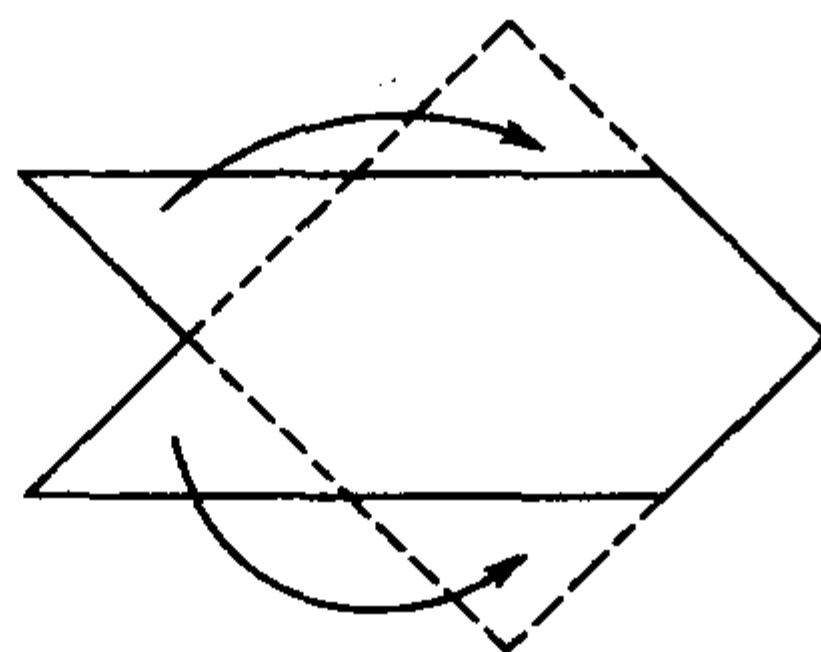
3. 如图所示, 面积为 100 平方厘米.

4. 1000 千米

5. 沿虚线锯开, 拼成下右图的正方形, 面积为 16 平方厘米.

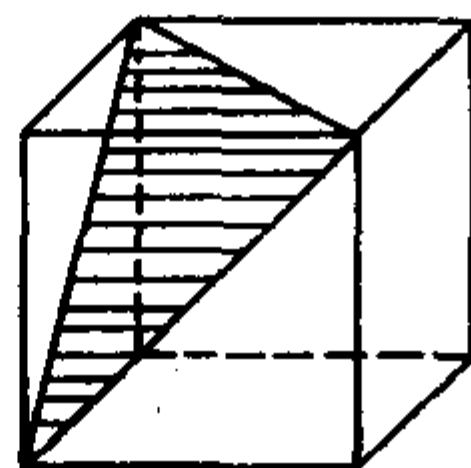


(第5题图)

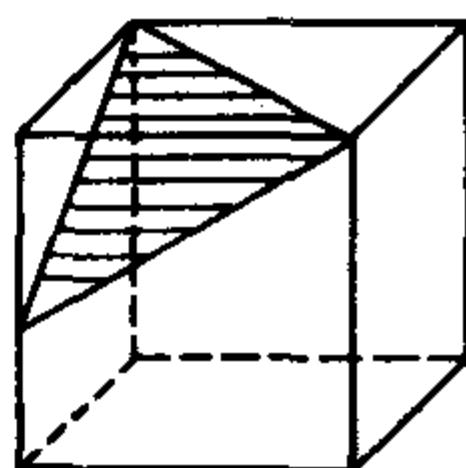


(第3题图)

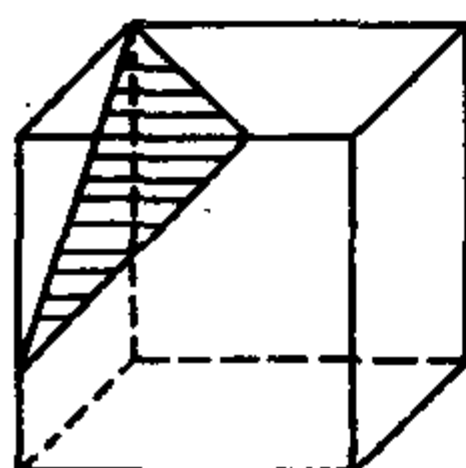
6.



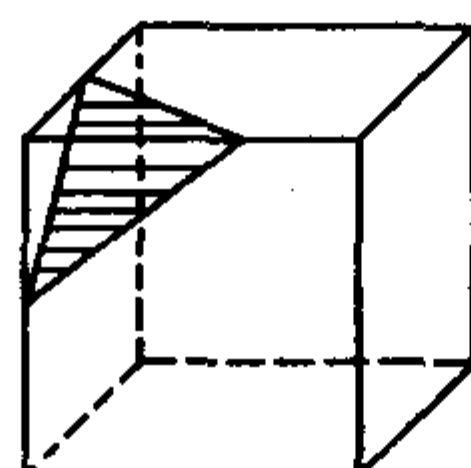
7个角



8个角



9个角



10个角

(第6题图)

7. 一面有颜色的有 $2 \times 2 = 4$ 个;

两面有颜色的有 $6 \times 2 = 12$ 个;

三面有颜色的有 $4 \times 2 = 8$ 个;

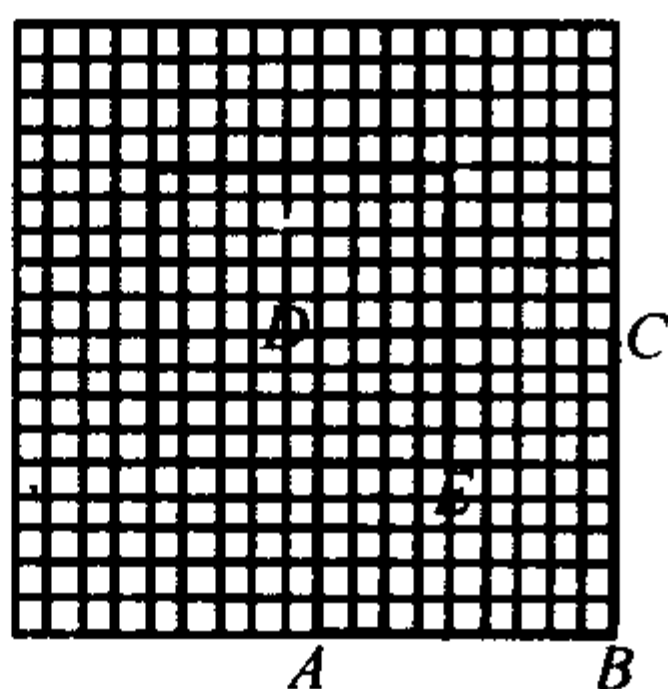
8. 最短的是 0.146 米.

9. 糊成的是一个十二面体, 顶点数是 20, 棱数是 30.

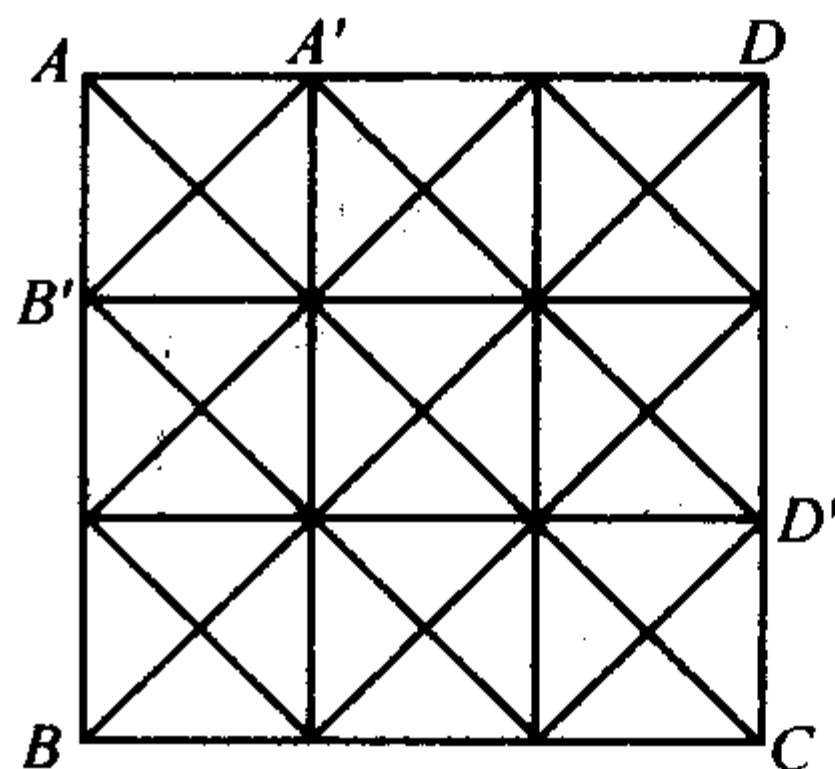
10. 106 个.

11. 如图所示, 9×9 的小正方形用右下角的点 E 代表. 点 E 只能在棋盘右下角的正方形 $ABCD$ (包括边界) 的格点上, 且正方形 $ABCD$ 中的每一个格点都可作为 9×9 小正方形的点 E , 且只能作为一个 9×9 小正方形的点 E . 因此, 正方形 $ABCD$ 上格点有 $10 \times 10 = 100$ (个), 即为 9×9 小正方形的个数.

12. 如图所示, 两边分别与 AB, BC 平行的长方形有 9 个 1×1 , 12 个 1×2 , 12 个 2×1 , 4 个 2×2 , 6 个 3×1 , 4 个 3×2 , 1 个 3×3 ($a \times b$ 表示长为 a , 宽为 b), 两边分别与 $A'B', B'C'$ 平行的长方形有 12 个 1×1 (注意这里长度单位与前面的不同), 16 个 2×1 , 5 个 2×2 , 8 个 3×1 , 4 个 3×2 , 4 个 4×1 , 2 个 4×2 .



(第 11 题图)



(第 12 题图)

共有

$$(9 + 12 + 4 + 6 + 4 + 1) + (12 + 16 + 5 + 8 + 4 + 4 + 2) = 87(\text{个}).$$

三、有理数及其运算

1. A

$$\because |a| \geq 0, \therefore |a| + 1 \geq 1.$$

2. C

由图知, $0 < a - b < a + cb < a - cb < a + b$,

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} > 1 > \frac{a+cb}{a-cb}, \text{故 A 不成立;}$$

$$\text{又 } \frac{a+b}{a-b} > 1 > \frac{a-b}{a+b}, \text{故 B、D 不成立,}$$

3. A

$$\therefore \frac{3.14}{3.13} = \frac{314}{313} = 1 \frac{1}{313}, \frac{2.14}{2.13} = \frac{214}{213} = 1 \frac{1}{213}, \frac{1.14}{1.13} = \frac{114}{113} = 1 \frac{1}{113},$$

$$\therefore 1 \frac{1}{133} < 1 \frac{1}{213} < 1 \frac{1}{113}.$$

$$\text{又 } \because 3.12 > 2.12 > 1.12,$$

$$\therefore \frac{3.14}{3.13} \div 3.12 < \frac{2.14}{2.13} \div 2.12 < \frac{1.14}{1.13} \div 1.12.$$

$$\therefore a, b, c \text{ 均负}, \therefore a > b > c.$$

4. C

$$\therefore b < 0,$$

$$\therefore -b > 0 \Rightarrow a + b < a - b, \therefore a + b < a < a - b.$$

$$5. -\frac{1}{a}$$

$$\therefore -1 < a < 0, \therefore 0 < -a < 1 < -\frac{1}{a}$$

$$\therefore 0 < b < c < 1, \therefore c - b < 1, c + a < 1 \Rightarrow -\frac{1}{a} \text{ 最大.}$$

6. $-x$

$$\therefore x < 0, \therefore |x| = -x, \therefore \frac{||x| - 2x|}{3} = \frac{|-x - 2x|}{3} = |x| = -x.$$



$$7. b < a + \frac{1}{b} < a < \frac{1}{a}.$$

$$\therefore b < a < 1, \text{ 且 } ab < 0,$$

$$\therefore b < 0 < a < 1, a + b < -1,$$

$$\therefore 0 < a < 1, \frac{1}{a} > 1, -1 < \frac{1}{b} < 0,$$

$$\therefore b < -1 \Rightarrow \frac{1}{b} < a.$$

$$\therefore b < a + \frac{1}{b}, \therefore b < a + \frac{1}{b} < a < \frac{1}{a}.$$

8. 2

\therefore 三个有理数之积为负, \therefore 三数一负二正或三负.

\therefore 三个有理数之和为正, \therefore 三数只有一负二正.

$$\therefore x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = 1, \therefore x^{2004} - 2x^{2003} + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

$$\begin{aligned} 9. \text{ 原式} &= \left(\frac{2^2}{1 \times 2} + \frac{1^2}{1 \times 2} \right) + \left(\frac{3^2}{2 \times 3} + \frac{2^2}{2 \times 3} \right) + \left(\frac{4^2}{3 \times 4} + \frac{3^2}{3 \times 4} \right) + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{2004^2}{2003 \times 2004} + \frac{2003^2}{2003 \times 2004} \right) \\ &= \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{2004}{2003} + \frac{2003}{2004} \right) \\ &= 2 \times 2003 + \frac{2003}{2004} = 4006 \frac{2003}{2004}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \text{ 设 } \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} + \frac{1}{69} &= m, \frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} = n, \text{ 则原式} = \\ \left(n + \frac{1}{69} \right) \left(m - \frac{1}{69} \right) - mn &= mn + \frac{1}{69}(m - n) - mn - \frac{1}{69^2} = \frac{1}{69} \left(\frac{1}{69} + \frac{1}{29} \right) - \frac{1}{69^2} = \frac{1}{69 \times 29} = \frac{1}{2001}. \end{aligned}$$

11. 由于 $abc > 0$, 且 $a + b + c = 0$, 所以 a, b, c 中两负一正, $x = -1$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} = \frac{-b}{b} + \frac{-a}{a} + \frac{-c}{c} = -3. \end{aligned}$$

于是 $x^{20} - 2xy + y^3 = -86$.

12. 原方程等价于 $|x - a| = b \pm 3$, 再次去绝对值, 得到四个根: $x = a \pm (b \pm 3)$, 即 $x_1 = a + b + 3$; $x_2 = a + b - 3$; $x_3 = a - b + 3$; $x_4 = a - b - 3$. 由于有且只有三个不相等的根, 所以其中必有两个相等, 但是显然 $x_1 \neq x_2, x_3 \neq x_4$, 只能是 $x_1 = x_3$ 或者 $x_1 = x_4$ 或者 $x_2 = x_3$ 或者 $x_2 = x_4$, 这样得出 b 的可能值为 0, -3, 3, 但是当 $b = 0$ 时, 原方程即是 $|x - a| = 3$, 只有两个解; 当 $b = -3$ 时, 原方程为 $|x - a| = 0$, 只有一个解, 所以只能是 $b = 3$.

四、一元一次方程

1. D

2. C



当 $x \leq 0$ 时, 原方程化为: $2 - x = 2 - x \Rightarrow x \leq 0$ 的一切实数都是解;

当 $0 < x \leq 2$ 时, 原方程化为: $2 - x = 2 + x \Rightarrow x = 0$ (舍);

当 $x > 2$ 时, 原方程化为: $x - 2 = 2 + x \Rightarrow x$ 无解.

$\therefore x \leq 0$ 时, 方程有解, 此时 $|2 - x| = 2 - x$.

3. C

设 100 份黄铜里含有 x 份铜, 则含有锌 $100 - x$, 再设混合物里含有黄铜 $100a$, 青铜 $100b$, 那么黄铜里含有 ax 份铜和 $a(100 - x)$ 份锌; 青铜里含有 $80b$ 份铜、 $4b$ 份锌和 $16b$ 份锡. 有如下等量关系:

$$\frac{ax + 80b}{74} = \frac{a(100 - x) + 4b}{16} = \frac{16b}{10} \Rightarrow 10ax = 384b, 10a(100 - x) = 216b.$$

$$\therefore x : 100 - x = 384 : 216 = 16 : 9.$$

4. A

设裁缝做童装、裤子、上衣各 1 件所用时间分别为 $t, 2t, 3t$, 完成任务用 x 天, 有等量关系:

$$x[2t + 3 \times (2t) + 4 \times (3t)] = 14t + 10 \times (2t) + 2 \times (3t) \Rightarrow x \times (20t) = 40t \Rightarrow x = 2.$$

\therefore 完成任务需要 2 天.

5. 1

$$\because ||x - 2| - 1| = a, \therefore |x - 2| = 1 \pm a \text{ (且 } a \geq 0, 1 - a \geq 0).$$

$$(1) \text{ 当 } |x - 2| = 1 + a \text{ 时, } x - 2 = \pm(1 + a) \Rightarrow x = 3 + a \text{ 或 } x = 1 - a;$$

$$(2) \text{ 当 } |x - 2| = 1 - a \text{ 时, } x - 2 = \pm(1 - a) \Rightarrow x = 3 - a \text{ 或 } x = 1 + a.$$

$\because 3 + a, 1 - a, 3 - a, 1 + a$ 均为整数, $\therefore a$ 也为整数.

又 $\because 0 \leq a \leq 1, \therefore a = 0, 1$.

经试验, 可知 $a = 1$ 时有三个整数解.

6. 0 或 -6

$$\because \text{方程 } 2x - [2 - (2b - 1)x] = a - 2 \text{ 的解 } x = \frac{a}{1 + 2b}, \text{ 方程 } (2b - 1)x + 3 = 7 - [(2 - b)x + 3] \text{ 的解为 } x = \frac{1}{b + 1}, \therefore \frac{1}{b + 1} = \frac{a}{1 + 2b} \Rightarrow a = \frac{1 + 2b}{b + 1} = 2 - \frac{1}{b + 1}.$$

$$\because a, b \text{ 是整数, } \therefore b + 1 = \pm 1 \Rightarrow b = 0 \text{ 或 } -2, a = 1 \text{ 或 } 3$$

7. 200, 100

设应取 12% 的盐水 x 克, 18% 的盐水 $300 - x$ 克. $12\%x + 18\%(300 - x) = 14\% \times 300 \Rightarrow x = 200$, $300 - x = 100$. \therefore 12% 的盐水取 200 克, 18% 的盐水取 100 克.

8. 30, 18

设甲缸内有水 x 桶, 乙缸内有水 $48 - x$ 桶. $2[x - (48 - x)] = 2(48 - x) - [x - (48 - x)]$
 $\Rightarrow x = 30, 48 - x = 18$. \therefore 原来甲缸有水 30 桶, 乙缸有水 18 桶.

9. 原方程变形为 $m(m + x) = n(n + x)$, 即 $(m - n)x = n^2 - m^2$.

当 $m \neq n$ 时, 方程有惟一解 $x = \frac{n^2 - m^2}{m - n} = -(n + m)$;

当 $m = n$ 时, 方程的解为全体实数.

$$10. \text{ 将原方程变形: } \frac{x}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{a} + \frac{x}{b} - \frac{c}{b} - \frac{a}{b} + \frac{x}{c} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = 3.$$



$$\begin{aligned} \text{整理得: } x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b} \right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) &= 3, x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \\ \left(\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} \right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right), x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \\ \frac{a+b+c}{c}, \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) x &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a+b+c) \end{aligned}$$

$$\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0, \therefore x = a + b + c.$$

11. 设大车倒车路程为 x , 则小车倒车路程为 $4x$, 因为小车正常时速为 90 千米, 所以大车正常时速 30 千米, 小车倒车时速为 18 千米, 大车倒车时速为 6 千米.

$$(1) \text{ 若大车倒车, 最后大车通过的时间为 } \frac{x}{6} + \frac{5x}{30} = \frac{x}{3};$$

$$(2) \text{ 若小车倒车, 最后小车通过的时间为 } \frac{4x}{18} + \frac{5x}{90} = \frac{5x}{18}. \because \frac{5x}{18} < \frac{1}{3}x, \therefore \text{ 小车倒车省时间.}$$

12. 设第一次甲倒入乙 x 升, 此时乙容器的浓度为 $\frac{x}{20}$;

第二次乙倒满甲, 其中倒入的纯酒精为 $\frac{x}{20} \cdot x$, 此时甲容器内的纯酒精为 $20 - x + \frac{x}{20} \cdot x$;

第三次甲回倒乙 $6\frac{2}{3}$ 升, 其中回倒的纯酒精为: $\frac{20 - x + \frac{x}{20} \cdot x}{20} \times 6\frac{2}{3} = \frac{20 - x + \frac{x}{20} \cdot x}{3}$, 此时甲容

器内还剩纯酒精: $20 - x + \frac{x}{20} \cdot x - \frac{20 - x + \frac{x}{20} \cdot x}{3} = 10 \Rightarrow \frac{2}{3}(20 - x + \frac{x}{20} \cdot x) = 10 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 = 0$
 $\Rightarrow x = 10. \therefore$ 第一次甲倒入乙 10 升.

五、二元一次方程组

1. B

将 $y = kx + b$ 代到 $y = (3k - 1)x + 2$ 中, 得 $(2k - 1)x = b - 2$.

$$\therefore k - \frac{1}{2} = 0, b - 2 = 0, \text{ 即 } k = \frac{1}{2}, b = 2. \text{ 故 } 2k + b^2 = 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 = 5.$$

2. B

由 $|x - 1| - y = 0$ 知 $y \geq 0$.

(1) 当 $x \leq -1$ 时, 原方程组化为

$$\begin{cases} -(x - 1) - y = 0, \\ -(x + 1) + y = 4, \end{cases} \text{ 整理得 } \begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = -5. \end{cases} \text{ 解得 } x = -2, y = 3;$$

(2) 当 $-1 < x \leq 1$ 时, 原方程组化为 $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 3, \end{cases}$ 无解;

(3) 当 $x > 1$ 时, 原方程组化为 $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3. \end{cases}$ 解得 $x = 2, y = 1$.

故方程组有两组解.

3. B



从个位数字为 0 起一一列举 $6=0+6=1+5=2+4=3+3=4+2=5+1$ 共有 6 种情况, 注意不要忽略数 60.

4. C

设全班 x 名学生, 共分 y 个苹果, 则
$$\begin{cases} 6x - 6 = y, \\ 5x + 5 = y. \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 11, \\ y = 60. \end{cases}$$

5. $a = -\frac{1}{13}, b = \frac{8}{13}$

6. $a = 2, b = -6, c = 5$

7. $x = 2, y = 0, p = 4$

相当于增加了方程 $x + y = 2$, 即组成三元一次方程组.

8. $x = \frac{85}{3}, y = -30$

9. (1) 1:2:3.

三个未知数由两个方程是解不出具体值的, 欲求的是 x, y, z 的比值, 故考虑只需求出三者间的

关系, 比如将 x, y 都用 z 表示出来. $\therefore \begin{cases} x - 2y = -z, \\ 7x + 4y = 5z. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{z}{3}, \\ y = \frac{2}{3}z. \end{cases}$

$\therefore x:y:z = \frac{z}{3}:\frac{2}{3}z:z = 1:2:3.$

(2) 1

将 z 先视为已知数, 把 x, y 都用 z 来表示, 得 $\begin{cases} x = 3z, \\ y = 2z, \end{cases}$ 代入所求式子.

10. (1) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ y = -2, \\ z = -3. \end{cases}$

观察方程组的特点, 将左右两边分别相加得, $(x + y + z)^2 = 36$, $\therefore x + y + z = \pm 6$ ④, ① \div ④得 $x = \pm 1$, ② \div ④得 $y = \pm 2$, ③ \div ④得 $z = \pm 3$.

(2) $\begin{cases} x = 8, \\ y = \frac{24}{5}, \\ z = 24. \end{cases}$

将方程组变形为 $\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{3}, \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{4}, \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{6}. \end{cases}$

进而利用分式 $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ 变形技巧将方程组变形为



$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} & \text{④} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} & \text{⑤} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} & \text{⑥} \end{cases}$$

11. (1) 在两个方程组中, ①、③是不含字母 a, b 的, 且两方程组同解, 满足①的 x, y 值同样能满足③, 故考虑打乱顺序, 由①、③组合成方程组, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 后代入②、④组合成的方程组, 转化为解关于 a, b 的方程组, $a=2, b=3$.

(2) 两方程组的 4 个方程中, 只有④不含字母, 显然不能像(1)题那样做, 又观察出①、③两方程均含 ay 这项, 加减消元后可直接得 $x=3$, 再代入④得 $y=4$, $\therefore a=1, b=5$.

(3) 同(2)小题, ①、③两方程组合消去 ay 项得 $x=2$, 再代入②④得关于 b, y 的方程组, $\therefore a=1, b=1$.

$$12. x=7, y=-3$$

方法 1, 由于 a 取任何值, 方程都有一个公共解, 故可设 a 为特殊值, 如 $a=0, a=1$, 得到两个关于 x, y 的方程, 解之.

方法 2, 将原方程整理得

$$a(x+2y-1) + (-3x-5y+6) = 0$$

是关于 a 的一元二次方程, 由于对任意 a 均成立, 即有“ $0x=0$ ”的形式, $\therefore x+2y-1=0$ 且 $-3x-5y+6=0$.

六、线段、角的有关计算

1. C

由已知 $AB=2AC$ 得 $AB>AC$, 又 $BC>AB-AC=AC$, 所以 AC 边为最短边.

又 $\because BC<AB+AC=3AC$,

则 $\triangle ABC$ 的周长 $n=AB+BC+AC<2AC+3AC+AC=6AC$, 即 $k=\frac{AC}{n}>\frac{1}{6}$,

又 $n=AB+AC+BC=3AC+BC>4AC$, 即 $k=\frac{AC}{n}<\frac{1}{4}$,

故 $\frac{1}{6}<k<\frac{1}{4}$.

2. D

记其中距离最远的两点为 A, B , 以 A 为左端点的线段中, 除 AB 外共有 97 条, 每条线段有一个中点, 共有互不重合的中点 97 个, 且每一个到 A 的距离都小于 $\frac{1}{2}AB$. 同样以 B 为右端点的线段, 除 AB 外也有 97 条, 每条线段有一个中点, 共有互不重合的中点 97 个, 所以共有 195 个中点. 应选 D.

3. C

设第一次互相垂直时分针转过 β 度, 时针已转 $\frac{\beta}{12}$ 度, 这时 $\beta - \frac{\beta}{12} = 90^\circ$, 则 $\beta = \frac{12 \times 90^\circ}{11}$.



若两针某时刻互相垂直,到下一次两针垂直时,分针转过 α 度,时针转 $\frac{\alpha}{12}$ 度,这时 $\alpha - \frac{\alpha}{12} = 180^\circ$,
 则 $\alpha = \frac{12 \times 180^\circ}{11}$.

又一昼夜分针转过的角度为 $24 \times 360^\circ$, 是 α 的 44 倍, 又 $\beta = \frac{\alpha}{2}$, 故一昼夜两针垂直次数为 44 次.

4. C

将图形沿直线 OM 对折, 得到与 P 重合的点 C .

将图形沿直线 ON 对折, 得到与 P 重合的点 D .

连结 CD 交 OM 于 A , 交 ON 于 B , $\triangle PAB$ 的周长 $= PA + PB + AB = CA + AB + BD = CD$.

在 OM 上任取一点 A' , 在 ON 上任取一点 B' , $\triangle PA'B'$ 的周长 $= PA' + A'B' + B'P = CA' + A'B' + BD > CD$.

故 $\triangle PAB$ 的周长最短.

易知 $\angle ACP + \angle BDP = \angle MON = 40^\circ$, $\angle CPD = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$,

且 $\angle ACP + \angle BDP = \angle APC + \angle BPD$,

$\therefore \angle APB = \angle CPD - \angle APC - \angle BPD = 140^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

5. 12

设最短边为 a , 最长边为 c , 另一边为 b , 则 $a + c = 8$.

$\therefore a = 1, c = 7$ 或 $a = 2, c = 6$ 或 $a = 3, c = 5$;

当 $a = 1, c = 7$ 时, $7 > b > 7 - 1 = 6$, 无解;

当 $a = 2, c = 6$ 时, $6 > b > 6 - 2 = 4$, 无解;

当 $a = 3, c = 5$ 时, $5 > b > 5 - 3 = 2$, $\therefore b = 4$.

故所求三角形的周长为 $3 + 4 + 5 = 12(\text{cm})$.

6. 8

已知的两条边长可能有下列三种情形:

(1) 3, 4; (2) 3, 5; (3) 4, 5;

当边长是情形(1)时, 设第三边边长为 x , 则 $1 < x < 7$, 因为 x 是整数, 且 $x \neq 3, 4$, 所以 $x = 2, 5$,

6. 这时, 相应的周长是 9, 12, 13;

当边长是情形(2)时, 第三边边长 x 应当满足 $2 < x < 8$, 符合条件的 x 值是 4, 6, 7, 相应的周长是 12, 14, 15;

类似地, 当边长是情形(3)时, 相应的第三边边长是 2, 3, 6, 7, 8, 相应的周长是 11, 12, 15, 16, 17.

综上, 不同的周长值共 8 个, 即 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

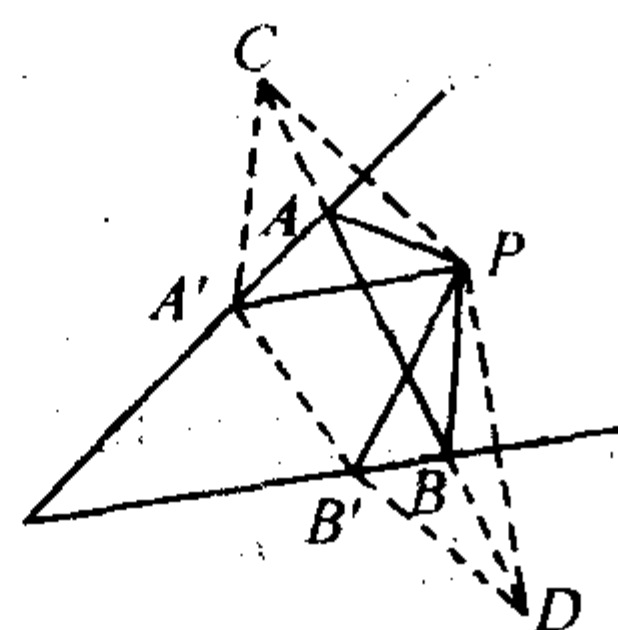
7. 76°

$\therefore \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + (\alpha + 2\alpha + 3\alpha) + (\alpha + 2\alpha) + \alpha = 380^\circ$,

$\therefore \alpha = 19^\circ \Rightarrow \angle AOB = 4\alpha = 76^\circ$.

8. 17

以 OA_1 为始边的角除 $\angle A_1OA_{10}$ 外共 8 个, 作角平分线有 8 条, 每一条角平分线与 OA_1 所成的



第 4 题图



角小于 $\frac{1}{2}\angle A_1OA_{10}$; 同理以 OA_{10} 为始边的角除 $\angle A_1OA_{10}$ 外共 8 个, 作角平分线有 8 条, 每一条角平分线与 OA_{10} 所成的角小于 $\frac{1}{2}\angle A_1OA_{10}$, 这两类角不会重合, 加上 $\angle A_1OA_{10}$ 的角平分线共得 17 条互不重合的角平分线; 另一方面, 当 $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_9OA_{10}$ 时, 互不重合的角平分线恰有 17 条.

故至少可得出 17 条互不重合的角平分线.

9. 当 $n=3$ 时, 三角形最多有 3 个锐角;

当 $n \geq 4$ 时, 若多边形的锐角多于 3 个, 则至少有 4 个, 不妨设为 A_1, A_2, A_3, A_4 . $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 < 360^\circ$, 于是其余 $(n-4)$ 个内角和 $S < (n-4) \cdot 180^\circ$. 于是 $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + S < (n-2) \cdot 180^\circ$ 与 n 边形内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 矛盾.

故凸多边形内角中锐角最多有 3 个.

10. 点 O 把 7 条直线分成 14 条射线, 记为 $OA_1, OA_2, \dots, OA_{14}$, 相邻两射线组成 14 个角, 记为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{14} = 360^\circ$.

若每一个 α_i 均不小于 26° , 即 $\alpha_i \geq 26^\circ$, 则

$$360^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{14} \geq 26^\circ \times 14 = 364^\circ, \text{ 矛盾.}$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}$ 中必有一个角小于 26° .

11. 在 $(2n+2)$ 个点中任取一点 C , 设其余 $(2n+1)$ 个点中与 C 距离最大的点为 O , 连结 CO . 过 O 作 $OB \perp OC$, 则除 O 点外, 其余的 $(2n+1)$ 个点均在直线 OB 为界的点 C 所在的半平面上.

由于 $(2n+2)$ 个点中的任意三点不共线, 故以 O 为顶点且分别过其余 $(2n+1)$ 个点的 $(2n+1)$ 条射线与射线 OB 所成的 $(2n+1)$ 个角互不相等, 不妨按角的大小由小到大顺序设为

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \alpha_{n+2} < \cdots < \alpha_{2n+1}.$$

设对应于角 α_{n+1} 的射线过点 A , 于是 OA 为所求的直线.

12. 由已知有 $P_2P_3 = P_1P_2 = 1, P_3P_4 = \frac{1}{2}P_2P_3 = \frac{1}{2}$, 一般地, P_k 是 $P_{k-1}P_{k+1}$ 的 k 等分点中最靠近 P_{k+1} 的那个分点, 有

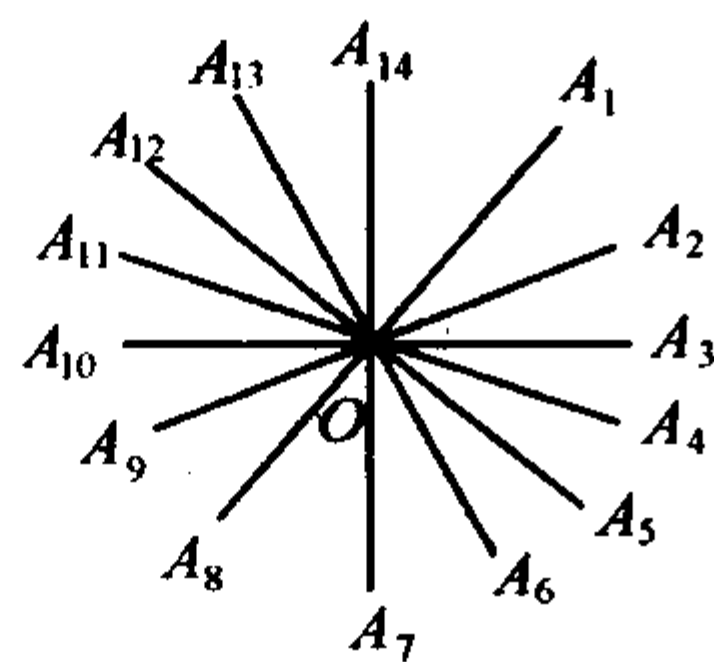
$$P_kP_{k+1} = \frac{1}{k}P_{k-1}P_{k+1}$$

$$= \frac{1}{k}P_{k-1}P_k + \frac{1}{k}P_kP_{k+1},$$

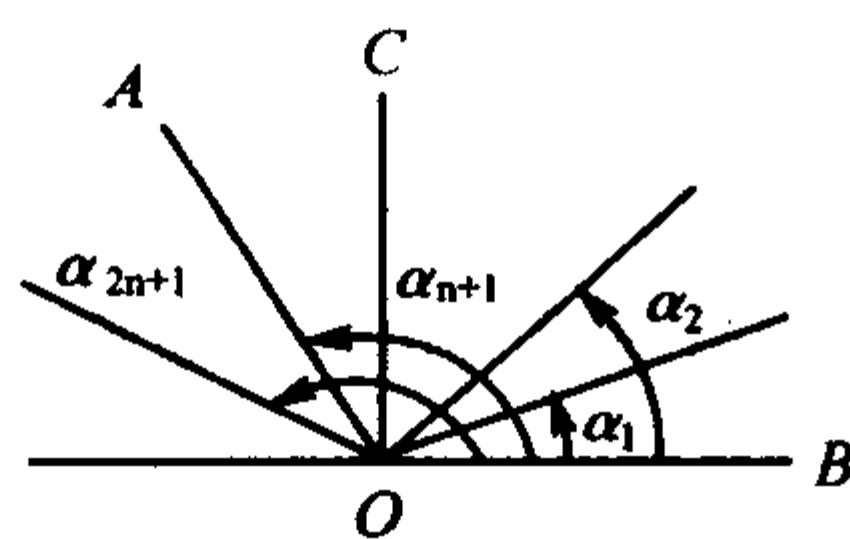
$$\text{得 } P_kP_{k+1} = \frac{1}{k-1}P_{k-1}P_k,$$

$$\begin{aligned} \text{递推 } P_kP_{k+1} &= \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k-2} P_{k-2}P_{k-1} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k-2} \cdots \frac{1}{3} P_3P_4 = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k-2} \cdots \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P_2P_3 \\ &= \frac{1}{(k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2}, \end{aligned}$$

$$\text{得 } 2l = \frac{1}{2002 \cdot 2001 \cdots 4 \cdot 3} < \frac{1}{3^{2000}}.$$



第 10 题图



第 11 题图



七、相交线、平行线

1. B

设 P 到 BC, CA, AB 的距离为 t_a, t_b, t_c , BC, CA, AB 边上的高为 h_a, h_b, h_c .

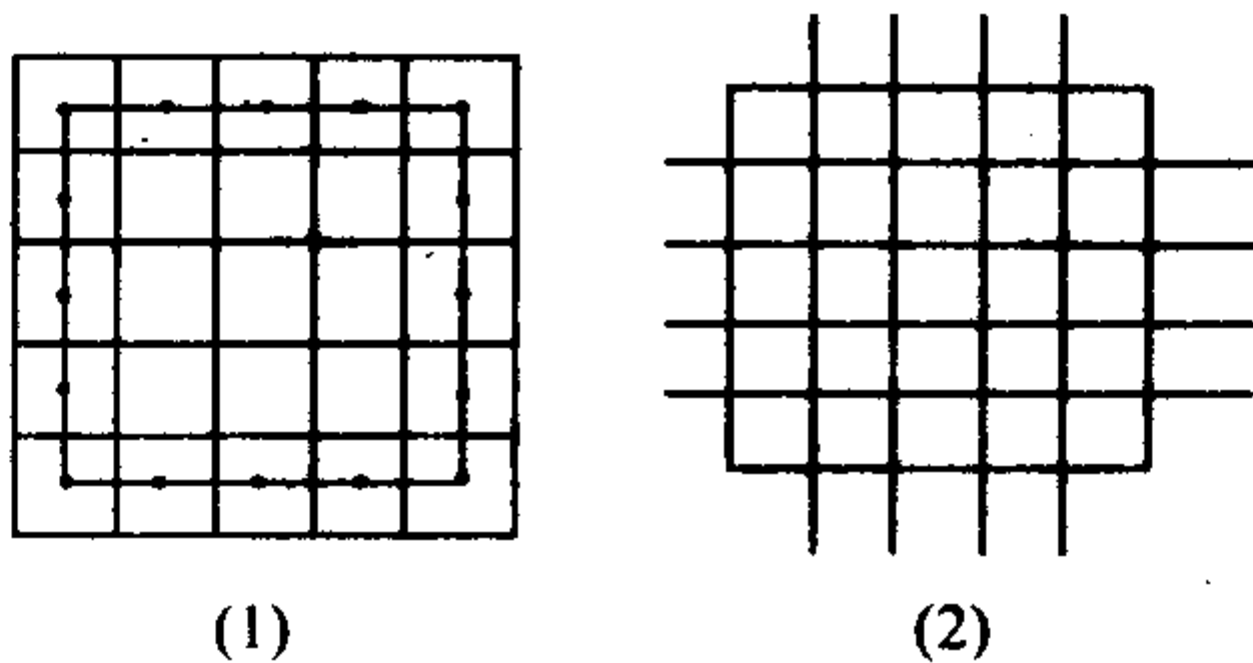
由三角形的面积知识有 $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 1$,

而 $\frac{t_a}{h_a} = \frac{3}{x+3}, \frac{t_b}{h_b} = \frac{3}{y+3}, \frac{t_c}{h_c} = \frac{3}{z+3}, \therefore \frac{3}{x+3} + \frac{3}{y+3} + \frac{3}{z+3} = 1$.

整理得 $xyz = 9(x+y+z) + 54 = 441$.

2. C

考虑最外圈也最分散的 16 个红点. 因为顺序连结相邻两点的线段有 16 条, 每作一条分隔线最多能与其中的 2 条线段相交, 所以最少需要作 8 条分隔线才能与 16 条线段中的每一条都有交点, 使每一小块最多有这 16 个红点中的一个. 如画 7 条分隔线, 必有一条线段整段地落在同一个区域, 该区域至少含有 2 个红点, 不合题意, 图(2)中的 8 条直线是符合题意的分割法.



第 2 题图

3. C

$\triangle ABC$ 内每一个点对应的内角和为 360° , 边上的每一点对应的内角和为 180° , 而 A, B, C 三点对应的内角和为 180° , 总计为 $4 \times 360^\circ + 6 \times 180^\circ + 180^\circ = 2700^\circ$.

又所得的三角形内角和为 180° , 故可得不重叠的三角形数为 $2700^\circ \div 180^\circ = 15$ 个.

4. D

对六边形 $ABCDEF$, 把剪法分成两类:

(1) 经过对角线 AD (或 BE , 或 CF), 有 4 种剪法, 交换 AD, BE, CF , 可得 12 种剪法;

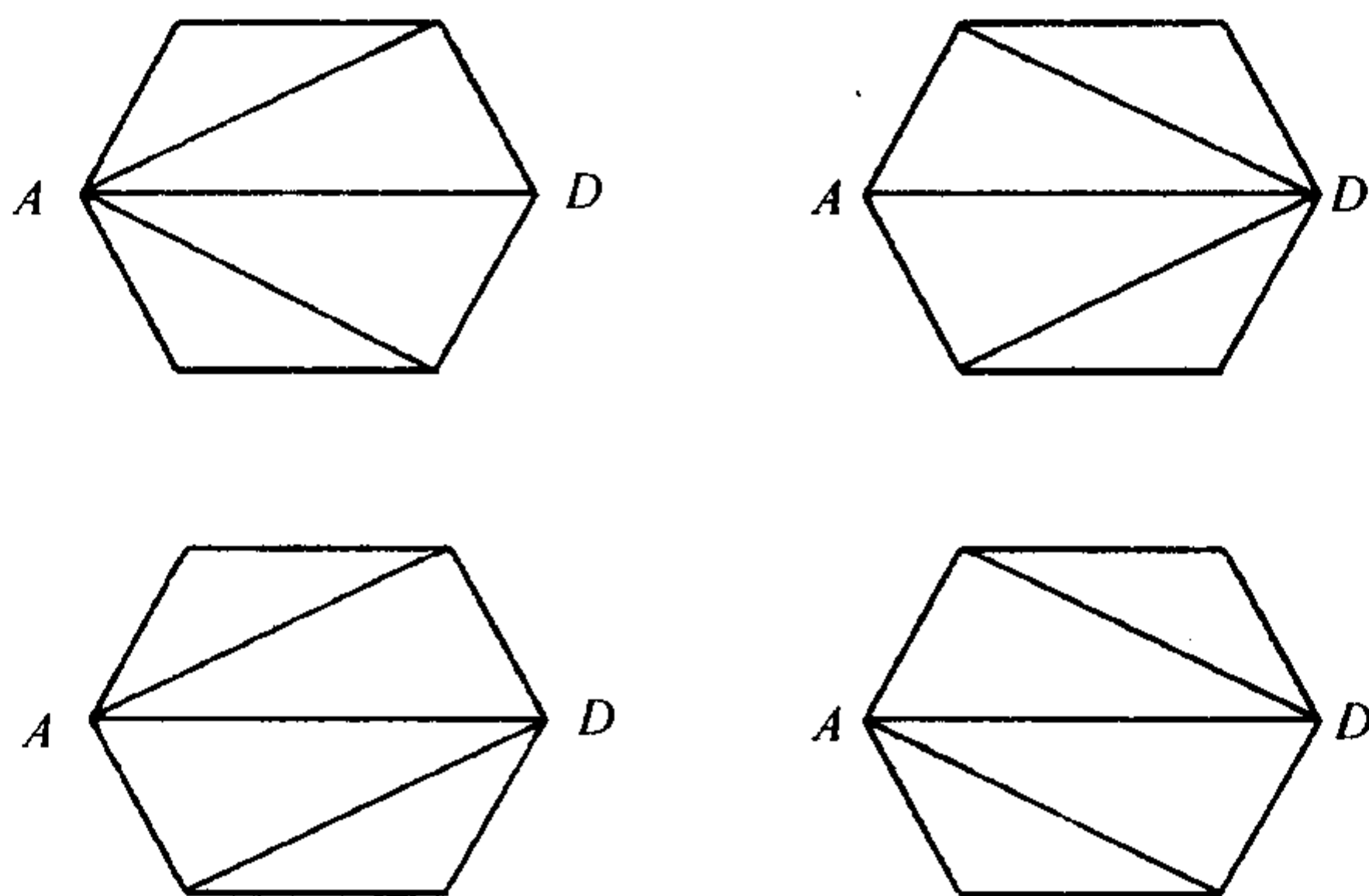
(2) 不经过对角线 AD, BE, CF , 有两种剪法.

5. 16 对

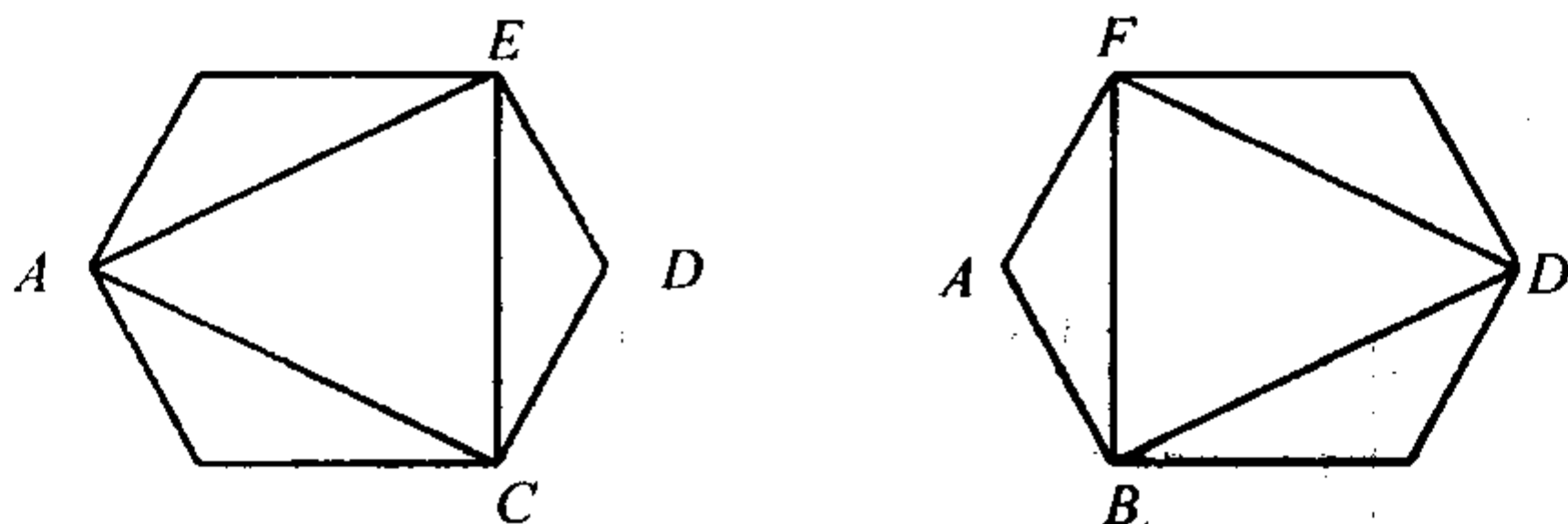
6. 25

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \therefore \frac{CP}{BP} = \frac{1}{2}$, 又由 $BC = 21$, $\therefore CP = 7$,

$\therefore \frac{S_3}{S_4} = \frac{3}{4}, \therefore \frac{AQ}{DQ} = \frac{3}{4}$, 故 $DQ = 12$,



第4题图(1)



第4题图(2)

∴图中阴影正方形的边长 = $12 - 7 = 5$, ∴ $S_{\text{阴影}} = 5^2 = 25$.

7. 4850

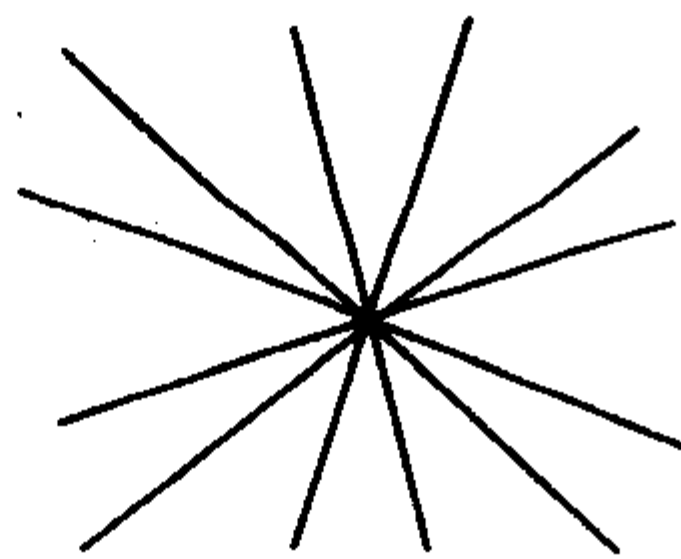
由多边形对角线条数公式 $\frac{n(n-3)}{2}$ 得: 100 边形对角线条数是 $\frac{100 \times 97}{2} = 4850$.

8. 3994002000 条线段

∵ 每条直线均与其余 1999 条直线相交, ∴ 得到 1999 个交点, ∴ 这 1999 个点把这条直线分成 $\frac{1999 \times 1998}{2}$ 条线段, ∴ 2000 条直线被分成 $\frac{1999 \times 1998}{2} \times 2000 = 1999 \times 1998 \times 1000 = 39940020000$ 条线段.

9. (1) 若六条直线中存在两条互相平行, 这两条直线成角为 0° , 命题得证.

(2) 若六条直线中任两条均不平行, 即六条直线两两相交. 先考虑最特殊的情况, 即六条直线交于一点, 如图, 共得 12 个角, 若每个角均大于 30° , 则 12 个角的和大于 360° , 这与一个周角 360° 矛盾, 故至少存在一个角小于或等于 30° , 即存在两条直线, 其所成角小于或等于 30° . 下面考虑六条直线不共点的情形, 在平面内任取一点 O , 过这点分别作原来六条直线 a, b, c, d, e, f 的平行线 a', b', c', d', e', f' , 由平行不改变角的大小知平移后两线成角与平移前两线成角相等, 由前面证明知: 在 a', b', \dots, f' 中, 至少存在两条直线, 其所成角小于或等于 30° , 则可知 $a, b, c,$

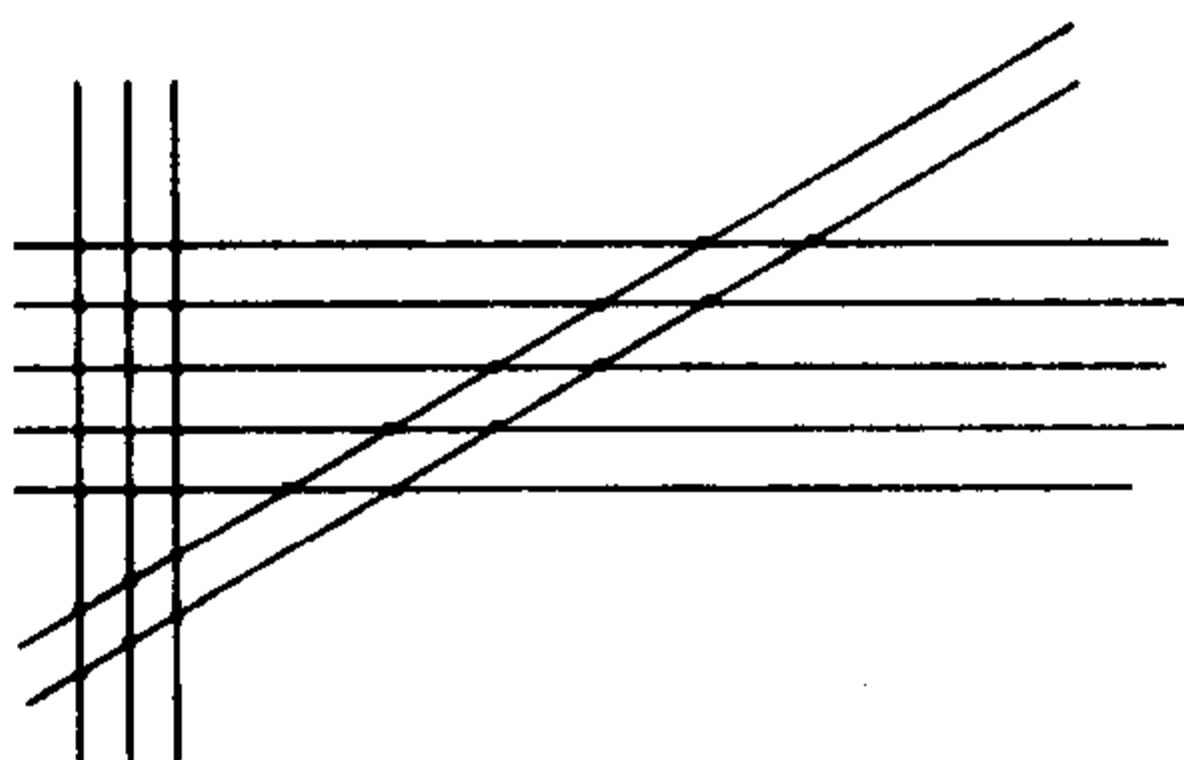


第9题图



..., f 六条直线中, 至少存在两条直线, 其所成角小于或等于 30° .

10. 平面上的 10 条直线, 若两两相交, 则最多可出现 45 个交点, 如今题目要求只出现 31 个交



第 10 题图

点, 这就要减少 14 个交点, 通常有两个途径: (1) 多线共点, 但题目条件不允许这样做. (2) 出现平行线.

考虑第二种途径, 若在某一方向上有 5 条直线互相平行, 则可减少 10 个交点; 若有 6 条直线平行, 则可减少 15 个交点, 故在这个方向上最多可取 5 条平行线, 这时还有 4 个点需要减少, 转一个方向取 3 条平行线, 即可减少 3 个交点, 这时, 还剩下 2 条直线和 1 个需减去的点只须让其在第三个方向上互相平行, 故如第 10 题图的三组平行线为所求.

11. 设 l_1 与 l_2 相交于 O , 过 O 将角的两边对折重合, 得折痕 OA, OB (实质上是角平分线), 则折痕上角每一点到 l_1, l_2 的距离相等; 对平行线 l_1 与 l_3 , 对折使 l_1 与 l_3 重合, 得折痕 CD (中轨平行线), 则折痕上每一点到 l_1, l_3 距离相等, 由于 CD 与 l_1 平行, 过 OA, OB 必与 CD 相交, 交点 A, B 到三条直线等距离, 可以证明, 这样的点只有两个.

12. 设三角形的三个内角为 α, β, γ , 且 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, 则有 $\begin{cases} \alpha - \gamma = 24^\circ, & \text{①} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. & \text{②} \end{cases}$ 由①+②得 $3\alpha + \beta = 204^\circ$. $\because \alpha \geq \beta, \therefore 3\alpha \geq 204$, 故 $\alpha \geq 68^\circ$, 由此可得 $\alpha + \beta \leq 2\alpha + \beta - 68^\circ = 136^\circ$. 又②-①得 $\beta + 2\gamma = 156^\circ, \because \beta \geq \gamma, \therefore 3\gamma \leq 156^\circ, \gamma \leq 52^\circ. \therefore \beta + \gamma = 156^\circ - \gamma \leq 156^\circ - 52^\circ = 104^\circ$, 即 $104^\circ \leq \beta + \gamma \leq n^\circ \leq \alpha + \beta \leq 136^\circ. \therefore n^\circ$ 的取值范围是 $104^\circ \leq n^\circ \leq 136^\circ$.

八、整式的运算

1. D

原式 $= 5a + \{-2a - 3[2b - 8 + 3a - 2b - 1 - a] + 1\} = 5a + \{-2a - 3[2a - 9] + 1\} = 5a - 2a - 6a + 27 + 1 = -3a + 28$.

$\because (2a + b + 3)^2 \geq 0, |b - 1| \geq 0$ 且 $(2a + b + 3)^2 + |b - 1| = 0$.

$\therefore 2a + b + 3 = 0.$

$b - 1 = 0.$

由②得 $b = 1$, 代入①中, 得 $a = -2$.

当 $a = -2, b = 1$ 时, 原式 $= -3 \times (-2) + 28 = 34$.

2. B



$$\because 2x + 5y + 4z = 6, \therefore 2(x + y - z) + 3(y + 2z) = 6. \quad ①$$

$$\text{同样, 由 } 3x + y - 7z = -4 \text{ 得 } 3(x + y - z) - 2(y + 2z) = -4 \quad ②$$

$$① \times 2 + ② \times 3, \text{ 得 } 13(x + y - z) = 0, \text{ 故 } x + y + z = 0.$$

3. B

$$\because a, b, c, d \text{ 是互不相等的整数}, \therefore abcd = 25 = (-1)(+1)(-5)(+5).$$

$$\text{故 } a + b + c + d = (-1) + 1 + (-5) + 5 = 0.$$

4. C

$$\text{当 } m \geq 8 \text{ 时, 原式} = m - 2 + m - 4 + m - 6 + m - 8 = 4m - 20 \geq 12;$$

$$\text{当 } 6 \leq m < 8 \text{ 时, 原式} = m - 2 + m - 4 + m - 6 + 8 - m = 2m - 4 \geq 8;$$

$$\text{当 } 4 \leq m < 6 \text{ 时, 原式} = m - 2 + m - 4 + 6 - m + 8 - m = 8;$$

$$\text{当 } 2 \leq m < 4 \text{ 时, 原式} = m - 2 + 4 - m + 6 - m + 8 - m = 16 - 2m > 8;$$

$$\text{当 } m < 2 \text{ 时, 原式} = 2 - m + 4 - m + 6 - m + 8 - m = 20 - 4m > 12.$$

故所求最小值为 8.

5. 2 和 6

设两个连续自然数为 $3n + p, 3n + p + 1$, $(3n + p)(3n + p + 1) = 9n^2 + 5n + 26$, 解得 $n = \frac{26 - p(p+1)}{2(3p-1)}$. 由于 n 为自然数, 所以 $26 - p(p+1) > 0$, 于是 $p < 5$. 经验证当 $p = 1$ 时, $n = 6$; 当 $p = 2$ 时, $n = 2$; 当 $p = 3, 4$ 时, n 不合题意.

故 n 的值为 2 和 6.

6. 4; 4; 0

$$\text{由已知条件可得 } a + b = 8, ab = c^2 + 16.$$

$$\text{而 } (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = (a - b)^2 + 4ab.$$

$$\text{故 } (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 8^2 - 4(c^2 + 16) = -4c^2.$$

$$\text{即 } (a - b)^2 + 4c^2 = 0. \therefore a - b = 0, c = 0. \text{ 又 } \because a + b = 8, \text{ 所以 } a = b = 4, c = 0.$$

7. 0

$$\begin{aligned} \because a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ad + bc = 0. \therefore ab + cd \\ &= (c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd = c^2ab + d^2ab + a^2cd + b^2cd \\ &= bd(ad + bc) + ac(bc + ad) = 0. \end{aligned}$$

8. $\frac{1}{2}$

$$\because (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

$$\therefore ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad ①$$

$$\text{又 } (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc)$$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c). \quad ②$$

$$\text{将 } ab + bc + ca = -\frac{1}{2}, a + b + c = 0 \text{ 代入 } ② \text{ 式得 } b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = \frac{1}{4}. \quad ③$$

$$\text{将 } ③ \text{ 代入 } ①, \text{ 得 } a^4 + b^4 + c^4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



9. $x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{4}x, \dots$, 直至最后减去剩下的 $\frac{1}{2003}$ 的结果为 $\frac{1}{2003}x$. 当取 $x = 2003$ 时最后的得数是 1.

10. $\because a - b$ 必是 $f(a) - f(b)$ 的因子, 又 $f(a) - f(b) = b - c$,

\therefore 令 $b - c = k_1(a - b)$ (k_1 为整数).

同理 $a - b = k_2(c - a), c - a = k_3(b - c)$, (k_2, k_3 为整数).

$\therefore (a - b)(b - c)(c - a) = k_1 k_2 k_3 (a - b)(b - c)(c - a)$.

即 $k_1 k_2 k_3 = 1$, 从而有 $a = b = c$, 与已知矛盾.

11. $\because a + b + c + d = 0, \therefore a + b = -(c + d), (a + b)^3 = -(c + d)^3$.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 - 3c^2d - 3cd^2 + d^3$.

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d) = 3ab(c + d) + 3cd(a + b)$
 $= 3(abc + bcd + cda + dab)$.

12. 由已知有 $a + b = c + d$

$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3$$

将①式两边立方, 得

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3.$$

③ - ②得 $3a^2b + 3ab^2 = 3c^2d + 3cd^2$.

整理得 $3ab(a + b) = 3cd(c + d)$.

当 $a + b = 0$ 时, $c + d = a + b = 0$, 即 $a = -b, c = -d$.

此时 $a^{2003} + b^{2003} = c^{2003} + d^{2003} = 0$.

当 $a + b \neq 0$ 时, $c + d = a + b \neq 0$,

在 $3ab(a + b) = 3cd(c + d)$ 两边同除以 $3(a + b)$ 得 $ab = cd$,

而 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab, (c - d)^2 = (c + d)^2 - 4cd$,

则有 $(a - b)^2 = (c - d)^2$, 于是 $a - b = c - d$.

或 $a - b = -(c - d)$.

由①、④得 $\begin{cases} a + b = c + d, \\ a - b = c - d. \end{cases}$ 即 $a = c, b = d$.

由①、⑤得 $\begin{cases} a + b = c + d, \\ a - b = -(c - d). \end{cases}$ 即 $a = d, b = c$.

所以有 $a^{2003} + b^{2003} = c^{2003} + d^{2003}$.

①

②

③

④

⑤

九、因式分解

1. A

设 $1234567890 = x$.

2. B

已知等式可化为 $z(x - y) - (x - y)^2 = 0$, 即 $(x - y)(z - x + y) = 0$, 所以 $x - y = 0$ 或 $z - x + y$



$= 0$.

所求值的式子可化为

$$\begin{aligned} x^2(x-y) - z(x^2-y^2) - y^2(x-y) &= (x-y)[x^2 - z(x+y) - y^2] \\ &= (x-y)[(x+y)(x-y) - z(x+y)] = -(x-y)(x+y)(z-x+y). \end{aligned}$$

所以无论 $x-y=0$ 或 $z-x+y=0$, 都有所求式子 $= 0$.

3. B

由 $a+b+c+d=0$, 得 $a+b=-(c+d)$, 故 $a^3+b^3+c^3+d^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d)=3cd(a+b)+3ab(c+d)=3(abc+bcd+cda+dab)$, 而 $a^3+b^3+c^3+d^3=3$, \therefore 原式 $= 1$.

4. A

设 $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} = k \neq 0$, 则 $x=ky, m=nk, S-T=(x+n)-(y+m)=(ky+n)-(y+nk)=(k-1)(y-n)$. 由题意, $k < 1, y-n < 0$. 故 $S-T > 0$, 即 $S > T$.

$$5. (1) \text{原式} = x^4 + 2x^2 + 1 - 25x^2 = (x^2+1)^2 - (5x)^2 = (x^2+5x+1)(x^2-5x+1).$$

$$(2) \text{原式} = x^4 + x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 5 = (x^2+5)(x^2+x+1).$$

$$6. a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = m^2 - 2.$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) = m(m^2 - 2 - 1) = m(m^2 - 3).$$

$$7. (1) \text{原式} = [x^3 + (a-1)x^2] + [x^2 + (a-1)x] + (x+a-1) = x^2(x+a-1) + x(x+a-1) + (x+a-1) = (x+a-1)(x^2+x+1).$$

$$(2) \text{原式} = \frac{(2^2-1)}{2^2-1} (2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{16}+1) = \frac{(2^{32}-1)}{2^2-1} = \frac{2^{32}-1}{3}.$$

$$8. (1) \text{原式} = x^4 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 9 - 6x^2 + 2x^2 = (x^2+3)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+3)(x^2+2x+3).$$

$$(2) \text{原式} = a^2 + a^2 + 2a + 1 + (a^2+a)^2 \\ = (a^2+a)^2 + 2(a^2+a) + 1 = (a^2+a+1)^2.$$

9. 原式 $= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - 4a^2 = (a^2+2a+2)(a^2-2a+2) = [(a+1)^2+1][(a-1)^2+1]$, 由 $|a| \neq 1$, 得 $(a+1)^2+1 > 1, (a-1)^2+1 > 1$, 即 a^4+4 是合数.

10. 设原式 $= (ax+by)(cx+dy+e)$, 且 $e \neq 0$. 右边展开, 两边比较系数, 得 $ac=1$ ①, $ad+bc=-1$ ②, $bd=1$ ③, $ae=1$ ④, $be=1$ ⑤. 由④、⑤得 $a=b$. 代入③并与①比得 $c=d$, 于是 $ad+bc=bd+bd=-1$, 即 $bd=-\frac{1}{2}$, 这与③矛盾. 所以原式不能分解成两个一次因式的乘积.

11. 设原式 $= (x+p)(x^2+qx+r)$ (p, q, r 为整数), 与原式比较系数可得 $pr=d$, 由 $bd+cd=(b+c)d$ 为奇数, 所以 $(b+c)$ 与 d 均为奇数, 则 p 与 r 也是奇数. 令 $x=1$, 则原式左边 $= 1+b+c+d$ 为奇数, 原式右边 $= (1+p)(1+q+r)$ 为偶数, 由奇数 \neq 偶数, 矛盾.

12. 因为大于 5 的质数都为奇数, 故设 $p=2m+1, q=2n+1, p^4-q^4=(p^2+q^2)(p+q) \cdot (p-q) = 8(2m^2+2n^2+2m+2n+1)(m+n+1)(m-n)$, $\therefore p^4-q^4$ 能被 8 整除. $\because m+n, m-n$ 同奇偶, $\therefore m+n+1, m-n$ 中必有一个偶数, $\therefore p^4-q^4$ 能被 16 整除. $\because p, q$ 都是大于 5 的质数, \therefore 其末位数字只能是 1, 3, 7, 9 之一, 而 $1^4, 3^4, 7^4, 9^4$ 的末位数字都是 1, $\therefore p^4-q^4$ 的末位数是 0, $\therefore p^4-q^4$ 能



被 5 整除, $\because 16$ 与 5 互质, $\therefore p^4 - q^4$ 能被 80 整除.

十、分式

1. B

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-y} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4} \Leftrightarrow x:y=7:3.$$

2. C

$$\begin{aligned} \text{由 } a^2 + 4a + 1 = 0 \text{ 知 } a \neq 0, \text{ 两边同除以 } a \text{ 得 } a + \frac{1}{a} + 4 = 0, a + \frac{1}{a} = -4, a^2 + \frac{1}{a^2} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \\ &= 14. \frac{a^4 + 19a^2 + 1}{2a^3 + 19a^2 + 2a} = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2} + 19}{2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 19} = \frac{14 + 19}{2 \times (-4) + 19} = 3. \end{aligned}$$

3. B

$$\text{设 } a - b = m, b - c = n, \text{ 则原式化为 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} = \frac{m^2 + n^2 + mn}{mn(m+n)}.$$

$$\because a < b < c, \therefore m < 0, n < 0, \therefore mn > 0, m + n < 0.$$

$$\therefore m^2 + n^2 + mn > 0, mn(m+n) < 0. \therefore \text{原式} < 0.$$

4. A

$$\because abc \neq 0, \therefore \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0 \end{aligned}$$

5. 1

$$6. \frac{(x-3)(x-2)}{2(x+1)}$$

$$7. \frac{5}{8}$$

$$8. \frac{2004}{2005}$$

$$a=1, b=2, \text{ 并注意到 } \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} 9. \text{原式} &= \frac{\frac{4ab}{a+b} + 2a}{\frac{4ab}{a+b} - 2a} + \frac{\frac{4ab}{a+b} + 2b}{\frac{4ab}{a+b} - 2b} = \frac{4ab + 2a^2 + 2ab}{4ab - 2a^2 - 2ab} + \frac{4ab + 2ab + 2b^2}{4ab - 2ab - 2b^2} \\ &= -\frac{2a(a+3b)}{2a(a-b)} + \frac{2b(3a+b)}{2b(a-b)} = \frac{3a+b-a-3b}{a-b} = 2. \end{aligned}$$

10. 3, 4, 5

$$\text{设所求三数分别为 } x, x+1, x+2, \text{ 则有 } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{47}{60}.$$



由原题得 $\begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{47}{60 \times 3}, \\ \frac{1}{x+2} < \frac{47}{60 \times 3}, \end{cases}$ 解不等式组得 $\begin{cases} x < 3\frac{39}{47}, \\ x > 1\frac{39}{47}. \end{cases}$ 得 $x=2$ 或 3 , 经检验 $x=3$ 适合原方程.

11. 方程两边同乘以 $(1+2x)(1-2x)$, 得

$$(a^2+2x)(1-2x) - (a^2-2x)(2x+1) = 2(1-a^4), 2(1-a^2)x = 1-a^4.$$

(1) 当 $1-a^2 \neq 0$, 即 $a \neq \pm 1$ 时, $x = \frac{1+a^2}{2}$.

把 $x = \frac{1+a^2}{2}$ 代入最简公分母 $1-4x^2$, 得 $1-4x^2 = -a^2(2+a^2)$.

① 当 $a \neq 0$ 时, $1-4x^2 \neq 0$, 原方程的解为 $x = \frac{1+a^2}{2}$.

② 当 $a = 0$ 时, $1-4x^2 = 0$, 此时 $x = \pm \frac{1}{2}$ 是原方程的增根.

(2) 当 $1-a^2 = 0$, 即 $a = \pm 1$ 时, 原方程化为 $0x = 0$, x 可为除 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的任意数.

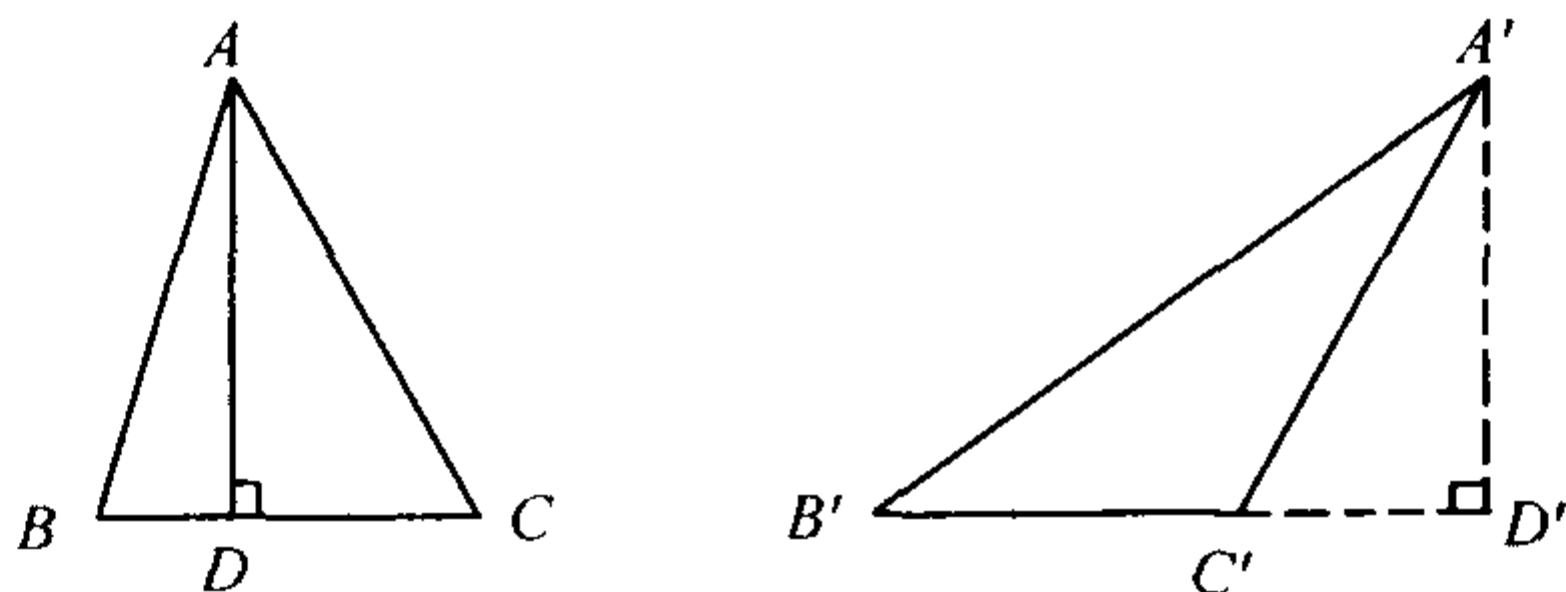
综上所述, 当 $a \neq \pm 1$ 且 $a \neq 0$ 时, 原方程的解为 $x = \frac{1+a^2}{2}$; 当 $a = 0$ 时, 原方程无解; 当 $a = \pm 1$ 时, 原方程的解为除 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 以外的任意数.

12. 由已知等式去分母得 $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

则 $a+b, b+c, c+a$ 中至少有一个为零, 不妨设 $a+b=0$, 则 $a=-b$, 代入到求证等式, 左边 = $\frac{1}{c^{2003}}$, 右边 = $\frac{1}{c^{2003}}$, 于是得证.

十一、全等三角形

1. D



第1题图

$BC = B'C', AD = A'D', AC = A'C'$, 当两个三角形全等时, 第三个角相等, 否则, 第三个角互补.

2. C

$\because \angle 3 + \angle FDC + \angle CFD = \angle 2 + \angle FDC + \angle ADE = 180^\circ, \angle 1 = \angle 2 = \angle 3, \therefore \angle CFD = \angle ADE$.
又 $DE = DF, \angle 1 = \angle 3, \therefore \triangle ADE \cong \triangle CFD, \therefore CD = EA, AD = FC$, 即 $AE + FC = AD + DC = AC$.

3. A

延长 CE 交 BA 延长线于 F , 可证 $\triangle CBE \cong \triangle FBE$, 从而 $CE = EF, \therefore CF = 2CE$. 又 $\because \angle 3 = \angle 4$,



$\therefore \angle 1 = \angle 5$. $\because AB = AC$, 则 $\triangle ABD \cong \triangle ACF$, 于是 $BD = CF$, 即 $2CE = BD$.

4. D

在 AC 延长线上截取 $CK = BM$, 连结 DK . 由 $BM = CK$, $\angle MBD = \angle DCK = 90^\circ$, $BD = CD$ 得 $\triangle BDM \cong \triangle CDK$, 那么 $MD = KD$, $\angle MDB = \angle KDC$. 所以 $\angle MDK = 120^\circ$, 又 $\angle MDN = 60^\circ$, 则 $\angle NDK = 60^\circ$. 易证 $\triangle MDN \cong \triangle KDN$, 所以 $MN = KN$. $\triangle AMN$ 的周长 $= AM + MN + AN = AM + AN + NK = AM + AK = (AB - BM) + (AC + CK) = AB + AC = 12$.

5. 45°

$\because \angle HBC + \angle ACB = \angle CAD + \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle HBC = \angle CAD$. 又 $\because BH = AC$, $\angle BDH = \angle ADC = 90^\circ$, $\therefore \triangle BHD \cong \triangle ACD$, $HD = CD$. $\angle BCH = 45^\circ$.

6. $2a$

延长 CE 到 F 使 $EF = CE$, 连结 DF . $\because AE = ED$, $CE = EF$, $\angle AEC = \angle DEF$, $\therefore \triangle AEC \cong \triangle DEF$. $\therefore AC = FD = DB$, $\angle CDF = \angle CDE + \angle EDF = \angle CDE + \angle CAE = \angle CDB$. 又 CD 公用, $\therefore \triangle CDF \cong \triangle CDB$, $\therefore BC = CF = 2CE = 2a$.

7. 40°

$\because \triangle A'BC'$ 由 $\triangle ABC$ 旋转得到, $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'BC'$. $\therefore \angle CBC' = \angle ABA'$, $BA = BA'$. 又 $\because AA' \parallel BC$, 有 $\angle BA'A = \angle BAA' = \angle ABC = 70^\circ$. 在 $\triangle ABA'$ 中, $\angle ABA' = 180^\circ - 2\angle BAA' = 40^\circ$, 故 $\angle CBC' = 40^\circ$.

8. $2a$

由 $AB = AC$, $\angle BAE = \angle ACD = 60^\circ$, $AE = CD$, 得 $\triangle ABE \cong \triangle CAD$. $\therefore \angle ABE = \angle CAD$. $\therefore \angle BPQ = \angle PBA + \angle BAP = \angle CAD + \angle BAP = 60^\circ$, $BQ \perp AD$, $\therefore \angle PBQ = 30^\circ$. $\therefore BP = 2PQ = 2a$.

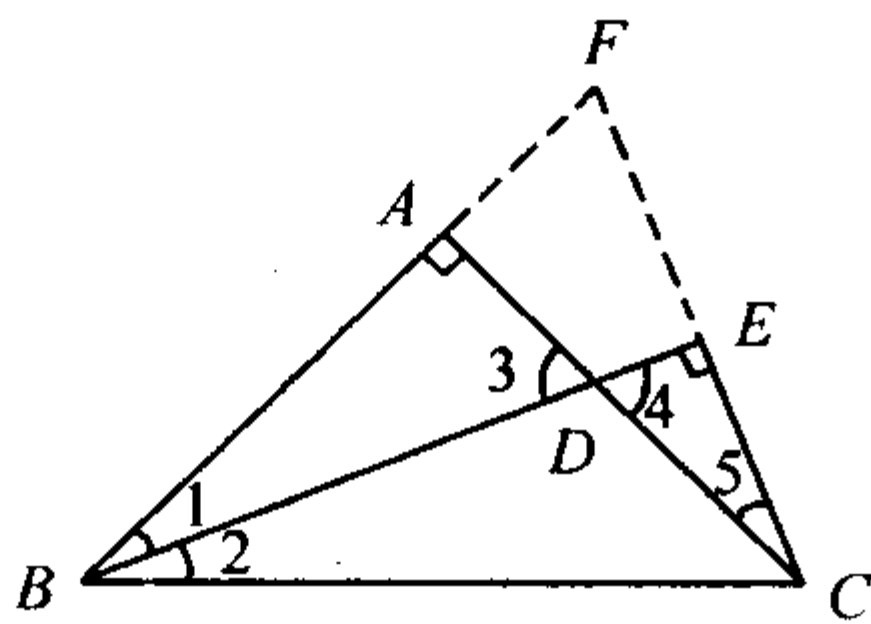
9. 延长 AD 至点 G , 使 $AD = DG$, 则 $\triangle ADC \cong \triangle GDB$, 再证 $\triangle ABG \cong \triangle ACE$.

10. 在 AD 上取一点 E , 使 $DE = DB$, 连结 BE , 证明 $\triangle AEB \cong \triangle CDB$.

11. 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G , 证明 $\text{Rt}\triangle EFG \cong \text{Rt}\triangle DAF$.

12. (1) 分别过点 B, B_1 作 CA, C_1A_1 的垂线, 垂足为 D, D_1 , $\because \angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 100^\circ$, $\therefore \angle BAD = \angle B_1A_1D_1 = 80^\circ$, 易知 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle A_1B_1D_1$. $\therefore BD = B_1D_1$, $\therefore BD = B_1D_1$, $BC = B_1C_1$, $\therefore \text{Rt}\triangle BDC \cong \text{Rt}\triangle B_1D_1C_1$, $\therefore \angle C = \angle C_1$, $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

(2) 若 100° 改为 70° , 结论不成立, 可以构造一个反例 (一个为锐角三角形, 另一个为钝角三角形).



第 3 题图

十三、等腰三角形

1. A

$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 2 = \angle 3, \therefore \angle 1 = \angle 3, MB = MO$.

同理 $NC = ON$.



$$\begin{aligned} AM + MN + NA &= AM + MO + ON + AN \\ &= AM + MB + NC + AN = AB + AC = 12 + 18 = 30. \end{aligned}$$

2. B

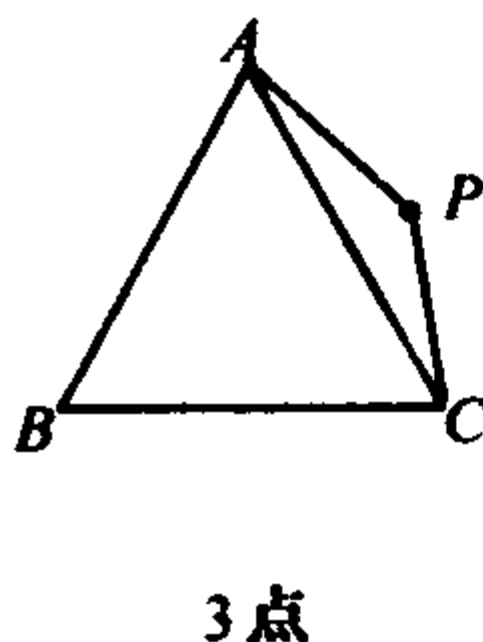
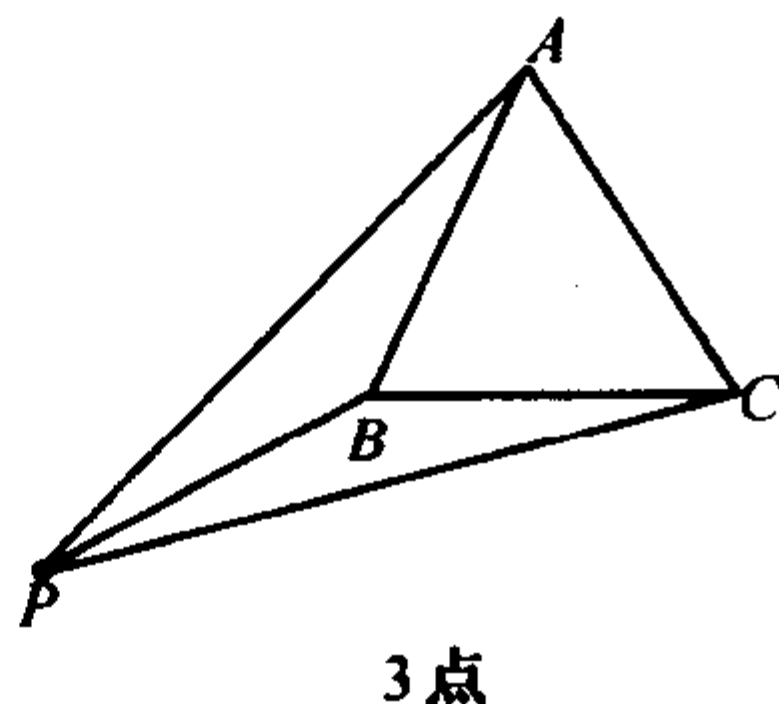
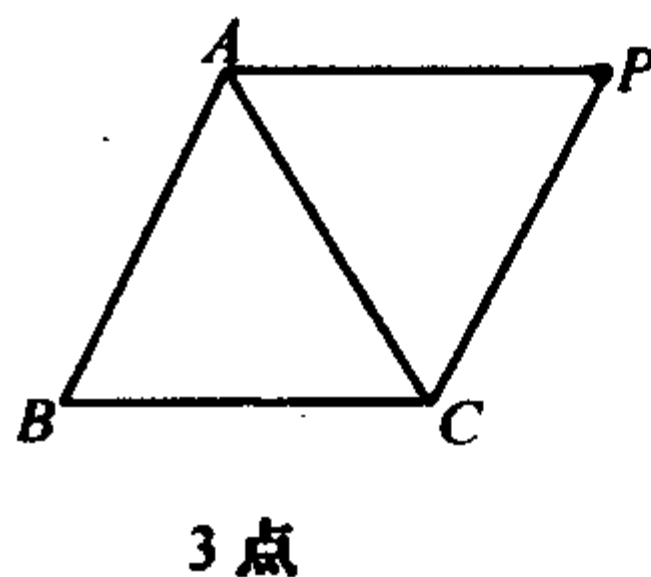
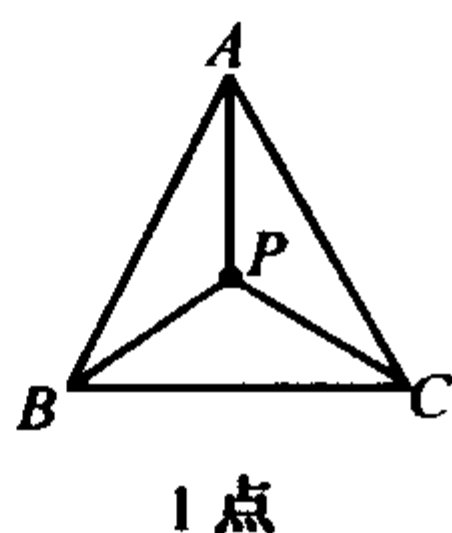
由已知得 $AD = BD, AE = CE$, 所以 $\angle 1 = \angle B, \angle C = \angle 3$, 又

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 2 = 150^\circ. \quad \textcircled{1} \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle B + \angle C = 180^\circ. \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 110^\circ.$$

3. D

符合条件的 P 点有 10 个, 如图所示.



第 3 题图

4. B

六边形各角相等, 均为 120° , 故各外角均为 60° , 把各边延长分别相交于 P, Q, R , 得到 4 个正三角形: $\triangle BCP, \triangle DEQ, \triangle AFR, \triangle PQR$. 因此 $BC + DE = PQ - CD = PR - CD = FA + AB + BC - CD = (AB + BC) + (FA - CD) = 14$.

5. $25^\circ, 35^\circ, 120^\circ$

$$\because BD = BA, \therefore \angle DAB = \angle ADB.$$

由外角定理得 $\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB$,

$$\therefore \angle ADB = 25^\circ, \text{ 同理 } \angle E = 35^\circ. \text{ 由内角和定理得 } \angle DAE = 120^\circ.$$

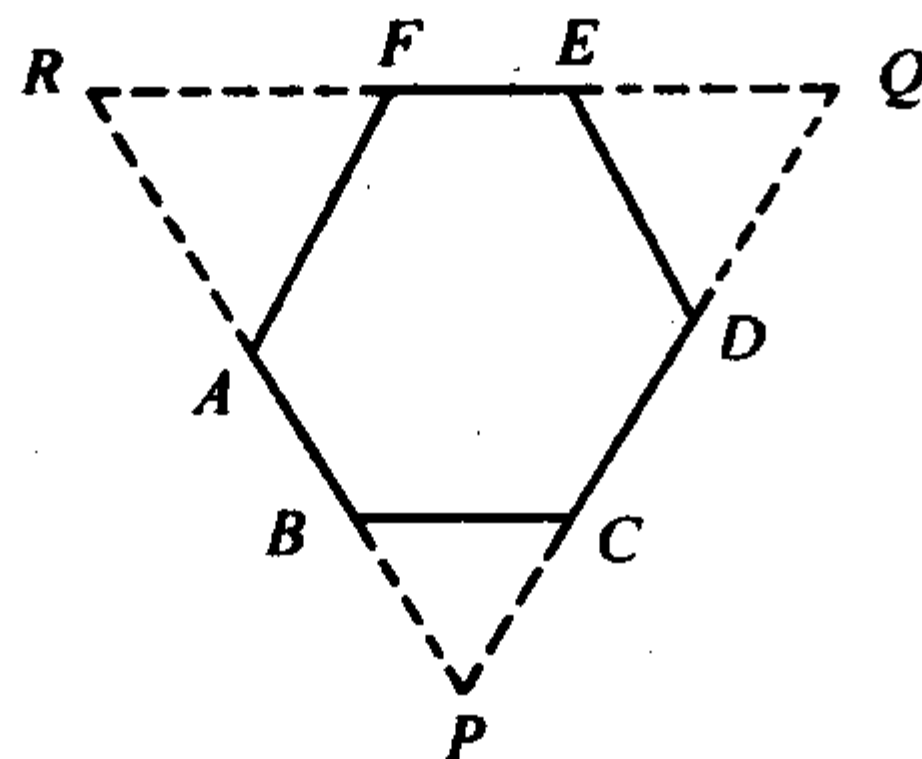
6. $b - a$

在 BC 上截取 $BD = AB$, 连结 DE , 截取 $BF = BE$, 连结 $EF, \triangle ABE \cong \triangle DBE, \therefore AE = DE$.

$$\because \angle EFD = \angle EDF = 80^\circ, \therefore DE = EF.$$

$$\because \angle EFC = 100^\circ, \angle C = 40^\circ, \therefore EF = FC.$$

$$\therefore BC = BF + FC = BE + AE. \therefore BE = BC - AE.$$



第 4 题图

7. m

$\because \angle AFE = \angle FBC + \angle C, \angle AEF = \angle ABE + \angle BAE, \angle FBC = \angle ABF, \angle C = \angle BAE,$
 $\therefore \angle AEF = \angle AFE. \therefore AE = AF = m.$

8. 45°

设 $\alpha = \angle CAD = \angle CDA, \beta = \angle CAB = \angle CBA$, 则 $\angle DAB = \beta - \alpha.$

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle CDF$ 中, $\angle FAB + \angle FBA = \angle FCD + \angle FDC$, 即 $\angle DAB + \beta = 90^\circ + \alpha$, 得 $2\angle DAB = 90^\circ, \angle DAB = 45^\circ.$

9. 此题欲证 $BE = 2DE$, 由条件 $BD \perp AC$, 想到能否证 $\angle DBE = 30^\circ$, 注意: $\angle A = 20^\circ, \angle ABC = 80^\circ, \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC = 40^\circ$, 从中可得 $\angle BEC = 60^\circ$, 进而得 $\angle EBD = 30^\circ$.

$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C.$

$\because \angle ABC + \angle C + \angle A = 180^\circ, \angle A = 20^\circ,$

$\therefore 2\angle ABC = 160^\circ, \therefore \angle ABC = 80^\circ.$

$\because BE$ 平分 $\angle ABC, \therefore \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC = 40^\circ.$

$\because \angle BEC = \angle A + \angle ABE, \therefore \angle BEC = 60^\circ.$

$\because BD \perp AC, \therefore \angle DBE + \angle BEC = 90^\circ.$

$\therefore \angle DBE = 30^\circ, \therefore BE = 2DE.$

10. 此题由众多的线段相等条件, 结合等腰三角形的性质定理, 不难发现图形中各角之间有固定的等量关系, 因此想到设未知数, 把图中某个三角形中的三个内角用未知数表示出, 然后利用三角形内角和定理及推论求得未知数的值.

设 $\angle A = x, \because AD = DE, \therefore \angle 1 = \angle A = x. \because DE = BE, \therefore \angle 2 = \angle 3.$

$\because \angle 1 = \angle 2 + \angle 3, \therefore \angle 3 = \frac{1}{2}\angle 1 = \frac{1}{2}x.$

$\because \angle 4 = \angle 3 + \angle A, \therefore \angle 4 = \frac{3}{2}x.$

同理 $\angle ABC = \angle C = \angle 4, \therefore \angle ABC = \angle C = \frac{3}{2}x.$

在 $\triangle ABC$ 中, $\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ,$

$\therefore x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x = 180^\circ, \therefore x = 45^\circ. \therefore \angle A = 45^\circ.$

11. 此题欲证 $AD \perp DE$, 可考虑证 $\angle ADE = 90^\circ$, 由条件 $\angle ACB = 90^\circ$, 发现能证出 $\triangle ACB \cong \triangle ADE$, 这一点由等边三角形的条件不难证出.

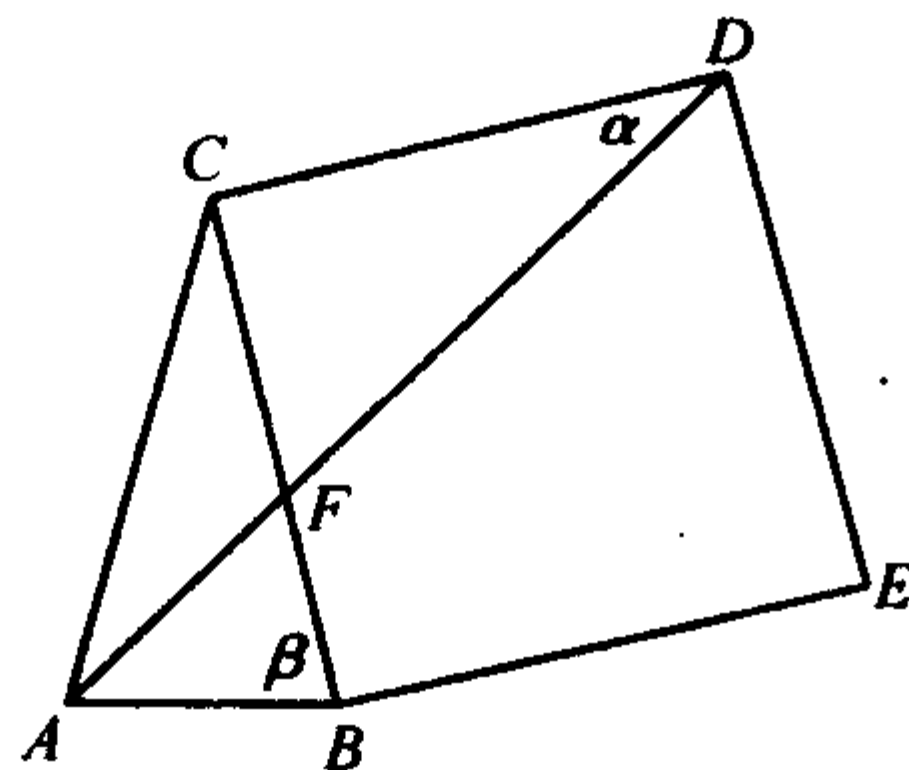
\because 等边 $\triangle ABE$ 和等边 $\triangle ACD, AE = AB, \angle EAB = 60^\circ, AD = AC, \angle DAC = 60^\circ,$

$\therefore \angle EAB = \angle DAC, \therefore \angle EAD = \angle BAC,$

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle BAC, \therefore \angle EDA = \angle ACB.$

$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle EDA = 90^\circ,$

$\therefore AD \perp DE.$



第8题图



12. 此题是特殊图形,可以计算角度,不难得出 $\angle 1 = \angle 2 = 22.5^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$. 注意 $DE \parallel BC$, 可得到 $\square BDEC$,故 $CE \parallel BD$,所以 $\angle 3 = \angle 1 = 22.5^\circ$, $\angle 4 = \angle BDC = 45^\circ$,进而得到 $CM = CB = CD$, 故 $\angle CDM = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ$,注意 $\angle MND = \angle 3 + \angle 4 = 22.5^\circ + 45^\circ = 67.5^\circ = \angle CDM$,所以有 $MD = MN$.

\because 正方形 $ABCD$,
 $\therefore AD \parallel BC, BC = CD, \angle BDC = \angle 1 + \angle 2 = 45^\circ$.
 $\because DF = BD, \therefore \angle 1 = \angle F = \angle 2, \therefore \angle 1 = \angle 2 = 22.5^\circ$.
 $\because DE = AD, \therefore DE \parallel BC$,
 \therefore 四边形 $BDEC$ 是平行四边形.
 $\therefore CE \parallel BD$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 1 = \angle 2 = 22.5^\circ, \angle 4 = \angle BDC = 45^\circ$,
 $\therefore CM = CB = CD$,
 $\therefore \angle CDM = \angle CMD = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ$.
 $\therefore \angle MND = \angle 3 + \angle 4 = 67.5^\circ$,
 $\therefore \angle MND = \angle CDM, \therefore MD = MN$.

十三、勾股定理与直角三角形

1. C

设两直角边分别为 a, b , 斜边为 c , 则 $c = 2d$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4S = 4d^2 + 4S.$$

$$\therefore a+b = 2\sqrt{d^2 + S},$$

$$\therefore a+b+c = 2\sqrt{d^2 + S} + 2d.$$

2. D

设一边为 a , 另一边为 $2a$, 当边长为 a 的一边所对应角为 30° 时三角形为直角三角形; 当边长为 $a, 2a$ 的边的夹角为 30° 时, 三角形就不是直角三角形.

3. C

连结 CD . 由条件可得 $CE = BF, CD = DB$, 以及 $\angle ECD = \angle FBD$.

$$\therefore \triangle ECD \cong \triangle FBD. \angle EDC = \angle FDB. \therefore \angle EDF = 90^\circ.$$

4. B

如图, 作 $OM \perp AC, ON \perp BC$, M, N 是垂足, 那么 $OA^2 + OB^2 = (OM^2 + AM^2) + (ON^2 + BN^2)$.

因为 $S_{\triangle OCA} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, 所以 $\frac{1}{2} AC \cdot OM = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AC \cdot BC \right)$, 即 $OM = \frac{1}{3} BC, BN = 2OM$. 同理 $AM = 2ON$. 因此, $OA^2 + OB^2 = (OM^2 + 4ON^2) + (ON^2 + 4OM^2) = 5(OM^2 + ON^2) = 5OC^2$.

5. 90°

$$\therefore AD^2 = BD \cdot CD,$$



$$\therefore 2AD^2 = 2BD \cdot CD.$$

$$\therefore BD^2 + CD^2 + 2AD^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD,$$

$$(BD^2 + AD^2) + (AD^2 + CD^2) = (BD + CD)^2,$$

$$\text{即 } AB^2 + AC^2 = BC^2, \therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

$$6. 52.5^\circ$$

$$\text{设 } \angle EAC = 2x, \angle EAD = 5x.$$

$\therefore DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore EA = EB, \angle B = \angle EAD = 5x.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中}, 2x + 5x + 5x = 90^\circ,$$

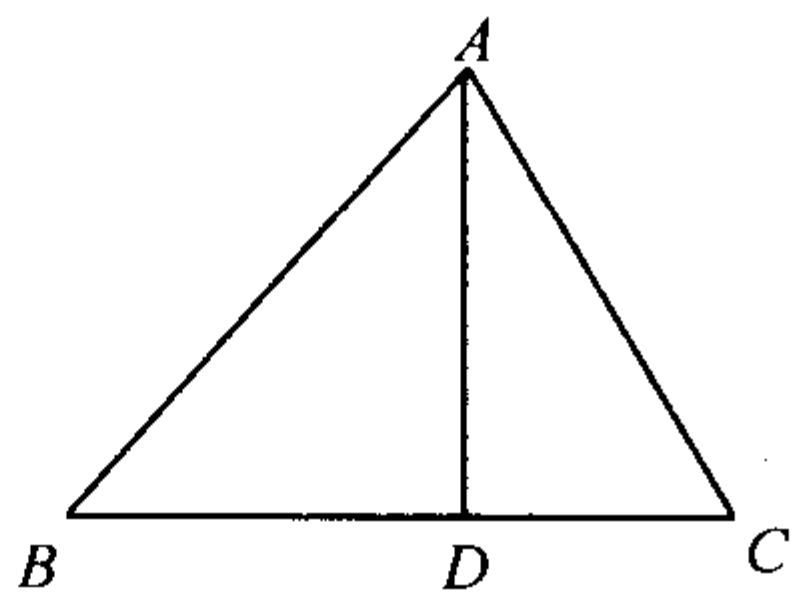
$$\therefore x = 7.5^\circ, \therefore \angle BAC = 7x = 52.5^\circ.$$

$$7. 45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$$

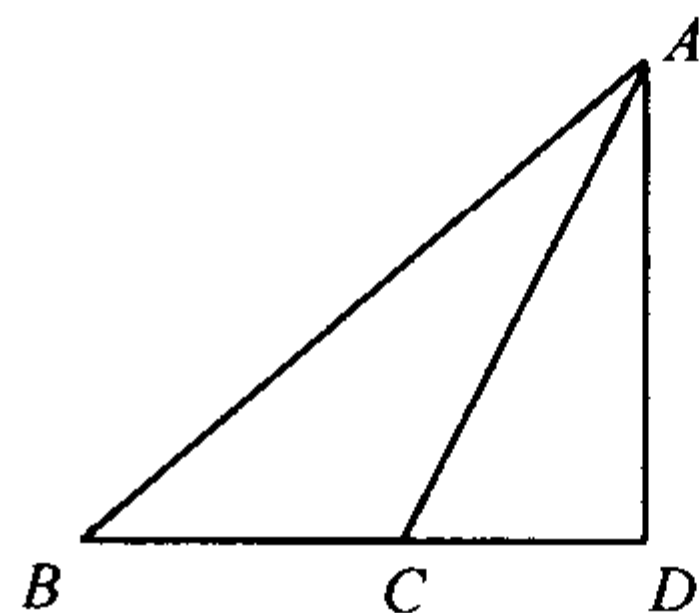
因为直角三角形中,斜边最大,所以在任意三角形中,都有 $b \geq h_a, a \geq h_b$. 又由于 $a \leq h_a, b \leq h_b$, 则有 $a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$, 那么 $a = b = h_a = h_b$. 因此, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$.

$$8. 42 \text{ 或 } 32$$

图形有两种情况:



第8题(1)图



第8题(2)图

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,由勾股定理有 $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

同理 $CD = 5$.

图(1)中, $\triangle ABC$ 的周长 $= 15 + 9 + 5 + 13 = 42$.

图(2)中, $\triangle ABC$ 的周长 $= 15 + 9 - 5 + 13 = 32$.

$$9. \because 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2, \therefore AD^2 + CD^2 = AC^2.$$

$$\therefore AD \perp BC.$$

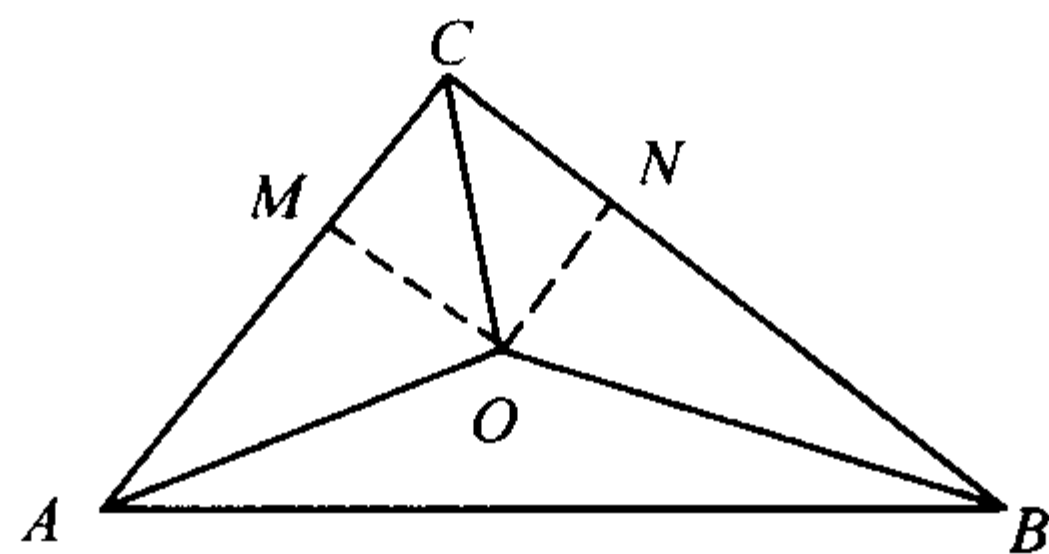
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,由勾股定理得

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{14^2 - 12^2} = 2\sqrt{13}.$$

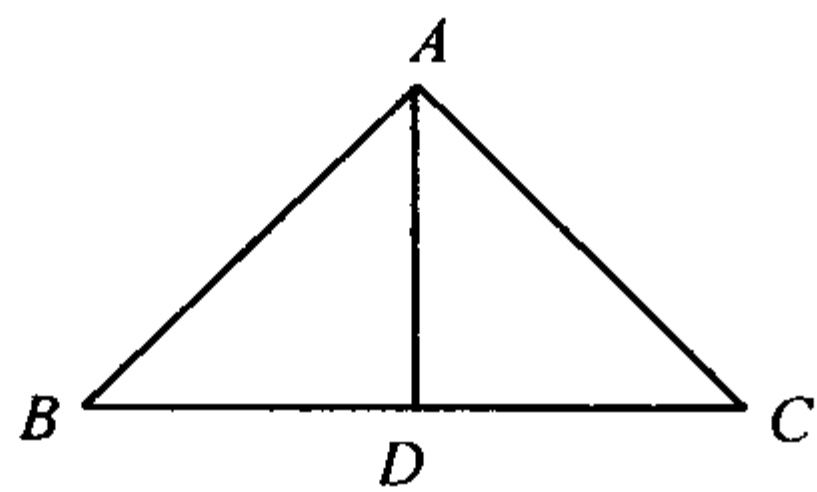
10. 以 BC 为边在四边形外作正 $\triangle BCE$, 连结 AC, AE , 证明 $\triangle ABE$ 为 $\text{Rt}\triangle$.

11. 设 AB 与 CD 交点为 O , 则 $AC^2 = OA^2 + OC^2, BD^2 = OB^2 + OD^2$, 两式相加得 $AC^2 + BD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$. 同理可证 $BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OA^2 + OD^2$.

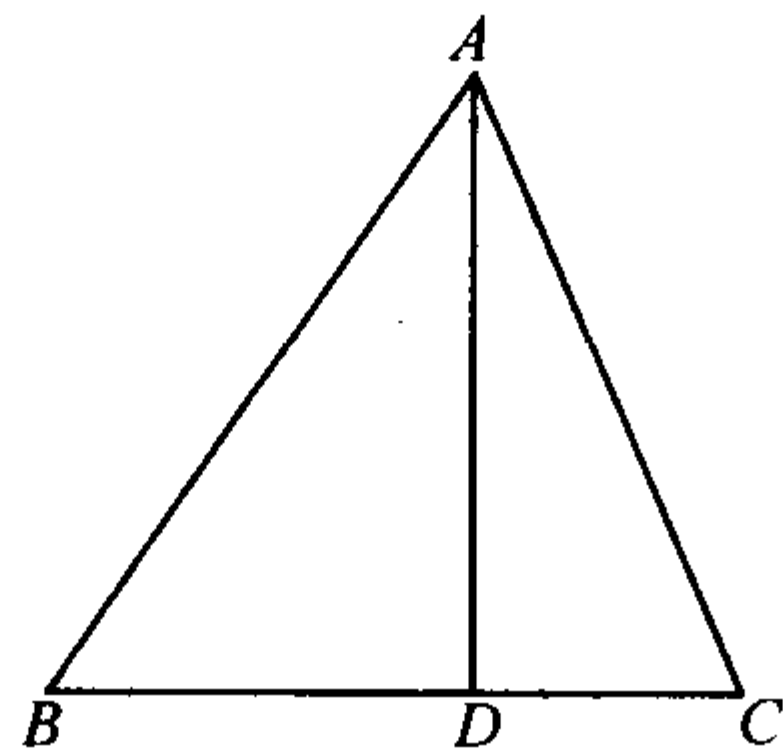
12. 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 分别使用勾股定理证明.



第4题图



第5题图



第9题图



十四、实数

1. D

$\because x = a^2 - bc, y = b^2 - ac, z = c^2 - ab, \therefore x + y + z = a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$. $\because a, b, c$ 是不全相等的实数, 即 $a-b, b-c, c-a$ 中至少有一个不是 0, $\therefore x + y + z > 0$. $\therefore x, y, z$ 中至少有一个大于 0. 故选 D.

2. C

$\because a, b, x, y$ 为实数, $\therefore \sqrt{x} = \sqrt{3}, x = 3$. 代入方程得 $y = 1 - a^2, y = 1 + b^2, \therefore 1 - a^2 = 1 + b^2, a^2 + b^2 = 0, a = b = 0, y = 1$. 故 $2^{x+y} + 2^{a+b} = 2^4 + a^0 = 17$.

3. B

$a = 0$ 使 $\frac{b}{a}$ 无意义, 所以 $a \neq 0$. 又 $1 \neq 0$, 所以 $a + b = 0$. 现在分析 1, a 和 $\frac{b}{a}, b$. 若 $a = b$, 与 $a + b = 0$ 联立, 得 $a = 0$, 与前面结论矛盾. 所以 $a = \frac{b}{a}, a^2 = b$ 与 $a + b = 0$ 联立, 得 $a = -1$, 则 $b = 1, a^2 + b^2 = 2$.

4. A

x 是实数, 必须

$$\begin{cases} (a-2)(|a|-1) \geq 0, & \text{①} \\ (a-2)(1-|a|) \geq 0, & \text{②} \\ 1 + \frac{1}{1-a} \neq 0, & \text{③} \\ 1-a \neq 0. & \text{④} \end{cases}$$

由①、②知 $(a-2)(|a|-1) = 0$, 所以 $a = 2$ 或 $a = \pm 1$;

由③、④知 $a \neq 2, a \neq 1$, 因此 $a = -1$. 于是

$$x = \left(\frac{5a+1}{1-a} \right)^{2003} = (-2)^{2003} = 2^{500 \times 4 + 1}.$$

故 x 的个位数字是 8.

5. $\because \sqrt{2009} = \sqrt{49 \times 41} = 7\sqrt{41}, \therefore \sqrt{x}, \sqrt{y}$ 和 $7\sqrt{41}$ 是同类根式. 设 $\sqrt{x} = a\sqrt{41}, \sqrt{y} = b\sqrt{41}$ ($a, b \in \mathbf{N}$).

则 $a + b = 7$, 又 $x < y$, 故 $a < b$.

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 6. \end{cases} \begin{cases} a_2 = 2, \\ b_2 = 5. \end{cases} \begin{cases} a_3 = 3, \\ b_3 = 4. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 41, \\ y_1 = 1476. \end{cases} \begin{cases} x_2 = 164, \\ y_2 = 1025. \end{cases} \begin{cases} x_3 = 369, \\ y_3 = 656. \end{cases}$$

故有 3 个整数对.

6. 将 $\sqrt[3]{25 + \sqrt{2}x} = 1 + \sqrt{2}y$ 两边同时立方得:

$$1 + 2\sqrt{2}y^3 + 3\sqrt{2}y + 6y^2 = 25 + \sqrt{2}x, \text{ 比较系数得:}$$



$y = \pm 2, y = \pm 22, \therefore x = 22, y = 2$ 或 $x = -22, y = -2$.

7. $\because 0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1, \therefore 0 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6 < 1$.

又 $\because (\sqrt{3} + \sqrt{2})^6 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6 = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2]^3 + [(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2]^3$
 $= (5 + 2\sqrt{6})^3 + (5 - 2\sqrt{6})^3 = [(5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6})]^3 - 3(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})[(5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6})]$
 $= 10^3 - 30 = 970,$

$\therefore 970$ 是比 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6$ 大的最小整数.

8. 由 $x^2 - 2y^2 = 1$ 得 $x^2 - 1 = 2y^2, \therefore (x+1)(x-1) = 2y^2$.

由 $2y^2$ 为偶数得 x^2 为奇数, $\therefore x$ 也为奇数. 故 $x+1, x-1$ 为偶数, 即 $2y^2$ 为 4 的倍数, $\therefore y = 2$, 代入方程得 $x = \pm 3$, 由 $x > y$ 得 $x = 3$. 故 $x = 3, y = 2$.

9. 我们来计算 a_n 的前若干个值: 1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5, 5, 6, 0, 9, 5, 0, 6, 5, 9, 0, 0, 1, 5, 4, 0, 5, ... 由此我们猜测 $0. a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = 0.15405104556095065900$. 下面证明猜想成立, 即证明 $a_{n+20} = a_n$.

设 $f(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, 要证明 $f(n+20)$ 与 $f(n)$ 有相同的个位只须证明 $f(n+20) - f(n)$ 是 10 的倍数.

由前面知 $f(20)$ 是 10 的倍数, 而

$$\begin{aligned} f(n+20) - f(n) &= (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+20)^2 \\ &= 10(2n^2 + 42n) + (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2) = 10(2n^2 + 42n) + f(20), \end{aligned}$$

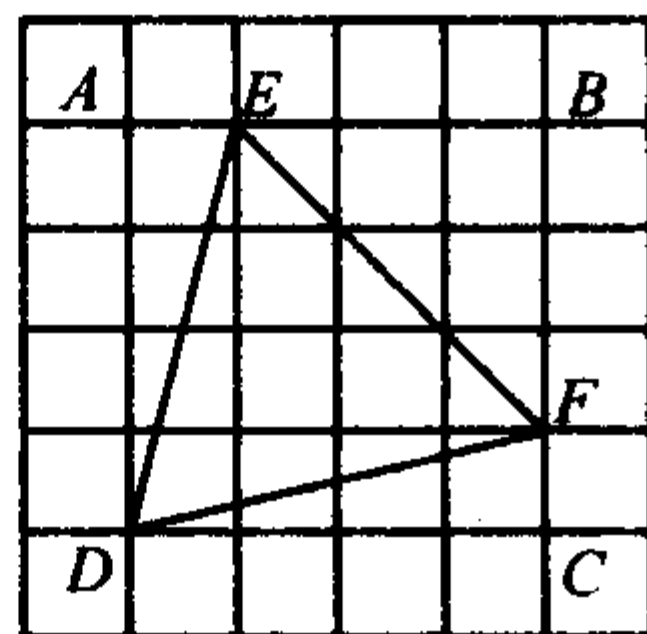
故 $f(n+20) - f(n)$ 为 10 的倍数, 即 $a_{n+20} = a_n$. 所求成立.

10. 如果等式成立, 去分母变形可得 $2ac\sqrt{p} + c^2p = (ab + ad)\sqrt{p} + bdp$.

因 a, b, c, d, p 是有理数, \sqrt{p} 是无理数, 所以 $2ac = ab + ad$ 且 $c^2 = bd$. 即 $2c = b + d$ 且 $c^2 = bd$, 消去 c 得 $\left(\frac{b+d}{2}\right)^2 = bd$, 所以 $(b-d)^2 = 0, b = d$. 代入前面的式子得 $c = b = d$.

反之, 当 $c = b = d$ 时, 等式显然成立. 故等式成立的条件是 $c = b = d$.

11. 假设它可以做出, 完成这个等边三角形的外接矩形, 如图所示, 矩形 $ABCD$ 即为等边三角形 DEF 的外接矩形. 设小方格边长为 1, 则矩形 $ABCD$ 的面积为整数, 直角 $\triangle ADE, \triangle EBF, \triangle FCD$ 的面积是有理数. 因此, 由矩形 $ABCD$ 减去 $\triangle ADE, \triangle EBF, \triangle FCD$ 得等边三角形 DEF , 其面积应该是有理数. 另一方面, 设 $\triangle DEF$ 的边长为 a , 则 $S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 其中 a^2 为直角边是整数值的直角三角形斜边的平方, a^2 是有理数, 所以等边三角形 DEF 的面积 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 是无理数, 此与前面结果矛盾. 因此, 题设要求的等边三角形是不存在的.



第 11 题图

12. 因为 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 2(a+b+c)^2 - 6(ab + bc + ca) \leq 2 \times 4^2 - 6 \times 4 = 8$, 所以 $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ 中至少有两个不超过 4. 故 $|a-b| \leq 2, |b-c| \leq 2, |c-a| \leq 2$ 中至少有两个成立.



十五、一元二次方程

$$1. \because x^2 + |x| + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1 > 0$$

\therefore 原方程无实数根.

故选 D.

2. 因为 x_0 是方程的根, 所以 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, 因此

$$\begin{aligned} M &= (2ax_0 + b)^2 = 4a^2x_0^2 + 4abx_0 + b^2 \\ &= 4a(ax_0^2 + bx_0 + c) + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac = \Delta \end{aligned}$$

故选 B.

3. 方程的根的判别式为

$$\begin{aligned} \Delta &= (b^2 + a^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (b^2 + a^2 - c^2 + 2ab)(b^2 + a^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a^2 + 2ab + b^2) - c^2][(a^2 - 2ab + b^2) - c^2] \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) \end{aligned}$$

此处: $a+b+c > 0, a+b-c > 0$.

$$\text{由 } |a-b| < c \Rightarrow -c < a-b < c \Rightarrow \begin{cases} a-b+c > 0 \\ a-b-c < 0 \end{cases}$$

故 $\Delta < 0$, 无实根. 因此选 B.

4. 将 $l_n = a^n + b^n, l_{n-1} = a^{n-1} + b^{n-1}, l_{n-2} = a^{n-2} + b^{n-2}$ 代入到原式中, 则

$$\begin{aligned} &l_n + pl_{n-1} + ql_{n-2} \\ &= (a^n + b^n) + p(a^{n-1} + b^{n-1}) + q(a^{n-2} + b^{n-2}) \\ &= a^{n-2}(a^2 + pa + q) + b^{n-2}(b^2 + pb + q) \\ &= a^{n-2} \times 0 + b^{n-2} \times 0 = 0. \text{ 选 A.} \end{aligned}$$

5. 由 $x * (x+2) = 14$ 得 $x^2 + x + (x+2)^2 + (x+2) = 14$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ 或 } x+4=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ 或 } x_2=-4 \text{ (不合)}$$

故 $x=1$.

6. 由 $3b^2 + 1234567890b + 2 = 0$, 知 $b \neq 0$, 又 $ab \neq 1$, 故 $a \neq \frac{1}{b}$.

a 是方程 $2x^2 + 1234567890x + 3 = 0$ 的一个根, b 是方程 $3y^2 + 1234567890y + 2 = 0$ 的一个根, 所

以 $\frac{1}{b}$ 是 $3\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 1234567890\left(\frac{1}{y}\right) + 2 = 0$ 的根, 即 $\frac{1}{b}$ 是 $2y^2 + 1234567890y + 3 = 0$ 的一个根.

故 $a, \frac{1}{b}$ 是方程 $2x^2 + 1234567890x + 3 = 0$ 的两个不同的根.

$$\therefore \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{3}{2}.$$



$$7. \because \begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 x_2 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right)^2 &= \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} + 2 \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 + 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = -\frac{a}{2} (\because a < 0).$$

$$8. \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = 1 - m \end{cases}$$

$$|\alpha| + |\beta| \leq 5 \Rightarrow 0 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \leq 25$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \leq 25 \Rightarrow 0 \leq (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2|\alpha\beta| \leq 25$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - 2(1 - m) + 2|1 - m| \leq 25 \Rightarrow -1 \leq 2|1 - m| - 2(1 - m) \leq 24$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq |1 - m| - (1 - m) \leq 12.$$

$$(1) \text{ 当 } m \geq 1 \text{ 时, } \frac{3}{4} \leq m \leq 7;$$

$$(2) \text{ 当 } m < 1 \text{ 时, 不等式恒成立.}$$

$$\text{又 } \Delta \geq 0 \Rightarrow 1 - 4(1 - m) \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq m < 1.$$

$$\text{综合(1)、(2)得 } \frac{3}{4} \leq m \leq 7.$$

$$9. (1) \text{ 要使原方程有两个实数根, 必须满足 } \begin{cases} m + 1 \neq 0, \\ \Delta \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{由 } m + 1 \neq 0 \text{ 得 } m \neq -1.$$

$$\text{由 } \Delta \geq 0 \text{ 得 } (4m^2) - 4 \times 2(m + 1) \times (3m - 2) \geq 0,$$

$$-8(m^2 + m - 2) \geq 0,$$

$$m^2 + m - 2 \leq 0,$$

$$\text{解得 } -2 \leq m \leq 1.$$

$$\therefore \text{ 当 } -2 \leq m \leq 1 \text{ 且 } m \neq -1 \text{ 时, 原方程有两个实根.}$$

$$(2) \text{ 当 } m + 1 = 0 \text{ 时, 原方程化为 } -4x - 5 = 0. x = -\frac{5}{4}.$$

原方程有实根.

$$\text{当 } m + 1 \neq 0 \text{ 时, 要使原方程无实根, 必须 } \Delta < 0, \text{ 即 } m^2 + m - 2 > 0.$$

$$\text{解得 } m < -2 \text{ 或 } m > 1.$$

$$\therefore \text{ 当 } m < -2 \text{ 或 } m > 1 \text{ 时, 原方程无实根.}$$

$$10. \text{ 由韦达定理得 } \alpha + \beta = \sqrt{10}, \alpha\beta = 2.$$

$$\therefore \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - (\alpha\beta)^2 = (10 - 4)^2 - 4 = 32.$$



$$a^3 - \beta^3 = (a - \beta)(a^2 + \beta^2 + a\beta)$$

$$= \sqrt{(a + \beta)^2 - 4a\beta} \times [(a + \beta)^2 - a\beta] = \sqrt{10 - 4 \times 2} \times (10 - 2) = 8\sqrt{2}.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{32}{8\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

11. 易知 $a^2 - 1 \neq 0$, 即 $a \neq \pm 1$.

$$\therefore \Delta = [6(3a - 1)]^2 - 4(a^2 - 1) \times 72 = [6(a - 3)]^2,$$

$$\therefore x_1 = \frac{12}{a+1}, x_2 = \frac{6}{a-1}.$$

\therefore 方程两根为整数,

$$\therefore a+1 \mid 12, a-1 \mid 6.$$

解得 $a = 2, 0, 3, -2, 5$.

当 $a = 2$ 时, $x_1 = 4, x_2 = 6$;

当 $a = 0$ 时, $x_1 = 12, x_2 = -6$;

当 $a = 3$ 时, $x_1 = 3, x_2 = 3$;

当 $a = -2$ 时, $x_1 = -12, x_2 = -2$;

当 $a = 5$ 时, $x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2}$ (不合题意)

12. 第一次倒出液体若是 x 升, 则容器内余下的纯药液是 $(63 - x)$ 升, 用水加满, 容器内纯药液含量为 $\frac{63-x}{63} = 1 - \frac{x}{63}$, 第二次倒出液体 x 升, 则 x 升中含纯药液是 $x \left(1 - \frac{x}{63}\right)$ 升, 容器内余下的纯药液为 $(63 - x) - x \left(1 - \frac{x}{63}\right)$ 升, 即 $63 \left(1 - \frac{x}{63}\right)^2$ 升.

设第一次倒出液体 x 升, 根据题意, 得 $63 \left(1 - \frac{x}{63}\right)^2 = 28$.

化简方程, 得 $1 - \frac{x}{63} = \pm \frac{2}{3} \therefore 1 - \frac{x}{63} = \frac{2}{3}$ 或 $1 - \frac{x}{63} = -\frac{2}{3}$.

$x_1 = 21$ 或 $x_2 = 105 > 63$ (舍去)

十六、分式方程

1. B

$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ 两边同乘以 (x^2-1) , 得 $(x^2-1) - (x-1) = 2$, 化简得 $x^2 - x - 2 = 0$, 即 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, 经检验 $x_1 = 2$ 是原方程的根, $x_2 = -1$ 是增根;

2. C

设 $\frac{x^2+2}{2x} = y$, 则 $\frac{2x}{x^2+2} = \frac{1}{y}$. 所以 $y + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{3}{2}$, 即 $\frac{x^2+2}{2x} = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{x^2+2}{2x} = \frac{3}{2}$. 由 $\frac{x^2+2}{2x} = \frac{2}{3}$ 得 $3x^2 - 4x + 6 = 0$ (无解); 由 $\frac{x^2+2}{2x} = \frac{3}{2}$ 得 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 所以 $x_1 = 1, x_2 = 2$. 经检验知, 它们都是原方程的解.

3. A



将原方程去分母,得 $x = \frac{6-k}{3}$, 令 $\frac{6-k}{3} = 1$, 得 $k = 3$.

4. D

由已知,得 $\frac{4 \times 2 + 1}{(a+1)(2-1)} - \frac{2 \times 2 - 1}{(a-1)(2+1)} = \frac{7}{4}$, 即 $\frac{9}{a+1} - \frac{1}{a-1} = \frac{7}{4}$, 方程两边同时乘以 $4(a+1)(a-1)$, 得 $36(a-1) - 4(a+1) = 7(a+1)(a-1)$, 化简得 $7a^2 - 32a + 33 = 0$, 于是 $a_1 = \frac{11}{7}$, $a_2 = 3$, 经检验 $a_1 = \frac{11}{7}$, $a_2 = 3$ 都是原方程的解.

5. 题中方程可以变形为 $\frac{2}{x} - \left[\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} \right] = 1$, 即 $\frac{2}{x+1} = 1$, 得 $x = 1$. 经检验 $x = 1$ 是原方程的根.

6. 由原方程知 $x^2 - x \neq 0$, $x - 1 \neq 0$, 即 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$, 则原方程可以变形为 $\frac{2x+4}{x} = x+5$, 即 $x^2 + 3x - 4 = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -4$. 又 $x \neq 0, 1$, 所以分式方程的解是 $x = -4$.

7. 由题意知 $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$, 则原方程变形为 $x^2 - 6x + 6 = 0$,

则 $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 6}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$.

又 $x_{1,2} \neq 1, 2$, 所以 $x = 3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$ 都是原方程的解. 故原方程的解的个数为 2.

8. 观察方程中左边各项特征, 利用 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 得

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) = \frac{4}{21},$$

即 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{21}$, 解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -7$.

经检验 $x_1 = 3$, $x_2 = -7$ 都是原方程的解, 故原方程的根为 $x_1 = 3$, $x_2 = -7$.

9. 就此方程而言, 只要使解得的根不是增根即可. 即 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$.

在方程的两边同乘以 $x(x-1)$ 得: $3(x-1) - 6x - (x+m) = 0$.

整理得 $-4x - 3 - m = 0$, 解得 $x = -\frac{m+3}{4}$. 当 $x = 0$, 则 $-\frac{m+3}{4} = 0$, $\therefore m = -3$; 当 $x = 1$, 则 $-\frac{m+3}{4} = 1$, $\therefore m = -7$.

\therefore 当 $m \neq -3$ 且 $m \neq -7$ 时, 原方程有解.

10. 将原方程化为 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$. $\therefore x_1 = a$, $x_2 = b$.

因方程无解, 所以 a, b 是增根, 即 $\begin{cases} a = \pm 1, \\ b = \pm 1, \\ a \neq b. \end{cases} \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 1$.

11. 去分母太繁, 直接换元不行. 所以要先将方程进行变换, 使用部分分式法是常用的变形技巧. 原方程可化为

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+x+1+x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{19}{6}, \text{ 即 } \frac{x^2+x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{13}{6}.$$

设 $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, 则 $y + \frac{1}{y} = \frac{13}{6} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}$. 所以 $y = \frac{3}{2}$ 或 $y = \frac{2}{3}$.



当 $y = \frac{3}{2}$ 时, 由 $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{3}{2}$, 得 $x_1 = 1$.

当 $y = \frac{2}{3}$ 时, 由 $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{2}{3}$, 得 $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

经检验 x_1, x_2, x_3 均为原方程的根.

12. 由表达式可知 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

$\because (1-z)^2 \geq 0, \therefore 1+z^2 \geq 2z$.

同理 $1+x^2 \geq 2x, 1+y^2 \geq 2y$.

若 $x=0$, 易知 $y=z=0$, 且满足原方程组;

若 $x \neq 0$, 则 $x > 0, y > 0, z > 0. \therefore x = \frac{2z^2}{1+z^2} \leq x = \frac{2z^2}{2z} = z$, 即 $x \leq z$.

同理 $y \leq x, z \leq y. \therefore x = y = z$.

代入原方程组得 $x = \frac{2x}{1+x^2}$.

解得 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ (0 与负值舍去).

\therefore 原方程组的解为 $x_1 = y_1 = z_1 = 0, x_2 = y_2 = z_2 = 1$.

十七、一元一次不等式

1. $-4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$. 选 C.

$$\text{不等式组} \begin{cases} 6x + 5 \geq 3x - 7 \\ \frac{x}{4} < 3 - \frac{x}{2} \end{cases}$$

的解集为 $-4 \leq x < 4$, 其中整数解为 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

2. 选 C

由不等式 $\frac{x+5}{2} - 1 < \frac{ax+2}{2}$ 可得 $(1-a)x < -1$. 若原不等式的解集为 $x > \frac{1}{2}$, 则 $1-a = -2, a =$

3.

3. $x < \frac{2}{3}, x > \frac{4}{3}$. 选 D

$$\text{原不等式变形为 } -3 < \frac{1}{x-1} < 3, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{x-1} > -3, \\ \frac{1}{x-1} < 3, \end{cases} \text{ 整理得 } \begin{cases} \left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) > 0, \\ \left(x - \frac{4}{3}\right)(x-1) > 0 \end{cases}$$

解之, 得 $x < \frac{2}{3}, x > \frac{4}{3}$.

4. 原不等式化为 $(a-2)x < a^2 - 4$.

当 $a > 2$ 时, 不等式的解集为 $x < a+2$;

当 $a = 2$ 时, 不等式无解;

当 $a < 2$ 时, 不等式的解集为 $x > a+2$. 选 D.

5. 当 $a > 1$ 时, $x > a+1$;

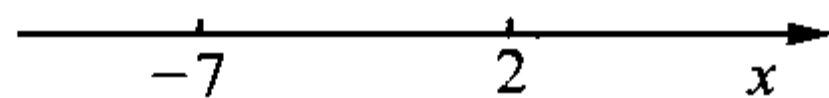


当 $a=1$ 时, 不等式无解;

当 $a<1$ 时, $x<a+1$.

6. $x<-1$

令 $x+7=0$ 或 $x-2=0$, 得 $x=-7$ 或 $x=2$, 它们将实数轴分成三



第 6 题图

部分, 如图

原不等式的解由下面三个不等式的解的全体组成:

$$(1) \begin{cases} x < -7 \\ -(x+7) - [- (x-2)] < 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -7 \leq x \leq 2 \\ (x+7) + (x-2) < 3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x > 2 \\ (x+7) - (x-2) < 3. \end{cases}$$

由(1)得: x 为一切实数; 由(2)得: $-7 \leq x < -1$; 由(3)得: 无解, 故原不等式的解为 $x < -1$.

7. $x < \frac{3}{5}$.

由 $(2a-b)x + a - 5b > 0$ 可得 $(2a-b)x > 5b-a$. 由题意可知当且仅当 $2a-b < 0$ 时, 有 $x < \frac{5b-a}{2a-b}$, 即有 $\frac{5b-a}{2a-b} = \frac{10}{7}$. 所以 $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$. 代入 $2a-b < 0$ 中, 得 $a < 0$. 不等式 $ax > b$ 的解为 $x < \frac{3}{5}$.

8. $p > \frac{100(2q-100)}{100-q}$.

由题意可得到不等式 $m(1+p\%)(1-q\%) > m$, 因为 $m > 0$, 所以 $\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right) > 1$. 又因为 $q < 100$, 所以 $1 - \frac{q}{100} > 0$, 则 $1 + \frac{p}{100} > \frac{1}{1 - \frac{q}{100}} = \frac{q}{100-q}$. 即 $p > \frac{100(2q-100)}{100-q}$.

9. 由 $\frac{4x+a}{3} > 1$ 得 $x > \frac{3-a}{4}$, 由 $\frac{2x+1}{3} > 0$ 得 $2x+1 > 0$, $\therefore x > -\frac{1}{2}$. 由已知只要 $\frac{3-a}{4} \geq -\frac{1}{2}$ 即 $a \leq 5$.

10. 原不等式化为 $(a-2)x > 2b+2$, 分类讨论 $a-2 > 0$ 和 $a-2 < 0$ 时的情况得: 当 $a > 2$ 时, 解集为 $x > \frac{2(b+1)}{a-2}$; 当 $a < 2$ 时, $x < \frac{2(b+1)}{a-2}$.

11. 设至少有 x 人合影: $2.85 + 0.48(x-2) \leq x$, 解得: $x \geq 3.63$, 至少有 4 人参加合影.

12. 设至少答对 x 题: $6x - 2(15-x) \geq 60$, $x \geq 11.25$, 至少做对 12 题.

十八、四边形及特殊四边形

1. $\because ABCD$ 为正方形,

$\therefore AD = BC, \angle ADF = \angle CDF = 45^\circ$.

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDF. \therefore \angle DAF = \angle DCF$.

$\because \angle BAE = \angle CDE = 90^\circ, AB = CD, AE = DE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE. \therefore \angle ABE = \angle DCE. \therefore \angle ABE = \angle DAF$.



$$\therefore \angle ABE + \angle BAF = \angle DAF + \angle BAF = 90^\circ.$$

$$\therefore AF \perp BE.$$

2. 过点 F 作 $MN \parallel BC$ 交 AB 于点 M , 交 CD 于点 N , 则 $DF = \sqrt{2}DN = \sqrt{2}FN = \sqrt{2}AM, CN = FM$.

$$\therefore AE = \sqrt{2}DF, \therefore EM = FN, AE = 2CN. \therefore CF^2 = EF^2 = CN^2 + FN^2.$$

$$\therefore CE^2 = BC^2 + BE^2 = (CN + FN)^2 + (AB - AE)^2 = (CN + FN)^2 + (FN - CN)^2 = 2(CN^2 + FN^2) = CF^2 + EF^2,$$

$\therefore \triangle CEF$ 为等腰直角三角形.

3. 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 则

$$\therefore \angle AMB = 75^\circ, \angle DMC = 45^\circ, \therefore \angle AMD = 60^\circ$$

$\therefore AM = MD, \therefore \triangle AMD$ 为等边三角形.

$\therefore AD = AM, \angle DAM = 60^\circ. \therefore AB \perp BC, \therefore \angle BAM = 15^\circ. \therefore \angle DAE = 75^\circ = \angle AMB.$

$$\therefore \angle AED = \angle ABM = 90^\circ, \therefore \triangle ADE \cong \triangle MAB. \therefore AB = DE.$$

$\therefore AB \parallel CD, AB \perp BC, \therefore CD \perp BC. \therefore$ 四边形 $BCDE$ 为矩形.

$$\therefore BC = DE. \therefore AB = BC.$$

4. 延长 AM, DC 交于点 E , 则

$$\therefore CD \parallel AB, \therefore \angle ABM = \angle MCE, \angle MAB = \angle MEC.$$

$$\therefore BM = CM,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ECM. \therefore AB = CE, AM = EM.$$

$$\therefore AD = AB + CD, \therefore AD = DE. \therefore \angle DAM = \angle MEC. \therefore AM \perp DM.$$

$$\therefore DM \text{ 平分 } \angle ADC. \therefore \angle DAM = \angle BAM.$$

即 AM 平分 $\angle BAD$.

5. 过点 C 作 $CG \perp AD$ 于点 G , 连结 EG, FG , 则

在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$.

$$\therefore AE \perp BC, CG \perp AD, \therefore AE \parallel CG.$$

$$\therefore \text{四边形 } AECG \text{ 为矩形.} \therefore EG = AC = b. \therefore AG = CE.$$

$$\therefore AE \perp BC, AE \perp FM, \therefore FM \parallel CE.$$

同理可得 $EM \parallel CF$.

$$\therefore \text{四边形 } EMFC \text{ 为平行四边形.} \therefore EC \parallel FM \text{ 且 } EC = FM.$$

$$\therefore AG \parallel FM \text{ 且 } AG = FM.$$

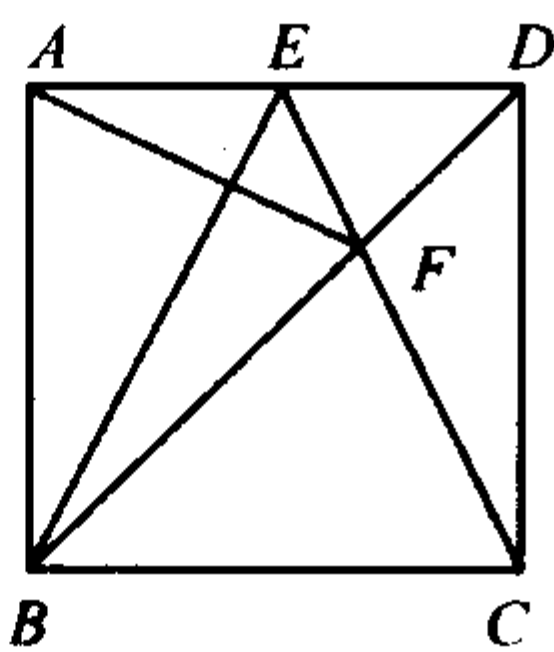
\therefore 四边形 $AMFG$ 为平行四边形.

$\therefore FM \perp AE, EM \perp AF, \therefore M$ 为 $\triangle AEF$ 的垂心. $\therefore AM \perp EF. \therefore FG \perp EF.$

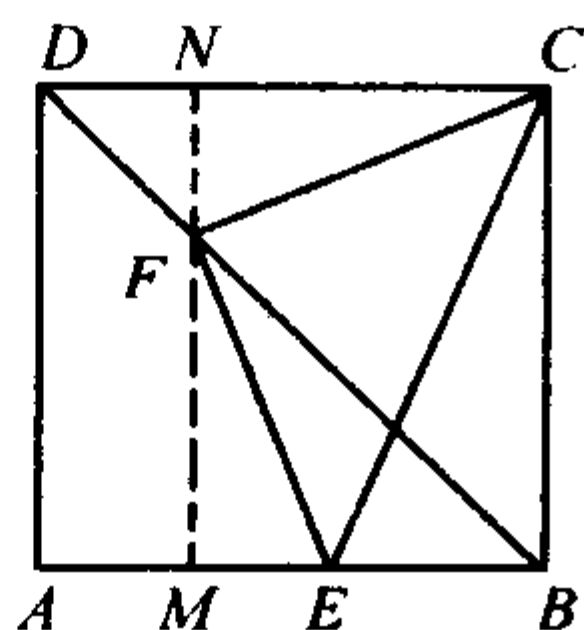
$$\therefore GF = \sqrt{b^2 - a^2}. \therefore AM = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

6. 在正方形 $ABCD$ 中, $AD = AB, \angle BAD = 90^\circ.$

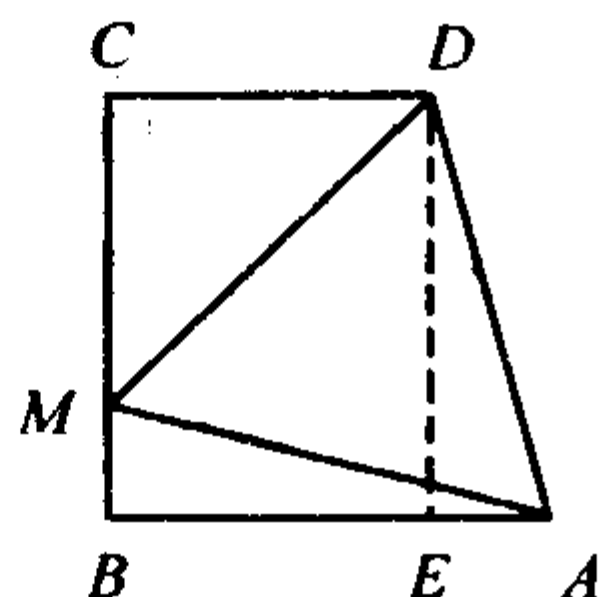
$$\therefore BL \perp AN, \therefore \angle BAL + \angle ABL = 90^\circ.$$



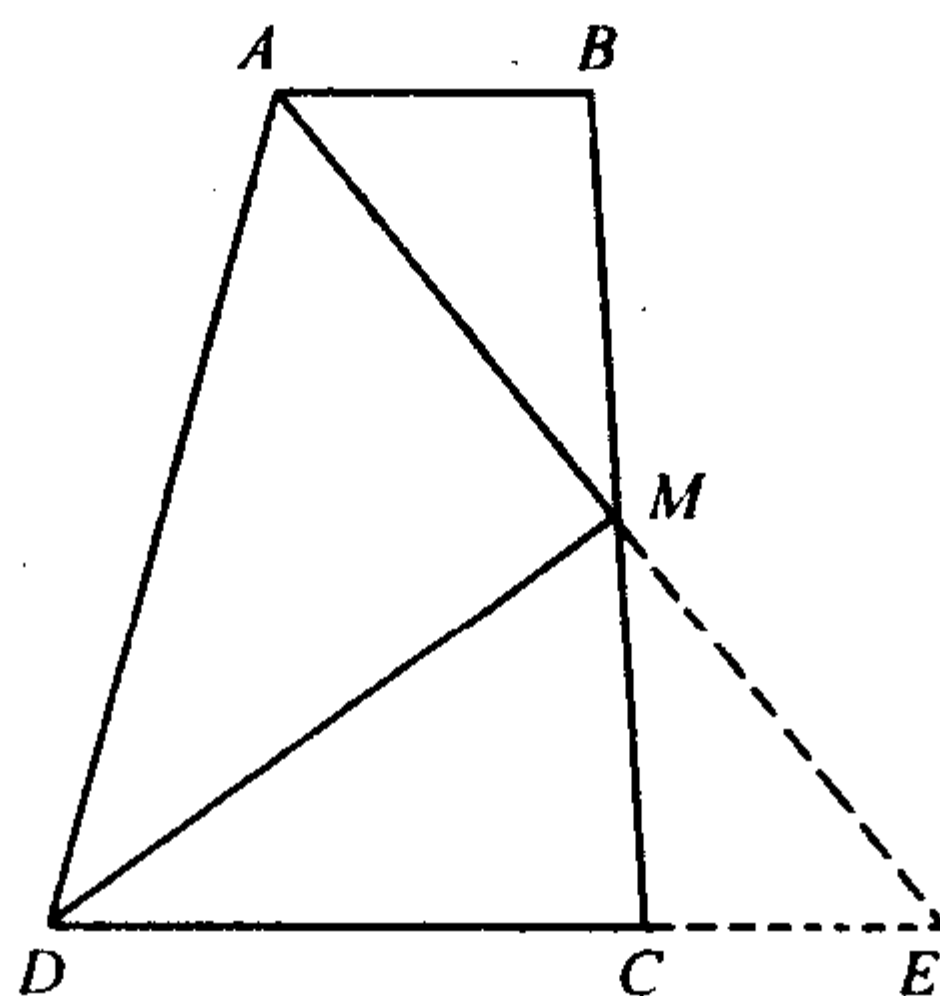
第1题图



第2题图



第3题图



第4题图



$$\therefore \angle DAN = \angle ABL.$$

$$\because \angle AND = \angle BLA = 90^\circ, \therefore \triangle ADN \cong \triangle BAL.$$

$$\therefore AN = BL, \angle DAN = \angle ABL.$$

$$\text{同理可得 } AM = BK, \angle DAM = \angle ABK.$$

$$\therefore \angle MAN = \angle KBL.$$

$$\therefore \triangle NAM \cong \triangle LBK. \therefore MN = KL.$$

$$7. \because \triangle EAD \text{ 为等边三角形}, \therefore AE = AB, \angle EAB = \angle AED = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ABE.$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ, \therefore \angle BAE = 150^\circ. \therefore \angle ABE = \angle AEB = 15^\circ.$$

$$\therefore \angle MED = 45^\circ.$$

$$\because F \text{ 为 } ED \text{ 的中点}, \therefore AF \text{ 垂直平分 } DE. \therefore EM = DM.$$

$$\therefore \angle MDE = 45^\circ. \therefore \angle DME = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABD = 45^\circ, \therefore \angle MBD = 30^\circ. \therefore DM = \frac{1}{2} BD.$$

8. 连结 FH , 则

$$\because H \text{ 为 } \triangle BEF \text{ 的垂心}, \therefore FH \perp BE.$$

$$\text{又 } \because BE \perp AD, \therefore HF \parallel AD.$$

$$\text{同理可得 } EH \parallel DF.$$

$$\therefore \text{四边形 } DEHF \text{ 为平行四边形}. \therefore DE = FH.$$

$$\because BC \perp DG, BE \perp AD, \therefore BC \parallel AD,$$

$$\therefore BE \parallel DG. \therefore \text{四边形 } BEDG \text{ 为平行四边形}. \therefore DE = BG. \therefore BG \parallel FH,$$

$$BG = HF. \therefore \text{四边形 } BHFG \text{ 为平行四边形}. \therefore BH = FG.$$

$$9. \text{延长 } AB \text{ 至点 } F, \text{使 } BF = CD, \text{连结 } CF, \text{则 } BF \parallel CD.$$

$$\therefore \text{四边形 } BFCD \text{ 为平行四边形}. \therefore CF \parallel BD.$$

$$\because AC \perp BD, \therefore AC \perp CF. \because AE - BE = CD, \therefore AE = CD + BE = BE +$$

$$BF = EF. \therefore CE = \frac{1}{2} AF.$$

$$\text{即 } CE = \frac{1}{2} (AB + CD).$$

$$10. \text{过点 } B \text{ 作 } AC \text{ 的垂线 } BO \text{ 于点 } O, \text{过点 } F \text{ 作 } AC \text{ 的垂线 } FG \text{ 于点 } G, \text{则在正方形 } ABCD \text{ 中}, BO = \frac{1}{2} AC, \angle BAC = 45^\circ.$$

$$\because \text{四边形 } ACEF \text{ 为菱形},$$

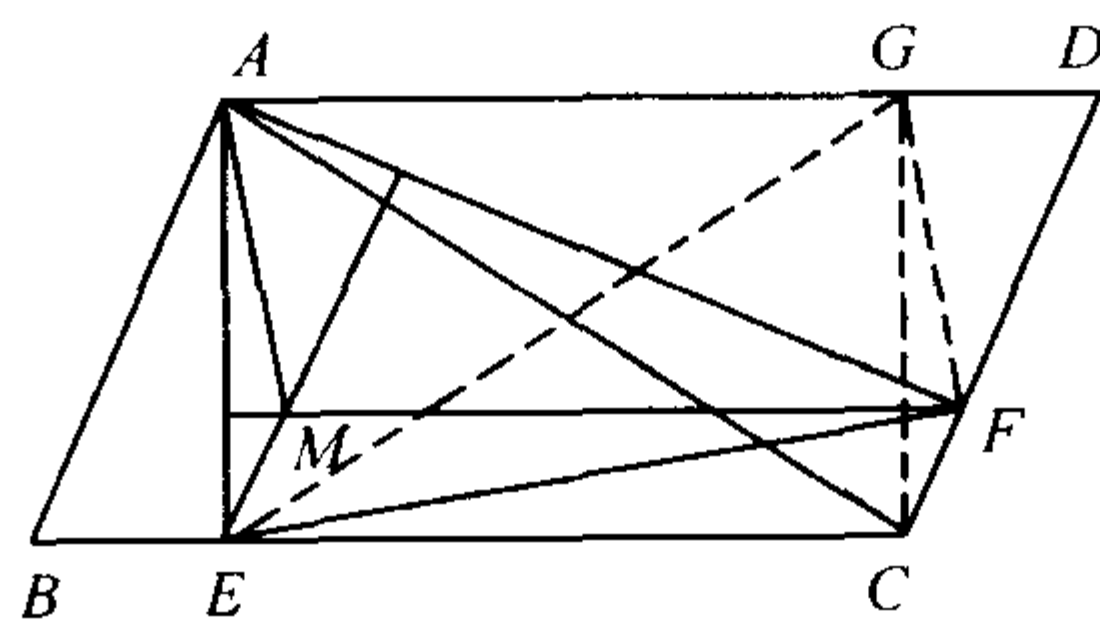
$$\therefore AC \parallel BE, AC = AF, \angle FAE = \angle EAC.$$

$$\text{又 } \because BO \perp AC, FG \perp AC, \therefore FG = BO. \therefore FG = \frac{1}{2} AF.$$

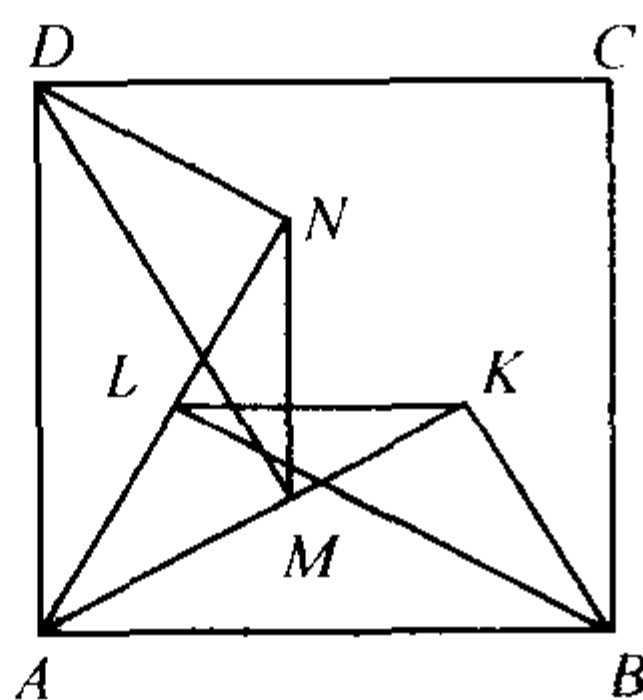
$$\therefore \angle FAC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle BAF = \angle FAE = \angle EAC = 15^\circ.$$

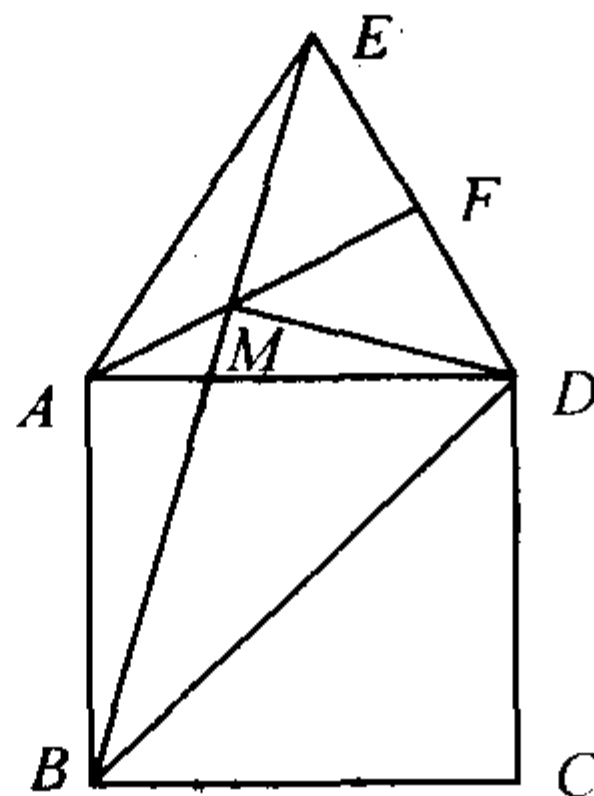
$$\therefore AE, AF \text{ 三等分 } \angle CAB.$$



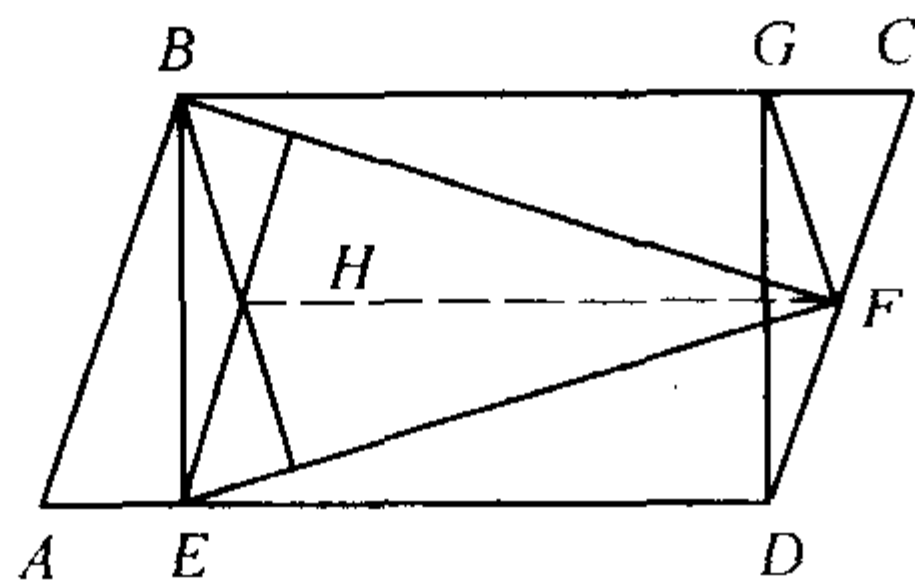
第5题图



第6题图



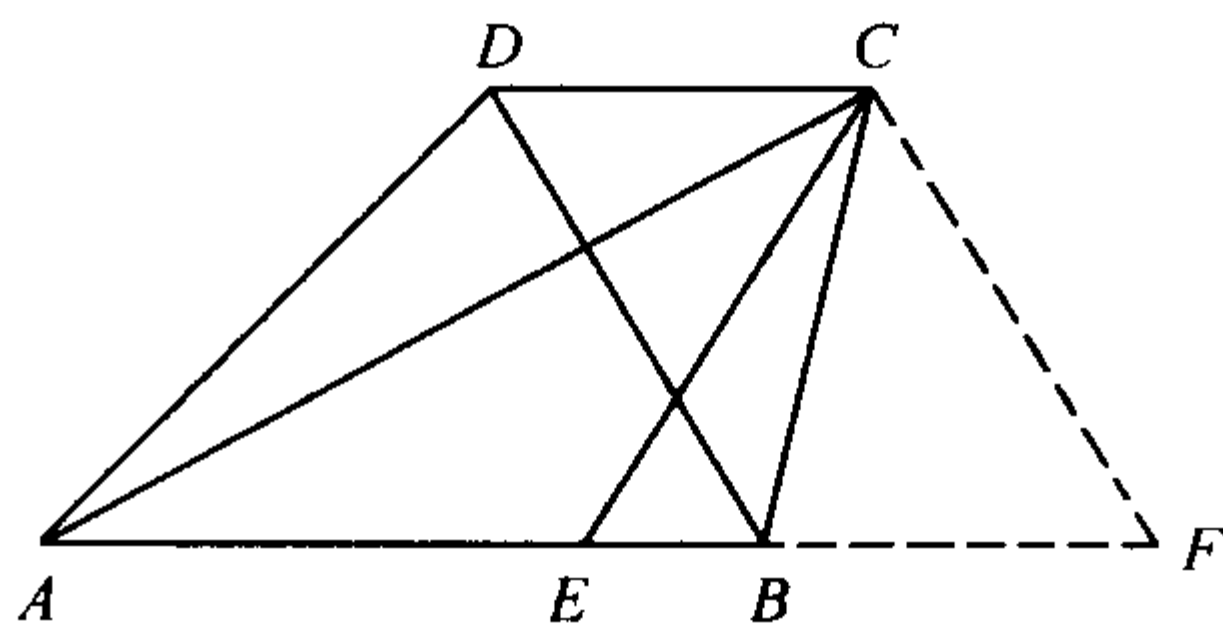
第7题图



第8题图



11. 延长 CB 至 F , 使得 $BF = DE$, 连结 AF, AC .
 $\because \angle AED + \angle ABC = 180^\circ, \therefore \angle ABF = \angle AED$.
 又 $\because AB = AE, \therefore \triangle ABF \cong \triangle AED$. (SAS)
 $\therefore AF = AD, \angle AFB = \angle ADE$.
 $\because BC + DE = CD$,
 $\therefore CF = CB + BF = BC + DE = CD$.
 又 $\because AC = AC, \therefore \triangle AFC \cong \triangle ADC$. (SSS)
 $\therefore \angle AFC = \angle ADC$.



第 9 题图

$\therefore \angle ADC = \angle ADE$. 即 AD 平分 $\angle CDE$. \therefore 四边形 $AMDN$ 为平行四边形. $\therefore AM = DN$. 即 $BC + CD = AF + EF$.

$\therefore AF - CD = BC - EF$. $\because AF - CD = 3, \therefore BC - EF = 3$. $\because AB + BC = 11$,

$\therefore AM = AB + BM = AB + BC = 11$.

$\therefore DN = DE + EN = AM = 11$.

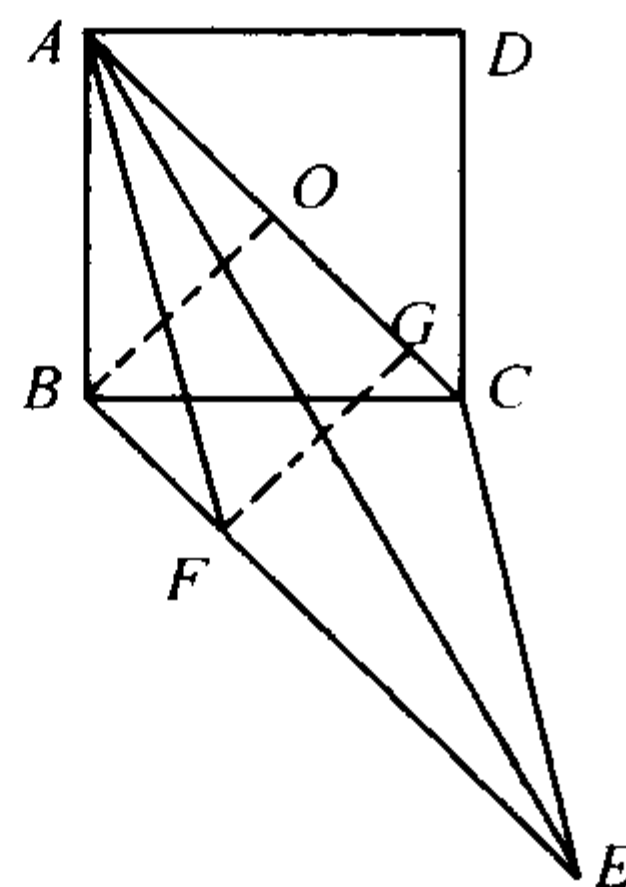
$\because EN = EF, \therefore BC + DE = (BC - EF) + (DE + EN) = 14$.

12. \because 菱形 $ABCD, \therefore AD \parallel BC, \angle ABE = 2\angle ABD, \therefore \angle EAD = \angle AEB$.

$\because AB = AE, \therefore \angle AEB = \angle ABE$. $\because \angle EAD = 2\angle BAE, \therefore \angle BAE = \angle ABD, \therefore AM = BM$.

$\because \angle BME = \angle ABD + \angle BAE = 2\angle BAE$,

$\therefore \angle BME = \angle EAD = \angle AEB, \therefore BM = BE. \therefore AM = BE$.



第 10 题图

十九、三角形、梯形的中位线

1. 取 EC 中点 F , 连结 DF .

2. 取 AD 中点 P , 连结 PE, PF , 证 $PE \parallel \frac{1}{2}BD, PF \parallel \frac{1}{2}AC$.

3. 连结 PQ 交 EF 于 K , 连结 EQ, PF, MK, FN . 证 $\square EPFQ$, 得 $PK = KQ$, 再证 $MK \parallel FN$, 得到 $\square MFNK$.

4. 连结 BD , 取 BD 中点 P , 连结 PE, PF , 证明 $PE \parallel \frac{1}{2}AB, \frac{1}{2}DC = PF$.

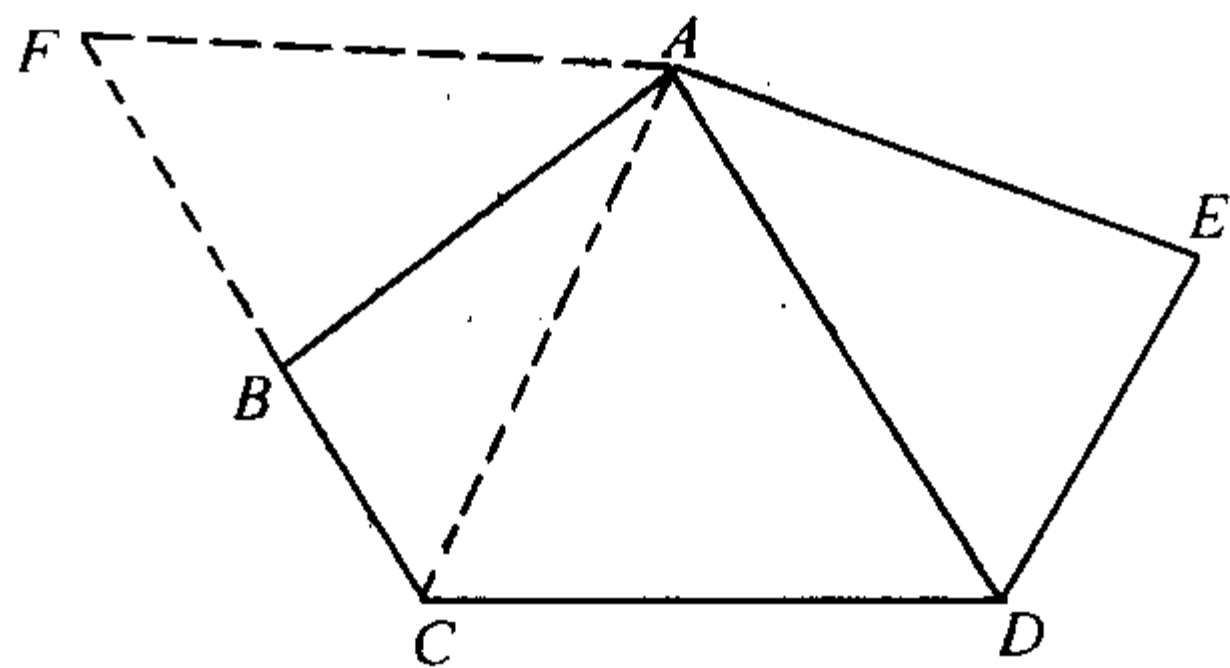
5. 连结 DN, EF, AM . 证明 $DN \parallel AM$, 再证 $\square DEFN$.

6. 取 AF 中点 P , 连结 OP , 证明 $OP \parallel \frac{1}{2}CF$, 再证 $OE = OP$.

7. 连结 BD , 作 BD 的中点 M , 连结 EM, FM , 则

$\because E$ 是 AD 中点, M 为 BD 中点, $\therefore EM$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线.

$\therefore EM \parallel AB$, 且 $EM = \frac{1}{2}AB. \therefore \angle FEM = \angle BGF$.



第 11 题图



同理可得 $FM \parallel CD, FM = \frac{1}{2}CD, \angle EFM = \angle CHF$.

$\because AB = CD, \therefore \angle FEM = \angle EFM. \therefore \angle CHF = \angle BGF$.

8. 由条件 $\angle B = 2\angle C$, 想到处理这种倍分条件时的常用方法: 延长 CB 到 N , 使 $BN = AB$, 连结 AN , 这时必有 $\angle N = \angle C$, 从而有 $AN = AC$, 进而得 $DN = DC$, 从中不难推出 $DE = \frac{1}{2}AB$.

9. 此题欲证 $EF = \frac{1}{2}(DC - AB)$, 由结论形式及中点条件, 想到利用三角形中位线去解, 为此连结 DE 并延长到 M , 使 $EM = DE$, 连 CM , 则必有 $EF = \frac{1}{2}CM$, 故只须证 $CM = DC - AB$, 注意 $\square DAMB$, 则 $MB \parallel AD$, 延长 MB 交 DC 于 N , 则 $CN = DC - AB$, 故只须证: $CM = CN$. 注意 $BN = AD = MB$, 故只须证 $CB \perp MN$. 这点由 $\angle D + \angle C = 90^\circ$ 不难证出.

10. 取 AC 的中点 F , 连结 EF, DF , 则

$\because E$ 是 BC 的中点, $\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore EF = \frac{1}{2}AB$ 且 $EF \parallel AB. \therefore \angle CEF = \angle B$.

$\because \angle B = 2\angle C, \therefore \angle CEF = 2\angle C. \because AD \perp BC, \therefore DF = CF$.

$\therefore \angle CDF = \angle C$.

$\therefore \angle CEF = \angle CDF + \angle DFE, \therefore \angle DFE = \angle C$.

$\therefore \angle CDF = \angle DFE. \therefore DE = FE. \therefore DE = \frac{1}{2}AB$.

11. 过点 C 作 $CF \parallel AB$, 交 DN 的延长线于点 F , 连结 EF , 则 $\angle DBN = \angle FCN$.

$\because N$ 是 BC 的中点, $\therefore BN = CN$.

$\therefore \angle BND = \angle CNF, \therefore \triangle BDN \cong \triangle CFN$.

$\therefore BD = CF, DN = FN$.

$\because M$ 为 DE 的中点, $\therefore MN$ 为 $\triangle DEF$ 的中位线. $\therefore MN \parallel EF$.

$\because CE = BD, \therefore CE = CF. \therefore \angle CEF = \angle CFE$.

$\because \angle ECF + \angle CEF + \angle CFE = 180^\circ, \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$.

$\therefore \angle CEF + \angle CFE = \angle BAC$.

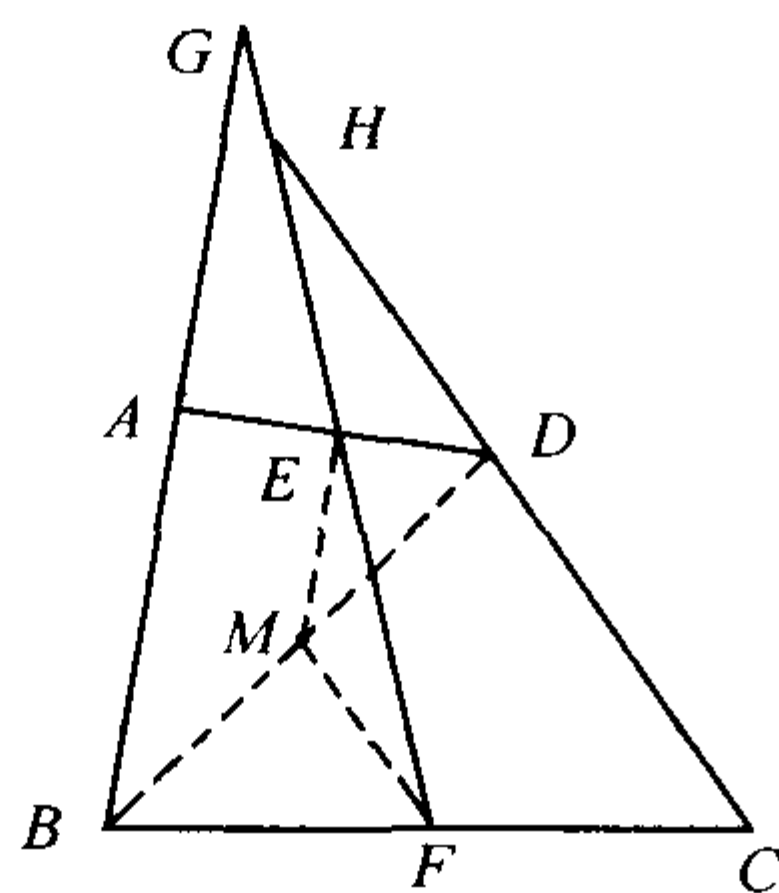
$\because \angle BAC = 2\angle CAH, \therefore \angle CEF = \angle CAH. \therefore AH \parallel EF. \therefore MN \parallel AH$.

12. 此题有角平分线的垂线条件, 故想到常用辅助线: 延长 AE, AF 分别交 BC 于 M, N , 则有 $AE = EM, AF = FN$, 所以 $EF \parallel BC$.

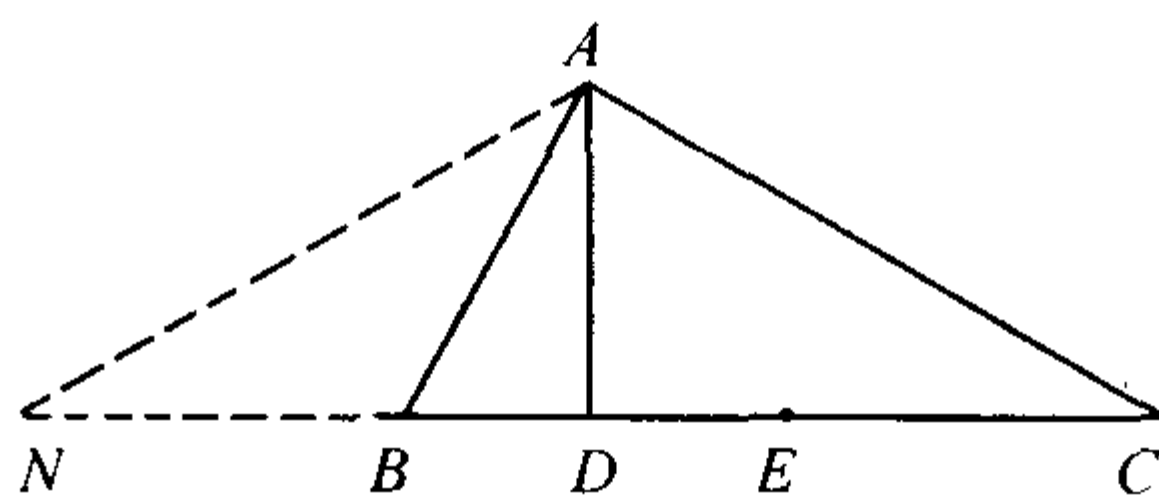
分别延长线段 AE, AF 交 BC 于 M, N .

$\because AE \perp BE, \therefore \angle AEB = \angle MEB = 90^\circ$.

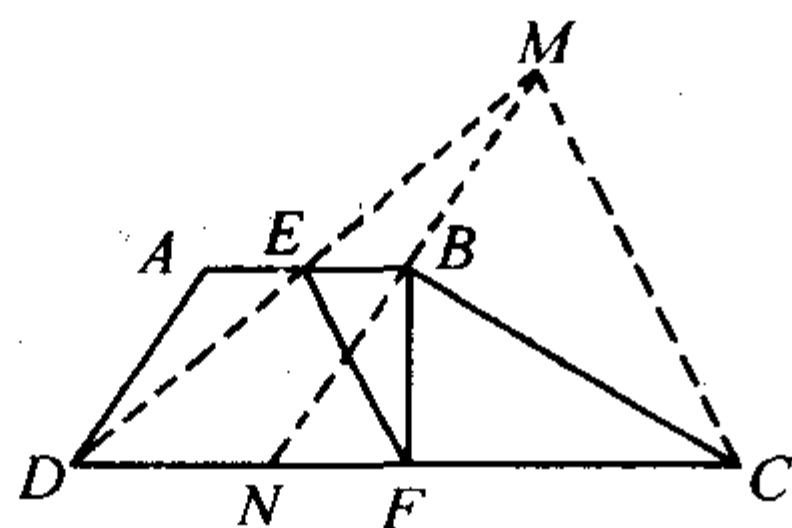
$\because BE = BE, \angle ABE = \angle MBE,$



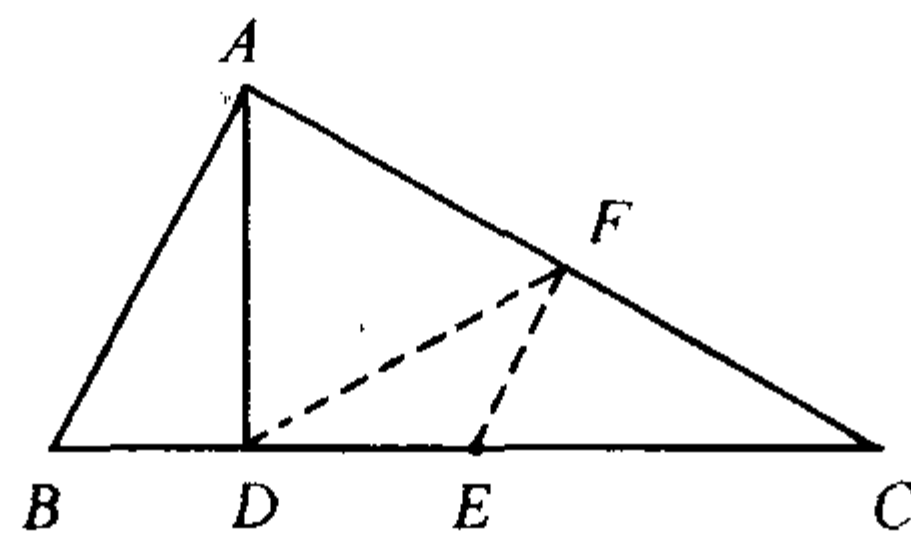
第7题图



第8题图



第9题图



第10题图



$\therefore \triangle AEB \cong \triangle MEB, \therefore AE = EM.$

同理 $AF = FN, \therefore EF \parallel BC.$

二十、圆的基本性质

1. A

如图, 连 OB 交 AC 于 M , 作 $ON \perp AB$ 于 N , 由 $AB = BC$, 得 $OM \perp AC, AM = MC, OM = \frac{1}{2} CD = \frac{7}{2}, BM = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$. 又 $\triangle ABM \sim \triangle ONB, \frac{OB}{AB} = \frac{BN}{BM}$, 由 $OB = 4, BM = \frac{1}{2}, BN = \frac{1}{2} AB$ 得 $\frac{1}{2} AB^2 = 4 \times \frac{1}{2}$, 故 $AB = 2$.

2. C

设 $\widehat{AC}, \widehat{CB}, \widehat{BD}$ 的度数为 m , 则 \widehat{AD} 的度数为 $360^\circ - 3m$. 由 $\angle AED = \frac{1}{2} [m + (360^\circ - 3m)] = 130^\circ$, 得 $m = 50^\circ$. 从而 $\angle ACD = \frac{1}{2} (360^\circ - 3m) = 105^\circ$.

3. D

如图, 作 $OE \perp CD$ 交 CD 于 E , 连结 OC , $AB = 24\text{cm}$, 则 $OC = 12\text{cm}$, $OM = 6\text{cm}$. 在 $\text{Rt}\triangle OME$ 中, $\angle OME = 30^\circ$ 故, $OE = 3\text{cm}$; $\text{Rt}\triangle OCE$ 中, $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15}\text{cm}$, 易知 $DC = 2CE = 6\sqrt{15}\text{cm}$.

4. C

如图, 连结 AD, AE, D, E 是 $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ 中点, 故 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$, 于是 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, 即 $\angle AMN = \angle ANM$, 所以 $\triangle AMN$ 是等腰三角形.

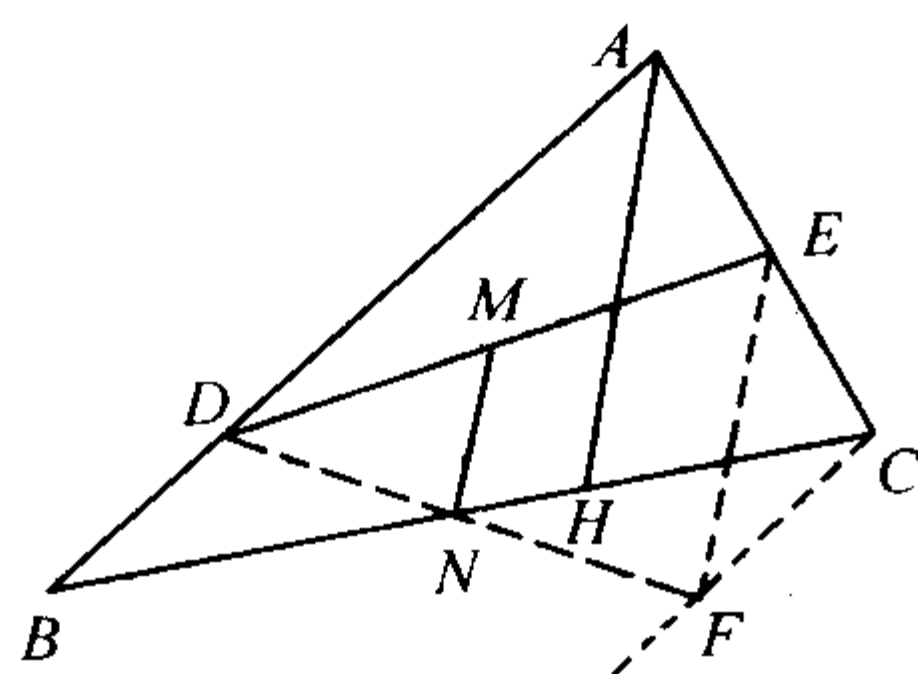
5. 56

如图, 设 $\angle BAD = \alpha$, 则 $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$. 由于 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \alpha, BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos(180^\circ - \alpha)$, 所以, $AB^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 = 2(AB \cdot AD + BC \cdot CD) \cos \alpha$, 由于 $AB^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 = 25^2 + 60^2 - 39^2 - 52^2 = 0$, 故 $\alpha = 90^\circ$, 于是 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{25^2 + 60^2} = \sqrt{4225} = 65$, 由托勒密定理知 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD = 3640$, 故 $AC = 3640 \div 65 = 65$.

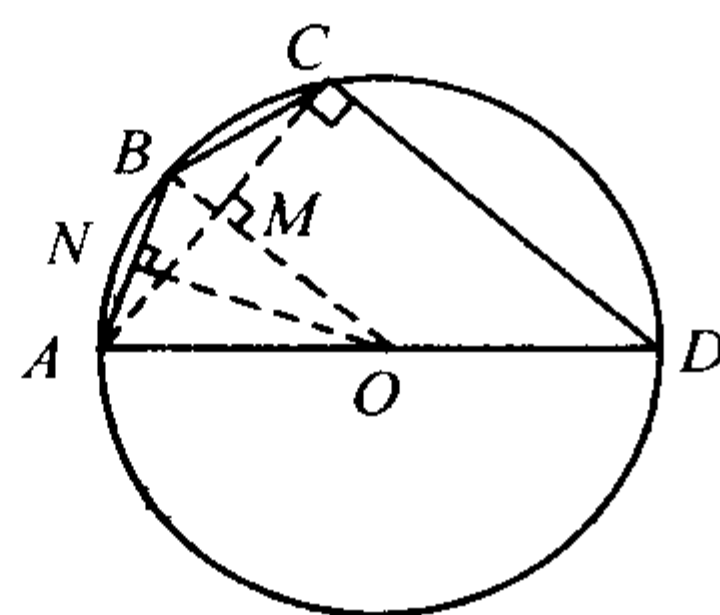
6. 45°

连结 AO , 则 $\angle OAP = 90^\circ$, 所以 $2\angle PCA = 2(\angle CBO + \angle CPO) = \angle CBO + \angle CAO + \angle APO = \angle AOP + \angle APO = 90^\circ$, 所以 $\angle PCA = 45^\circ$.

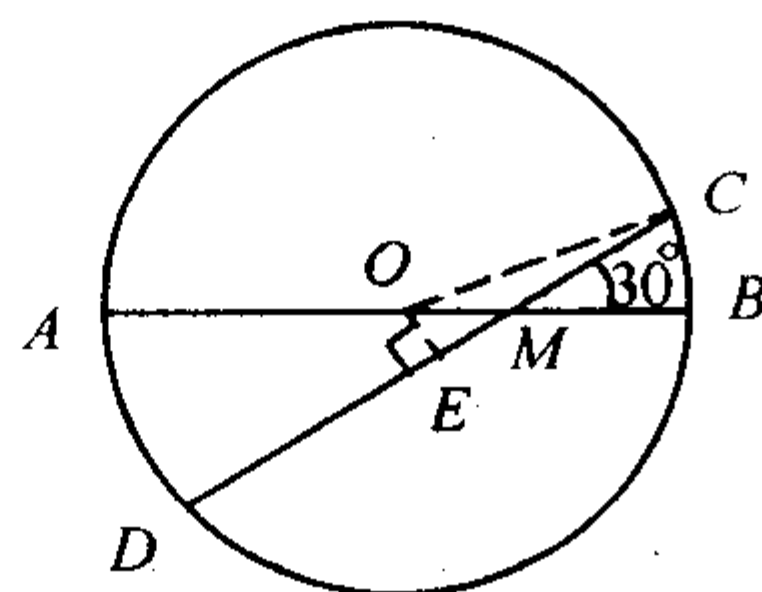
7. 7



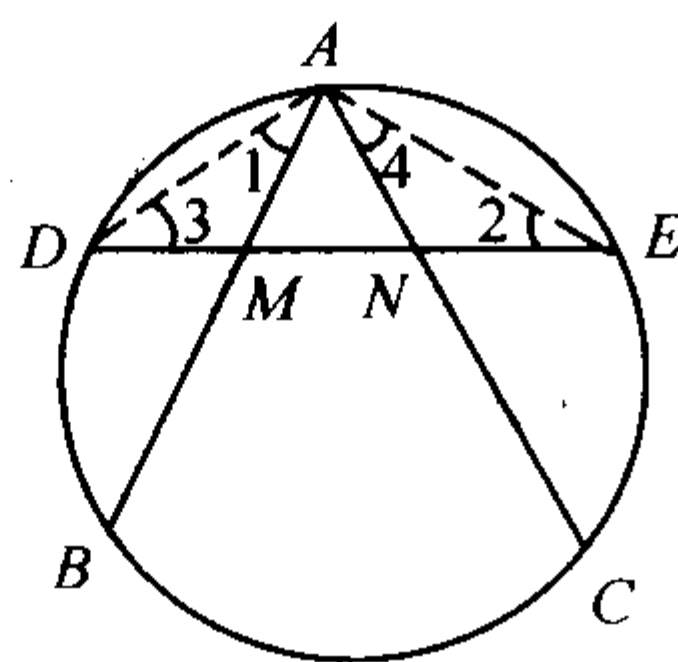
第 11 题图



第 1 题图



第 3 题图



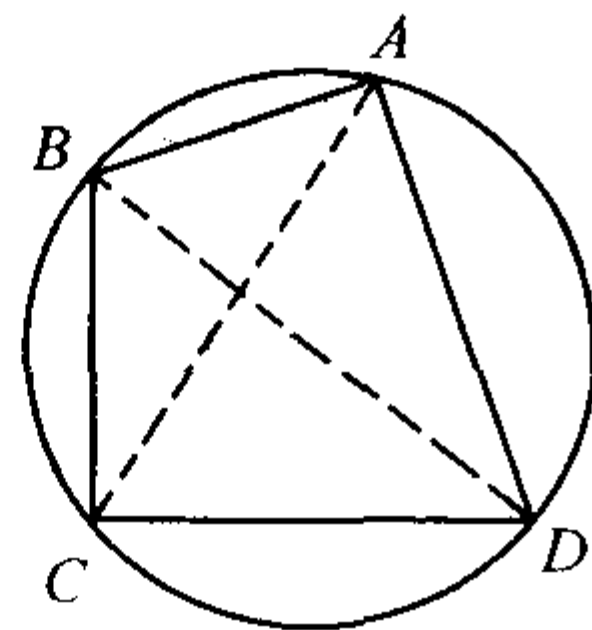
第 4 题图



如图,过 P 作 $PQ \perp AB$ 于 Q , 连 BM 、 AN , 则 $\angle M = \angle N = 90^\circ$, $\triangle APQ \sim \triangle ABM$, $\triangle BPQ \sim \triangle BAN$, 于是, 有 $\frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AM}$, $\frac{BP}{BQ} = \frac{AB}{BN}$, 即 $AP \cdot AM = AB \cdot AQ$, $BP \cdot BN = AB \cdot BQ$, 两式相加得 $AP \cdot AM + BP \cdot BN = AB^2 = 7$.

8. 6cm

设最短距离为 x cm, 依题意得 $3x = 18$, $x = 6$, 所以最短距离为 6cm. 显然, 最长距离与最短距离之差是直径的长, 则直径长 $= 18 - 6 = 12$ cm, 故可求得半径长为 6cm.



第 5 题图

9. 连 EB 、 EC , 过 C 作 $CG \perp EB$ 于 H , 交 AE 于 G .

$\because BD$ 为 $\odot O_2$ 的直径, $\therefore \angle BED = 90^\circ$, 即 $DE \perp BE$.

又 $\because CG \perp BE$, $\therefore CG \parallel DE$.

又 $\because AB:BC:CD = 2:1:3$, $\therefore AC:CD = 3:3 = AG:GE$.

$\therefore AG = GE$. $\therefore CH:DE = BC:BD = 1:4$,

而 $CG:DE = AC:AD = 1:2$, $\therefore H$ 为 CG 中点.

故 EB 为 CG 的垂直平分线.

又 AC 为 $\odot O_1$ 直径, 所以 $\angle AEC = 90^\circ$. $\therefore \triangle GEC$ 为等腰直角三角形. $\therefore \angle ECG = 45^\circ$.

故 $ED:EA = 2CG:2GE = \sqrt{2}$.

10. 阴影部分的周长是由两条弧长和线段 AC 组成的. $\widehat{AB} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{1}{2}\pi$; $\widehat{BC} = \frac{1}{8} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. \therefore 阴影部分周长 $= \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ (cm)

阴影部分的面积是由 $S_{\text{扇形}ACB}$ 与 $S_{\text{弓形}}$ 的差构成的. $S_{\text{扇形}ACB} = \frac{1}{8}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$.

$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}OAB} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ (cm²)

11. 连结 AP 、 DP .

$\because PE \perp BQ$, $\therefore \angle PEA = 90^\circ$.

又 $PF \perp AD$, $\therefore \angle PFA = 90^\circ$. $\therefore \angle PEA + \angle PFA = 180^\circ$.

$\therefore P, E, A, F$ 四点共圆. $\therefore \angle PFE = \angle PAB$.

又 PQ 为 $\odot O_1$ 的切线, $\therefore \angle BPH = \angle BAP$. $\therefore \angle PFE = \angle BPH$.

同理 $\angle CPH = \angle PFG$.

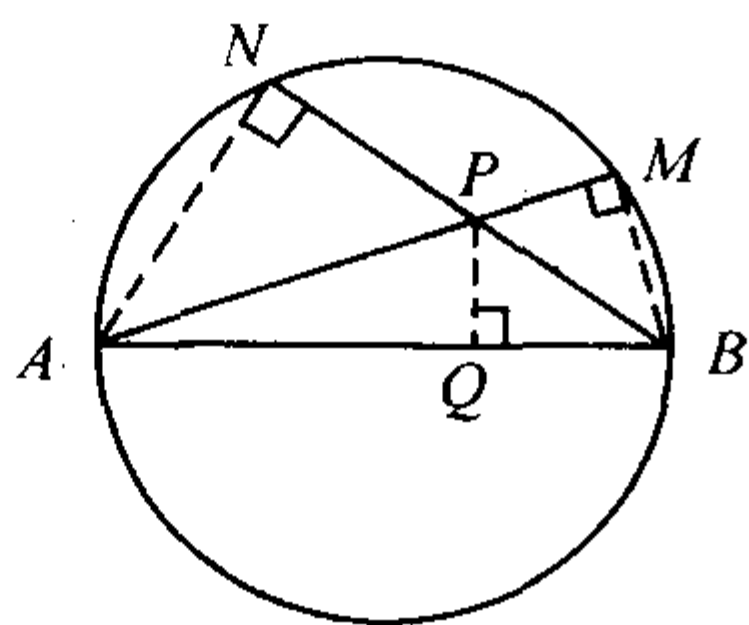
所以 $\angle BPH + \angle CPH = \angle PFE + \angle PFG$, 即 $\angle BPC = \angle EFG$.

12. 因为 AE 与 BF 是互相垂直的两条直径, 所以 $ABEF$ 为正方形. 又设 AC 交 EF 于 D , 显然

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形}ABEF} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$.

下面, 我们只须证 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BPQ}$ 即可.

由于 $\triangle ABP$ 为 $\triangle ABD$ 与四边形 $ABPQ$ 公共部分, 所以我们只要证 $S_{\triangle BPD} = S_{\triangle BPQ}$, 为此, 只需证



第 7 题图



$DQ \parallel PB$ 即可, 也就是, 只需证 $DQ \perp AE$, 即 $\angle DQE = 90^\circ$ 即可. 事实上, 这很容易实现:

$\because \angle QED = 45^\circ$, 而 $\angle QCD = \angle BCA = \angle AFB = 45^\circ$, $\therefore \angle QED = \angle QCD$, $\therefore Q, E, C, D$ 四点共圆.

又 $\angle ACE = 90^\circ$ (直径上的圆周角), 而 $\angle DQE + \angle DCE = 180^\circ$, 又 $\angle DCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DQE = 90^\circ = \angle POE$, 因此, $DQ \parallel PB$, $\therefore S_{\triangle BPD} = S_{\triangle BPQ}$. 进而有 $S_{\triangle ABD} = S_{\text{四边形}ABQP} = 1$.

二十一、圆柱、圆锥、圆台

1. C; 2. C; 3. C; 4. C; 5. $\frac{P}{2}\sqrt{\pi Q}$; 6. 5cm; 7. $3\pi:4$; 8. $\frac{\pi}{4}$

9. 设圆柱的底面半径为 r , 则 $\frac{R-r}{R} = \frac{x}{h}$, $\therefore r = \frac{1}{h}(Rh - Rx)$.

$$\therefore V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 (h-x)^2 \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$\leq \frac{1}{2h^2} \pi R^2 \left(\frac{2x + h - x + h - x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27} \pi R^2 h.$$

当且仅当 $h-x=2x$, 即 $x = \frac{h}{3}$ 时取等号,

\therefore 当 $x = \frac{h}{3}$ 时, 圆柱的体积最大, 最大体积为 $\frac{4}{27} \pi R^2 h$.

10. 设正方体的棱长为 x , 则 $\frac{CE}{SO} = \frac{AC}{AO}$, $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x}{1}$.

解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故正方体棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

11. 设圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 体积为 V , 则由其母线长为 1, 可得

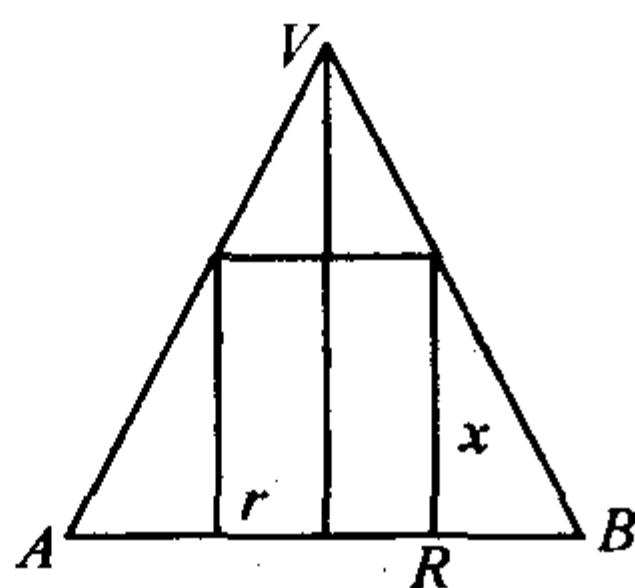
$$1 = r^2 + h^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + h^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4} r^4 h^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi^2} V^2}.$$

由上式可知, 当 $\frac{r^2}{2} = h^2$, 即 $\tan \theta = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 亦即 $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时, V 取到最大值.

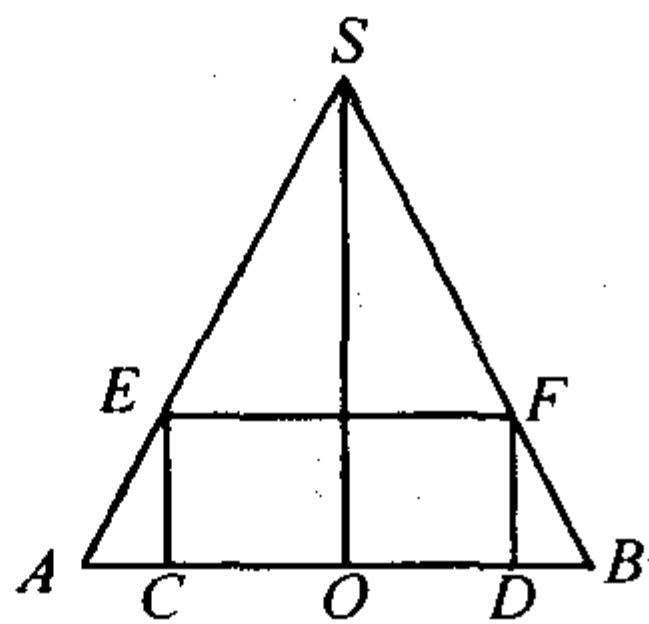
易求圆心角为 $\varphi = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$.

12. 由 $S_{\text{全}} = 3S_{\text{底}}$, 得 $S_{\text{侧}} = 2S_{\text{底}}$, 于是 $\cos \theta = \frac{r}{l} = \frac{\pi r^2}{\pi r l} = \frac{S_{\text{底}}}{S_{\text{侧}}} = \frac{1}{2}$.

即得所求圆心角为 $\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$ (弧度) $= 180^\circ$.



第 9 题图



第 10 题图

二十二、正、反比例函数与一次函数

1. 依题意得



$$\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 1-|x-1| \neq 0, \therefore \\ x+2 > 0. \end{cases} \begin{cases} x \leq 3, \\ x \neq 0, \text{ 且 } x \neq 2, \\ x > -2. \end{cases}$$

\therefore 自变量 x 的取值范围为 $-2 < x \leq 3$, 且 $x \neq 0$, 且 $x \neq 2$.

$$2. \text{ 依题意得 } \begin{cases} 0 < 2 - \frac{m}{4} < 1, \\ m^2 - 7m + 11 = 1. \end{cases}$$

①

②

由①得 $4 < m < 8$.

由②得 $m = 2$ 或 $m = 5$. $\therefore m = 5$.

3. \because 方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两个根为 a, b .

$$\therefore a + b = -\frac{3}{2}, ab = -\frac{1}{2} \text{ 即 } P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore P \text{ 点关于 } x \text{ 轴对称的点 } P'\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$, P' 点坐标满足该式, $\therefore \frac{3}{2} = \frac{k}{-\frac{1}{2}}$,

解得 $k = -\frac{3}{4}$, \therefore 反比例函数的解析式为: $y = -\frac{3}{4x}$.

4. 因为 x 与 y^2 成反比例, 所以 $xy^2 = m$.

由 $x = 24, y = 2$, 得 $m = 24 \times 2^2 = 96$;

因为 y 与 z^2 成正比例, 所以 $y = nz^2$.

由 $y = 18, z = 3$ 得 $n = \frac{y}{z^2} = \frac{18}{3^2} = 2$.

$$96 = xy^2 = x(2z^2)^2 = 4xz^4. \therefore x = \frac{96}{4z^2} = \frac{24}{z^2} = \frac{24}{1^2} = 24.$$

5. 有两个交点, 必定是 ab 同号. 当 ab 异号时, 解方程组 $\begin{cases} y = bx + c, \\ y = \frac{a}{x} \end{cases}$ 得到: 当 $x \neq 0$ 时, $bx^2 + cx - a = 0$, $\therefore c^2 + 4ab > 0$. 那么不难得到: 只有一个交点必定 a, b 异号且 $c^2 + 4ab = 0$; 没有交点时, a, b 异号且 $c^2 + 4ab < 0$.

6. 根据题意, 设正比例函数图像上的一点为 P , 点 P 的坐标为 (x, kx) , 由点 P 到原点的距离为 $4\sqrt{3}$ 的条件, 再根据勾股定理可得: $x^2 + (kx)^2 = (4\sqrt{3})^2$ ①; 又由点 P 到垂足间的线段和 x 轴及该函数图像围成的图形是直角三角形且面积为 $6\sqrt{3}$, 得到: $\frac{1}{2} \cdot |x| \cdot |kx| = 6\sqrt{3}$ ②; 而已知 $k < 0$, 将②式化简可得: $x^2 = \frac{12\sqrt{3}}{-k}$, 将此式代入①式可以求出 k 的值分别为: $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, k_2 = -\sqrt{3}$; 将 k_1 与 k_2 代

入正比例函数 $y = kx$ 中可得所求的正比例函数解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 或 $y = -\sqrt{3}x$.

7. 当 $x \geq a$ 时, 原函数可化为 $y = 3x - a - b - c$;

当 $a > x \geq b$ 时, 原函数可化为 $y = x + a - b - c$;

当 $b > x \geq c$ 时, 原函数可化为 $y = -x + a + b - c$;

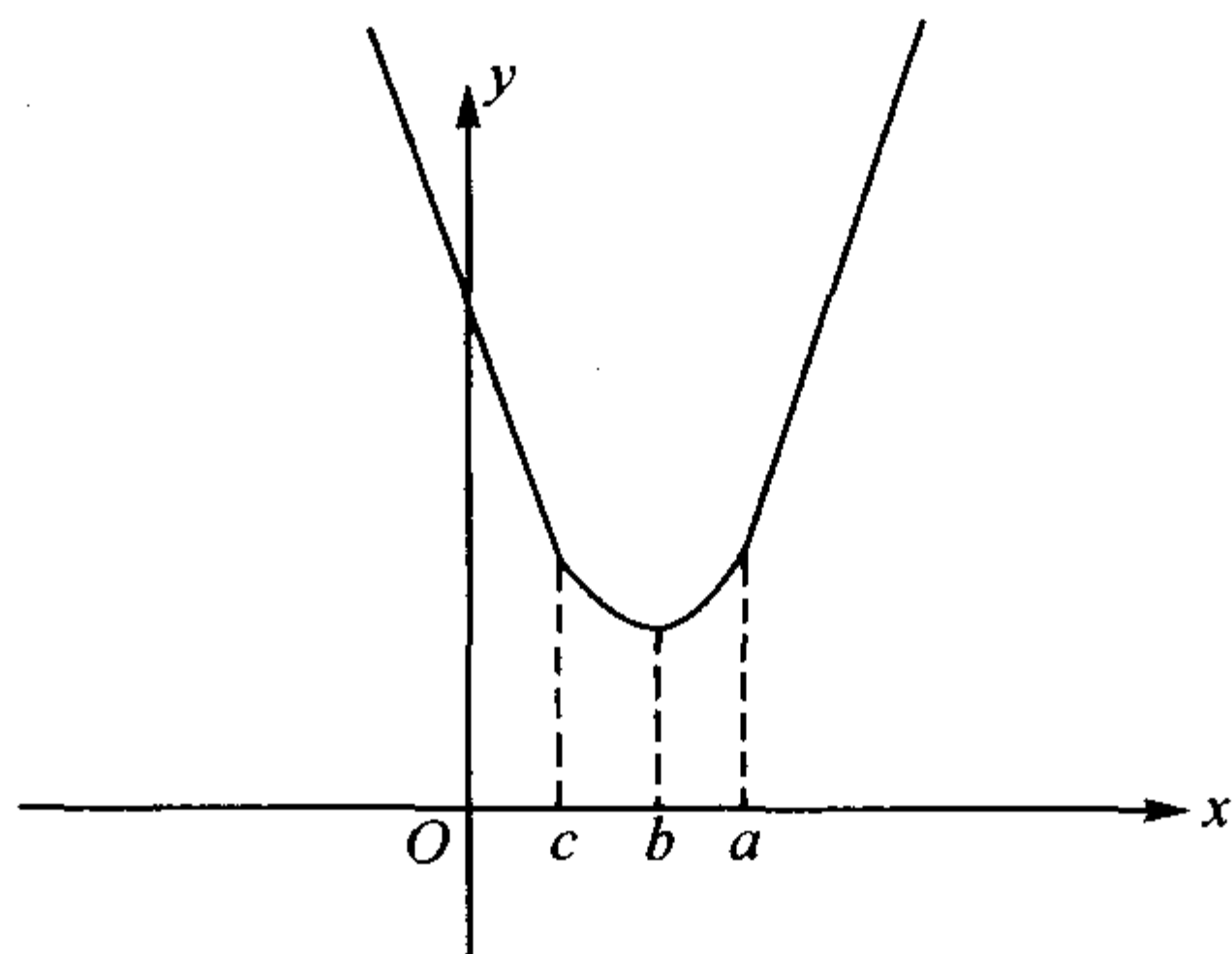


当 $c > x$ 时, 原函数可化为 $y = -3x + a + b + c$.

∴ 原函数解析式为

$$y = \begin{cases} 3x - a - b - c, & (x \geq a) \\ x + a - b - c, & (a > x \geq b) \\ -x + a + b - c, & (b > x \geq c) \\ -3x + a + b + c, & (c > x) \end{cases}$$

图像如图, 由图像可得函数最小值为: $a - c$.



第7题图

8. 要使 y 随 x 的增大而减小, 依据一次函数的性质, 只需 $2m - 3 < 0$, 故得此时 $m < \frac{3}{2}$. 同样要使得函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴上方, 必须有 $4 - n > 0$, 所以得出: $n < 4$; 由函数图像所在的象限, 可以得出 $2m -$

$3 > 0$ 且 $4 - n > 0$, 则 $m > \frac{3}{2}$ 且 $n < 4$. 此题可以自行变换条件, 如使得 y 随 x 的减小而减小等.

9. (1) 点 P 在 y 轴上, 则 $x = 0$, $|y| = 3$, 那么点 P 的坐标为 $(0, 3)$ 或 $(0, -3)$. 又如(2)中, 点 M 在第三象限则有点 M 的坐标符号为 $(-, -)$, 根据到 x 轴, y 轴的距离得到 M 的坐标为 $(-\frac{3}{2}, -5)$, 而从(3)得到点 N 在第二象限, 那么点 N 关于 x 轴对称的点应在第三象限且到 x 轴的距离保持不变, 故对称点 N' 的坐标是 $(-2, -\sqrt{3})$.

10. 设金星绕太阳一周约需 x 日, 因为 T^2 与 R^3 成正比例, 所以 $T^2 = kR^3$. 由此可得 $\frac{365^2}{x^2} = \frac{150^3}{108^3}$
∴ $x \approx 223$.

金星绕太阳一周约需 223 日.

11. 设物体离地面高 x 千米时, 物体就只有 4 千克重. F 与 r^2 成反比例. 由此可得

$$9 \times 6400^2 = 4(x + 6400)^2$$

$$\Rightarrow 3 \times 6400 = 2(x + 6400) \text{ 或 } 3 \times 6400 = -2(x + 6400)$$

$$\Rightarrow x = 3200 \text{ 或 } x = -3200 (\text{不合})$$

物体离地面高 3200 千米.

12. 假设每天生产徽章需要工人 y 人, 每人每天能生产徽章 x 个, 那么要建立 y 关于 x 的函数解析式还需知道一天的产量是多少, 由题意得: 一天能生产 $4000 \div 40 = 100$ 个. 故解析式为 $y = \frac{100}{x}$ ($x > 0$), 结合题意可立即得出自变量 x 的取值范围是: $5 \leq x \leq 8$, 运用数形结合的数学思想, 从反比例函数 $y = \frac{100}{x}$ 中 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小得: $\frac{100}{5} \geq y \geq \frac{100}{8}$ 即 $20 \geq y \geq 12\frac{1}{2}$, y 又必须是正整数 (想一想为什么?), 因而得到 40 天内完成这批徽章, 大约需要工人 13 至 20 人.

二十三、统计和概率

1. $\bar{x} = 99.7$; 2. $\bar{x} = \frac{1}{6}(a + 2b + 3c)$ 3. 13; 4. 2000



$$5. \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{n} = \frac{a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = a\bar{x}.$$

$$\begin{aligned} 6. W &= \frac{(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \cdots + (x_n + y_n + z_n)}{n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} + \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \\ &= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \bar{x} &= \frac{1}{8}(100 \times 1 + 90 \times 2 + 74 \times 4 + 64 \times 1) \\ &= \frac{1}{8} \times 640 = 80. \end{aligned}$$

8. (1) 当 n 是奇数时, $x_{\frac{n+1}{2}}$ 是中位数;

(2) 当 n 是偶数时, $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ 是中位数.

$$9. \bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_n) = a + \frac{1}{2}(n-1)d.$$

10. 总体是该地区初三毕业生的视力的全体, 个体是每个初三毕业生的视力, 样本是 200 名被测的初三毕业生的视力的集体, 样本容量是 200.

11. (1)(2) 随机事件; (4) 不可能事件; (3)(5) 必然事件.

12. 平均抗断强度都为 31.15(千克/厘米²), 但 $S_{\text{红星}}^2 = 6.70 < S_{\text{中天}}^2 = 15.81$, 红星厂产品质量优于中天厂的产品质量.

二十四、二次根式

1. B; 2. D; 3. B 4. B

5. 79; 6. $x + y = 12$; 7. $\sqrt{10} + \sqrt{2}$; 8. 8

$$\begin{aligned} 9. \text{原式} &= \sqrt{(x-4)-2\sqrt{x-4}+1} + \sqrt{(x-4)-4\sqrt{x-4}+4} \\ &= |\sqrt{x-4}-1| + |\sqrt{x-4}-2|. \end{aligned}$$

$$\because 5 \leq x \leq 8, \therefore 1 \leq \sqrt{x-4} \leq 2.$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{x-4} - 1 + 2 - \sqrt{x-4} = 1.$$

$$10. \because x = \sqrt{19-8\sqrt{3}} = 4-\sqrt{3},$$

$$\therefore (4-x)^2 = 3. \text{ 即 } x^2 - 8x + 13 = 0.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{x^2(x^2-8x+13) + 2x(x^2-8x+13) + (x^2-8x+13) + 10}{(x^2-8x+13) + 2} = 5.$$

$$11. \because x = \sqrt{5+\sqrt{5}}, y = \sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 10, x^2 y^2 = 20.$$

$$\therefore x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 10^3 - 3 \times 20 \times 10 = 400.$$

12. 设圆台的上、下底半径为 r, R , 母线 l , 高 h . 关键是通过解方程组, 求出以上元素. 由已知条



件得方程组 $\begin{cases} \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \\ r + R = \sqrt{6}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} r = 6 - 2\sqrt{6}, \\ R = 3\sqrt{6} - 6. \end{cases}$ 所以 $h = \sqrt{3}(R - r) = 15\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$, $l = 2(R - r) = 10$

$\sqrt{6} - 24$. 所以 $S_{\text{侧}} = \pi(R + r)l = (60 - 24\sqrt{6})\pi$.

二十五、二次方程

1. 因为奇次项系数之和等于偶次项系数之和, 所以 -1 是方程的一个根. 由因式定理知 $(x + 1)$ 是 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 的一个因式, 用综合除法易得另一因式为 $(x^2 + x - 6)$.

所以原方程可化为 $(x + 1)(x^2 + x - 6) = 0$, 即 $(x + 1)(x + 3)(x - 2) = 0$.

所以 $x = -1, -3, 2$ 是原方程的根.

2. 依题意 $\Delta \geq 0$, 即 $4(1 + a)^2 - 4(3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) \geq 0$.

整理, 得 $2a^2 - 2a + 4b^2 + 4ab + 1 \leq 0$, 即 $(a - 1)^2 + (a + 2b)^2 \leq 0$.

因为 $(a - 1)^2 \geq 0, (a + 2b)^2 \geq 0$, 所以 $(a - 1)^2 + (a + 2b)^2 = 0$,

即 $a - 1 = 0$ 且 $a + 2b = 0$. 所以 $a = 1$ 且 $b = -\frac{1}{2}$.

3. 因为方程有实数根, 所以 $\Delta = (2m + 1)^2 - 4m^2 = 4m + 1 \geq 0$, 即 $m \geq -\frac{1}{4}$.

又设方程的两根为 x_1, x_2 , 由韦达定理, 得 $x_1 + x_2 = -(2m + 1), x_1 x_2 = m^2$.

而已知 $x_1^2 + x_2^2 = 7$, 即 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7$. 所以 $(2m + 1)^2 - 2m^2 = 7$.

所以 $m = -3$ 或 1 . 而 $m \geq -\frac{1}{4}$. 所以 $m = 1$.

4. 由原方程, 得 $\sqrt{2x^2 - 7x + 1} + \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = 2x - 3$.

与原方程相加, 得 $\sqrt{2x^2 - 7x + 1} = x - 1$.

解之, 得 $x = 5$ 或 $x = 0$.

经检验 $x = 5$ 是原方程的根, $x = 0$ 为增根, 舍去.

5. 先变形为 $\sqrt{\frac{x+3}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{x+3}} = \frac{3}{2}$, 然后采用换元法, 设 $\sqrt{\frac{x+3}{x+2}} = y$, 则 $\sqrt{\frac{x+2}{x+3}} = \frac{1}{y}$, 原方程可变形为 $y - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$. 整理得: $2y^2 - 3y - 2 = 0$, $\therefore y_1 = 2, y_2 = -\frac{1}{2}$, 当 $y = 2$ 时, 解得 $x = -\frac{5}{3}$, 当 $y = -\frac{1}{2}$ 时, $\sqrt{\frac{x+3}{x+2}} = -\frac{1}{2}$ 无解. 经检验 $x = -\frac{5}{3}$ 是原方程的根.

6. 设 $x + y = m, xy = n$, 则原方程组化为 $\begin{cases} m^2 + m - 2n = 18, \\ m^2 - n = 19. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m = 5, \\ n = 6; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = -4, \\ n = -3. \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2 + \sqrt{7}, \\ y_3 = -2 - \sqrt{7}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2 - \sqrt{7}, \\ y_4 = -2 + \sqrt{7}. \end{cases}$



7. 因为 $x=0$ 不是原方程的解, 所以方程两边同除以 x^2 , 得 $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$.

配方, 得 $6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$.

设 $y = x - \frac{1}{x}$, 则 $6y^2 - 25y + 24 = 0$. 所以 $y = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{8}{3}$.

当 $y = \frac{3}{2}$ 时, 得 $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$. 所以 $x = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$.

当 $y = \frac{8}{3}$ 时, 得 $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$. 所以 $x = 3$ 或 $-\frac{1}{3}$.

故原方程的根为 $2, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{3}$.

8. 由已知有 $m \neq 0, n \neq 0$, 且 $\left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} - 1 = 0, (n^2)^2 - 2 \cdot n^2 - 1 = 0$.

又因为 $nm^2 \neq 1$, 所以 $n^2 \neq \frac{1}{m}$, 即 n^2 与 $\frac{1}{m}$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个不相等的实根.

由韦达定理, 得 $\frac{1}{m} + n^2 = 2, \frac{1}{m} \cdot n^2 = -1$,

所以原式 $= \left(\frac{1}{m} + n^2 + \frac{1}{m} \cdot n^2\right)^{1999} = (2 - 1)^{1999} = 1$.

9. 判断由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组解的个数, 方法是, 首先代入消元得到关于一个未知数的一元二次方程, 再用 Δ 进行判断, 有三种情况:

$\Delta > 0$ 时, 方程组有两组不同的解;

$\Delta = 0$ 时, 方程组有两组相同的解(也称有惟一组解);

$\Delta < 0$ 时, 方程组无实数解.

所以该方程组有惟一解时, 就是一元二次方程的 $\Delta = 0$, 只要将①代入②, 得到一个一元二次方程

$(k+y)^2 - 3y^2 + y = \frac{1}{4}$, 利用 $\Delta = 0$, 求出 k 的值 $k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{6}$.

10. ① - ②得, $y^2 - x^2 = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 2x - 2y$. 移项、因式分解, 得

$(x-y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2) = 0$. ③

先考察 $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$, 将其整理成关于 x 的二次方程, 得 $x^2 + (y-2)x + (y^2 - 2y + 2) = 0$.

因为 $\Delta = (y-2)^2 - 4(y^2 - 2y + 2) = -3y^2 + 4y - 4 = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} < 0$,

所以此方程无实数根, 即 $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 \neq 0$.

所以由③, 得 $x - y = 0$.

代入①解之, 得 $x_1 = 0, x_2 = 2 + \sqrt{2}, x_3 = 2 - \sqrt{2}$.

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 + \sqrt{2}, \\ y_2 = 2 + \sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2 - \sqrt{2}, \\ y_3 = 2 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

11. 本题即求 a, b 的值, 只需设法得到关于 a, b 的方程组. 设 $M(x_1, 0), N(x_2, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 2ax - 2b + 1 = 0$ ①的两个实根, 于是 $x_1 + x_2 = -2a, x_1 x_2 = 1 - 2b$. 又 x_1, x_2 也



是方程 $-x^2 + (a-3)x + b^2 - 1 = 0$ ② 的两个实根, 同理 $x_1 + x_2 = a-3$, $x_1 x_2 = 1 - b^2$, 从而得

$$\begin{cases} -2a = a-3, \\ 1-2b = 1-b^2. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=0; \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases} \text{要注意到“两个不同的点 } M, N \text{”, 即方程①, ②均有两个不同}$$

的实根, 于是 $\begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases}$ 应舍去, 所求的这两个函数的解析式为: $y = x^2 + 2x - 3$ 和 $y = -x^2 - 2x + 3$.

$$12. \text{依题意应有 } \sqrt{12-a} + \sqrt{12+b} = 7, \quad \text{①}$$

$$\sqrt{13+a} + \sqrt{13+d} = 7 \quad \text{②}$$

要使方程有意义, 必有

$$12-a \geq 0, 13+a \geq 0. \text{所以 } -13 \leq a \leq 12.$$

$$\text{由①, 得 } \sqrt{12+b} = 7 - \sqrt{12-a}.$$

$$\text{两边平方并整理, 得 } 14\sqrt{12-a} = 49 - (a+b).$$

因为等式右边是整数, 所以 $12-a$ 应是一个完全平方数. 故 a 可能的取值为 $-13, -4, 3, 8, 11$,

12. 同理 $13+a$ 也应是一个完全平方数, 故 a 的可能值为 $-13, -12, -9, -4, 3, 12$.

所以 a 的值应为 $-13, -4, 3$ 和 12 . 代入①对应的 b 值为 $-8, -3, 4$ 和 37 .

二十六、二次函数

1. (1) 设一般式 $y = ax^2 + bx + c$, 由已知条件可得: $-\frac{b}{2a} = 3$, $\frac{4ac-b^2}{4a} = -2$, $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} = 4$. 这样解方程组即可, 但这样解是比较复杂的.

(2) 设顶点式为 $y = a(x-3)^2 - 2$, 为了用 a 表示在 x 轴上截得的线段长, 必须把它展开整理 $y = ax^2 - 6ax + 9a - 2$, 然后建立方程, 求得 a .

(3) 因为由条件可知抛物线的对称轴应是直线 $x = 3$, 再根据抛物线的对称性可知, 抛物线与 x 轴的交点坐标应为 $(1, 0), (5, 0)$, 设两根式为: $y = a(x-1)(x-5)$, 再把 $(3, -2)$ 代入, 求得 $a = \frac{1}{2}$.

2. 从平移前的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 出发考虑, $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, 向下平移 2 个单位得到: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} - 2$, 再向左平移 6 个单位得到: $y = a\left(x + \frac{b}{2a} + 6\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} - 2$, 由题意: 可得关于 a, b, c 的三元方程组:

$$\begin{cases} -6 - \frac{b}{2a} = -3, \\ \frac{4ac-b^2}{4a} - 2 = -1, \\ a+b+c=9. \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a=2, \\ b=-12, \\ c=19. \end{cases}$$

3. 依题意得



$$\begin{cases} a < 0, \\ -2 + 3 = -\frac{b}{a}, \therefore \begin{cases} a < 0, \\ b = -a, \\ c = -6a. \end{cases} \\ -2 \times 3 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

\therefore 不等式 $cx^2 + bx + a \leq 0$, 即 $-6ax^2 - ax + a \leq 0$ 可化为 $6x^2 + x - 1 \leq 0$. 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

\therefore 不等式 $cx^2 + bx + a \leq 0$ 的解集为 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

4. 设二次函数 $y = kx^2 - (k-2)x + k > 0$, 对任意实数 x , 要使不等式 $kx^2 - (k-2)x + k > 0$ 都成立, 由二次函数图像可得

$$\begin{cases} k > 0, \\ \Delta < 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} k > 0 \\ (k-2)^2 - 4k^2 < 0. \end{cases} \therefore \begin{cases} k > 0, \\ k < -2 \text{ 或 } k > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore k > \frac{2}{3}.$$

\therefore 当 $k > \frac{2}{3}$ 时, 不等式 $kx^2 - (k-2)x + k > 0$ 对任意实数 x 都成立.

5. 设二次函数 $f(x) = 2kx^2 - 2x - 3k - 2$, 依题意得

$$\begin{cases} f(1) \cdot f(-1) > 0, \\ \Delta > 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} (2k-2-3k-2) \cdot (2k+2-3k-2) > 0, \\ 4-4 \cdot 2k \cdot (-3k-2) > 0. \end{cases}$$

解得 $k > 0$ 或 $k < -4$. $\therefore k$ 的取值范围为 $k > 0$ 或 $k < -4$.

$$6. \because f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right), \therefore \text{抛物线的对称轴为 } x = \frac{3}{2}.$$

则可设抛物线与 x 轴两交点的横坐标分别为 $\frac{3}{2} - k, \frac{3}{2} + k, (k > 0)$

$$\therefore \frac{3}{2} + k = 2\left(\frac{3}{2} - k\right). \therefore k = \frac{1}{2}.$$

即抛物线与 x 轴两交点的横坐标分别为 1 和 2. \therefore 抛物线方程为 $y = a(x-1)(x-2)$.

又 \because 抛物线在 y 轴上截距为 -2 . $\therefore a = -1$. \therefore 抛物线方程为 $y = -x^2 + 3x - 2$.

7. 设二次函数 $f(x) = x^2 + 4x + 4k - k^2$, 依题意得 $f(3) < 0$.

$$\therefore 21 + 4k - k^2 < 0. \therefore (k-7)(k+3) > 0. \therefore k < -3 \text{ 或 } k > 7.$$

\therefore 当 $k < -3$ 或 $k > 7$ 时, 方程的一根大于 3, 另一根小于 3.

8. 不等式 $x^2 + px > 4x + p - 3$ 等价于 $(x-1)p + (x^2 - 4x + 3) > 0$, 设函数 $f(p) = (x-1)p +$

$$(x^2 - 4x + 3), \text{ 则 } \begin{cases} f(0) > 0, \\ f(4) > 0. \end{cases} \therefore \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \therefore x > 3 \text{ 或 } x < -1. \therefore x \text{ 的取值范围为 } x > 3 \text{ 或 } x < -1.$$

9. 原函数可化为 $y = (x-2a)^2 + a^2 - 3a$.

$$\therefore m = a^2 - 3a. \text{ 又 } \because 0 \leq a^2 - 4a - 2 \leq 10, \text{ 由 } 0 \leq a^2 - 4a - 2 \text{ 得 } a \geq 2 + \sqrt{6} \text{ 或 } a \leq 2 - \sqrt{6}.$$

由 $a^2 - 4a - 2 \leq 10$ 得, $-2 \leq a \leq 6$. $\therefore 2 + \sqrt{6} \leq a \leq 6$ 或 $-2 \leq a \leq 2 - \sqrt{6}$.

当 $2 + \sqrt{6} \leq a \leq 6$ 时, $m_{\max} = 6^2 - 3 \times 6 = 18$, 这时 $a = 6$;



当 $-2 \leq a \leq 2 - \sqrt{6}$ 时, $m_{\max} = (-2)^2 - 3 \times (-2) = 10$, 这时 $a = 6 - 2$.

\therefore 当 $a = 6$ 时, m 的最大值为 $m_{\max} = 18$.

10. 设二次函数 $f(x) = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$, $\because a < b < c$,

$\therefore f(a) = (a-b)^2 > 0, f(b) = (b-a)(b-c) < 0, f(c) = (c-b)^2 > 0$.

$\therefore f(a)f(b) < 0, f(b)f(c) < 0$.

\therefore 二次函数 $f(x) = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ 的图像在 a 与 b 、 b 与 c 之间都与 x 轴相交.

\therefore 原方程有两实数根, 并且有一根在 a 与 b 之间, 另一根在 b 与 c 之间.

11. 设 A_1 中学调给 A_2 中学 x_1 台彩电, A_2 中学调给 A_3 中学 x_2 台彩电, A_3 中学调给 A_4 中学 x_3 台彩电, A_4 调给 A_1 中学 x_4 台彩电 (若 x_i 为负整数, 则认为是 A_{i+1} 中学向 A_i 中学调出 $|x_i|$ 台彩电), 调出的彩电总台数为 y , 则

$$15 - x_1 + x_4 = 10, 8 - x_2 + x_1 = 10, 5 - x_3 + x_2 = 10, 12 - x_4 + x_3 = 10.$$

$$\therefore x_2 = x_1 - 2, x_3 = x_1 - 7, x_4 = x_1 - 5 (-8 \leq x_1 \leq 15)$$

$$y = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = |x_1| + |x_1 - 2| + |x_1 - 7| + |x_1 - 5|.$$

\therefore 当 $2 \leq x_1 \leq 5$ 时, y 取最小值为 10, 即当 $x_1 = 2, 3, 4, 5$ 时, y 取最小值为 10.

12. 销售利润 = 销售价 - 成本 (购进) 价, 销售价 = 销售量 \times 每件的销售价 = $Tx = (-3x + 207)x$, 成本价 = 销售量 \times 每件的购进价 = $T \times 45 = 45(-3x + 207)$, 于是 (1) $y = (-3x + 207)x - 45(-3x + 207) = -3(x^2 - 114x + 3105) (45 \leq x \leq 69)$, (2) $y = -3(x - 57)^2 + 432 (45 \leq x \leq 69)$ 当 $x = 57$ 时, $y_{\max} = 432$. 因此, 商场要想每天获得最大利润, 每件的销售价定 57 元最合适, 此时, 每天的最大销售利润是 432 元.

二十七、相似三角形

$$1. AD \perp BC, DE \perp AB \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AB$$

$$\text{同理可得 } AD^2 = AF \cdot AC$$

$$\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \left. \begin{array}{l} \angle EAF = \angle BAC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \angle AFE = \angle ABC.$$

2. 求证的结论中, 三条线段在同一直线上, 一般应转化为不共线的情形, 便于应用相似三角形进行证明. 不难发现, 等式左边的 DF^2 可以在 $\text{Rt} \triangle ADB$ 中用 $AF \cdot FB$ 代换, 于是只要证明 $AF \cdot FB = FM \cdot FN$. 相信很快就能找一对相似三角形, 使此式成立.

3. 等式的左边是线段平方的比, 一般应该降次, 可以在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中考虑; 等式的右边, $2BD$ 难以代换, 但 $\frac{1}{2}BC$ 使人联想到三角形的中位线. 注意到 AD 平分 $\angle BAC$, 若作 $CE \perp AD$ 于 F , 交 AB 于 E , 则 F 恰好是 CE 的中点. 等式两边的变形便可利用这条辅助线轻而易举地完成. 事实上, 根据以上分析, $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AF \cdot AD}{AD^2} = \frac{AF}{AD}$. 作 $FG \parallel BC$, 交 EB 于 G , 则 $FG = \frac{1}{2}BC$, 于是 $\frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DB} = \frac{2FG}{2DB} = \frac{BC}{2DB}$.

$$\therefore \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{2BD}.$$



4. 延长 AB, DC 交于点 P , 则

$$GE \parallel AP \Rightarrow \begin{cases} \frac{GE}{AP} = \frac{GD}{DP} \\ \frac{GD}{PD} = \frac{GO}{BP} \end{cases} \Rightarrow \frac{GE}{AP} = \frac{GO}{BP}$$

$$\Rightarrow GO \cdot AP = GE \cdot BP$$

同理可得 $GO \cdot BP = GF \cdot AP$

$$\Rightarrow GO^2 = GE \cdot GF.$$

5. 延长 AD 至点 P , 使得 $DP = AD$, 连结 BP, CP , 则

$$\left. \begin{aligned} BD = CD, AD = DP &\Rightarrow \text{四边形 } ABPC \text{ 为平行四边形} \Rightarrow AB = PC \\ EG \parallel AB, FH \parallel AC &\Rightarrow \text{四边形 } AGFH \text{ 为平行四边形} \Rightarrow AG = FH \\ EG \parallel AB &\Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{EG}{PC} \\ FH \parallel AC &\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{FH}{AC} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow EG = BH \\ EG \parallel BH \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{四边形 } BEGH \text{ 为平行四边形} \Rightarrow GH = BE.$$

$$6. \quad \left. \begin{aligned} BD = CD \\ DM \text{ 平分 } \angle ADB \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BM}{AM} \\ \text{同理可得 } \frac{CD}{AD} = \frac{CN}{AN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BD}{AD} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BD + AD}{AD} \\ E, F \text{ 为中点} \Rightarrow BC = 2EF = 2BD \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{EF + AD}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{2EF}{MN} = \frac{EF + AD}{AD} \Rightarrow \frac{1}{EF} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{MN}.$$

$$7. \quad \left. \begin{aligned} AD \text{ 平分 } \angle BAC &\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \\ BE \text{ 平分 } \angle ABC &\Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} \\ CF \text{ 平分 } \angle BCG &\Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

$\therefore D, E, F$ 三点共线.

8. 根据等腰三角形的性质, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 因此, $\triangle ABD \sim \triangle ACD$;

在 $Rt \triangle ACD$ 中, DE 是斜边上的高线, 所以 $\triangle DCE \sim \triangle ACD$, $\triangle ADE \sim \triangle ACD$, $\triangle DCE \sim \triangle ADE$; 于是, 还有 $\triangle DCE \sim \triangle ABD$, $\triangle ADE \sim \triangle ABD$;

$\therefore AD \perp BC, DE \perp AC, \therefore \angle ADF = \angle C$,

又 $\because F, D$ 分别是 DE, BC 的中点, $\therefore \frac{DF}{CE} = \frac{DE}{2CE} = \frac{AD}{2DC} = \frac{AD}{BC}$,

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle BCE$;



于是, $\angle DAF = \angle CBE$, $\angle AGH = \angle BGD$,

$\therefore \angle AHG = \angle BDG = \text{Rt}\angle$, $\therefore \triangle AGH \sim \triangle BGD$.

综上所述, 图中共有 8 对相似三角形.

9. 过点 A 作 BC 的平分线交 BE, CF 的延长线分别于点 P, Q, 交 DE, DF 的延长线于点 R, S, 则

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{PR}{BD} = \frac{RE}{ED} \\ \frac{AR}{CD} = \frac{RE}{ED} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{PR}{BD} = \frac{AR}{CD} \Rightarrow \frac{AR}{CD} = \frac{AP}{BC} \Rightarrow AR = \frac{AP \cdot CD}{BC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{同理可得 } AS = \frac{AQ \cdot BD}{BC} \\ \frac{AQ}{CD} = \frac{AP}{BD} \Rightarrow AQ \cdot BD = AP \cdot CD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AR = AS \\ AD \perp RS \end{array} \right\} \Rightarrow DR = DS \Rightarrow$$

$\angle EDO = \angle FDO$.

10.

$$\left. \begin{array}{l} DQ \parallel BE \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{EQ}{EC} \\ AE = CE \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{EQ}{AE}$$

$$\left. \begin{array}{l} DP \parallel CF \Rightarrow \frac{BP}{BF} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{BP}{2BF} = \frac{BD}{2BC} \\ AB = 2BF \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{BD}{2BC}$$

$$\text{直线 BRE 截 } \triangle APQ, \text{ 由梅涅劳斯定理得 } \frac{AB}{BP} \cdot \frac{PR}{RQ} \cdot \frac{QE}{EA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{PR}{RQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PR}{PQ} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{同理可得 } \frac{QS}{PQ} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{RS}{PQ} = \frac{1}{3}, \quad \text{即 } PQ = 3RS.$$

$$11. \left. \begin{array}{l} EM \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AD} = \frac{BE}{AB} \\ EM \parallel BC \Rightarrow \frac{EM}{BC} = \frac{AE}{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{EM}{AB} + \frac{EM}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{EM}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{同理可得 } \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{FM} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow FM = EM \Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{同理可得 } \frac{1}{EF} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{GH} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{2}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{2}{GH}$$

$$\Rightarrow \frac{2EF}{MN} = \frac{EF + AD}{AD} \Rightarrow \frac{2}{MN} = \frac{EF + AD}{EF \cdot AD} \Rightarrow \frac{1}{EF} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{MN}$$

12. 关键是要把图中的四边形 ABCD 补成三角形. 由于太阳光线是平行线, 因此这个三角形就与以标杆、标杆的影子、太阳光线为边的直角三角形相似, 且相似比为 $1:0.8=5:4$.

假如太阳光线穿墙而过, 投射到地面上的 E 处, 那么就得到所需的直角三角形 ABE; 假如塔高降低 10 米, 那么塔顶 A 降到 F, FB 的影子恰好为 BD, 也可得到一个直角三角形. 问题是很容易解决



的.

答案:塔高为 90 米.

二十八、解直角三角形

1. 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 设 $DB = x$, 则 $AD = 3 - x$.

$$\therefore AC^2 - AD^2 = BC^2 - DB^2, \therefore 9 - (3 - x)^2 = 4 - x^2.$$

$$\text{解得 } x = \frac{2}{3}, \therefore DB = \frac{2}{3}, AD = \frac{7}{3}, CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

$$\therefore \cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{9}, \sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

2. 在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中, 由勾股定理得 $DB = \sqrt{BC^2 - CD^2} = 2$.

$$\text{又 } \because \tan B = \frac{AC}{BC}, \therefore AC = BC \cdot \tan B = BC \times \frac{CD}{DB} = 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{同理 } \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC}, \therefore AB = \frac{BC^2}{DB} = \frac{12}{6} = 6.$$

$$3. \because AD \text{ 为角平分线}, \therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}. \therefore \sin B = \frac{1}{2}. \therefore \angle B = 30^\circ. \therefore AC = BC \cdot \tan 30^\circ = 3.$$

$$AB = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 6.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } 3 + 6 + (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 9 + 3\sqrt{3}.$$

4. 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, ①

$$\text{又已知 } c^2 = a^2 + b^2 + ab, \quad \text{②}$$

$$\text{由①、②可得 } \cos C = -\frac{1}{2}. \text{ 又 } \because 0^\circ < C < 180^\circ, \therefore \angle C = 120^\circ.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}, \text{ 则 } ab = 60.$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab, \text{ 又 } \because c = 14, \text{ 则 } (a + b)^2 = 14^2 + 60 = 256. \text{ 又 } \because a > 0, b > 0, \therefore a + b = 16.$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} ab = 60, \\ a + b = 16. \end{cases} \text{ 得 } a = 10, b = 6 \text{ 或 } a = 6, b = 10.$$

5. 将条件与所求化归到 $\text{Rt}\triangle$, 即构造 $\text{Rt}\triangle$ 为运用条件解决问题创设模型.

$$(1) \text{ 在 } \triangle AEC \text{ 中}, AC = 2, \therefore AE = AC \cos \beta = \frac{2}{3}, \text{ 由勾股定理得 } EC = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABE \text{ 中}, \because \sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{3}{5}, \text{ 设 } BE = 3k, AB = 5k, \text{ 由 } AB^2 = BE^2 + AE^2 \text{ 得 } k = \frac{1}{6}. \therefore AE \cdot ED = BE \cdot EC, \therefore DE = \sqrt{2}, \therefore AD = \frac{2}{3} + \sqrt{2}.$$

$$6. \because PQ \text{ 与 } \odot A \text{ 相切}, \text{ 则 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot r. \text{ 又 } \because S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} PA \cdot QA \sin A, \therefore PA \cdot QA \sin A = PQ \cdot r.$$

$$\text{由正弦定理得 } \sin A = \frac{PQ}{2R}, \text{ 则 } PA \cdot QA \frac{PQ}{2R} = PQ \cdot r. \therefore PA \cdot QA = 2Rr \text{ 为定值.}$$



7. $\because 5^2 + 12^2 = 13^2$, 则 $BC^2 + AC^2 = AB^2$. $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

设 $AD = x$, $AE = y$, 由于 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} xy \sin A = 15$, 且 $\sin A = \frac{5}{13}$, $\therefore xy = 78$.

在 $\triangle ADE$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned} DE^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos A = (x - y)^2 + 2xy(1 - \cos A) \\ &= (x - y)^2 + 2 \cdot 78 \left(1 - \frac{12}{13}\right) = (x - y)^2 + 12 \geq 12. \end{aligned}$$

当 $x = y$ 时, 上式的等号成立, 此时 $DE = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 为最小值.

8. \because 原方程系数之和为 0, $\therefore x = 1$ 必为原方程的根.

又 \because 原方程两根相等, \therefore 原方程的两根为 $x_1 = x_2 = 1$.

由韦达定理得 $x_1 \cdot x_2 = \frac{\sin C - \sin B}{\sin B - \sin A} = 1$. 由正弦定理得 $\frac{\sin C - \sin B}{\sin B - \sin A} = \frac{c - b}{b - a} = 1$.

$\therefore b = \frac{c + a}{2}$. 又由余弦定理得

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{c+a}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{3(a^2 + c^2) - 2ac}{8ac} \geq \frac{6ac - 2ac}{8ac} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore B \leq 60^\circ$.

9. $\because \angle A = 60^\circ$, 三角形有最大边和最小边, 则 $\angle A$ 不是最大角也不是最小角.

$\therefore \angle A$ 是最大边和最小边的夹角.

设最大边为 b , 最小边为 c , 内切圆半径为 r , 由韦达定理得 $b + c = 9$, $bc = \frac{32}{3}$.

又由余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc = (b + c)^2 - 3bc = 81 - 32 = 49.$$

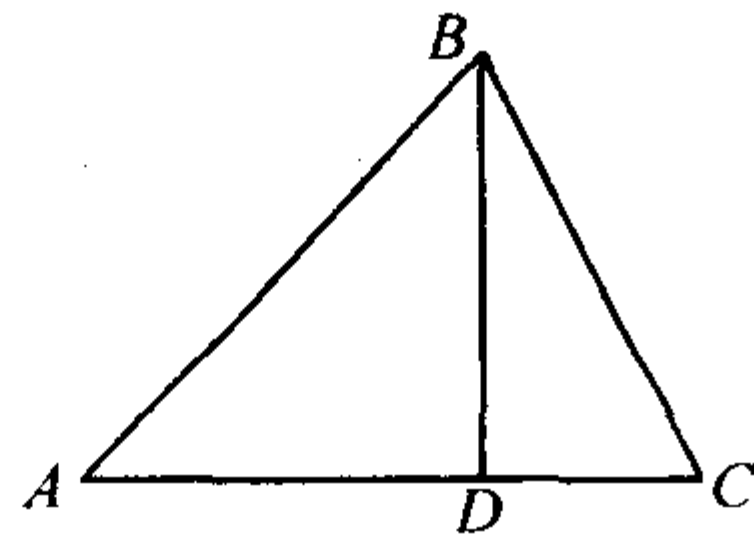
$\therefore a = 7$, ($\because a > 0$)

由正弦定理得 $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{7}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

$\therefore a + b + c = 7 + 9 = 16$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$,

则 $8r = \frac{1}{2} \times \frac{32}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. \therefore 内切圆面积 $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{3}$.

10. (1) 我们在学习全等三角形时已经知道, 已知三角形的一条边和一个角, 这个三角形不能确定, 要求出这个三角形的其他的边和角, 必须再添加一个条件, 这个条件可以是一个角, 也可以是一条边. 比如设 $\angle C = 60^\circ$, 则 $\angle ABC = 74^\circ$, 这是一个符合条件的三角形 (如第 10 题图), 作 $BD \perp AC$ 于点 D , 边 AC 和 BC 都可求得 ($BC \approx 8.3$, $AC \approx 11$).



第 10 题图

(2) 根据三角形全等的判定公理可以判断 (1) 中所给三角形是惟一的.

同样, 据全等三角形判定公理, 只有设边 $BC = a$ ($BD < a < AB$), 那么满足条件 $\angle A = 46^\circ$, $AB = 10$, $BC = a$ 的三角形有两个.

11. 欲求 CD , 可以通过解 $\triangle ADC$ 或解 $\triangle BDC$, 由于 $\angle CAD = \angle DBC$, 故 A, B, C, D 四点共圆,



由此得 $\angle CDA = \angle ABC = 90^\circ$, 故解 $\text{Rt}\triangle ADC$ 可求出 CD .

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, $AB = 100$.

$$\therefore AC = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 100\sqrt{2}.$$

又 $\because \angle DAC = \angle DBC$, $\therefore A, B, C, D$ 四点共圆. $\therefore \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle DAC = 60^\circ$, $AC = 100\sqrt{2}$. $\therefore CD = AC \cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{6}(\text{m})$.

12. 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , 则

$$\begin{aligned} \therefore AF &= AC \cdot \sin \angle C = (\sqrt{3} + 1) \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}), CF = AC \cdot \cos \angle C = (\sqrt{3} + 1) \times \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1), \end{aligned}$$

$$\therefore BF = BC - FC = 2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}). \therefore AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{6}. S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot$$

$$AF = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}). \therefore S_{\triangle AFB} = S_{\triangle AEC} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{又} \because S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} AE \cdot BD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times BD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore DB = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADB \text{ 中, } \sin \angle BAE = \frac{DB}{AB} = \frac{1}{2}. \therefore \angle BAE = 30^\circ.$$

二十九、直线与圆的位置关系

1. 因为 CB 是 $\odot O$ 的切线, 由弦切角定理知 $\angle A = \angle CBD = 25^\circ$. 若能求得 $\angle DEB$, 则 $\angle ADE$ 可求, 注意到条件 $DB = DE$, 所以 $\angle DEB = \angle DBE = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$, 故 $\angle ADE = \angle DEB - \angle A = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ$.

2. 由切线长定理可知, $EA = EC$, $DB = DC$, 所以 $\triangle PDE$ 的周长为 $PA + PB$, 也就是 $2PA$. 连结 OA 应用勾股定理(或切割线定理)可求得 $PA = 8\text{cm}$, 所以 $\triangle PDE$ 的周长为 16cm .

3. 由直径 $EB \perp BC$ 于 B , 可得 BC 切 $\odot O$ 于 B , 又有 CD 切 $\odot O$ 于 D , 则利用切线长定理得 $CD = CB$. 已知 AD 和 AE , 容易想到利用切割线定理求得 AB . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 设 $CD = CB = x$, 利用勾股定理可列出一个关于 x 的方程, 解这个方程可得 $x = 3$.

4. 易证 CB 为 $\odot O$ 切线, 由切线长定理得 $DE = BE$, 因此只需证 $DE = CE$, 则考虑证 $\angle C = \angle CDE$. 连结 DB , $\angle C$ 和 $\angle A$ 互余, $\angle CDE$ 和 $\angle EDB$ 互余, $\angle A = \angle EDB$, 从而 $\angle C = \angle CDE$. 对于 (2), 要证 $DE^2 = \frac{1}{4} CD \cdot CA$, 就是证 $(2DE)^2 = CD \cdot CA$, 即证 $BC^2 = CD \cdot CA$ (由 (1) 知 $DE = BE = CE$), 而这是显然的.

5. 连结 OE , 则 $OE \perp BE$.

$$\text{又} \because OE = OC, \text{在 } \text{Rt}\triangle AOC \text{ 中, } AC^2 = OA^2 - OC^2, \therefore AC^2 = OA^2 - OE^2.$$

$$\text{又} \because \text{在 } \text{Rt}\triangle BOE \text{ 中, } OE^2 = OB^2 - BE^2, \therefore AC^2 = OA^2 - OB^2 + BE^2.$$

$$\because BE = AB,$$

$$\therefore AC^2 = OA^2 - OB^2 + AB^2 = (OA - OB)(OA + OB) + AB^2$$



$$= AB \cdot (OA + OB) + AB^2 = AB(OA + OB + AB)$$

$$= AB \times (OA + OA) = 2AB \cdot OA.$$

$$\therefore AC^2 = 2AO \cdot AB.$$

6. 过点 B 作 AC 的平行线 BG 交 DE 于点 G ,

$$\because AE = EB, AF \parallel BG, \therefore \angle FAE = \angle GBE.$$

又 $\because \angle AEF = \angle BEG, \therefore \triangle AEF \cong \triangle BEG$, 故 $BG = AF$.

$$\text{又由 } BG \parallel CF \text{ 得 } \frac{BD}{DC} = \frac{BG}{CF}, \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AF}{FC}.$$

又 $\because DA, DBC$ 是圆的切线与割线, $\therefore AD^2 = DB \cdot DC$.

$$\therefore \frac{BD^2}{AD^2} = \frac{BD^2}{DB \cdot DC} = \frac{BD}{DC}, \therefore \frac{BD^2}{AD^2} = \frac{AF}{FC}.$$

7. 由已知, 即可利用切割线定理求得 DE 的长 ($DE = 12$). 欲求半径, 自然想到, 延长 OD, DO 交圆于 N, M , 因为 OD, DC 和 DE 均为已知, 则运用相交弦定理可求得 $\odot O$ 的半径 $r = 2\sqrt{22}$.

8. 连结 OE, OM , 自点 E 引 $EF \perp BA$ 于点 F ,

$\because \odot O$ 与 AB 切于点 $M, \therefore AB \perp OM$.

$\because OE = OC$, 又 $\because \angle C = 60^\circ, \therefore \angle OEC = \angle C = \angle B = 60^\circ, \triangle OCE$ 为正三角形. $\therefore OE \parallel AB$.

又 $\because OM \perp AB, EF \perp AB, \therefore FE = OM = OC = EC$.

设 $BE = x$, 在 $\triangle BEF$ 中, $\angle BFE = 90^\circ$, 又 $\because \angle B = 60^\circ, \therefore BF = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x$.

又 $\because BC = 1, EC = 1 - x = EF$, 于是 $BE^2 = EF^2 + BF^2$, 即 $x^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$. 解得 $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$. 但 $x = 4 + 2\sqrt{3} > BC$, $\therefore BE = 4 - 2\sqrt{3}$.

9. 作 $DE \perp AC$ 于点 $E, \because AB \perp AC, \therefore AB \parallel DE$. 又 $\because BD = 4DC, \therefore AC = \frac{5}{4}AE, AB = 5ED$.

$\because G$ 是 AB 的中点, $\therefore AG = \frac{5}{2}ED$. 由切割线定理得 $AG^2 = AF \cdot AC = AF \cdot \frac{5}{4}AE$.

$$\therefore \frac{25}{4}ED^2 = AF \cdot \frac{5}{4}AE.$$

$$\text{即 } AF \cdot AE = 5ED^2 = 5ED \cdot ED = AB \cdot ED.$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{ED}. \text{ 又 } \because \angle BAF = \angle AED = 90^\circ, \therefore \triangle BAF \sim \triangle AED. \therefore \angle ABF = \angle EAD.$$

而 $\angle EAD + \angle DAB = 90^\circ, \therefore \angle ABF + \angle DAB = 90^\circ$.

$\therefore AD \perp BF$.

10. 设 AM 交小圆于 P 点, 过 M 作两圆的公切线 TM . (这条切线既是大圆的切线, 也是小圆的切线) 连 PC . 由弦切角定理,

$$\angle TMP = \angle PCM, \angle TMA = \angle ABM.$$

由 AB 切小圆于 C , 所以 $\angle ACP = \angle CMP$, 但 $\angle ACM$ 为 $\triangle CMB$ 的外角, 所以 $\angle ACM = \angle ABM + \angle CMB$.

即 $\angle ACP + \angle PCM = \angle ABM + \angle CMB$. 但已证 $\angle PCM = \angle ABM, \therefore \angle ACP = \angle CMB$.

代换得 $\angle CMP = \angle CMB$. 所以, MC 平分 $\angle AMB$.

11. \because 连 MO 并延长交 $\odot O$ 于 F , 连 AF , 延长 MB 交 AF 于 N .



$AB = 2BO$, $\therefore B$ 为 $\triangle AMF$ 的重心. $\therefore AN = NF$.

又 $\because AM$ 切 $\odot O$ 于 M , $\therefore \angle AMF = 90^\circ$. $\therefore AN = NF = MN$. $\therefore \angle AMN = \angle NAM$.

又 $\because AO = DO$, $\angle AOF = \angle DOM$, $MO = OF$, $\therefore \triangle AFO \cong \triangle DMO$. $\therefore \angle 1 = \angle 2$, 即 $AF \parallel MD$.

$\therefore \angle EMD = \angle MAF$. 故 $\angle AMB = \angle EMD$.

12. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的内切圆分别切 AC 于 X 和 Y . 则

$$AX = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) - BC = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$$

$$AY = \frac{1}{2}(AC + CD + AD) - CD = \frac{1}{2}(AC + AD - CD)$$

$\because ABCD$ 为圆外切四边形,

$\therefore AB + CD = AD + BC$.

也就是 $AB - BC = AD - CD$.

$\therefore AX = AY$, 即 X, Y 重合. 也就是 $\triangle ACD$ 的内切圆、 $\triangle ACB$ 的内切圆切 AC 于同一点.

三十、圆与圆的位置关系

1. 设两圆半径分别为 R 和 r , 由已知两圆外切, 得 $R + r = 15$ ①, 又已知一条外公切线长为 $10\sqrt{2}$ cm, 则可根据外公切线的计算公式得 $(10\sqrt{2})^2 = 15^2 - (R - r)^2$ ②, 由①和②可解得两圆的半径分别为 10cm 和 5cm.

2. 作两圆的内公切线, 则 $\angle 1 = \angle 2$ (切线长定理), $\angle 3 = \angle B$ (弦切角定理), 而 $\angle CAE$ 为 $\triangle ABC$ 的外角, 所以, $\angle CAE = \angle 1 + \angle B = \angle 2 + \angle 3 = \angle CAD$.

3. 因 E 是 CD 中点, 要证 E 是 FG 中点, 显然连结 FC 和 DG , 只要证 $\triangle CFE \cong \triangle DGE$, 证 $\angle C = \angle D$ 即可, 而 $\angle B$ 沟通了它们之间的等量关系.

4. 连结 OO_3, O_1O_2, BO_2, AO_3 ,

$\because O_1, O_2$ 分别是 $\odot AOB$ 和 $\odot BOC$ 的圆心, OB 为两圆的公共弦,

$\therefore O_1O_2$ 垂直平分 OB . $\therefore \angle OO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle OO_2B = \angle C$.

同理可得 $\angle OO_3O_1 = \frac{1}{2}\angle OO_3A = \angle C$.

则 $\angle OO_2O_1 = \angle OO_3O_1$. $\therefore O_1, O_2, O_3, O$ 四点共圆.

5. 连结 OB, OC, BE ,

$\because O$ 为外心, $\therefore O$ 为两中垂线的交点.

$\because EO$ 垂直平分 AB , $\therefore \angle OEB = \angle OEA = 90^\circ - \angle A$.

则 $\angle CEB = \angle AEB = 180^\circ - 2\angle A$. 又 $\because \angle BOC = 2\angle A$, $\angle CEB + \angle BOC = 180^\circ$.

$\therefore B, E, C, O$ 四点共圆. ①

$\because FO \perp AC$, $\therefore \angle AFO = 90^\circ - \angle A$. 又 $\because \angle OEB = 90^\circ - \angle A$,

则 $\angle AFO = \angle OEB$.

$\therefore B, E, O, F$ 四点共圆. ②

由①、②得 B, E, C, O, F 五点共圆.



6. 在 AB 上取点 M , 使 $BM = BC$, 连结 OD, OC, MD, MC .

$\therefore MB = BC, \angle CMB = \angle MCB$.

$\therefore \angle CMB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = \frac{1}{2}\angle CDA$ (A, B, C, D 四点共圆) $= \angle CDO$.

$\therefore C, D, M, O$ 四点共圆.

$\therefore \angle AMD = \angle OCD = \frac{1}{2}\angle DCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$.

又 $\therefore \angle ADM = 180^\circ - \angle A - \angle AMD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$,

$\therefore \angle AMD = \angle ADM, \therefore AM = AD, \therefore AB = AM + MB = AD + BC$.

7. $\therefore BP \perp CM, AB \perp BC, \angle BMP = \angle CMB$,

$\text{Rt}\triangle BMP \sim \text{Rt}\triangle CMB$. 则 $\angle MBP = \angle MCB, \therefore \text{Rt}\triangle BMP \sim \text{Rt}\triangle CBP$.

则 $\frac{BP}{BM} = \frac{CP}{CB}$. 又 $\therefore BM = BN, CB = CD, \therefore \frac{BP}{BN} = \frac{CP}{CD}$.

又 $\therefore \angle ABN - \angle MBP = \angle BCD - \angle BCP$,

即 $\angle PBN = \angle PCD, \therefore \triangle BNP \sim \triangle CDP$.

则 $\angle BNP = \angle CDP, \therefore P, N, C, D$ 四点共圆. 又 $\therefore \angle NCD = 90^\circ, \therefore \angle NPD = 90^\circ$. 即 $DP \perp PN$.

8. 连结 FC, FD, DB ,

$\therefore AC = BC, \angle ACB$ 为直角, $\therefore \angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$.

又 $\therefore A, C, F, D$ 四点共圆, $\therefore \angle CDF = \angle CAF = 45^\circ$,

又 $\therefore \angle CDE = 90^\circ, \therefore \angle EDF = \angle CDE - \angle CDF = 45^\circ = \angle CDF, \therefore DF$ 平分 $\angle CDE$.

又 $\therefore CB = CD$, 故 $\angle CBD = \angle CDB$. 又 $\therefore \angle FBD = \angle CBD - 45^\circ, \angle FDB = \angle CDB - 45^\circ$,

故 $\angle FBD = \angle FDB, \therefore FB = FD, \therefore \triangle BCF \cong \triangle DCF$. 则 $\angle BCF = \angle DCF, \therefore CF$ 平分 $\angle DCE$.
 $\therefore F$ 是 $\triangle CDE$ 的内心.

9. 作 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高线 AH , 在两个 $\text{Rt}\triangle AHC$ 和 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中可求得 $AB = 3\sqrt{2}, AC = 2\sqrt{3}$. (2) 显然的关系有 $AP^2 = y(x+y)$, 如何用 x, y 来表示 AP 呢? 注意到 $\triangle PAE \sim \triangle PDA$, 有 $\frac{PA}{PD} = \frac{AE}{AD}$, 由 $DE \parallel BC$ 及 (1) 的结果, 比值 $\frac{AE}{AD}$ 可算, 于是可求得 y 与 x 之间的函数关系式 $y = 2x$, 且 $0 < x < 3 + \sqrt{3}$.

10. 由 $AX \cdot BY = AP \cdot BP$ 得 $\frac{AX}{AP} = \frac{BP}{BY}$.

连结 XP, YP , 则 $\text{Rt}\triangle PAX \sim \text{Rt}\triangle PBY$.

$\therefore \angle XPA = \angle BYP = \alpha, \angle AXP = \angle BPY = 90^\circ - \alpha$.

连结 $AN, BN, \therefore \angle XPA = \angle PNX = \angle PNY = \angle YBP = 90^\circ$,

$\therefore A, P, N, X$ 和 P, B, Y, N 分别四点共圆.

则 $\angle ANB = \angle ANP + \angle PNB = \angle AXP + \angle PYB = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$. 即 $AN \perp NB$.

取 Q 为 AB 的中点(定点), 则 $QN = \frac{1}{2}AB$ 为定值.

11. $\therefore M$ 为 AB 的中点, $\therefore AM = BM$.



故 $OC \cdot OD = OM^2 - AM^2 = (OM + AM)(OM - BM) = OA \cdot OB$.

$\therefore A, B, C, D$ 四点共圆. $\therefore \angle ODB = \angle BAC$.

又 $\because \angle ADB = 90^\circ$, 过点 B 作 $BE \parallel AD$ 交 OY 于点 E , 则 $\angle DBE = \angle ADB = 90^\circ$.

又 $\because A, B$ 是射线 OX 上的定点,

$\therefore \tan \angle BAD \cdot \tan \angle BAC = \tan \angle BAD \cdot \tan \angle BDE = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{AD} = \frac{OB}{OA}$ 为定值.

$\therefore O_1, P, O_2$ 三点共线.

连结 $O_1 O_2, O_1 P, O_1 B, O_2 P, O_2 A$,

$\because \angle O_1 P B = \angle O_1 B P = \angle O_2 P A = \angle O_2 A P, \therefore \triangle O_1 P B \sim \triangle O_2 P A$.

则 $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{BP}{AP}, \therefore \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 即 $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

12. (1) 过点 P 作两圆的公切线.

$\because CB$ 与 $\odot O_1$ 相交, $\therefore \angle CBP = \angle MPB = \angle NPA = \angle ADP$. 即 $\angle CBP = \angle ADP$.

(2) $\because \angle ADP = \angle ABD, \angle DAP = \angle BAD$,

$\therefore \triangle ADP \sim \triangle ABD$. 则 $\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AD}$. 即 $AD^2 = AP \cdot AB$. (*)

由割线定理得 $BC \cdot BD = BP \cdot BA$.

$\therefore AD^2 + BC \cdot BD = AP \cdot AB + BP \cdot BA = AB(AP + PB) = AB^2$. 即 $AD^2 + BC \cdot BD = AB^2$.

(3) 由(*)式得 $AD^2 = AP(AP + PB)$. 则 $(4\sqrt{3})^2 = AP^2 + 2AP$. 即 $AP^2 + 2AP - 48 = 0$. 解

得 $AP = 6$ 或 $AP = -8$ (舍去). $\therefore \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切于 $P, \therefore \frac{r}{R} = \frac{BP}{AP} = \frac{1}{3}$

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 初中数学竞赛培优教程 基础知识

作者 = 李胜宏

页数 = 2 8 9

S S 号 = 1 1 6 5 3 4 1 1

出版日期 = 2 0 0 4 年 0 1 月第 1 版

前言

- 一、丰富的图形世界
- 二、图形的拚拚与凑凑
- 三、有理数及其运算
- 四、一元一次方程
- 五、二元一次方程组
- 六、线段、角的有关计算
- 七、相交线、平行线
- 八、整式的运算
- 九、因式分解
- 十、分式
- 十一、全等三角形
- 十二、等腰三角形
- 十三、勾股定理与直角三角形
- 十四、实数
- 十五、一元二次方程
- 十六、分式方程
- 十七、一元一次不等式
- 十八、四边形及特殊四边形
- 十九、三角形、梯形的中位线
- 二十、圆的基本性质
- 二十一、圆柱、圆锥、圆台
- 二十二、正、反比例函数与一次函数
- 二十三、统计和概率
- 二十四、二次根式
- 二十五、二次方程
- 二十六、二次函数
- 二十七、相似三角形
- 二十八、解直角三角形
- 二十九、直线与圆的位置关系
- 三十、圆与圆的位置关系
- 附录 参考答案