

号 10 字 通 海 鄂

数学 培优竞赛

黄东坡 著

新方法

初二年级

去 式 赛 竞 升 学 数 学
级 年 二 初

鄂 省 数 学 竞 赛 培 优 新 方 法
初 二 年 级

出 版 社
北 京 人 民 教 育 出 版 社

内 容 简 介
本 书 是 黄 东 坡 老 师 在 教 学 实 践 中 总 结 出 来 的 一 些 新 方 法

印 刷 厂
北 京 人 民 教 育 出 版 社 印 刷 厂

开 本
787 毫 米 × 1092 毫 米

湖 北 人 民 出 版 社

印 数
1 万 册

数 学 竞 赛 培 优 新 方 法
PDG

鄂新登字 01 号

数学培优竞赛新方法

初二年级

黄东坡 著

出版：湖北人民出版社
发行：

地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：武汉市汉桥印刷厂
开本：787 毫米×1092 毫米 1/16
字数：349 千字

经销：湖北省新华书店
印张：14

版次：2002 年 7 月第 1 版
印数：1—12 120

印次：2002 年 7 月第 1 次印刷
定价：15.00 元

书号：ISBN 7-216-03391-4/G·906

序

2002年1月,湖北省新闻出版局组织评选了2001年“最有影响的10本书”,名列榜首的是《康熙大帝》,排名第六的是《数学培优竞赛新帮手》(下简称《新帮手》)——黄东坡的大作,其余的8本书,也都选自不同的领域:政治、经济、科普、历史和艺术。从1月9日的《武汉晚报》得到这一消息后,我感到非常激动,因为《新帮手》的成功也是我的预期,证明我对该书的判断和鉴赏是正确的,向读者的举荐和承诺是可信的;我感到激动,还因为一本关于培优竞赛辅导的书,也能跻身于《康熙大帝》、《中国共产党历史图典》、《世界摄影名作欣赏》、《21世纪高级营销书库》等宏篇巨制之中,毕竟是一件意料之外的事。

面对《新帮手》的成就,本来可以弹冠相庆,作些修饰与补正的工作,但黄东坡并没有止于此,而是乘胜前进,继续探索,终于又一部新作《数学培优竞赛新方法》(下简称《新方法》)问世。我赞赏这样的精神,因为著书与教学满足同样的公理:没有最好的,只有不断地反思才可能更好。一打开《新方法》,你就会发现,它的创新之处在于:从知识的回眸说起,重过程;以“知识纵横”发轫,浸透着历史的信息,重思想;在标题后是一阕名言,紧扣主题的同时也关注着人文精神的滋养,这体现的是什么呢?一种改革的精神,一种数学教育的现代理念,这是同中之异。同样,你也会发现《新方法》贯穿了现代数学教育的基本理念:比如课题组织与学习进程同步、与学生发展协调、与培优过程一致的基本设想;以典型问题为载体,着力反映教学真实,选材联系课本而又高于课本的基本原则;点拨、旁批和计白当黑的例题分析方式;着眼针对性、层次性以及开放互动性的训练材料;以及丰富性、实用性和有序性兼具的数学竞赛课程资源等,这些被实践所证明了的成功经验,在本书中又得以进一步张扬,成为作者的写作个性,这体现的是什么呢?是一种重视学术经验、重视教学积累的正确态度,既有反思,又有发展,不是否定,而是扬弃,这正是现代数学教育理念的精神所在。因此,我们说,体现现代数学教育理念,而且把这种理念转化为教学行为和写作实践,是本书的突出特点。

随着《义务教育国家课程标准》的颁布,数学教育正处于一个重要的变革时期,人们对数学的认识,对数学学习的认识,对数学价值与功能的认识,都在发生着显著的变化,它们将直接影响到中考数学、竞赛数学中内容的选取、题型的变化,影响到数学试题的立意、情境和设问方式,当这一切都在变化的时候,不能没有适应这种变化的培优竞赛读本。这是一个良好的机遇,看来,这个机遇又被黄东坡抓住了。我们期待着:有更多的老师会与作者达成共识,有更多的学生会从中受益。

裴光亚

2002年5月于武昌水果湖

审视反思 萌动突破

2001年10月,我来到广州,参加骨干教师国家级培训,在三个月的培训中,我有幸聆听到国内外著名专家学者关于国家课程标准、基础教育改革、数学教育进展、东西方数学教育比较等方面的演讲,他们高屋建瓴、总揽全局的讲演,极大地开阔了我的视野,我看到一场数学教育的范式革命已悄然拉开了序幕。

岁末回到武汉,我全面分析了一年来全国各地中考试题、各级竞赛试题,透过试题,能感受到颁布不久的《义务教育国家课程标准》(以下简称《标准》)给命题者带来的深刻影响,把握到他们清晰的命题思路:逼近课程标准,通过命题的改革与创新,反映新的数学教育理念,具体体现在:

- 设计新颖的试题,在新的情景下考查基础知识和基本技能,组合填空、完形填空、多项选择、阅读理解问题崭露头角;
- 削弱几何证明难度,强调数形结合,引入几何动态;
- 改变问题的设问方式,变封闭为开放,给学生以主动的思考空间;
- 要求运用学过的数学知识,通过观察、试验、联想、演绎、归纳、类比、分析、综合等思维形式,对数学问题进行探索和研究,探索性问题、发展性问题大量涌现;
- 通过类比和联想、延伸和推广,考查数学创新能力;
- 倡导数学建模、数学应用,贴近社会实际、体现时代要求的情景应用题应运而生

.....

本套书就是这次培训学习与分析思考的结晶,它以《标准》为指导,将初中数学组织为90个专题讲座,以最新中考、竞赛试题为载体,运用开放互动式写作方式,注重数学思想方法的介绍、数学思维的培养、数学意识的培育、跨学科的综合渗透、数学文化氛围的营造,本套书的编写宗旨是:知识能力并举、培优竞赛兼顾、激发学习兴趣、优化学习过程、追求人文关怀、培养数学美感。

愿读者能透过本书的创意,优化教学过程,优化学习过程,从中感受到数学教育改革、试题创新设计的一缕气息。

多年来,湖北大学数学系汪江松先生、武汉市教研室胡顺先生给了我很多的支持和帮助。百忙之中,裴光亚先生又欣然作序。在写作过程中,湖北省水果湖第二中学领导、老师给了我关怀,武汉魏红女士、柯华女士、张立临先生,江苏海门范红洪小姐,广州留美博士朱洁华女士等给予了我帮助,在此一并表示诚挚的谢意。

黄东坡

2002年5月于湖北省水果湖第二中学

目 录

代 数 篇

- ① 分解方法的延拓——换元法与主元法 (1)
- ② 分解方法的延拓——配方法与待定系数法 (5)
- ③ 因式分解的应用 (10)
- ④ 分式的概念、性质及运算 (15)
- ⑤ 有条件的分式的化简与求值 (20)
- ⑥ 实数的概念及性质 (25)
- ⑦ 二次根式的运算 (30)
- ⑧ 二次根式的化简求值 (36)

几 何 篇

- ⑨ 三角形的边与角 (41)
- ⑩ 全等三角形 (46)
- ⑪ 等腰三角形的性质 (52)
- ⑫ 等腰三角形的判定 (58)
- ⑬ 从勾股定理谈起 (64)
- ⑭ 多边形的边角与对角线 (70)
- ⑮ 平行四边形 (76)
- ⑯ 完美的正方形 (83)
- ⑰ 梯形 (90)
- ⑱ 由中点想到什么 (96)
- ⑲ 平行截割 (103)
- ⑳ 飞跃——从全等到相似 (110)
- ㉑ 相似三角形的性质 (116)
- ㉒ 直角三角形的再发现 (122)

综 合 篇

- ㉓ 代数证明 (128)
- ㉔ 配方法的解题功能 (132)
- ㉕ 整体方法 (136)
- ㉖ 面积问题评说 (140)
- ㉗ 折与剪的启示 (147)
- ㉘ 奇妙的对称 (153)
- ㉙ 几何动态 (158)
- ㉚ 数形互助 (163)
- 参考答案 (168)

1 分解方法的延拓——换元法与主元法

具有丰富知识和经验的人,比只有一种知识和经验的人更容易产生新的联想和独到的见解.

——泰勒

知识纵横

因式分解(factorization)是针对多项式的一种恒等变形,提公因式(common factor)法、公式法、分组分解法是因式分解的基本方法,通常根据多项式的项数来选择分解的方法.

一些复杂的因式分解问题,常用到换元法和主元法.

所谓换元,即对结构比较复杂的多项式,若把其中某些部分看成一个整体,用新字母代替(即换元),则能使复杂的问题简单化、明朗化,在减少多项式项数,降低多项式结构复杂程度等方面有独到作用.

所谓主元,即在解多变元问题时,选择其中某个变元为主要元素,视其他变元为常量,将原式重新整理成关于这个字母的按降幂排列的多项式,则能排除字母间的干扰,简化问题的结构.

例题求解

【例1】 分解因式: $(x^4 + x^2 - 4)(x^4 + x^2 + 3) + 10 =$ _____.

(第12届“五羊杯”竞赛题)

思路点拨 视 $x^4 + x^2$ 为一个整体,用一个新字母代替,从而能简化式子的结构.

【例2】 多项式 $x^2y - y^2z + z^2x - x^2z + y^2x + z^2y - 2xyz$ 因式分解后的结果是().

A. $(y-z)(x+y)(x-z)$

B. $(y-z)(x-y)(x+z)$

C. $(y+z)(x-y)(x+z)$

D. $(y+z)(x+y)(x-z)$



链接

分组分解法是因式分解的基本方法,体现了化整体为局部、又统揽全局的思想,如何恰当分组是解题的关键,常见的分组方法有:

- (1) 按字母分组;
- (2) 按次数分组;
- (3) 按系数分组.

为了能迅速解决一些与代数式恒等变形相关问题,读者应熟悉如下多项式分解因式后的结果:

$$(1) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(2) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$(3) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

(上海市竞赛题)

思路点拨 原式是一个复杂的三元三次多项式,直接分解有一定困难,把原式整理成关于某个字母按降幂排列的多项式,改变其结构,寻找分解的突破口.

【例3】 把下列各式分解因式:

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$; (天津市竞赛题)

(2) $1999x^2 - (1999^2 - 1)x - 1999$; (重庆市竞赛题)

(3) $(x+y-2xy)(x+y-2) + (xy-1)^2$. (“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 (1)是形如 $abcd + e$ 型的多项式,分解这类多项式时,可适当把4个因式两两分组,使得分组相乘后所得的有相同的部分;(2)式中系数较大,不妨把数用字母表示;(3)式中 $x+y, xy$ 多次出现,可引入两个新字母,突出式子特点.

【例4】 把下列各式分解因式:

(1) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$;

(2) $x^2 + xy - 2y^2 - x + 7y - 6$.

思路点拨 (1)式字母多次高,可尝试用主元法;(2)式是形如 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 的二元二次多项式,解题思路宽,用主元法或分组分解法或用待定系数法分解.

【例5】 在黑板上写有一个缺系数和常数项的多项式:

$$m^3 + \boxed{} m^2 + \boxed{} m + \boxed{}$$

现有两个人做填数字游戏:甲在任一空位内填上一个非零整数,接着,乙在剩下的两个位置中任选一个填上一个整数,最后,甲在余下的空位上填上一个整数.

若要求无论怎样填数,所得到的多项式可分解,则该如何填?



链接

从换元的形式看,有常值代换、式的代换;从引元的个数看,有一元代换、二元代换等.换元的思想是简化式子的表达形式,在代数式的化简求值、因式分解、解方程等方面有广泛的应用,用换元法解题时,需认真观察,恰当变形,发现数式的结构特点.

项数多、次数高、元数多是解代数问题时产生困难的原因之一,主元法是促使我们解决困难的有效方法.选择次数低的字母为主元,是确定主元的基本方法,也是运用主元法解题的关键.

本例是一个开放性、逆向思维的问题,解题的关键是要有一定宏观的整体的驾驭能力,再辅以提公因式、分组分解等因式分解的基本方法.

思路点拨 甲有选择任一个空位的主动权,只需先填上某一方框内的整数,然后根据乙填的情况再相应填写即可.

学 力 训 练

基础夯实

1. 分解因式: $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 =$ _____.
2. 分解因式: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 =$ _____.
3. 分解因式: $x^2 - xy - 2y^2 - x - y =$ _____.

(2001年重庆市中考题)

4. 已知二次三项式 $x^2 - mx - 8$ 在整数范围内可以分解为两个一次因式的积,则整数 m 的可能取值为_____.

5. 将多项式 $x^4 - 2x^2 - 3$ 分解因式,结果正确的是().

- A. $(x^2 + 3)(x^2 - 1)$ B. $(x^2 + 1)(x^2 - 3)$
C. $(x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$ D. $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$

(2001年北京市崇文区中考题)

6. 下列5个多项式:

- ① $a^2b^2 - a^2 - b^2 - 1$; ② $x^3 - 9ax^2 + 27xa^2 - 27a^3$;
③ $x(b + c - d) - y(d - b - c) - 2c + 2d - 2b$;
④ $3m(m - n) + 6n(n - m)$; ⑤ $(x - 2)^2 + 4x$.

其中在有理数范围内可以进行因式分解的有().

- A. ①、②、③ B. ②、③、④ C. ③、④、⑤ D. ①、②、④

7. 若 $100x^2 - kxy + 49y^2$ 是一个完全平方式,那么 k 等于().

- A. 4900 B. 700 C. ± 140 D. ± 70

8. 若 p 是两位的正整数,则可能成立的等式是().

- A. $x^2 + px + 2001 = (x - 29)(x - 69)$
B. $x^2 + px + 2001 = (x - 23)(x - 87)$
C. $x^2 + px + 2001 = (x + 23)(x + 87)$
D. $x^2 + px + 2001 = (x + 29)(x + 69)$ (2001年北京市竞赛题)

9. 分解因式:

- (1) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;
(2) $(2x^2 - 3x + 1)^2 - 22x^2 + 33x - 1$;
(3) $x^4 + 2001x^2 + 2000x + 2001$;
(4) $(6x - 1)(2x - 1)(3x - 1)(x - 1) + x^2$;
(5) $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 3ab + 4ac + 5bc$;
(6) $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6$. (“希望杯”邀请赛试题)

分解方法的延拓——配方法与待定系数法

数学也是一种语言,从它的结构和内容看,这是一种比任何国家的语言都要完善的语言,实际上,数学是语言的语言,通过数学,自然界在论述;通过数学,世界的创造者在表达;通过数学,世界的保护者在讲演.

——第尔曼

知识纵横

在数学课外活动中,配方法与待定系数法也是分解因式的重要方法.

把一个式子或一个式子的部分写成完全平方式或几个完全平方式的和的形式,这种方法叫配方法,配方法分解因式的关键是通过拆项或添项,将原多项式配上某些需要的项,以便得到完全平方式,然后在此基础上分解因式.

对所给的数学问题,根据已知条件和要求,先设出问题的多项式表达形式(含待定的字母系数),然后利用已知条件,确定或消去所设待定系数,使问题获解的这种方法叫待定系数法,用待定系数法解题的一般步骤是:

1. 根据多项式次数关系,假设一个含待定系数的等式;
2. 利用恒等式对应项系数相等的性质,列出含有待定系数的方程组;
3. 解方程组,求出待定系数,再代入所设问题的结构中去,得到需求问题的解.

例题求解

【例1】 分解因式: $a^2 - b^2 + 4a + 2b + 3$ 的结果是_____.

(郑州市竞赛题)



链接

拆项即把代数式中的某项拆成两项的和或差,添项即把代数式添上两个符号相反的项,通过拆添项,多项式增加了项数,从而可以用分组分解法分解.

配方法与待定系数法是数学中重要的思想方法,不仅仅拘泥于分解因式,在后续的学习中如解高次方程、确定函数解析式、挖掘隐含条件、讨论最值问题等方面有广泛的应用.

思路点拨 直接分组分解困难,由式子的特点易想到完全平方式,关键是将常数项拆成几个数的代数和,以便凑配.

【例 2】 如果 $x^3 + ax^2 + bx + 8$ 有两个因式 $x + 1$ 和 $x + 2$, 则 $a + b = (\quad)$.

A. 7 B. 8 C. 15 D. 21

(2001 年武汉市选拔赛试题)

思路点拨 原多项式的第三个因式必是形如 $x + c$ 的一次两项式,故可考虑用待定系数法解.

【例 3】 把下列各式分解因式:

(1) $x^4 - 7x^2 + 1$;

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

(2) $x^4 + x^2 + 2ax + 1 - a^2$;

(哈尔滨市竞赛题)

(3) $(1 + y)^2 - 2x^2(1 + y^2) + x^4(1 - y)^2$.

(扬州市竞赛题)

思路点拨 所给多项式,或有两项的平方和、或有两项的积的 2 倍,只需配上缺项,就能用配方法恰当分解.

【例 4】 k 为何值时,多项式 $x^2 - 2xy + ky^2 + 3x - 5y + 2$ 能分解成两个一次因式的积?

(天津市竞赛题)

思路点拨 因 k 为二次项系数,故不宜从二次项入手,而 $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,可得多项式必为 $(x + my + 1)(x + ny + 2)$ 的形式.



寻找解题途径,是一个创造性的积极思维过程,解题时,应当想什么?怎样想?

(1) 回想:在审题的基础上,根据问题的条件或结论,回想与问题相关的概念、公式、定理、法则,能否直接运用?问题的常用解法是什么?等等.

(2) 联想:从一个数学问题想到另一个数学问题的心理活动,寻找一个熟悉的相似的问题,或找出与题目接近的原理方法,变通使用这些知识,寻找突破口.

(3) 猜想:对事物变化方向的一种“试探”性判断.

待定系数法是解形如 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ (a, b, c, d, e, f 为常数, a, b, c 不同时为零) 的二元二次多项式的有效方法,常见的应用途径是:

(1) 若 $ax^2 + bxy + cy^2 = (a_1x + c_1y) \cdot (a_2x + c_2y)$, 则可设原式 $= (a_1x + c_1y + m)(a_2x + c_2y + n)$, 其中 m, n 是待定系数.

【例5】证明恒等式： $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$

(2001年北京市竞赛题)

思路点拨 作差比较,或从一边推向另一边,关键是由待证式的特征进行联想,并借助因式分解辅以恰当的变形.



(2) 若 a, b, c 中至少有一个本身就是待定系数,则可从 $ax^2 + dx + f$ (或 $cy^2 + ey + f$) 入手,即若 $ax^2 + dx + f = (a_1x + f_1)(a_2x + f_2)$,则可设原式 $= (a_1x + my + f_1)(a_2x + ny + f_2)$,其中 m, n 是待定系数.

学力训练

基础夯实

1. 分解因式： $a^3b + ab + 30b$ 的结果是_____.

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

2. 若 $x^3 + 3x^2 - 3x + k$ 有一个因式是 $x + 1$, 则 $k =$ _____.

3. 若 $x^2 + y^2 + \frac{5}{4} = 2x + y$, 则 $x + y =$ _____.

4. 已知多项式 $2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 8y - 6$ 可以分解为 $(x + 2y + m) \cdot$

$(2x - y + n)$ 的形式, 那么 $\frac{m^3 + 1}{n^2 - 1}$ 的值是_____.

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

5. 已知 $a^2 + b^2 + 4a - 2b + 5 = 0$, 则 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值为().

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. -3

D. $-\frac{1}{3}$

6. 如果 a, b 是整数, 且 $x^2 - x - 1$ 是 $ax^3 + bx^2 + 1$ 的因式, 那么 b 的值为().

A. -2

B. -1

C. 0

D. 2

(第15届江苏省竞赛题)

7. 把多项式 $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$ 因式分解后, 正确的结果是().

A. $(x + y + 3)(x - y - 1)$

B. $(x + y - 1)(x - y + 3)$

C. $(x + y - 3)(x - y + 1)$

D. $(x + y + 1)(x - y - 3)$

8. 把下列各式分解因式:

(1) $a^4 + 64b^4$;

(2) $x^4 + x^2y^2 + y^4$;

(3) $x^2 + (1+x)^2 + (x+x^2)^2$;

(4) $(c-a)^2 - 4(b-c)(a-b)$;

(昆明市竞赛题)

(5) $x^3 - 9x + 8$;

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

(6) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

(重庆市竞赛题)

9. 已知 $x^2 + 2x + 5$ 是 $x^4 + ax^2 + b$ 的一个因式, 求 $a + b$ 的值.

(第 13 届“希望杯”邀请赛试题)

能力拓展

10. 已知 $x^2 + x - 6$ 是多项式 $2x^4 + x^3 - ax^2 + bx + a - b - 1$ 的因式, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(第 15 届江苏省竞赛题)

11. 一个二次三项式的完全平方是 $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + b$, 那么, 这个二次三项式是_____.

(重庆市竞赛题)

12. 已知多项式 $x^2 + axy + by^2 - 5x + y + 6$ 的一个因式是 $x + y - 2$, 则 $a + b$ 的值为_____.

(北京市竞赛题)

13. 已知 n 为正整数, 且 $4^7 + 4^n + 4^{1998}$ 是一个完全平方数, 则 n 的值为_____.

14. 设 m, n 满足 $m^2n^2 + m^2 + n^2 + 10mn + 16 = 0$, 则 $(m, n) =$ ().

A. $(2, 2)$ 或 $(-2, -2)$

B. $(2, 2)$ 或 $(2, -2)$

C. $(2, -2)$ 或 $(-2, 2)$

D. $(-2, -2)$ 或 $(-2, 2)$

15. 将 $x^5 + x^4 + 1$ 因式分解得().

A. $(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$

B. $(x^2 - x + 1)(x^3 + x + 1)$

C. $(x^2 - x + 1)(x^3 - x + 1)$

D. $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

16. 若 a, b, c, d 都是正数, 则在以下命题中, 错误的是().

A. 若 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, 则 $a = b = c$;

B. 若 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, 则 $a = b = c$;

C. 若 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2(a^2b^2 + c^2d^2)$, 则 $a = b = c = d$;

D. 若 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, 则 $a = b = c = d$.

17. 把下列各式分解因式:

(1) $4x^3 - 31x + 15$;



一元高次多项式, 分解因式有下列两种常用方法:

(1) 拆添项法;

(2) 待定系数法.

拆添项是一项技巧性很强的工作, 只有认真观察多项式的结构特征和数量关系, 才能正确地对多项式进行拆添项, 待定系数虽具有一般性, 但是操作过程较繁, 因此, 需具体问题具体分析, 灵活选用方法分解.

(2) $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$;

(3) $x^5 + x + 1$;

(4) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

18. k 为何值时, 多项式 $x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + k$ 有一个因式是 $x + 2y + 2$?

综合创新

19. 求证: $x^2 - xy + y^2 + x + y$ 不能分解成两个一次因式的乘积.
20. 一个自然数 a 若恰好等于另一个自然数 b 的平方, 则称自然数 a 为完全平方数, 如 $64 = 8^2$, 64 就是一个完全平方数, 已知 $a = 2001^2 + 2001^2 \times 2002^2 + 2002^2$, 求证: a 是一个完全平方数.

3 因式分解的应用

对一个数学问题,改变它的形式,换一种叙述方式,变换它的结构,直到发现有价值的东西,这是解题的一个重要原则.

——玻利亚

知识纵横

在一定的条件下,把一个代数式变换成另一个与它恒等的代数式称为代数式的恒等变形,是研究代数式、方程和函数的基础.

因式分解是代数变形的重要工具,在后续的学习中,因式分解是学习分式、一元二次方程等知识的基础,现阶段,因式分解在数值计算、代数式的化简求值、不定方程(组)、代数等式的证明等方面有广泛的应用.同时,通过因式分解的训练和应用,能使我们的观察能力、运算能力、变形能力、逻辑思维能力、探究能力得以提高.因此,有人说因式分解是学好代数的基础之一.

许多多项式分解因式后的结果在解题中经常用到,我们应熟悉以下的常用结果:

1. $ab \pm b \pm a + 1 = (a \pm 1)(b \pm 1)$;
2. $ab \pm a \mp b + 1 = (a \mp 1)(b \pm 1)$;
3. $a^4 + 4 = (a^2 + 2a - 2)(a^2 - 2a + 2)$;
4. $4a^4 + 1 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)$;
5. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$;
6. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$.

例题求解

【例1】 已知 $ab \neq 0$, $a^2 + ab - 2b^2 = 0$, 那么 $\frac{2a-b}{2a+b}$ 的值为_____.

(全国初中数学联赛题)

思路点拨 对已知等式通过恰当的变形,寻求 a 、 b 之间的关系,代入关系求值.



在信息技术飞速发展的今天,信息已经成为人类生活中最重要的因素.在军事、政治、商业、生活等领域中,信息的保密工作显得格外重要,现代保密技术的一个基本思想,在编制密码的工作中,许多编码方法,就来自于因数分解、因式分解技术的应用.

代数式求值的常用方法是:

(1) 代入字母的值求值;

(2) 通过变形,寻找字母间的关系,代入关系求值;

(3) 整体代入求值.

【例2】 已知 a, b, c 是一个三角形的三边, 则 $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$ 的值().

- A. 恒正 B. 恒负
C. 可正可负 D. 非负

(太原市竞赛题)

思路点拨 从变形给定的代数式入手, 解题的关键是由式子的特点联想到熟悉的结果, 注意几何定理的约束.

【例3】 计算下列各题:

- (1) $\frac{(2 \times 5 + 2)(4 \times 7 + 2)(6 \times 9 + 2)(8 \times 11 + 2) \cdots (1994 \times 1997 + 2)}{(1 \times 4 + 2)(3 \times 6 + 2)(5 \times 8 + 2)(7 \times 10 + 2) \cdots (1993 \times 1996 + 2)}$;
(2) $\frac{2000^3 - 2 \times 2000^2 - 1998}{2000^3 + 2000^2 - 2001}$.

思路点拨 观察分子、分母数字间的特点, 用字母表示数, 从一般情形考虑, 通过分解变形, 寻找复杂数值下隐含的规律.



解题思路的获得, 一般要经历三个步骤:

(1) 从理解题意中提取有用的信息, 如数式特点、图形结构特征等;

(2) 从记忆储存中提取相关的信息, 如有关公式、定理、基本模式等;

(3) 将上述两组信息进行有效重组, 使之成为一个合乎逻辑的和谐结构.

【例4】 已知 n 是正整数, 且 $n^4 - 16n^2 + 100$ 是质数, 求 n 的值.

(第13届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 从因数分解的角度看, 质数只能分解成1和本身的乘积(也可从整除的角度看), 故对原式进行恰当的分解变形, 是解本例的最自然的思路.

【例 5】(1) 求方程 $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$ 的整数解.

(上海市竞赛题)

(2) 确定所有非负整数对 (x, y) , 使得 $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

(印度奥林匹克试题)

思路点拨 观察方程的特点, 利用整数解这个特殊条件, 运用因式分解, 寻找解题突破口.



链接

不定方程(组)的基本解法有:

(1) 枚举法;

(2) 配方法;

(3) 因数分解、因式分解法;

(4) 分离系数法.

运用这些方法解不定方程时, 都需灵活运用奇数偶数、质数合数、整除等与整数相关的知识.

学 力 训 练

基础夯实

- 已知 $x + y = 3$, $x^2 + y^2 - xy = 4$, 那么 $x^4 + y^4 + x^3y + xy^3$ 的值为 _____.
- Suppose both a and b are integer, As $(a - 2b)(8 - a) = 1$, then $a + b =$ _____.
(英汉小词典: integer 整数)
(第 13 届“希望杯”邀请赛试题)
- 已知 a, b, c, d 为非负整数, 且 $ac + bd + ad + bc = 1997$, 则 $a + b + c + d =$ _____.
- 计算: (1) $\frac{2002^2 + 5 \times 2002 + 6}{2002^3 + 6 \times 2002^2 + 11 \times 2002 + 6} =$ _____.
(2) $\frac{(1994^2 - 2000)(1994^2 + 3985) \times 1995}{1991 \times 1993 \times 1996 \times 1997} =$ _____.
- 已知 $7^{24} - 1$ 可被 40 至 45 之间的两个整数整除, 这两个整数是 ().
A. 41, 48 B. 45, 97 C. 43, 48 D. 41, 47
- 已知 $2x^2 - 3xy + y^2 = 0 (xy \neq 0)$, 则 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 的值是 ().
A. $2, 2\frac{1}{2}$ B. 2 C. $2\frac{1}{2}$ D. $-2, -2\frac{1}{2}$
- 已知 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$, 则多项式 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1989}$ 的值等于 ().

- A. 1 B. $1+x$ C. 0 D. 1989
8. 如果 $3x^3 - x = 1$, 那么 $9x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 7x + 2001$ 的值等于().
 A. 1999 B. 2001 C. 2003 D. 2005
 (2000 年武汉市选拔赛试题)
9. (1) 求证: $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除;
 (2) 证明: 当 n 为自然数时, $2(2n+1)$ 形式的数不能表示为两个整数的平方差.
10. 若 a 是自然数, 则 $a^4 - 3a^2 + 9$ 是质数还是合数? 给出你的证明.
 (“五城市”联赛题)

能力拓展

11. 已知 a, b, c 满足 $a+b=5, c^2=ab+b-9$, 则 $c=$ _____.
 (第 15 届江苏省竞赛题)
12. 已知正数 a, b, c 满足 $ab+a+b=bc+b+c=ac+c+a=3$, 则 $(a+1)(b+1)(c+1)=$ _____.
 (北京市竞赛题)
13. 整数 a, b 满足 $6ab=9a-10b+303$, 则 $a+b=$ _____.
 (“祖冲之杯”邀请赛试题)
14. 红金龙足球队举行庆祝晚宴, 出席者两两碰杯一次, 总共碰杯 990 次, 晚宴共有 _____ 人出席.
15. 设 $a < b < c < d$, 如果 $x=(a+b)(c+d), y=(a+c)(b+d), z=(a+d)(b+c)$, 那么 x, y, z 的大小关系为().
 A. $x < y < z$ B. $y < z < x$
 C. $z < x < y$ D. 不能确定
16. 在方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=-36 \end{cases}$ 中, x, y, z 是互不相等的整数, 那么此方程组的解的组数为().
 A. 6 B. 3 C. 多于 6 D. 少于 3
17. 已知两个不同的质数 p, q 满足下列关系: $p^2 - 2001p + m = 0, q^2 - 2001q + m = 0, m$ 是适当的整数, 那么 $p^2 + q^2$ 的数值是().
 A. 4004006 B. 3996005
 C. 3996003 D. 4004004
18. 设 $y = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 5$, 其中 x 为任意数, 则 y 的取值范围是().
 A. 一切数 B. 一切正数
 C. 一切大于或等于 5 的数 D. 一切大于或等于 2 的数
 (第 13 届“希望杯”邀请赛试题)

19. 求证:存在无穷多个自然数 k ,使得 $n^4 + k$ 不是质数.
20. 某校在向“希望工程”捐款活动中,甲班的 m 个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等,都是 $(mn + 9m + 11n + 145)$ 元,已知每人的捐款数相同,且都是整数,求每人的捐款数.

(全国初中数学联赛题)

综合创新

21. 设 a, b, c, d 是 4 个整数,且使得 $m = (ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$ 是个非零整数,求证: $|m|$ 一定是个合数.

(北京市竞赛题)

22. 按下面规则扩充新数:

已有两数 a, b ,可按规则 $c = ab + a + b$ 扩充一个新数,在 a, b, c 三个数中任取两数,按规则又可扩充一个新数,……每扩充一个新数叫做一次操作.

现有数 1 和 4

- (1) 求按上述规则操作三次得到扩充的最大新数;
- (2) 能否通过上述规则扩充得到新数 1999,并说明理由.

(重庆市竞赛题)

4 分式的概念、性质及运算

在寻求真理的长河中,惟有学习,不断地学习,有创造性地学习,才能越重山,跨峻岭.

——华罗庚

知识纵横

分式(fraction)包括分式的概念、分式的基本性质、分式的运算、简单的分式方程等主要内容.

从整式到分式,我们可以形象地说是从“平房”到了“楼房”,在脚手架上活动,无疑增加了难点,体现在:解分式问题总是在分式有意义的前提下进行的,因此必须考虑字母取值范围;分式运算中的通分(changing fractions to a common denominator)和约分(reduction of a fraction)是技巧性较强的工作,需要灵活处理.

分式的运算与分数的运算相似,是以分式的基本性质、运算法则、通分和约分为基础,是以整式的变形、因式分解为工具,分式的加减运算是分式运算的难点,突破这一难点的关键是能根据问题的特点恰当地通分,常用通分的策略与技巧有:

1. 化整为零,分组通分;
2. 步步为营,分步通分;
3. 减轻负担,先约分再通分;
4. 裂项相消后通分等

例题求解

【例1】 要使分式 $\frac{1}{1-|x|}$ 有意义,则 x 的取值范围是_____.

(“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 当分式的分母不为零时,分式有意义,由于分式是繁分式,因此考虑问题应细致周密.



在新事物面前,人们往往习惯于把它们与原有的、熟知的事物相比,这里蕴含的思想方法就是类比.

学习分式时,应注意:

(1) 分式与分数的概念、性质、运算的类比;

(2) 整数可以看做是分数的特殊情形,但整式却不是分式的特殊情形;

(3) 分式需要讨论字母的取值范围,这是分式区别于整式的关键所在.

【例2】 已知 $\frac{2x-3}{x^2-x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x}$, 其中 A, B 为常数, 那么 $A+B$ 的值为().

- A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

(第15届江苏省竞赛题)

思路点拨 对等式右边通分, 比较分子的对项系数求出 A, B 的值.

【例3】 计算下列各式:

$$(1) \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4};$$

$$(2) \frac{x^2+yz}{x^2+(y-z)-yz} + \frac{y^2-zx}{y^2+(z+x)y+zx} + \frac{z^2+xy}{z^2-(x-y)z-xy};$$

(第12届“五羊杯”竞赛题)

$$(3) \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1} + \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x-1} - \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}.$$

(江西省赣州市竞赛题)

思路点拨 因各分式复杂, 故须观察各式中分母的特点, 恰当运用通分的相关策略与技巧. 对于(1), 分步通分; 对于(2), 拆项再通分; 对于(3), 先约分再通分.

【例4】 解下列分式方程(组):

$$(1) \frac{5x-96}{x-19} + \frac{x-8}{x-9} = \frac{4x-19}{x-6} + \frac{2x-21}{x-8};$$

(“五羊杯”竞赛题)

$$(2) \begin{cases} \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3} \\ \frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4} \\ \frac{ca}{c+a} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

(“希望杯”邀请赛题)

思路点拨 若直接通分去分母, 则使问题复杂化, 对于(1)拆分、分步运算, 对于(2)取倒数, 逆用加法法则.



把一个真分式化成几个简单的真分式的代数和, 其方法是: 先将分式的分母分解因式, 再根据分母的因式次数假设分解后的部分分式, 最后用待定系数法求解.

整体与局部是一对矛盾, 又可相互转化, 当一个数学问题不能或不便于从整体上加以解决时, 我们常从局部入手将原题分解, 这就是解题的分解策略. 解绝对值问题时用的分段、分类讨论、因式分解的分组分解法、分式运算中的分步分组通分等, 是分解策略的具体运用.

去分母, 将分式方程转化为整式方程, 是解分式方程的基本思路, 但解复杂的分式方程时常用到以下技巧:

(1) 类似于分式运算, 对方程进行拆项、拆分、分步计算等变形;

(2) 巧取倒数, 整体求解.

【例 5】 n 为自然数,若 $n+6 \mid n^3+1996$,则称 n 为 1996 的吉祥数,如 $4+6 \mid 4^3+1996$,4 就是 1996 年的一个吉祥数.试求 1996 年的所有吉祥数的和.

(北京市竞赛题)

思路点拨 由于 n^3+1996 的次数高于 $n+6$ 的次数,所以,通过变形将两个整式整除的问题转化为一个分式的问题来解决,是解本例的关键.



类似于分数,当一个分式的分子的次数高于或等于分母的次数,那么就可以将分式化为整式部分与分式部分的和,分式的这种变形称为拆分变形,是拆项变形的一种.

学 力 训 练

基础夯实

1. 若使分式 $\frac{a^2-4}{1+\frac{1+3a}{2a}}$ 没有意义,则 a 的值为_____.
2. 已知 x 为整数,且 $\frac{2}{x+3} + \frac{2}{3-x} + \frac{2x+18}{x^2-9}$ 为整数,则所有符合条件的 x 值的和为_____.
3. 已知 $\frac{a}{x+2}$ 与 $\frac{b}{x-2}$ 的和等于 $\frac{4x}{x^2-4}$,则 $a =$ _____, $b =$ _____.
4. 学校用一笔钱买奖品,若以 1 枝钢笔和 2 本日记本为一份奖品,则可买 60 份奖品;若以 1 枝钢笔和 3 本日记本为一份奖品,则可买 50 份奖品.那么,这笔钱全部用来买钢笔可以买_____枝.

(2000 年山东省竞赛题)

(江苏省镇江市中考题)

5. 已知式子 $\frac{(x-8)(x+1)}{|x|-1}$ 的值为零,则 x 的值为().
A. ± 1 B. -1 C. 8 D. -1 或 8

(第 15 届江苏省竞赛题)

6. 化简 $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$ 的结果是().
A. $\frac{4}{x^2+6x+5}$ B. $\frac{3}{x^2+6x+5}$
C. $\frac{2}{x^2+6x+5}$ D. $\frac{1}{x^2+6x+5}$

(大连市“育英杯”竞赛题)

7. 若对于 ± 3 以外的一切数 $\frac{m}{x+3} - \frac{n}{x-3} = \frac{8x}{x^2-9}$ 均成立, 则 mn 的值是 ().

- A. 8 B. -8 C. 16 D. -16

8. 已知 a, b 满足 $ab = 1$, 若 $M = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$, $N = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$, 则 M, N 的大小关系是 ().

- A. $M > N$ B. $M = N$ C. $M < N$ D. 不确定

9. 计算下列各题:

$$(1) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1};$$

$$(2) \frac{3x^2+9x+7}{x+1} - \frac{2x^2+4x-3}{x-1} - \frac{x^3+x+1}{x^2-1};$$

$$(3) \frac{b-c}{a^2-ab-ac+bc} - \frac{c-a}{b^2-bc-ab+ac} + \frac{a-b}{c^2-ac-bc+ab};$$

$$(4) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left[x + \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x-\frac{1}{x}}\right]^2 \div \frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x} + 3}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} + 3}.$$

10. 火车长为 400 米, 通过隧道 (从火车头进入隧道至车尾离开隧道) 需 10 分钟; 若每分钟速度增加 0.1 千米, 则只需 9 分钟. 求隧道长.

(太原市竞赛题)

能力拓展

11. 若 a 为整数, 且分式 $\frac{(a^2-4a+4)(a^3-2)}{a^3-6a^2+12a-8} - \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a-2}$ 的值是正整数, 则 a 的值等于 _____.

12. 若关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-2} = -1$ 的解为正数, 则 a 的取值范围是 _____.

(2000 年湖北省选拔赛试题)

13. 方程 $4x^2 - 2xy - 12x + 5y + 11 = 0$ 有 _____ 组正整数解.

(第 12 届“五羊杯”竞赛题)

14. If n is a positive integer and $\frac{n^2+3n-10}{n^2+6n-16}$ is a reduced fraction, then $\frac{n^2+3n-10}{n^2+6n-16} =$ _____.

(英汉小词典: reduced fraction 既约分数)

15. 设 a, b, c 均为正数, 若 $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{c+a}$, 则 a, b, c 三个数的大小关系是().

- A. $c < a < b$ B. $b < c < a$
C. $a < b < c$ D. $c < b < a$

16. 若 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 则 $\frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$ 的值为().

- A. $\frac{5}{3}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

17. 分式 $\frac{6x^2+12x+10}{x^2+2x+2}$ 可取的最小值为().

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 不存在

18. 设有理数 a, b, c 都不为零, 且 $a+b+c=0$, 则 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} +$

$\frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$ 的值是().

- A. 正数 B. 负数 C. 零 D. 不能确定

19. 解下列方程(组):

$$(1) \frac{13-2x}{11-2x} + \frac{17-2x}{15-2x} = \frac{19-2x}{17-2x} + \frac{11-2x}{9-2x};$$

$$(2) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \left| \frac{3x+2}{2x+1} \right|; \quad (\text{太原市竞赛题})$$

$$(3) \begin{cases} \frac{xy+x}{x+y+1} = 2 \\ \frac{xz+2x}{x+z+2} = 3 \\ \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} = 4. \end{cases} \quad (\text{北京市竞赛题})$$

20. 某工程, 甲队单独做所需天数是乙、丙两队合做所需天数的 a 倍, 乙队独做所需天数是甲、丙两队合做所需天数的 b 倍, 丙队独做所需天数是甲、乙两队合作所需天数的 c 倍, 求 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+1}$ 的值. (江苏省竞赛题)

综合创新

21. 求最大的正整数, 使得 n^3+100 能被 $n+10$ 整除.

(美国数学邀请赛试题)

22. 某同学买某种铅笔, 当他买了 x 枝、付了 y 元(x, y 都是整数), 营业员说: “你要再多买 10 枝, 我就总共收你 2 元钱, 这样相当于每买 30 枝, 你可节省 2 元钱.” 求 x, y . (天津市竞赛题)

5 有条件的分式的化简与求值

早起多长一智,晚睡多增
一闻,时间是看不见的流水,但
勤奋者却能听得出它奔流的响
声.

知识纵横

给出一定的条件,在此条件下求分式的值称为有条件的分式求值.而分式的化简与求值是紧密相连的,求值之前必须先化简,化简的目的是为了求值,先化简后求值是解有条件的分式的化简与求值的基本策略.

解有条件的分式化简与求值问题时,既要瞄准目标,又要抓住条件;既要根据目标变换条件,又要依据条件来调整目标,除了要用到整式化简求值的知识方法外,还常常用到如下技巧:

1. 恰当引入参数;
2. 取倒数或利用倒数关系;
3. 拆项变形或拆分变形;
4. 整体代入;
5. 利用比例性质等.

例题求解

【例1】 若 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$, 则 $\frac{a-b+c-d}{a+b-c+d}$ 的值是_____.

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 引入参数,利用参数寻找 a, b, c, d 的关系.

【例2】 若 $\frac{x}{3y} = \frac{y}{2x-5y} = \frac{6x-15y}{x}$, 则 $\frac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ 的值为().

链接

解数学题是运用已知条件去探求未知结论的一个过程,如何运用已知条件是解题顺畅的重要前提,对已知条件的运用有下列途径:

- (1) 直接运用条件;
- (2) 变形运用条件;
- (3) 综合运用条件;
- (4) 挖掘隐含条件.

在解某些含多个字母的代数问题时,如果已知与未知之间的联系不明显,为了沟通已知与未知之间的联系,则可考虑引入一个参数,参数的引入,可起到沟通变元、消元的功能.

A. $\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{4}$

C. 5

D. 6

(2000年全国初中数学联赛题)

思路点拨 把连等式拆开用,通过变形,导出 x, y 间的关系,关系代入求值.

【例3】 已知 $x - \frac{1}{x} = 3$, 求 $\frac{x^{10} + x^8 + x^2 + 1}{x^{10} + x^6 + x^4 + 1}$ 的值.

思路点拨 所求分式中每一项均为 x 的偶次方项,所以应将条件化为 x 的偶次方程式.

【例4】 不等于0的三个正数 a, b, c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, 求证 a, b, c 中至少有两个互为相反数.

(天津市竞赛题)

思路点拨 要证 a, b, c 中至少有两个互为相反数,即要证明 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$,使证明的目标更加明确.

【例5】 已知 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{5}{132}$, 求 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 的值.

("北京数学科普日"攻擂赛试题)

思路点拨 已知条件是 $\frac{a-b}{a+b}, \frac{b-c}{b+c}, \frac{c-a}{c+a}$ 三个数的乘积,探求这三个数的和与这三个数的积之间的关系,从而求出 $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}$ 的值是解本例的关键.



大发明家爱迪生一次把一只灯泡的玻璃壳交给他的助手阿普顿,要他计算一下灯泡的容积,阿普顿思索良久,画出灯泡的剖视图、立体图、曲线,测量一个个数据,列出一道算式……仍未得出结论.爱迪生稍加思考,在玻璃壳里装满水,再把水倒入量杯,很快灯泡的容积就“算”出来了.

在解决这一实际问题中,阿普顿想到的仅仅是数学计算的方法,而爱迪生在直接求灯泡容积困难时,他改变思路,把计算灯泡的容积转换为测量灯泡所盛水的体积,这一思维方法称为“转换思想”,是学习中常用的思维方式.

在直接求解、求证原问题难以入手时,把问题作适当的变换,如换一种说法,换一种形式,构造一个或几个比原问题简单或已经熟悉易于求解的新问题,通过对新问题的考察,发现原问题的解题思路,这就是数学解题中的转换思想.

学力训练

基础夯实

1. 已知 $x - y - z = 0$, $y - z = 0$, 且 $xyz \neq 0$, 则 $\frac{1998x^2 + 1999y^2 - 2000z^2}{1998x^2 - 1999y^2 + 2000z^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $\frac{x}{x^2 - x + 1} = 7$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$, 则 $\frac{2a - ab - 2b}{a - 3ab - b}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(第 15 届江苏省竞赛题)

4. 已知 $\frac{a+b}{2} = \frac{b-2c}{3} = \frac{3c-a}{4}$, 则 $\frac{5a+6b-7c}{8a+9b} = \underline{\hspace{2cm}}$. ($a \neq 0$)

(第 12 届“五羊杯”竞赛题)

5. 设 $a > 0 > b > c$, $a + b + c = 1$, $M = \frac{b+c}{a}$, $N = \frac{a+c}{b}$, $P = \frac{a+b}{c}$, 则 M, N, P 之间的大小关系是().

A. $M > N > P$

B. $N > P > M$

C. $P > M > N$

D. $M > P > N$

6. 设 a, b, c 是三个互不相同的正数, 如果 $\frac{a-c}{b} = \frac{c}{a+b} = \frac{b}{a}$, 那么 ().

A. $3b = 2c$

B. $3a = 2b$

C. $2b = c$

D. $2a = b$

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

7. 设 $\frac{x}{x^2 - mx + 1} = 1$, 则 $\frac{x^3}{x^6 - m^3x^3 + 1}$ 的值是().

A. 1

B. $\frac{1}{m^3 + 3}$

C. $\frac{1}{3m^2 - 2}$

D. $\frac{1}{3m^2 + 1}$

8. 设轮船在静水中速度为 v , 该船在流水(速度为 $u < v$)中从上游 A 驶往下游 B , 再返回 A , 所用时间为 T ; 假设 $u = 0$, 即河流改为静水, 该船从 A 至 B 再返回 B , 所用时间为 t , 则().

A. $T = t$

B. $T < t$

C. $T > t$

D. 不能确定 T, t 的大小关系

9. 设 $a + b + c = 0$, 求 $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$ 的值.

10. 已知 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$, 其中 x, y, z 互不相等, 求证: $x^2y^2z^2 = 1$.

能力拓展

11. 若 $abc \neq 0$, 且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$, 则 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} =$ _____.

12. 已知 $a^2 - 3a + 1 = 0$, 则代数式 $\frac{a^3}{a^6 + 1}$ 的值为 _____.

13. 已知 $\frac{xy}{x+y} = 1, \frac{yz}{y+z} = 2, \frac{zx}{z+x} = 3$, 则 x 的值为 _____.

14. 已知 a, b 为整数, 且满足 $\left[\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right] \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{2}{3}$, 则 $a + b =$ _____.

(全国初中数学联赛题)

15. 三角形三边 a, b, c 适合 $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{b+c}{b+c-a}$, 则此三角形是().

- A. 以 a 为腰的等腰三角形 B. 以 a 为底的等腰三角形
C. 等边三角形 D. 以上答案都不对

16. 已知 $abc = 1, a + b + c = 2, a^2 + b^2 + c^2 = 3$, 则 $\frac{1}{ab+c-1} + \frac{1}{bc+a-1} + \frac{1}{ca+b-1}$ 的值为().

- A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. $-\frac{2}{3}$

(太原市竞赛题)

17. 已知 $x - \frac{1}{2x} = 2$, 则以下结论中, 有()个是正确的.

① $x^2 + \frac{1}{4x^2} = 5$; ② $x^3 - \frac{1}{8x^3} = 11$; ③ $x^5 - \frac{1}{32x^5} = 54$.

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

(第13届“五羊杯”竞赛题)

18. 已知 $x^2 - 5x - 1991 = 0$, 则代数式 $\frac{(x-2)^4 + (x-1)^2 - 1}{(x-1)(x-2)}$ 的值为().

- A. 1996 B. 1997 C. 1998 D. 1999

19. 已知 $b^2 = ac$, 求 $\frac{a^2 b^2 c^2}{a^3 + b^3 + c^3} \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$ 的值.

20. 设 a, b, c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, 求证: 当 n 为奇数时,

$\frac{1}{a^n + b^n + c^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}$. (波兰竞赛题)

综合创新

21. 已知 $a^2 - a - 1 = 0$, 且 $\frac{2a^4 - 3xa^2 + 2}{a^3 + 2xa^2 - a} = -\frac{93}{112}$, 求 x 的值.

(2000 年上海市高中理科班招生试题)

22. 某企业有 9 个生产车间, 现在每个车间原有的成品一样多, 每个车间每天生产的成品也一样多, 有 A、B 两组检验员, 其中 A 组有 8 名检验员, 他们先用 2 天将第一、第二两个车间的所有成品(指原有的和后来生产的)检验完毕后, 再检验第三、四两个车间的所有成品, 又用去了 3 天时间; 同时, 用这 5 天时间, B 组检验员也检验完余下的 5 个车间的所有成品. 如果每个检验员的检验速度一样快, 每个车间原有的成品为 a 件, 每个车间每天生产 b 件成品.

(1) 试用 a 、 b 表示 B 组检验员检验的成品总数;

(2) 求 B 组检验员的人数.

(2001 年天津市中考题)

6 实数的概念及性质

只有聪明的禀赋、内在的
悟性、勤奋而不懈地工作汇合，
才能激发出灿烂的智慧之火。

知识纵横

数是随着客观实际与社会实践的需要而不断扩充的。

从有理数(rational number)到无理数(irrational number),经历过漫长曲折的过程,是一个巨大的飞跃,由于引入无理数后,数域就由有理数域扩充到实数域,这样,实数(real number)与数轴上的点就建立了一一对应的关系。

由于引入开方运算,完善了代数的运算.平方根、立方根的概念和性质,是学习二次根式、一元二次方程等知识的基础.平方根、立方根是最简单的方根,建立概念的方法,以及它们的性质是进一步学习偶次方根、奇次方根的基础。

有理数和无理数统称为实数,实数有下列重要性质:

1. 有理数都可以写成有限小数或循环小数的形式,都可以表示成分数 $\frac{q}{p}$ 的形式;无理数是无限不循环小数,不能写成分数 $\frac{q}{p}$ 的形式,这里, p, q 是互质的整数,且 $p \neq 0$ 。

2. 有理数对加、减、乘、除是封闭的,即任何两个有理数的和、差、积、商还是有理数;无理数对四则运算不具有封闭性,即两个无理数的和、差、积、商不一定是无理数。

例题求解

【例1】若 a, b 满足 $3\sqrt{a} + 5|b| = 7$,则 $S = 2\sqrt{a} - 3|b|$ 的取值范围是_____。

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 运用 $\sqrt{a}, |b|$ 的非负性,建立关于 S 的不等式组。



古希腊的毕达哥拉斯学派认为,宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比.但是该学派的成员希伯索斯发现边长为1的正方形的对角线长度既不是整数,也不是整数的比所能表示,这严重地冲击了当时希腊人的传统见解,这一事件在数学史上称为第一次数学危机.希伯索斯的发现没有被毕达哥拉斯学派的信徒所接受,相传毕氏学派就因这一发现而把希伯索斯投入海中处死。

【例2】 设 a 是一个无理数,且 a, b 满足 $ab - a - b + 1 = 0$, 则 b 是一个().

- A. 小于0的有理数 B. 大于0的有理数
C. 小于0的无理数 D. 大于0的无理数

(武汉市选拔赛试题)

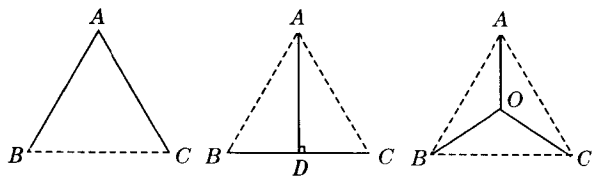
思路点拨 对等式进行恰当的变形,建立 a 或 b 的关系式.

【例3】 已知 a, b 是有理数,且 $\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)b - 2\frac{1}{4} - 1\frac{9}{20}\sqrt{3} = 0$, 求 a, b 的值.

思路点拨 把原等式整理成有理数与无理数两部分,运用实数的性质建立关于 a, b 的方程组.

【例4】 由于水资源缺乏, B, C 两地不得不从黄河上的杨水站 A 处引水,这就需要在 A, B, C 之间铺设地下输水管道.有人设计了三种铺设方案:如图,图中实线表示管道铺设线路,在图乙中, $AD \perp BC$ 于 D ,在图丙中, $OA = OB = OC$.为减少渗漏,节约水资源,并降低工程造价,铺设线路尽量缩短.已知 $\triangle ABC$ 是一个边长为 a 的等边三角形,请你通过计算,判断哪个铺设方案最好?

(2000年济南市中考题)



图甲

图乙

图丙

思路点拨 利用几何知识,通过计算,作出科学合理的设计方案.



解题中,还经常用到实数的以下重要性质.

(1) 设 x 为有理数, y 为无理数,则 $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ 都是无理数($x \neq 0$);

(2) 若 x, y 都是有理数, \sqrt{m} 是无理数,则要使 $x + y\sqrt{m} = 0$ 成立,须使 $x = y = 0$;

(3) 若 x, y, m, n 都是有理数, \sqrt{m}, \sqrt{n} 都是无理数,则要使 $x \pm \sqrt{m} = y \pm \sqrt{n}$ 成立,须使 $x = y, m = n$.

本例的实际背景是,80年代美国著名的贝尔电话公司遇到的一个实际问题,来自中国科学院应用数学研究所的堵丁柱解决了这一问题,堵丁柱的数学工作,直接成为贝尔电话公司进行决策的一种数学技术.



要证一个数是有理数,常证这个数能表示成几个有理数的和、差、积、商的形式;要证一个数是无理数,常用反证法,即假设这个数是有理数,设法推出矛盾.

【例5】历史上,人类对无理数的研究,是从正方形的对角线长与边长的比能否用分数来表示开始的,最早开始这方面研究的是古希腊的毕达哥拉斯学派,他们研究的几个问题都归结为 $\sqrt{2}$,这不是当时人们所认识的有理数.试证明: $\sqrt{2}$ 是无理数.

思路点拨 直接从无理数的定义很难说明,不妨从相反的角度思考,即先假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,解题的关键是设法由此导出矛盾.

学 力 训 练

基础夯实

1. 写出一个只含有字母的代数式(要求:(1)要使此代数式有意义,字母必须取全体正数;(2)此代数式的值恒为负数): _____.

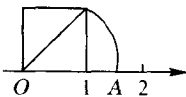
(2000年福建省泉州市中考题)

2. 一个正数 x 的两个平方根分别是 $a+1$ 和 $a-3$, 则 $a =$ _____, $x =$ _____.

(2001年江西省南昌市中考题)

3. 方程 $x^2 - 4x + 4 + \sqrt{y+1} = 0$ 的解是 $x =$ _____, $y =$ _____.

4. 某位老师在讲“实数”时,画了一个图(如图),即“以数轴的单位长度线段为边作一个正方形,然后以 O 为圆心,正方形的对角线长为半径画弧交 x 轴于一点 A ”,作这样的图是用来说明:_____



5. 下列命题:① $(-2)^2$ 的平方根是 -2 ;② -1 的立方根是 -1 ;③ $\sqrt{4}$ 的算术平方根是 2 ;④ 平方根与立方根相等的数只有 0 . 其中正确命题的个数有().

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

6. 在实数范围内,代数式 $|\sqrt{-(x-4)^2} - 1| - 2$ 的值为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 以上答案都不对

7. 代数式 $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ 的最小值是().

A. 0 B. $1 + \sqrt{2}$ C. 1 D. 不存在的

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

8. 已知 x, y 为实数,且 $(x-y)^2$ 与 $\sqrt{5x-3y-16}$ 互为相反数,求

$\sqrt{x^2 + y^2}$ 的值.

9. 已知 x, y 都是实数, 且 $\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + y = 4$, 求 $\frac{x}{y}$ 的值.

能力拓展

10. 已知实数 a, b, c 满足 $\frac{1}{2}|a-b| + \sqrt{2b+c} + c^2 - c + \frac{1}{4} = 0$, 则 $a(b+c) =$ _____.

11. 设 x, y 是有理数, 并且 x, y 满足等式 $x^2 + 2y + y\sqrt{2} = 17 - 4\sqrt{2}$, 则 $x + y =$ _____.

12. 已知实数 a, b, x, y 满足 $y + |\sqrt{x} - \sqrt{3}| = 1 - a^2, |x - 3| = y - 1 - b^2$, 则 $2^{x+y} + 2^{a+b}$ 的值是 _____.

(北京市竞赛题)

13. 已知 $x = -1, y = 2$, 请写出一个含有 x, y 的代数式, 使其值为 3.
(要求: (1) 代数式中必须有含字母的开方运算、除法运算; (2) 分母中必须含有字母)

14. 设 x 是无理数, 但 $(x-2)(x+6)$ 是有理数, 则下列结论正确的是 ().

A. x^2 是有理数 B. $(x+6)^2$ 是有理数
C. $(x+2)(x-6)$ 是无理数 D. $(x+2)^2$ 是无理数

15. 设 $b \neq c$, 且满足 $(\sqrt{3}+1)(a-b) + \sqrt{2}(b-c) = a-c$, 则 $\frac{a-b}{b-c}$ 的值 ().

A. 大于零 B. 等于零
C. 小于零 D. 的正负号不确定

(第 12 届“希望杯”邀请赛试题)

16. $p = \sqrt{\underbrace{11 \cdots 1}_{2n \text{ 个}} - \underbrace{22 \cdots 2}_{n \text{ 个}}}$ (n 为自然数), 则 ().

A. p 为无理数 B. $p = \underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ 个}}$
C. $p = \underbrace{22 \cdots 2}_{n \text{ 个}}$ D. $p = \underbrace{33 \cdots 3}_{n \text{ 个}}$

17. 设 x, y 是有理数, 且满足 $(\sqrt{3}x + \sqrt{2})x + (\sqrt{3}y - \sqrt{2})y - \sqrt{2} - 25\sqrt{3} = 0$, 求 xy 的值.

18. 某人用一架不等臂天平称一铁块 a 的质量, 当把铁块放在天平左盘中时, 称得它的质量为 300 克; 当把铁块放在天平的右盘中时, 称得它的质量为 900 克, 求这一铁块的实际质量.

(2000 年安徽省中考题)

综合创新

19. 已知三个数 89, 12, 3, 进行如下运算: 取其中任意两个数求其和再除以 $\sqrt{2}$, 同时求其差再除以 $\sqrt{2}$, 试问: 能否经过若干次上述运算, 得到三个数 90, 14, 10? 说明理由.

(浙江省竞赛题)

20. 设 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, d 都是有理数, x 是无理数. 求证:

- (1) 当 $bc = ad$ 时, y 是有理数;
- (2) 当 $bc \neq ad$ 时, y 是无理数.

7 二次根式的运算

我的人生哲学是工作,我要揭示大自然的奥秘,并以此为人类造福,我们在世的短暂一生中,我不知道还有什么比这种服务更好的了.

——爱迪生

知识纵横

式子 \sqrt{a} ($a \geq 0$)叫二次根式(arithmetic square root),二次根式的运算是以下列运算法则为基础.

$$(1) a\sqrt{c} \pm b\sqrt{c} = (a \pm b)\sqrt{c} \quad (c \geq 0);$$

$$(2) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$(3) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

$$(4) (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n} \quad (a \geq 0).$$

同类二次根式,有理化是二次根式中重要概念,它们贯穿于二次根式运算的始终,因为二次根式的加减实质就是合并同类二次根式,二次根式除法、混合运算常用到有理化概念.

二次根式的运算是在有理式(整式、分式)运算的基础上发展起来的,常常用到有理式运算的方法与技巧,如换元、字母化、拆项相消、分解相约等.

例题求解

【例1】 已知 $y = \sqrt{\frac{x^2-2}{5x-4}} - \sqrt{\frac{x^2-2}{4-5x}} + 2$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

(2000年重庆市竞赛题)

思路点拨 因一个等式中含两个未知量,初看似乎条件不足,不妨从二次根式的定义入手.

链接

二次根式有如下重要性质:

(1) $\sqrt{a} \geq 0$, 说明了 \sqrt{a} 与 $|a|$ 、 a^{2n} 一样都是非负数;

(2) $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a \geq 0$), 解二次根式问题的途径——通过平方, 去掉根号有理化;

(3) $\sqrt{a^2} = |a|$, 揭示了与绝对值的内在一致性.

著名数学教育家玻利亚曾说:“回到定义中去”, 当我们面对条件较少的问题时, 记住玻利亚的忠告, 充分运用概念解题.

【例 2】方程 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2001}$ 的整数解().

- A. 不存在 B. 仅有 1 组
C. 恰有 2 组 D. 至少有 4 组

(2001 年武汉市选拔赛试题)

思路点拨 \sqrt{x} 与 \sqrt{y} 能合并为 $\sqrt{2001}$, 说明 \sqrt{x} 、 \sqrt{y} 、 $\sqrt{2001}$ 是同类二次根式.

【例 3】计算:

$$(1) \frac{\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})};$$

$$(2) \frac{\sqrt{10} + \sqrt{14} - \sqrt{15} - \sqrt{21}}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}};$$

$$(3) \frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47} + 47\sqrt{49}};$$

$$(4) \frac{3\sqrt{15} - \sqrt{10} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - \sqrt{2} + 18}{\sqrt{5} + 2\sqrt{3} + 1}.$$

思路点拨 若一开始就把分母有理化, 则使计算复杂化, 观察每题中分子与分母的数字特点, 通过分拆、分解、一般化、配方等方法寻找它们的联系, 以此为解题的突破口.



特殊与一般是能相互转化的, 而一般化是数学创造的基本形式, 数学的根本目的就是要揭示更为普遍、更为深刻的事实和规律.

【例 4】 设 $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}$, 求不超过 S 的最大整数.

(2001 年太原市竞赛题)

思路点拨 先考察 S 中一般项的特征, 找出规律, 这是解本例的关键.

【例5】 已知 $a + b - 2\sqrt{a-1} - 4\sqrt{b-2} = 3\sqrt{c-3} - \frac{1}{2}c - 5$, 求 $a + b + c$ 的值.

(山东省竞赛题)

思路点拨 已知条件是一个含三个未知量的等式, 三个未知量, 一个等式怎样才能确定未知量的值呢? 考虑从配方的角度试一试.



应用非负数概念和性质是初中代数解題的常用方法之一, $|a|$ 、 a^{2n} 、 \sqrt{a} 是三种重要的非负数表现形式.

判断一个数是否为非负数, 最关键的是看它能否通过配方得到完全平方式. 如 $a \pm 2$

$$\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$$

在解含多变元二次根式、复合二次根式等问题时, 常用到配方法.

学 力 训 练

基础夯实

1. 已知 $y = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x} + 18$, 那么 $\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$ 的值为 _____.

2. 若 $a < b$, 则化简 $\sqrt{(a+b)^3(a-b)^2} =$ _____.
(2001 年江苏省南充市中考题)

3. 计算 $(\sqrt{3}+1)^{2001} - 2(\sqrt{3}+1)^{2000} - 2(\sqrt{3}+1)^{1999} + 2001 =$ _____.
(2001 年天津市选拔赛试题)

4. 由下列等式 $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{26}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$, $\sqrt[3]{4\frac{4}{63}} = 4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$... 所揭示的规律, 可得出一般的结论是 _____.

5. 已知 $\sqrt{7} = a$, $\sqrt{70} = b$, 则 $\sqrt{4.9} =$ ().

- A. $\frac{a+b}{10}$ B. $\frac{b-a}{10}$ C. $\frac{b}{a}$ D. $\frac{ab}{10}$

6. 把代数式 $(1-a)\sqrt{-\frac{1}{1-a}}$ 根号外的因式移入根号内, 化简后的结果为 ().

- A. $\sqrt{1-a}$ B. $\sqrt{a-1}$
C. $-\sqrt{a-1}$ D. $-\sqrt{1-a}$

7. 已知 $x - 2\sqrt{xy} + y = 0 (x > 0, y > 0)$, 则 $\frac{3x - \sqrt{xy} + y}{5x + 3\sqrt{xy} - 4y}$ 的值为 ().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 那么 $\frac{a^2-1}{a+1} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值等于 ().

- A. $-(1+2\sqrt{3})$ B. -1 C. $2-\sqrt{3}$ D. 3

9. 计算:

(1) $\sqrt{1999 \times 2000 \times 2001 \times 2002 + 1}$;

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \sqrt{9-2\sqrt{20}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}} + \sqrt{13-2\sqrt{42}} + \sqrt{15-2\sqrt{56}} + \sqrt{17-2\sqrt{72}}$;
(2001 年北京市数学竞赛题)

(3) $\frac{\sqrt{11} + 5\sqrt{7} + 4\sqrt{6}}{7 + \sqrt{77} + \sqrt{66} + \sqrt{42}}$;

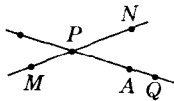
(4) $\frac{\sqrt{1997}}{(\sqrt{1997} - \sqrt{1999})(\sqrt{1997} - \sqrt{2001})} + \frac{\sqrt{1999}}{(\sqrt{1999} - \sqrt{1997})(\sqrt{1999} - \sqrt{2001})} + \frac{\sqrt{2001}}{(\sqrt{2001} - \sqrt{1997})(\sqrt{2001} - \sqrt{1999})}$.

(“希望杯”邀请赛试题)

10. 已知 $9 + \sqrt{13}$ 与 $9 - \sqrt{13}$ 的小数部分分别是 a 和 b , 求 $ab - 3a + 4b + 8$ 的值.

11. 如图, 公路 MN 和公路 PQ 在点 P 处交汇, 且

$\angle QPN = 30^\circ$, 点 A 处有一所中学, $AP = 160$ 米, 假设拖拉机行驶时, 周围 100 米以内会受到噪声的影响, 那么拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向



行驶时, 学校是否会受到噪声影响? 请说明理由. 如果受影响, 已知拖拉机的速度为 18 千米/时, 那么学校受影响的时间为多少秒?

(2000 年上海市中考题)

能力拓展

12. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 那么 $\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} =$ _____.

(2001 年 TI 杯全国初中数学联赛题)

13. 如果 $a + b + |\sqrt{c-1} - 1| = 4\sqrt{a-2} + 2\sqrt{b+1} - 4$, 那么 $a + 2b - 3c =$ _____.



形如 $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ 的根式称为复合二次根式, 常用配方、引入参数等方法来化简复合二次根式.

14. 设 $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = a + b$, 其中 a 为正整数, b 在 $0, 1$ 之间, 则 $\frac{a+b}{a-b} =$ _____.

15. 已知 $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{1}$, 那么 $\frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^3} =$ _____.

(2000 年全国初中数学联赛题)

16. 已知 $\frac{1}{a} - |a| = 1$, 则 $\frac{1}{a} + |a| =$ ().

- A. $\pm\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$ 或 1

(2001 年重庆市中考题)

17. When $1 \leq x \leq 2$, simplifying a formula $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ is ().

- A. 0 B. 2 C. $2\sqrt{x-1}$ D. $-2\sqrt{x-1}$

(英汉小词典: simplifying 化简)

18. 互不相等的正数 a, b, c 恰为一个三角形的三条边长, 则以下列三数为长度的线段一定能做成三角形的是 ().

- A. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ B. a^2, b^2, c^2
C. $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ D. $|a-b|, |b-c|, |c-a|$

19. 下列三个命题:

- ①若 α, β 是互不相等的无理数, 则 $\alpha\beta + \alpha - \beta$ 是无理数;
②若 α, β 是互不相等的无理数, 则 $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ 是无理数;
③若 α, β 是互不相等的无理数, 则 $\sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ 是无理数.

其中正确命题的个数是 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(全国初中数学联赛试题)

20. 计算:

$$(1) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{30} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}};$$

(第 12 届“希望杯”竞赛题)

$$(2) \frac{8 + 2\sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}};$$

(山东省竞赛题)

$$(3) \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}};$$

(四川省选拔赛题)



举例说明或举例反驳是一种常用的思考方法, 英国哲学家培根曾说: “数学中出人意料的反例, 令人叫绝, 表现出奇异的美, 闪耀着智慧的光芒。”

$$(4) \sqrt{2(6-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15})};$$

$$(5) \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} \right) + \sqrt{5-2\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

(2001年我爱数学初中生夏令营竞赛题)

$$21. (1) \text{ 求证: } \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2}} = \left| a + \frac{1}{b} - \frac{a}{ab+1} \right|;$$

$$(2) \text{ 计算 } \sqrt{1+1999^2 + \frac{1999^2}{2000^2}} - \frac{1}{2000}.$$

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

$$22. \text{ 定义 } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}}, \text{ 求 } f(1) + f(3) + \cdots + f(2k-1) + f(999) \text{ 的值.}$$

综合创新

$$23. \text{ 求代数式 } \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(12-x)^2+9} \text{ 的最小值.}$$

$$24. \text{ 求比 } (\sqrt{6} + \sqrt{5})^6 \text{ 大的最小整数.}$$

(西安交通大学少年班入学试题)

8 二次根式的化简求值

生活对我来说,不是正在
消融的蜡烛,生活是暂时落在
我手上的奇妙的火炬,因此我
要让它发出灿烂的光辉,然后
再交给未来的一代.

——萧伯纳

知识纵横

用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子,叫做代数式.有理式(rational expression)和无理式(irrational expression)统称代数式,整式和分式统称有理式.

有条件的二次根式的化简求值问题是代数式的化简求值的重点与难点.这类问题包容了有理式的众多知识,又涉及最简根式、同类根式、有理化等二次根式的重要概念,同时联系着整体代入、分解变形、构造关系式等重要的技巧与方法,解题的关键是,有时需把已知条件化简,或把已知条件变形;有时需把待求式化简或变形;有时需把已知条件和待求式同时变形.

例题求解

【例1】 已知 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$, 那么 $\sqrt{\frac{x}{x^2+3x+1}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+9x+1}}$ 的值等于_____.

(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛题)

思路点拨 通过平方或分式性质,把已知条件和待求式的被开方数都用 $x + \frac{1}{x}$ 的代数式表示.

链接

条件多样、形式多变,是解二次根式化简求值问题的困难所在,构造法是突破这一难点的最有效方法,常见的构造手段有:

(1) 构造基本对称式: $x+y, xy$,再整体代入;

(2) 构造零值多项式;

(3) 构造倒数关系: $x + \frac{1}{x}$ 或 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

(4) 构造对偶式;

(5) 构造图形等.

【例2】 已知 $a + b = \sqrt{\sqrt{2000} + \sqrt{2001}}$, $a - b =$

$\sqrt{\sqrt{2001}-\sqrt{2000}}$, 则 $a^4 - b^4$ 等于().

A. 2000

B. 2001

C. $\sqrt{2000}$

D. $\sqrt{2001}$

(2000年太原市竞赛题)

思路点拨 因 $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$, 故解题的关键是怎样由条件求出 $a^2 + b^2$ 的值?

【例3】 已知 a, b 是实数, 且 $(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$, 问 a, b 之间有怎样的关系? 请推导.

(第20届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题改编)

思路点拨 由特殊探求一般, 在证明一般性的过程中, 由因导果, 从化简条件等式入手, 而化简的基本方法是有理化.



当我们对具体一般的关系不清楚时, 可以通过特殊值法去猜测, 然后再推导或证明它.

有理化是解根式问题的关系, 有理化的主要途径有:

(1) 乘方: $(\sqrt{a})^2 =$

a ;

(2) 配方: $\sqrt{a^2} =$

$|a|$;

(3) 对一个代数式子分母有理化或分子有理化;

(4) 在等式两边同乘有理化因式;

(5) 引入一个有理化因式, 一起参与运算.

【例4】 已知实数 a, b 满足条件 $|a - b| = \frac{b}{a} < 1$, 化简代数式 $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot \sqrt{(a - b - 1)^2}$, 将结果表示成不含有字母 b 的形式.

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \sqrt{(a - b - 1)^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) |a - b - 1|$, 由此看知, 解题的关键是如何判断 $a, b, a - b - 1$ 的正负性.

【例5】 设 a, b, c, d 为正实数, $a < b, c < d, bc > ad$, 有一个三角形的三边长分别为 $\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + d^2}, \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$, 求此三角形的面积.

(第12届“五羊杯”竞赛题)

思路点拨 显然不能用面积公式求三角形面积(为什么?), $\sqrt{a^2 + c^2}$ 的几何意义是以 a, c 为直角边的直角三角形的斜边, 从构造图形入手, 将复杂的根式计算转化为几何问题加以解决.



著名数学家希尔伯特曾说:“算术是写下来的图形, 几何图形是画下来的公式”, 构造图形法就是运用几何图形的直观性和数形结合解决一些代数问题.

学力训练

基础夯实

1. 已知 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, 那么代数式 $\frac{\sqrt{xy} + (x+y)^2}{\sqrt{xy} - (x+y)^2}$ 的值为 _____.

2. 若 $a + \frac{1}{a} = 4 (0 < a < 1)$, 则 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} =$ _____.

3. 已知 $\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$, 则 $\frac{x-3}{2x-4} \div \left(\frac{5}{x-2} - x - 2 \right)$ 的值为 _____.

(2001年武汉市中考题)

4. 已知 $x = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$, 那么 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} =$ _____.

5. 已知 $a = 3 - \sqrt{2}, b = 3 + \sqrt{2}$, 则代数式 $(3a^2 - 18a + 15) \cdot (2b^2 - 12b + 13)$ 的值为().

- A. 6 B. 24 C. 42 D. 96

(2000年绍兴市中考题)

6. 如果 $x + y = \sqrt{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}, x - y = \sqrt{7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}$, 那么 xy 的值为().

- A. $3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
C. $7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$ D. $7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$

7. 若 $x^2 - \frac{\sqrt{19}}{2}x + 1 = 0$, 则 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 等于().

- A. $\frac{11}{4}$ B. $\frac{121}{6}$ C. $\frac{89}{16}$ D. $\frac{27}{4}$

(2000年重庆市竞赛题)

8. 若 $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$, 则 $\sqrt{4x + x^2}$ 的值为().

A. $a - \frac{1}{a}$

B. $\frac{1}{a} - a$

C. $a + \frac{1}{a}$

D. 不能确定

9. 设 $x = \frac{16}{\sqrt{17}+1}$, 求 $x^5 + 2x^4 - 17x^3 - x^2 + 18x - 17$ 的值.

10. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$, 求

$\frac{2a+3b+\sqrt{ab}}{a-b+\sqrt{ab}}$ 的值.

能力拓展

11. 化简: $\sqrt{\frac{a^2-3a+2}{a^2-6a+9}} \cdot \frac{a-3}{\sqrt{2-a}} + \sqrt{1-a} =$ _____.

(北京市竞赛题)

12. 已知 $\sqrt{a+4} + \sqrt{a-1} = 5$, 则 $\sqrt{6-2\sqrt{a}} =$ _____.

13. 已知 $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 那么 $\frac{x^3+x+1}{x^5}$ 的值为 _____.

14. 已知 $\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = 7$, 那么 $\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} =$ _____.

(杭州十校联考试题)

15. 设 $x = \sqrt{2001} - \sqrt{2000}$, $y = \sqrt{2000} - \sqrt{1999}$, 则 x, y 的大小关系是 ().

A. $x > y$

B. $x = y$

C. $x < y$

D. 无法确定的

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

16. 已知实数 a 满足 $|2000 - a| + \sqrt{a - 2001} = a$, 那么 $a - 2000^2$ 的值是().

A. 1999

B. 2000

C. 2001

D. 2002

17. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如 $[3.15] = 3, [3.7] = 3, [3] = 3$, 则 $[\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3}] + [\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4}] + [\sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 5}] + \cdots + [\sqrt[3]{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}] =$ ().

A. 2000000

B. 2001000

C. 2002000

D. 2003001

18. 设 a, b, c 为有理数, 且等式 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ 成立, 则 $2a + 999b + 1001c$ 的值是().

A. 1999

B. 2000

C. 2001

D. 不能确定

(2001年全国初中数学联赛试题)

19. 某船在点 O 处测得一小岛上的电视塔 A 在北偏西 60° 的方向, 船向西航行 20 海里到达 B 处, 测得电视塔在船的西北方向, 问再向西航行多少海里, 船离电视塔最近?

20. 已知 $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$, 求 $\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$ 的值.

综合创新

21. 已知 $x = \frac{1+a^2}{a}$ ($a > 0$), 化简: $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$.

22. 已知 $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$, 求 $a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$ 的值.

9

三角形的边与角

要爱惜自己的青春,世界上没有再比青春更美好的了,没有再比青春再珍贵的了,青春就像黄金,你想做成什么,就能成为什么。

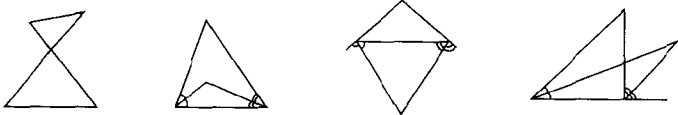
——高尔基

知识纵横

三角形(triangle)是最基本的图形之一,是研究其他复杂图形的基础,三角形的三边相互制约,三个内角之和为定值,边与角之间有密切的联系(如大角对大边、大边对大角等),反映三角形的边与角关联的基本知识有:三角形三边关系定理及推论、三角形内角和定理及推论等,它们在线段、角度的计算、图形的计数等方面有广泛的应用。

解与三角形的边与角有关的问题时,往往要用到数形结合及分类讨论法,即用代数方法(方程、不等式)解几何计算题及简单的证明题,按边或角对三角形进行分类。

熟悉以下基本图形、基本结论:



例题求解

【例1】在 $\triangle ABC$ 中,三个内角的度数均为整数,且 $\angle A < \angle B < \angle C$, $4\angle C = 7\angle A$,则 $\angle B$ 的度数为_____。

(北京市竞赛题)

思路点拨 设 $\angle C = x^\circ$,根据题设条件及三角形内角和定理把 $\angle A$ 、 $\angle B$ 用 x 的代数式表示,建立关于 x 的不等式组。



链接

中线(median)、角平分线(angular bisector)、高(hight)是三角形中的重要线段,它们的差别在于高随着三角形形状的不同,可能在三角形内部、边上或外部。

代数法解几何计算问题的基本思路是通过设元,运用几何知识建立方程(组)、不等式(组),将问题转化为解方程(组)或解不等式(组)。

【例2】 以1995的质因数为边长的三角形共有()

- A. 4个 B. 7个 C. 13个 D. 60个

(河南省竞赛题)

思路点拨 $1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$, 为做到计数的准确, 可将三角形按边分类, 注意三角形三边应满足的关系制约.



解所研究的问题的图形形状不惟一或几何图形位置关系不确定或与分类概念相关的命题时, 往往用到分类讨论法.

【例3】 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 50^\circ$, 高 BE 、 CF 交于 O , 且 O 不与 B 、 C 重合, 求 $\angle BOC$ 的度数.

(“东方航空杯”——上海市竞赛题)

思路点拨 由 O 不与 B 、 C 重合知, $\angle B$ 、 $\angle C$ 均非直角, 这样, $\triangle ABC$ 既可能是锐角三角形(acute triangle)又可能是钝角三角形(obtuse triangle), 故应分两种情况讨论.

【例4】 周长为30, 各边长互不相等且都是整数的三角形共有多少个?

思路点拨 不妨设三角形三边为 a 、 b 、 c , 且 $a < b < c$, 由三角形三边关系定理及题设条件可确定 c 的取值范围, 以此作为解题的突破口.

解与三角形的边与角相关的问题时, 常常要根据等式和不等式的性质, 用不等值替换, 通过放缩(放大求下界、缩小求上界)确定三角形的边或角的范围.

【例5】 用长度相等的100根火柴杆, 摆放成一个三角形, 使最大边的长度是最小边长度的3倍, 求满足此条件的每个三角形的各边所用火柴杆的根数.

(太原市竞赛题)

思路点拨 设三角形各边需用火柴杆数目分别为 x 、 y 、 $3x$, 综合运用题设条件及三角形边的关系等知识, 建立含等式、不等式的混合组, 这是解本例的突破口.

华罗庚教授曾说: “宇宙之大、粒子之微、火箭之速、生物之谜, 无处不用数学”, 简单的三角形有着广泛的应用:

(1) 1976年7月28日, 我国河北省唐山市发生了里氏7.8级的



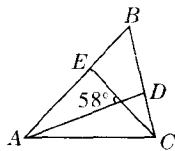
强烈地震,后调查发现,那些有三角形房顶的木结构房子破坏最轻.

(2)在医学上,心电图是从身体的三个特定部位来测定心脏的电激动,通常使用的三个部位分别为左肩、右肩、肚脐三点,把这三点连接起来构成一个三角形,这个三角形称为爱因妥芬三角形,它是以德国著名的心脏病理学家和现代心电图的发明者爱因妥芬的名字命名的.

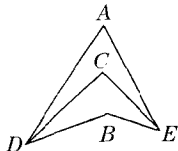
学 力 训 练

基础夯实

1. 若三角形的三个外角的比是 $2:3:4$, 则它的三个内角的比是 _____.
(第12届“希望杯”竞赛题)
2. 一条线段的长为 a , 若要使 $3a-1, 4a+1, 12-a$ 这三条线段组成一个三角形, 则 a 的取值范围是 _____.
3. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, AD 和 CE 分别是 BC 和 AB 边上的高, 若 AD 和 CE 所夹的锐角是 58° , 则 $\angle BAC + \angle BCA$ 的大小是 _____.



(第3题)



(第4题)

4. 如图, DC 平分 $\angle ADB$, EC 平分 $\angle AEB$, 若 $\angle DAE = \alpha$, $\angle DBE = \beta$, 则 $\angle DCE =$ _____ (用 α, β 表示).
(山东省竞赛题)
5. 若一个等腰三角形的三条边长均为整数, 且周长为 10, 则底边的长为 ().
A. 一切偶数 B. 2 或 4 或 6 或 8
C. 2 或 4 或 6 D. 2 或 4
6. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足 $3A > 5B, 3C \leq 2B$, 则这个三角形是 ().
A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不能确定
7. 如图, $\triangle ABC$ 内有三个点 D, E, F , 分别以 A, B, C, D, E, F 这六个点为顶点画三角形, 如果每个三角形的顶点都不在另一个三角形的内部, 那么, 这些三角形的所有内角之和为 ().

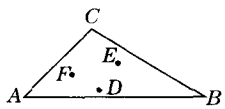
A. 360°

B. 900°

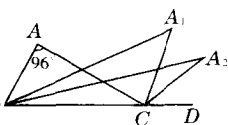
C. 1260°

D. 1440°

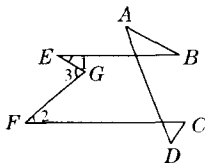
(重庆市竞赛题)



(第7题)



(第8题)



(第9题)

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 96^\circ$,延长 BC 到 D , $\angle ABC$ 与 $\angle ACD$ 的平分线相交于 A_1 点, $\angle A_1BC$ 与 $\angle A_1CD$ 的平分线相交于 A_2 点,依此类推, $\angle A_4BC$ 与 $\angle A_4CD$ 的平分线相交于 A_5 ,则 $\angle A_5$ 的大小是().

A. 3°

B. 5°

C. 8°

D. 19.2°

(“希望杯”邀请赛试题)

9. 如图,已知 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$,求证: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180^\circ$.

10. 已知三角形的一个角为 $180^\circ - n^\circ$,最大角与最小角的差为 24° ,求 n 的取值范围.

(青岛市竞赛题)

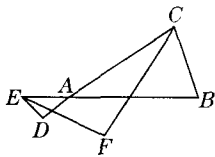
能力拓展

11. 已知三角形的三条边长均为整数,其中有一条边长是4,但它不是最短边,这样的三角形共有_____个.

12. 三角形的三个内角分别为 α, β, γ ,且 $\alpha \geq \beta \geq \gamma, \alpha = 2\gamma$,则 β 的取值范围是_____.

13. 已知 $\triangle ABC$ 的周长是12,三边为 a, b, c ,若 b 是最大边,则 b 的取值范围是_____.

14. 如图, E 和 D 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BA 和 CA 的延长线上, CF, EF 分别平分 $\angle ACB$ 和 $\angle AED$,若 $\angle B = 70^\circ, \angle D = 40^\circ$,则 $\angle F$ 的大小是_____.



(上海市竞赛题)

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ, \angle C > \angle A$,且 $(\angle C)^2 = (\angle A)^2 + (\angle B)^2$,则 $\triangle ABC$ 的形状是().

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

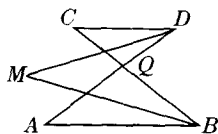
D. 不能确定

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C , 令 $\alpha = B + C, \beta = C + A, \gamma = A + B$, 则 α, β, γ 中锐角的个数至多是().
 A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 0个
17. 已知三角形的三边的长 a, b, c 都是整数, 且 $a \leq b < c$, 若 $b = 7$, 则这样的三角形有().
 A. 14个 B. 28个 C. 21个 D. 49个
18. 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 x, y, z , ①以 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ 为三边的三角形一定存在; ②以 x^2, y^2, z^2 为三边的三角形一定存在; ③以 $\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(y + z), \frac{1}{2}(z + x)$ 为三边的三角形一定存在; ④以 $|x - y| + 1, |y - z| + 1, |z - x| + 1$ 为三边的三角形一定存在, 上述4个结论, 正确结论的个数为().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(第15届江苏省竞赛题)

19. 如图, 已知 DM 平分 $\angle ADC$, BM 平分 $\angle ABC$, 且 $\angle A = 27^\circ, \angle M = 33^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数.



20. 不等边 $\triangle ABC$ 的两条高长度分别为4和12, 若第三条高的长也是整数, 试求它的长.

(第32届美国数学邀请赛试题)

综合创新

21. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 且满足 $a + b + c = 2$, 求证: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.
 (匈牙利奥林匹克数学试题)
22. 将长度为 $2n$ (n 为自然数, 且 $n \geq 4$) 的一根铅丝折成各边的长均为整数的三角形, 记 (a, b, c) 为三边的长, 且满足 $a \leq b \leq c$ 的一个三角形.
 (1) 就 $n = 4, 5, 6$ 的情况, 分别写出所有满足题意的 (a, b, c) ;
 (2) 有人根据(1)中的结论, 便猜想: 当铅丝的长度为 $2n$ (n 为自然数且 $n \geq 4$) 时, 对应 (a, b, c) 的个数一定是 $n - 3$, 事实上, 这是一个不正确的猜想; 请写出 $n = 12$ 时的所有 (a, b, c) , 并回答 (a, b, c) 的个数;
 (3) 试将 $n = 12$ 时所有满足题意的 (a, b, c) , 按照至少两种不同的标准进行分类.

(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛试题)

10 全等三角形

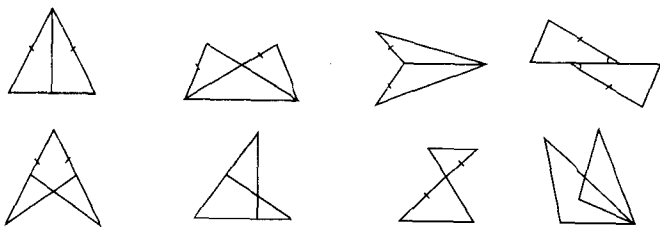
解题是一种实践性的技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿、练习和钻研学到它。

——玻利亚

知识纵横

全等三角形(congruent triangles)是平面几何内容的基础,这是因为全等三角形是研究特殊三角形、四边形等图形性质的有力工具,是解决与线段、角相关问题的一个出发点,运用全等三角形,可以证明线段相等、线段的和差倍分关系、角相等、两直线位置关系等常见的几何问题。

利用全等三角形证明问题,关键在于从复杂的图形中找到一对基础的三角形,这对基础的三角形从实质上来说,是由三角形全等判定定理中的一对三角形变位而来,也可能是由几对三角形组成,其间的关系互相传递,应熟悉涉及有公共边、公共角的以下两类基本图形:



例题求解

【例1】 同学们知道:只有两边和一角对应相等的两个三角形不一定全等,你如何处理和安排这三个条件,使这两个三角形全等? 请你仿照方案(1)、导出方案(2)、方案(3)。

解:设有两边和一角对应相等的两个三角形

方案(1):若这个角的对边恰好是这两边中的大边,则这两个三角形全等。

(2000年广东省中考题)

链接

两个三角形的全等是指两个图形之间的一种“对应”(corresponding)关系,“对应”两字,有“相当”、“相应”的含意,对应关系是按一定标准的一对一的关系,“互相重合”是判断其对应部分的标准。

实际遇到的图形,两个全等三角形并不重合在一起,但其中一个三角形是由另一个三角形按平行移动、翻折、旋转等方法得到,这种改变位置,不改变形状大小的图形变动叫三角形的全等变换。

思路点拨 强化题设条件,从两边和角的特殊性来考虑.

方案(2) _____;

方案(3) _____;

方案(4) _____.

【例 2】 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 5$, 中线 $AD = 4$, 则边 AB 的取值范围是 ().

A. $1 < AB < 9$

B. $3 < AB < 13$

C. $5 < AB < 13$

D. $9 < AB < 13$

(2001 年连云港市中考题)

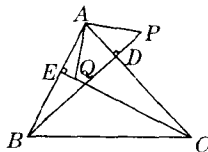
思路点拨 线段 AC 、 AD 、 AB 不是同一个三角形的三条边,通过中线倍长将分散的条件加以集中.

【例 3】 如图, BD 、 CE 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 AB 上的高, 点 P 在 BD 的延长线上, $BP = AC$, 点 Q 在 CE 上, $CQ = AB$.

求证: (1) $AP = AQ$; (2) $AP \perp AQ$.

思路点拨 (1) 证明对应的两个三角形全等;

(2) 在(1)的基础上, 证明 $\angle PAQ = 90^\circ$.



(第 16 届江苏省竞赛题)

【例 4】 若两个三角形的两边和其中一边上的高分别对应相等, 试判断这两个三角形的第三边所对的角之间的关系, 并说明理由.

(第 9 届“五羊杯”竞赛题改编题)

思路点拨 运用全等三角形的判定和性质, 探讨两角之间的关系, 解题的关键是由高的特殊性, 分三角形的形状讨论.



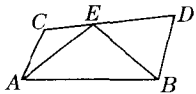
有时图中并没有直接的全等三角形, 需要通过作辅助线构造全等三角形, 完成恰当添辅助线的任务, 我们的思维要经历一个观察、联想、构造的过程.

边、角、中线、角平分线、高是三角形的基本元素, 从以上诸元素中选取三个条件使之组合可得到关于三角形全等判定的若干命题, 其中有真真假, 课本中全等三角形的判定方法只涉及边、角两类元素.

【例5】 如图,已知 $AC \parallel BD$, EA 、 EB 分别平分 $\angle CAB$ 、 $\angle DBA$, CD 过点 E . 求证: $AB = AC + BD$.

(“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 截长法(或补短法)是解形如本例的线段和差问题的基本方法,即在 AB 上截取 $AF = AC$,以下只要证明 $FB = BD$ 即可,于是将问题转化为线段相等问题的证明.



善于在复杂的图形中发现、分解、构造基本的全等三角形是解题的关键,需要注意的是,通常面临以下情况时,我们才考虑构造全等三角形:

(1) 给出的图形中没有全等三角形,而证明结论需要全等三角形;

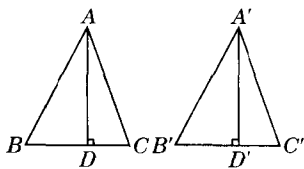
(2) 从题设条件无法证明图形中的三角形全等,证明需要另行构造全等三角形.

学力训练

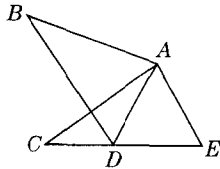
基础夯实

1. 如图, AD 、 $A'D'$ 分别是锐角 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中 BC 、 $B'C'$ 边上的高, 且 $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, 若使 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, 请你补充条件(只需要填写一个你认为适当的条件)_____.

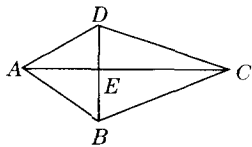
(2001 年黑龙江省中考题)



(第1题)



(第2题)



(第3题)

2. 如图,在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,有下列4个论断:① $AB = AC$;② $AD = AE$;③ $\angle B = \angle C$;④ $BD = CE$,请以其中三个论断作为条件,余下一个论断作为结论,写出一个真命题(用序号 $\otimes \otimes \otimes \Rightarrow \otimes$ 的形式写出)_____.

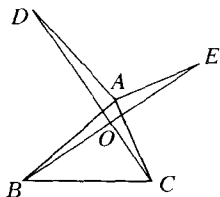
(2001 年海南省中考题)

3. 如图, $AB = AD$, $BC = CD$, AC 、 BD 相交于 E ,由这些条件写出4个你

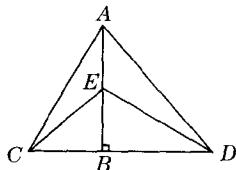
认为正确的结论(不再添加辅助线,不再标注其他字母)_____

(2001 年浙江省金华市中考题)

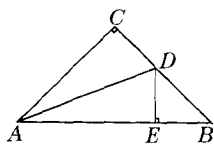
4. 如图, $DA \perp AB$, $EA \perp AC$, $AB = AD$, $AC = AE$, BE 和 CD 相交于 O , 则 $\angle DOE$ 的度数是_____.



(第 4 题)

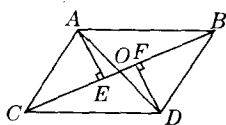


(第 5 题)

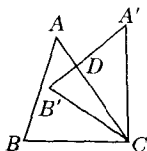


(第 6 题)

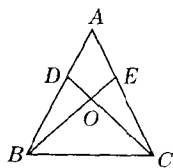
5. 如图, $\triangle ACD$ 中, 已知 $AB \perp CD$, 且 $BD > CB$, $\triangle BCE$ 和 $\triangle ABD$ 都是等腰直角三角形, 下列结论中: ① $\triangle ABC \cong \triangle DBE$; ② $\triangle ACB \cong \triangle ABD$; ③ $\triangle CBE \cong \triangle BED$; ④ $\triangle ACE \cong \triangle ADE$, 正确的是().
A. ①②③ B. ① C. ①③④ D. ②③④
6. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D , $DE \perp AB$ 于 E , 若 $AB = 6$ cm, 则 $\triangle DEB$ 的周长为().
A. 5 cm B. 6 cm C. 7 cm D. 8 cm
7. 如图, $AB \parallel CD$, $AC \parallel DB$, AD 与 BC 交于 O , $AE \perp BC$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F , 那么图中全等的三角形有()对.
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8



(第 7 题)



(第 8 题)



(第 9 题)

8. 如图, 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 35° , 得到 $\triangle A'B'C$, $A'B'$ 交 AC 于点 D , 已知 $\angle A'DC = 90^\circ$, 求 $\angle A$ 的度数.

(2001 年贵州省中考题)

9. 如图, 已知 $AD = AE$, $\angle ADC = \angle AEB$, BE 与 CD 相交于 O 点.
(1) 在不添加辅助线的情况下, 请写出由已知条件可得出的结论;
(例如, 可得出 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, $\angle DOB = \angle EOC$, $\angle DOE = \angle BOC$ 等, 你写出的结论中不能含所举之例, 只要求写出 4 个)
(2) 就你写出的其中一个结论给出证明.

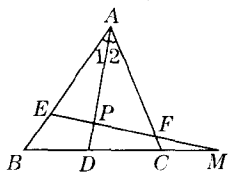
(2001 年湖北省随州市中考题)

10. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, $EF \perp AD$ 于 P , 交 BC 延长线于 M , 求证: $\angle M = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle B)$.

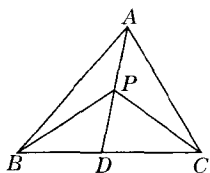
(天津市竞赛题)

能力拓展

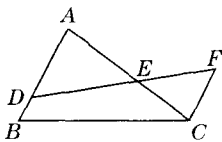
11. 在 $\triangle ABC$ 中, 高 AD 和 BE 交于 H 点, 且 $BH = AC$, 则 $\angle ABC =$ _____.



(第 10 题)



(第 12 题)



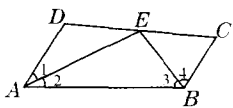
(第 13 题)

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, AD 是角平分线, P 是 AD 上任意一点, 在 $AB - AC$ 与 $BP - PC$ 两式中, 较大的一个是 _____.

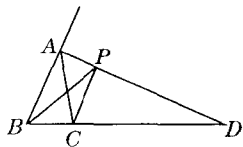
13. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点, DF 交 AC 于点 E , 给出 3 个论断: ① $DE = FE$; ② $AE = CE$; ③ $FC \parallel AB$, 以其中一个论断为结论, 其余两个论断为条件, 可作出 3 个命题, 其中正确命题的个数是 _____.

(2001 年武汉市选拔赛试题)

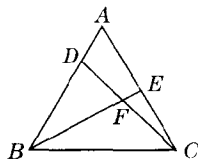
14. 如图, $AD \parallel BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = 4$, $BC = 2$, 那么 $AB =$ _____.



(第 14 题)



(第 15 题)



(第 16 题)

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle A$ 的外角平分线, P 是 AD 上异于 A 的任意一点, 设 $PB = m$, $PC = n$, $AB = c$, $AC = b$, 则 $(m + n)$ 与 $(b + c)$ 大小关系是 ().

A. $m + n > b + c$

B. $m + n < b + c$

C. $m + n = b + c$

D. 不能确定

16. In figure, let $\triangle ABC$ be an equilateral triangle, D and E be points on edges AB and AC respectively, F be intersection of segments BE and CD , and $\angle BFC = 120^\circ$, then the magnitude relation between AD and CE is ().



equilateral 等边的
intersection 交点
magnitude 量, 大小
indefinite 确定

- A. $AD > CE$ B. $AD < CE$ C. $AD = CE$ D. indefinite

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

17. 考查下列命题().

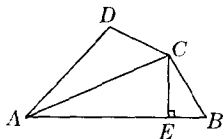
(1) 全等三角形的对应边上的中线、高、角平分线对应相等;(2) 两边和其中一边上的中线(或第三边上的中线)对应相等的两个三角形全等;(3) 两角和其中一角的角平分线(或第三角的角平分线)对应相等的两个三角形全等;(4) 两边和其中一边上的高(或第三边上的高)对应相等的两个三角形全等.

其中正确命题的个数有().

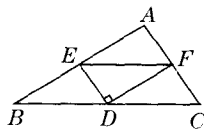
- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

18. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 并且 $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$, 求 $\angle ABC + \angle ADC$ 的度数.

(上海市竞赛题)



(第18题)



(第19题)

19. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, $DE \perp DF$, 试判断 $BE + CF$ 与 EF 的大小关系, 并证明你的结论.

20. 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = a$, $AD = b$, 且 $BC = DC$, 对角线 AC 平分 $\angle BAD$, 问 a 与 b 的大小符合什么条件时, 有 $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 请画出图形并证明你的结论.

(河北省竞赛题)

综合创新

21. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 各有六个元素(三条边和三个内角), 问下列条件之一能否保证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$? 如果能, 请说明理由; 如果不能, 试举一反例

- (1) 有3组对应元素相等;
- (2) 有4组对应元素相等;
- (3) 有4组元素(不一定对应)分别相等;
- (4) 有5组元素(不一定对应)分别相等.

22. (1) 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C' = 100^\circ$, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

(2) 上问中, 若将条件改为 $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C' = 70^\circ$, 结论是否成立? 为什么?

11 等腰三角形的性质

事业常成于坚忍,毁于急躁,
我在沙漠中曾亲眼看见,匆
忙的旅人落在从容的后边;
疾驰的骏马落在后头,缓步的骆驼
继续向前。

——萨迪:《蔷薇园》

知识纵横

若按边(角)是否相等分类,两边(角)相等的三角形是等腰三角形(isosceles triangle).等腰三角形是一类特殊三角形,它的两底角相等;等腰三角形是轴对称图形,底边上的高、中线、顶角的平分线互相重合(简称三线合一),特别地,等边三角形(equilateral triangle)的各边相等,各角都为 60° .

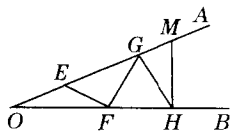
解与等腰三角形相关的问题,全等三角形依然是重要的工具,但更多的是思考运用等腰三角形的特殊性质,这些性质为角度的计算、线段相等的证明、直线位置关系的证明等问题提供了新的理论依据,因此,重视全等三角形的运用,又不囿于全等三角形,善于运用等腰三角形的性质探求新的解题途径。

例题求解

【例1】如图, AOB 是一钢架,且 $\angle AOB = 10^\circ$,为使钢架更加坚固,需在其内部添加一些钢管 EF 、 FG 、 GH ……添加的钢管长度都与 OE 相等,则最多能添加这样的钢管 _____ 根。

(2001年山东省聊城市中考题)

思路点拨 通过角度的计算,确定添加钢管数的最大值。



链接

角是几何中最活跃的元素,与角相关的知识异常丰富,在三角形中,角又有独特的等量关系,如三角形内角和定理、内外角关系定理,等腰三角形两底角相等,利用这些定理可以找到角与角之间的“和”、“差”、“倍”、“分”关系。

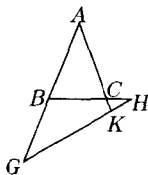
随着知识的丰富,我们分析问题、解决问题的方法和工具随之增加,因此,在使用什么方法解决问题时,需要综合与选择。

【例2】如图,若 $AB = AC$, $BG = BH$, $AK = KG$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 ().

- A. 30° B. 32° C. 36° D. 40°

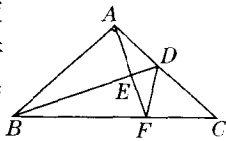
(2001年武汉市选拔赛试题)

思路点拨 图中有很多相关的角,用 $\angle BAC$ 的代数式表示这些角,建立关于 $\angle BAC$ 的方程.



【例3】如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, D 为 AC 上一点, $AE \perp BD$ 于 E , 延长 AE 交 BC 于 F , 问: 当点 D 满足什么条件时, $\angle ADB = \angle CDF$, 请说明理由. (安徽省竞赛题改编题)

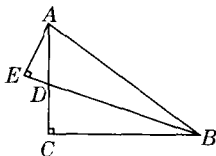
思路点拨 本例是探索条件的问题,可先假定结论成立,逐步逆推过去,找到相应的条件,若 $\angle ADB = \angle CDF$, 这一结论如何用? 因 $\angle ADB$ 与 $\angle CDF$ 对应的三角形不全等,故需构造全等三角形,而作顶角的平分线或底边上的高(中线)是等腰三角形中一条常用辅助线.



若已知图形中不存在证题所需的全等三角形,我们需要添加辅助线,构造全等三角形,使欲证的线段或角转移位置,最终使问题得以解决.

【例4】如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AC 上一点, $AE \perp BD$ 交 BD 的延长线于 E , 且 $AE = \frac{1}{2}BD$. 求证: BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线. (第15届江苏省竞赛题)

思路点拨 AE 边上的高与 $\angle ABC$ 的平分线重合,联想到等腰三角形,通过作辅助线构造全等三角形、等腰三角形.



结论探索型、条件探索型、存在性判断是探索型问题的基本形式,相应的解题策略是:

(1) 通过对符合条件的特例或简单情形的分析、观察、猜想结果,再给出证明;

(2) 假设结论成立,逆推追寻相应的条件;

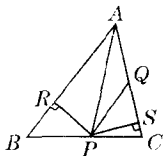
(3) 假设在题设条件下的某一数学对象存在,进行推理,若由此导出矛盾,则否定假设;否则,给出肯定的结论.

6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AQ = PQ$, $PR = PS$, $PR \perp AB$ 于 R , $PS \perp AC$ 于 S , 则以下三个结论: ① $AS = AR$; ② $PQ \parallel AR$; ③ $\triangle BPR \cong \triangle QSP$ 中().

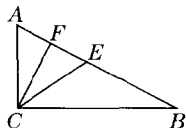
A. 全部正确
B. 仅①正确
C. 仅①和②正确
D. 仅①和③正确

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = AE$, $BC = BF$, 则 $\angle ECF =$ ().

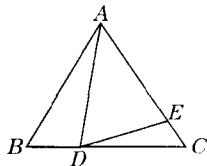
A. 60° B. 45° C. 30° D. 不确定



(第6题)



(第7题)



(第8题)

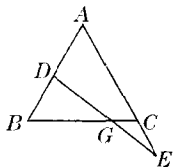
8. 如图, $AB = AC$, $\angle BAD = \alpha$, 且 $AE = AD$, 则 $\angle EDC =$ ().

A. $\frac{1}{2}\alpha$ B. $\frac{1}{3}\alpha$ C. $\frac{1}{4}\alpha$ D. $\frac{2}{3}\alpha$

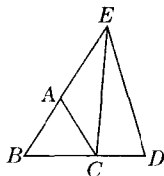
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC$, 且过 $\triangle ABC$ 某一顶点的直线可将 $\triangle ABC$ 分成两个等腰三角形, 试求 $\triangle ABC$ 各内角的度数.

(2000年扬州中学测试题)

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 、 E 分别是腰 AB 、 AC 延长线上的点, 且 $BD = CE$, 连结 DE 交 BC 于 G , 求证: $DG = EG$.



(第10题)



(第11题)

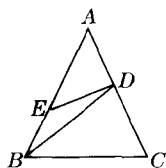
11. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 延长 BC 到 D , 延长 BA 到 E , 且使 $AE = BD$, 连结 CE 、 DE , 求证: $EC = ED$.

(2001年内蒙古中考题)

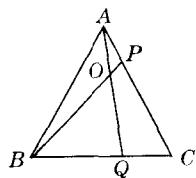
能力拓展

12. 已知 AD 是等腰三角形一腰上的高, $\angle DAB = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的三个内角的度数是_____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 AC 上, E 在 AB 上, 且 $AB = AC$, $BC = BD$, $AD = DE = BE$, 则 $\angle A =$ _____.

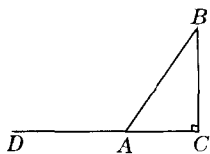


(第 13 题)

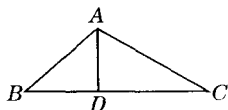


(第 14 题)

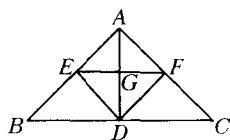
14. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 的 AC 、 BC 边上各取一点 P 、 Q , 使 $AP = CQ$, AQ 、 BP 相交于点 O , 则 $\angle BOQ =$ _____.
15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = 4$, 在 CA 的延长线上取点 D , 使 $AD = AB$, 则 D 、 B 两点之间的距离是_____.



(第 15 题)



(第 16 题)

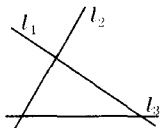


(第 17 题)

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AD \perp BC$ 于 D , 且 $AB + BD = DC$, 则 $\angle C$ 的大小是().
- A. 20° B. 25° C. 30° D. 45°
17. 如图, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, AD 为斜边上的高, 以 D 为端点任作两条互相垂直的射线与两腰相交于 E 、 F , 连结 EF 与 AD 相交于 G , 则 $\angle AED$ 与 $\angle AGF$ 的关系为().
- A. $\angle AED > \angle AGF$ B. $\angle AED = \angle AGF$
C. $\angle AED < \angle AGF$ D. 不能确定

(《学习报》公开赛试题)

18. 如图, 直线 l_1 、 l_2 、 l_3 表示三条相交的公路, 现要建一个货物中转站, 要求它到三条公路的距离相等, 则可供选择的地址有().



- A. 一处 B. 两处 C. 三处 D. 四处

(2000 年安徽省中考题)

19. 周长为有理数的等腰三角形, 底边上的高是底边长的 $\frac{1}{2}$, 则该三角形的().
- A. 腰和底边上的高都是有理数
B. 腰和底边上的高都不是有理数
C. 腰是有理数, 底边上的高是无理数

D. 腰是无理数,底边上的高是有理数

(2001 年天津市选拔赛试题)

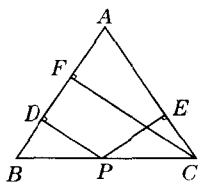
20. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, P 为底边 BC 上一点, $PD \perp AB$ 于 D , $PE \perp AC$ 于 E , $CF \perp AB$ 于 F .

(1) 求证: $PD + PE = CF$;

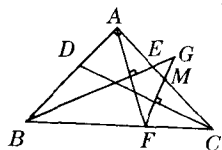
(2) 若 P 点在 BC 的延长线上,那么 PD 、 PE 、 CF 存在什么关系?
写出你的猜想并证明.

21. 如图,在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD = AE$, $AF \perp BE$ 交 BC 于点 F ,过 F 作 $FG \perp CD$ 交 BE 延长线于 G ,求证: $BG = AF + FG$.

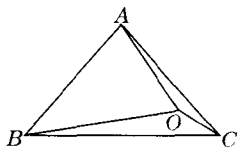
(2000 年重庆市竞赛题)



(第 20 题)



(第 21 题)



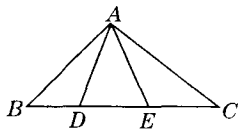
(第 22 题)

22. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 80^\circ$, O 为 $\triangle ABC$ 内一点,且 $\angle OBC = 10^\circ$, $\angle OCA = 20^\circ$,求 $\angle BAO$ 的度数.

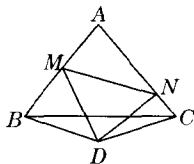
(天津市竞赛题)

综合创新

23. 如图,点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的 BC 上, $AD = AE$,要使 $AB = AC$,请补充一个条件(尽可能写出你所知道的可能的情形).



(第 23 题)



(第 24 题)

24. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, $\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC = 120^\circ$ 的等腰三角形,以 D 为顶点作一个 60° 角,角的两边分别交 AB 于 M ,交 AC 于 N ,连结 MN ,形成一个三角形,求证: $\triangle AMN$ 的周长等于 2.

12 等腰三角形的判定

有信心不一定能赢,但没有信心是一定要输的,要记住,每一天都是一个阶梯,是新的第一步——向着既定的目标。

知识纵横

由于等腰三角形有丰富的性质,这些性质为我们解几何题提供了新的理论依据,所以寻找发现等腰三角形是解一些几何题的关键,判定一个三角形为等腰三角形的基本方法是:从定义入手,证明一个三角形的两条边相等;从角入手,证明一个三角形的两个角相等。

实际解题中的一个常用技巧是,构造等腰三角形,进而利用等腰三角形的性质为解题服务,常用的构造方法有:

1. “角平分线 + 平行线”构造等腰三角形;
2. “角平分线 + 垂线”构造等腰三角形;
3. 用“垂直平分线”构造等腰三角形;
4. 用“三角形中角的 2 倍关系”构造等腰三角形。

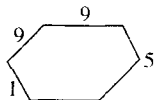


例题求解

【例 1】 如图,一个六边形的 6 个内角都是 120° ,其连续四边的长依次是 1, 9, 9, 5(cm),那么这个六边形的周长是 _____ cm.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

思路点拨 设法将六边形的问题转化为三角形或四边形的问题加以解决,六边形的外角都为 60° ,利用 60° 构造等边三角形是解本例的关键。



链接

证明线段相等是最基本的几何问题,目前常用证法有:

(1) 若两线段属于两个三角形,则考虑证对应的三角形全等;

(2) 若两线段是一个三角形两边,则考虑用等角对等边证明;

(3) 寻找中间线段,通过等量代换证明。

类似地,我们可以对证明角相等、等边三角形的判定作归纳总结。

不同形状的几何图形之间可互相转化,向外补形与对内分割是基本的两种转化方式。

【例2】 若一个三角形的一个外角的平分线平行于三角形的一边,则此三角形肯定是().

- A. 直角三角形 B. 等边三角形
C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

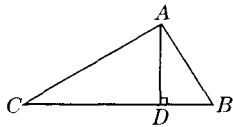
(第12届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 从探讨角的关系入手.

【例3】 如图, $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于 D , $\angle B = 2\angle C$, 求证: $AB + BD = CD$.

(天津市竞赛题)

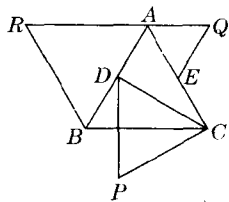
思路点拨 如何利用条件 $\angle B = 2\angle C$? 又怎样得到 $AB + BD$? 不同的思考方向, 会找到解法的不同方法.



【例4】 如图, 已知等边三角形 ABC , 在 AB 上取点 D , 在 AC 上取点 E , 使得 $AD = AE$, 作等边三角形 PCD , QAE 和 RAB , 求证: P 、 Q 、 R 是等边三角形的三个顶点.

(第16届江苏省竞赛题)

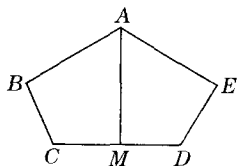
思路点拨 $\angle R = 60^\circ$, 要证明 P 、 Q 、 R 为等边三角形的三个顶点, 须证明 R 、 B 、 P 在同一直线上且 $RP = RQ$, 充分利用等边三角形、全等三角形等知识.



【例5】 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$, $BC = DE$, M 为 CD 中点, 求证: $AM \perp CD$.

(武汉市选拔赛试题)

思路点拨 证明 $\angle AMC = 90^\circ$ 或应用等腰三角形“三线合一”的性质, 通过作辅助线将五边形问题恰当地转化为三角形问题是解本例的关键.



分析法(执果溯因)、综合法(由因导果)是两种最基本的分析方法.

处理题设条件中的“两倍角”的基本途径是:

- (1) 向外构造等腰三角形;
- (2) 对内作角平分线.

学力训练

基础夯实

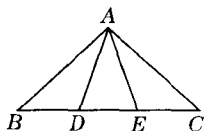
1. 如图, BO 平分 $\angle CBA$, CO 平分 $\angle ACB$, 且 $MN \parallel BC$, 设 $AB = 12$, $BC = 24$, $AC = 18$, 则 $\triangle AMN$ 的周长为_____.

(美国数学邀请赛试题)

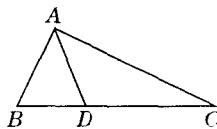
2. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle B = 36^\circ$, D 、 E 是 BC 上两点, 使 $\angle ADE = \angle AED = 2\angle BAD$, 则图中等腰三角形共有_____个.



(第1题)



(第2题)



(第3题)

3. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $AB + BD = AC$, 则 $\angle B : \angle C$ 的值 = _____.

(“五羊杯”竞赛题)

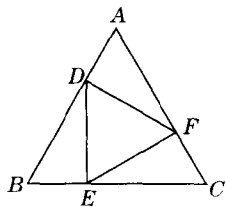
4. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, $DE \perp BC$ 于 E , $EF \perp AC$ 于 F , $FD \perp AB$ 于 D , 则 $AD =$ _____.

(天津市竞赛题)

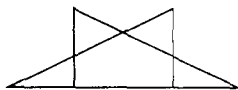
5. 如图, 两个全等的直角三角形中都有一个锐角为 30° , 且较长的直角边在同一直线上, 则图中的等腰三角形有()个

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

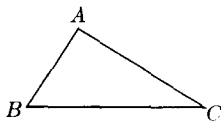
(2001 年南昌市中考试题)



(第4题)



(第5题)



(第6题)

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, 则 AC 与 $2AB$ 之间的关系是().

A. $AC > 2AB$ B. $AC = 2AB$
C. $AC \leq 2AB$ D. $AC < 2AB$

(山东省竞赛题)

7. 等腰三角形一腰上的高等于该三角形某一条边的长度的一半, 则其顶角等于().

A. 30° B. 30° 或 150°
C. 120° 或 150° D. 30° 或 120° 或 150°

(“希望杯”邀请赛试题)

8. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 三个内角的度数都是质数, 则这样的三角形().

A. 只有一个且为等腰三角形
B. 至少有两个且都为等腰三角形
C. 只有一个但不是等腰三角形
D. 至少有两个, 其中有非等腰三角形

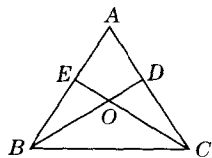
9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是 AC 、 AB 边上的点, BD 与 CE 相交于点 O , 给出下列 4 个条件: ① $\angle EBO = \angle DCO$; ② $\angle BEO = \angle CDO$; ③ $BE = CD$; ④ $OB = OC$.

(1) 上述 4 个条件中, 哪两个条件可以判断 $\triangle ABC$ 是等腰三角形(用序号写出所有情形)?

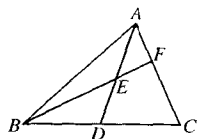
(2) 选择(1)中的一种情况, 证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2001 年浙江省绍兴市中考题)

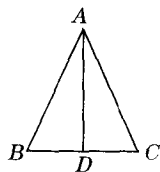
10. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, E 是 AD 上一点, 且 $BE = AC$, 延长 BE 交 AC 于 F , 求证: $AF = EF$.



(第 9 题)



(第 10 题)



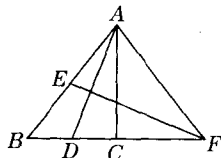
(第 11 题)

11. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 为高, 且 $AB + CD = AC + BD$, 求证: $AB = AC$.

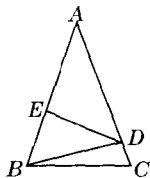
(天津市竞赛题)

能力拓展

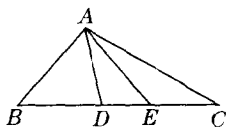
12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, EF 垂直平分 AD , 交 BC 延长线于 F , 则 $\angle CAF$ 的大小是_____.



13. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = BD = ED = EA$, 则 $\angle A =$ ____.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的重垂平分线分别交 BC 于 D 、 E , 若 $\angle BAC + \angle DAE = 150^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数是 ____.
15. 有一个等腰三角形纸片, 若能从一个底角的顶点出发, 将其剪成两个等腰三角形纸片, 则原等腰三角形纸片的顶角为 ____ 度.

(第 15 届江苏省竞赛题)

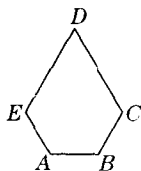
16. 在等边 $\triangle ABC$ 所在的平面内求一点 P , 使 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 都是等腰三角形, 具有这样性质的点 P 有().

A. 1 个 B. 4 个 C. 7 个 D. 10 个

17. 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $\angle A = \angle B = 120^\circ$, $EA =$

$AB = BC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} DE$, 则 $\angle D =$ ().

A. 30° B. 45°
C. 60° D. 67.5°



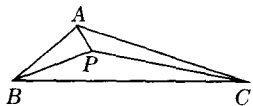
18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 则().

A. $PA + PB + PC < AB + AC$

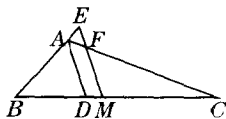
B. $PA + PB + PC > AB + AC$

C. $PA + PB + PC = AB + AC$

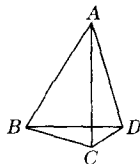
D. $PA + PB + PC$ 与 $AB + AC$ 的大小关系不确定, 与 P 点位置有关



(第 18 题)



(第 19 题)



(第 20 题)

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, M 是 BC 的中点, 过 M 作 $ME \parallel AD$ 交 BA 延长线于 E , 交 AC 于 F , 求证: $BE = CF = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

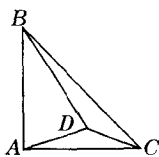
(重庆市竞赛题)

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ABC > 60^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$, 且

$\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC$, 求证: $AC = BD + DC$.

(天津市竞赛题)

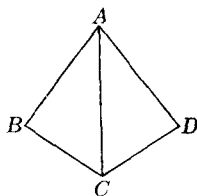
21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, D 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\angle DAC = \angle DCA = 15^\circ$, 求证: $BD = BA$.



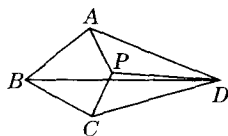
综合创新

22. 在等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任取一点 D , 作 $\angle DAE = 60^\circ$, DE 交 $\angle C$ 的外角平分线于 E , 那么 $\triangle ADE$ 是什么三角形? 证明你的结论.
23. (1) 如图四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, 证明: $BC + DC = AC$.
- (2) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, P 为四边形 $ABCD$ 内一点, 且 $\angle APD = 120^\circ$, 证明: $PA + PD + PC \geq BD$.

(第 15 届江苏省竞赛题)



(第 23 题(1))



(第 23 题(2))

13 从勾股定理谈起

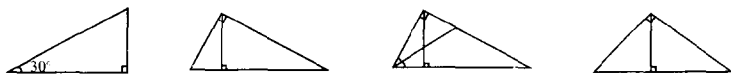
当人们忘记古希腊悲剧诗人伊斯基勒思时,大家记得阿基米德,因为语言会死亡而数学思想不会消逝.

知识纵横

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系,大约在公元前 1100 多年前,商高已经证明了普通意义下的勾股定理,在国外把勾股定理称为“毕达哥拉斯定理”.

勾股定理是平面几何中一个重要定理,其广泛的应用体现在:勾股定理是现阶段线段计算、证明线段平方关系的主要方法;运用勾股定理的逆定理(converse theorem),通过计算方法也是证明两直线垂直位置关系的一种有效手段.

直角三角形(right angled triangle)是一类特殊三角形,有着丰富的性质:两锐角互余(角的关系)、勾股定理(边的关系)、 30° 角所对的直角边等于斜边的一半(边角关系),这些性质在求线段的长度、证明线段倍分关系、证明线段平方关系等方面有广泛的应用.

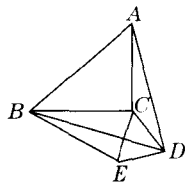


例题求解

【例 1】如图,以等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 为边向内作等边 $\triangle ABD$,连结 DC ,以 DC 为边作等边 $\triangle DCE$, B, E 在 CD 的同侧,若 $AB = \sqrt{2}$,则 BE = _____.

(2001 年重庆市中考题)

思路点拨 因 BE 不是直角三角形的边,故不能用勾股定理直接计算,需找出与 BE 相等的线段转化问题.



千百年来,勾股定理的证明吸引着数学爱好者,目前计有 400 多种证法,许多证法的共同特点是通过弦图的割补、借助面积加以证明,美国第 20 任总统加菲尔德(1831—1881)曾给出一个简单证法.

勾股定理的发现是各族人民早期文明的特征,有人建议,将来与“外星人”交往,可以把勾股定理转化为光电讯号,传向异城,他们一定懂得勾股定理.

现已确定的 2002 年 8 月在北京举行的国际数学家大会的会标来源于弦图的图案.

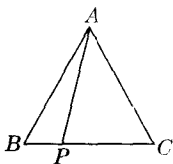


【例 2】 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 4$, P 是 BC 上异于 B 、 C 的一点,则 $AP^2 + BP \cdot PC$ 的值是().

- A. 16 B. 20 C. 25 D. 30

(全国初中数学联赛试题)

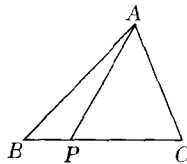
思路点拨 易想到勾股定理,关键通过作辅助线为勾股定理的应用创造条件.



【例 3】 如图, P 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的一点,且 $PC = 2PB$,已知 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle APC = 60^\circ$,求 $\angle ACB$ 的度数.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

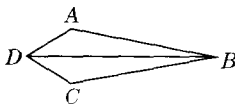
思路点拨 不可能简单地由角的关系推出 $\angle ACB$ 的度数,解本例的关键是,由条件构造出含 30° 角的直角三角形.



【例 4】 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$, $AD = CD$,求证: $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

(北京市竞赛题)

思路点拨 由待证结论联想到勾股定理,应设法作辅助线将 AB 、 BC 变为直角三角形两直角边.



当勾股定理不能直接运用时,常需要通过等线段的代换、作辅助垂线等途径,为勾股定理的运用创造必要的条件;有时又需要由线段的数量关系去判断线段的位置关系,这就需要熟悉一些常用的勾股数组.

从代数角度,考察方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的正整数解,古代中国人发现了“勾三股四弦五”,古希腊人找到了这个方程的全部整数解(用代数式表示的勾股数组)

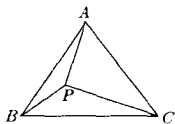
17世纪,法国数学家费尔马提出猜想:当 $n \geq 3$ 时,方程 $x^n + y^n = z^n$ 无正整数解.

1994年,美国普林斯顿大学威尔斯教授历尽艰辛证明了这个猜想,被誉为20世纪最伟大的成果.

【例5】如图,等边 $\triangle ABC$ 的边长 $a = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$,点 P 是 $\triangle ABC$ 内的一点,且 $PA^2 + PB^2 = PC^2$,若 $PC = 5$,求 PA 、 PB 的长.

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 条件 $PA^2 + PB^2 = PC^2$ 可多次运用,一方面直接得到含 PA 、 PB 的等式,另一方面,通过恰当的处理(实施旋转变换) PA 、 PB 、 PC 可构成直角三角形,得到含 PA 、 PB 的另一等式,通过解方程组求出 PA 、 PB 的值.



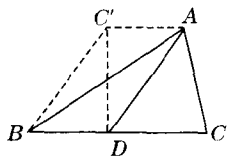
一般地,在有等边三角形、正方形的条件下,可将图形旋转 60° 或 90° ,旋转过程中角度、线段的长度保持不变,在新的位置上分散的条件相对集中,以便挖掘隐含条件,探求解题思路.

学力训练

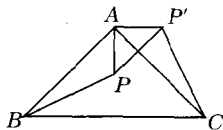
基础夯实

1. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\angle ADC = 45^\circ$,把 $\triangle ACD$ 沿 AD 对折,点 C 落在点 C' 的位置,则 BC' 与 BC 之间的数量关系是_____.

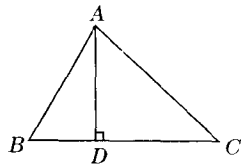
(2001年山西省中考题)



(第1题)



(第2题)



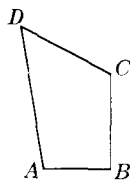
(第3题)

2. 如图, $\triangle ABC$ 是直角三角形, BC 是斜边,将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转后,能与 $\triangle ACP'$ 重合,若 $AP = 3$,则 PP' 的长等于_____.

3. 如图,已知 $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$, $AD \perp BC$ 于 D ,则 $AD =$ _____.

(2001年武汉市选拔赛试题)

4. 如图,四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 12$ cm, $DA = 13$ cm,且 $\angle ABC = 90^\circ$,则四边形 $ABCD$ 的面积是_____ cm^2 .

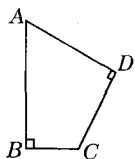


5. 设直角三角形的三边长分别为 a 、 b 、 c ,若 $c - b = b - a > 0$,则 $\frac{c-a}{c+a} =$ ().

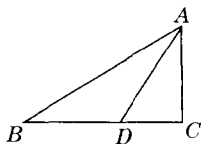
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

(2000 年山东省竞赛题)

6. 如果一个三角形的一条边是另一条边的 2 倍, 并且有一个角是 30° , 那么这个三角形的形状是().
- A. 直角三角形 B. 钝角三角形
C. 锐角三角形 D. 不能确定
7. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $BC = 2$, $CD = 3$, 则 $AB =$ ().
- A. 4 B. 5 C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$



(第 7 题)



(第 8 题)

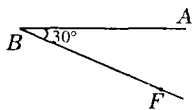
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $BD : DC = 2 : 1$, 则 $\angle B$ 满足().
- A. $0^\circ < \angle B < 15^\circ$ B. $\angle B = 15^\circ$
C. $15^\circ < \angle B < 30^\circ$ D. $\angle B = 30^\circ$

(2001 年重庆市竞赛题)

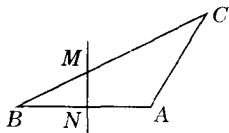
9. 由于过度采伐森林和破坏植被, 我国许多地区频频遭受沙尘暴的侵袭, 近日, A 市气象局测得沙尘暴中心在 A 市的正西方向 300 千米的 B 处, 以 $10\sqrt{7}$ 千米/时的速度向东偏南 30° 的 BF 方向移动, 距沙尘暴中心 200 千米的范围是受沙尘暴严重影响的区域, 问: A 市是否受到这次沙尘暴的影响? 若不受影响, 说明理由; 若受到, 求出 A 市受沙尘暴影响的时间.

(新疆中考题)

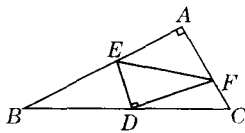
10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 120^\circ$, MN 垂直平分 AB , 求证: $CM = 2BM$.



(第 9 题)



(第 10 题)



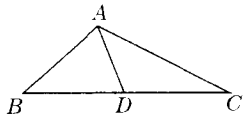
(第 11 题)

11. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, D 为斜边 BC 中点, $DE \perp DF$, 求证: $EF^2 = BE^2 + CF^2$.

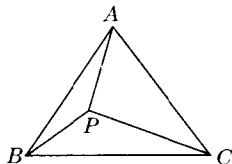
能力拓展

12. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 13$,边 BC 上的中线 $AD = 6$,则 BC 的长为_____.

(2002年湖北省预赛试题)



(第12题)

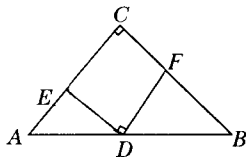


(第13题)

13. 如图,设 P 是等边 $\triangle ABC$ 内的一点, $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$,则 $\angle APB$ 的度数是_____.
14. 如图,一个直角三角形的三边长均为正整数,已知它的一条直角边的长恰是1997,那么另一条直角边的长为_____.



(第14题)



(第15题)

15. 如图,等腰直角三角形 ABC 中, D 为斜边 AB 的中点, E 、 F 分别为腰 AC 、 BC 上(异于端点)的点, $DE \perp DF$, $AB = 10$,设 $x = DE + DF$,则 x 的取值范围是_____.

(北京市竞赛题)

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,已知某两边 $a = 1$, $b = 3$,那么第三边的变化范围是().

A. $2 < c < 4$

B. $2 < c \leq 3$

C. $2 < c < \sqrt{10}$

D. $\sqrt{8} < c < \sqrt{10}$

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

17. 直角三角形有一条直角边的长是11,另外两边的长也是自然数,那么它的周长是().

A. 132

B. 121

C. 120

D. 以上答案都不对

18. $\triangle ABC$ 三边 BC 、 CA 、 AB 的长分别为 a 、 b 、 c ,这三边的高依次为 h_a 、 h_b 、 h_c ,若 $a \leq h_a$, $b \leq h_b$,则这个三角形为().

A. 等边三角形

B. 等腰非直角三角形

C. 直角非等腰三角形

D. 等腰直角三角形



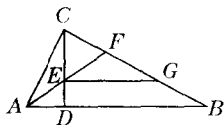
链接

我们只学过等腰三角形、等边三角形、直角三角形的判定,那么如何判定一个三角形为锐角(或钝角)三角形呢?

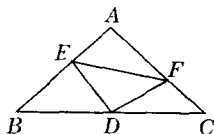
以直角三角形为探索的出发点,设想锐角(或钝角)三角形是由直角三角形变化而来的,则需考虑直角三角形的边发生怎样的变化,三角形就会变为锐角(或钝角)三角形?

(2001 年武汉市选拔赛试题)

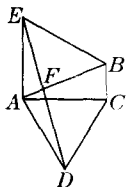
19. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , AF 平分 $\angle CAB$ 交 CD 于 E , 交 CB 于 F , 且 $EG \parallel AB$ 交 CB 于 G , 则 CF 与 GB 的大小关系是().



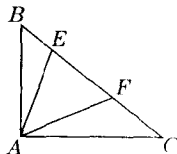
- A. $CF > GB$ B. $CF = GB$
C. $CF < GB$ D. 无法确定
20. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = AC$, D 是斜边 BC 的中点, E 、 F 分别是 AB 、 AC 边上的点, 且 $DE \perp DF$, 若 $BE = 12$, $CF = 5$, 求 $\triangle DEF$ 的面积.
21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 分别以 AB 、 AC 为边在 $\triangle ABC$ 的外侧作等边 $\triangle ABE$ 和等边 $\triangle ACD$, DE 与 AB 交于 F , 求证: $EF = FD$.



(第 20 题)



(第 21 题)

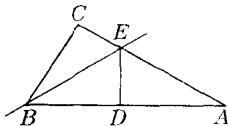


(第 22 题)

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, E 、 F 分别是 BC 上两点, 若 $\angle EAF = 45^\circ$, 试推断 BE 、 CF 、 EF 之间的数量关系, 并说明理由.

综合创新

23. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 沿过 B 点的一条直线 BE 折叠这个三角形, 使 C 点与 AB 边上的一点 D 重合, 要使 D 恰为 AB 的中点, 问在图中还应添加什么条件?



24. 是否存在这样的直角三角形, 它的两条直角边长为整数且它的周长与面积相等? 若存在, 求出它的直角边长; 若不存在, 说明理由.

14 多边形的边角与对角线

我们中间的每一个人都好
像是一颗满载电荷的基本粒
子,这电荷就是对明天的瑰丽
的理想,就是为实现这个理想
而献身的向往与追求,当它们
互相交汇在一起时,就会迸射
出绚丽的青春的火花.

知识纵横

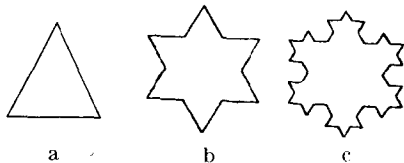
边、角、对角线(diagonal)是多边形(polygon)中最基本的概念,求多边形的边数、内外角度数、对线条数是解与多边形相关的基本问题,常用到三角形内角和、多边形内、外角和定理、不等式、方程等知识.

多边形的内角和定理反映出一定的规律性: $(n-2) \cdot 180^\circ$ 随 n 的变化而变化;而多边形的外角和定理反映出更本质的规律; 360° 是一个常数,把内角问题转化为外角问题,以静制动是解多边形有关问题的常用技巧.

将多边形问题转化为三角形问题来处理是解多边形问题的基本策略,连对角线或向外补形、对内分割是转化的常用方法,从凸 n 边形的一个顶点引出的对角线把凸 n 边形分成 $(n-2)$ 个多边形,凸 n 边形一共可引出 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线.

例题求解

【例1】 设有一个边长为1的正三角形,记作 A_1 (如图a),将 A_1 的每条边三等分,在中间的线段上向形外作正三角形,去掉中间的线段后



链接

世界上的万事万物是一个不断地聚合和分裂的过程,点是几何学最原始的概念,点生线、线生面、面生体,几何元素的聚合不断产生新的图形;另一方面,不断地分割已有的图形可得到新的几何图形,发现新的几何性质,多边形可分成三角形,三角形可以合成其他一些几何图形.

按题中的方法不断地做下去,就会成为下图那样的图形,它的边界有一个美丽的名称——雪花曲线或科克曲线(瑞典数学家),

所得到的图形记作 A_2 (如图 b); 将 A_2 的每条边三等分, 并重复上述过程, 所得到的图形记作 A_3 (如图 c); 再将 A_3 的每条边三等分, 并重复上述过程, 所得到的图形记作 A_4 , 那么, A_4 的周长是_____.

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 从简单情形入手, 探寻 b 与 a 、 c 与 a 周长之间的联系, 从中发现规律.

【例 2】 设有一个凸多边形, 除去一个内角以外, 其余 $n-1$ 个内角的和为 1993° , 则 n 的值是().

- A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

(安徽省竞赛题)

思路点拨 设除去的角为 x° , 可建立关于 x 的方程; 又 $0^\circ < x^\circ < 180^\circ$, 又可得到关于 n 的不等式. 故有两种解题途径, 注意 n 为自然数的隐含条件.

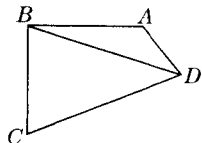
【例 3】 各边相等, 各角也相等的多边形叫做正多边形, 从市场上买来的地砖多为正多边形, 用其中的任何一种, 都可以把居室装饰得漂亮美观. 用同样大小的正多边形地砖铺地, 正好将地面没有重叠、没有空隙地铺满, 试问: 这样的正多边形有几种, 是哪几种?

思路点拨 假定正 n 边形满足铺地的要求, 那么在它的顶点接合的地方, n 个顶角的和一定要恰好是 360° 才行, 这样, 将问题的讨论转化为求不定方程的正整数解.

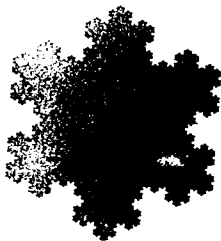
【例 4】 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 120^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$, $BD = 7$, 求 AB 的长.

(广西西宁市中考题)

思路点拨 延长 BA 、 CD , 向外补形, 可得到特殊三角形, 利用勾股定理求 AB 、 CD 的长.



这类图形称为“分形”, 大量的物理、生物与数学现象都导致分形, 分形是新兴学科“混沌”的重要分支.



数学建模是当今数学教育、考试改革最热门的一个话题, 简单地说, “数学建模”就是通过数学化(引元、画图等)把实际问题转化为一个数学问题, 再运用相应的数学知识方法(模型)解决问题.

本例通过设元, 把“没有重叠、没有空隙”转译成等式, 通过不定方程求解.

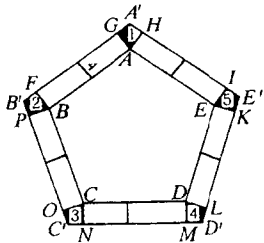
【例5】如图,五边形 $ABCDE$ 的每条边所在直线沿该边垂直方向向外平移 4 个单位,得到新的五边形 $A'B'C'D'E'$.

(1) 图中 5 块阴影部分即四边形 $AHA'G$ 、 $BFB'P$ 、 $COC'N$ 、 $DMD'L$ 、 $EKE'I$ 能拼成一个五边形吗? 说明理由.

(2) 证明五边形 $A'B'C'D'E'$ 的周长比五边形 $ABCDE$ 的周长至少增加 25 个单位.

(第 14 届江苏省竞赛题)

思路点拨 (1) 5 块阴影部分要能拼成一个五边形须满足条件: $A'GB'$; $B'PC'$; $C'ND'$; $D'LE'$; $E'IA'$ 三点分别共线; $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$; (2) 增加的周长等于 $A'H + A'G + B'F + B'P + C'O + C'N + D'M + D'L + E'K + E'I$, 用圆的周长逼近估算.



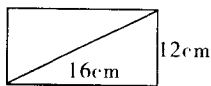
学力训练

基础夯实

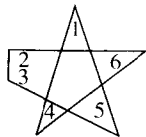
1. 如图,用硬纸片剪一个长为 16 cm、宽为 12 cm 的长方形,再沿对角线把它分成两个三角形,用这两个三角形可拼出各种三角形和四边形来,其中周长最大的是_____cm,周长最小的是_____cm.

(选自《美国中小学数学课程标准》)

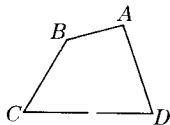
2. 如图, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 =$ _____.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, $ABCD$ 是凸四边形, $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 7$, 则线段 AD 的取值范围是_____.
4. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个有 n 个顶点的凸多边形, 对每一个顶点 A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), 将构成该角的两边分别反向延长至 A_{i1}, A_{i2} , 连结 A_{i1}, A_{i2} , 得到两个角 $\angle A_{i1}, \angle A_{i2}$, 那么所有这些新得到的角的度数的和是_____.

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

5. 凸 n 边形中有且仅有两个内角为钝角, 则 n 的最大值是().

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

(第12届“希望杯”邀请赛试题)

6. 一个凸多边形的每一内角都等于 140° , 那么, 从这个多边形的一个顶点出发的对角线的条数是().

A. 9 条 B. 8 条 C. 7 条 D. 6 条

7. 一个凸 n 边形的内角和小于 1999° , 那么 n 的最大值是().

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

(全国初中数学联赛试题)

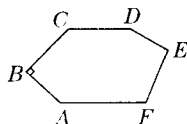
8. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $\triangle ACD$ 是一个含有 30° 角的直角三角形, 现将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 拼成一个凸四边形 $ABCD$.

(1) 画出四边形 $ABCD$;

(2) 求出四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的长.

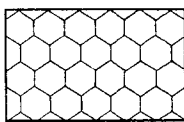
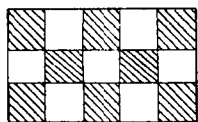
(上海市闵行区中考题)

9. 如图, $CD \parallel AF$, $\angle CDE = \angle BAF$, $AB \perp BC$, $\angle C = 124^\circ$, $\angle E = 80^\circ$, 求 $\angle F$ 的度数.



(北京市竞赛题)

10. 我们常见到如图那样图案的地面, 它们分别是全用正方形或全用正六边形形状的材料铺成的, 这样形状的材料能铺成平整、无空隙的地面.



(第10题)

现在, 问:

- (1) 像上面那样铺地面, 能否全用正五边形的材料, 为什么?
- (2) 你能不能另外想出一个用一种多边形(不一定是正多边形)的材料铺地的方案? 把你想到的方案画成草图.
- (3) 请你再画出一个用两种不同的正多边形材料铺地的草图.

(2000 年安徽省中考题)

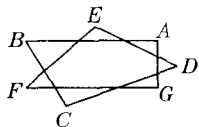
能力拓展

11. 如图, 凸四边形有 _____ 个; $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G =$ _____.

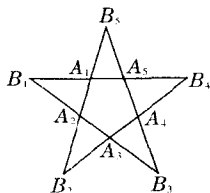
(重庆市竞赛题)



本题不仅要灵活运用基础知识, 还需要一定的生活经验, 同时要融合个人的审美素养, 能有效地检测我们的综合素质.



(第 11 题)

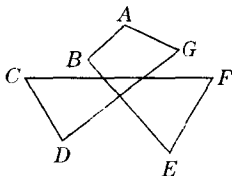


(第 12 题)

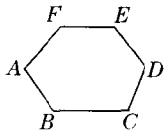
12. 如图, 延长凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的各边相交得到 5 个角, $\angle B_1, \angle B_2, \angle B_3, \angle B_4, \angle B_5$, 它们的和等于 _____; 若延长凸 n 边形 ($n \geq 5$) 的各边相交, 则得到的 n 个角的和等于 _____.

(第 12 届“希望杯”邀请赛试题)

13. 如图, 若 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = n \times 180^\circ$, 则 $n =$ _____.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, 六边形 $ABCDEF$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$, 且 $AB + BC = 11$, $FA - CD = 3$, 则 $BC + DE =$ _____.

(北京市竞赛题)

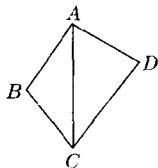
15. 在一个凸八边形中, 每三个顶点形成三个角(如由 A, B, C 三个顶点形成 $\angle ABC, \angle BAC, \angle ACB$), 一共可以作出 168 个角, 那么这些角中最小的一个一定().

- A. 小于或等于 20° B. 小于或等于 22.5°
C. 小于或等于 25° D. 小于或等于 27.5°

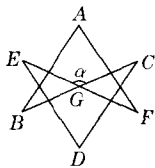
16. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$, $AD = 3$, 则 CD 的长为().

- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$

(第 16 届江苏省竞赛题)



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, 设 $\angle CGE = \alpha$, 则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F =$ ().

A. $360^\circ - \alpha$

B. $270^\circ - \alpha$

C. $180^\circ + \alpha$

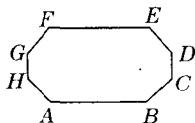
D. 2α

(山东省竞赛题)

18. 平面上有 A, B, C, D 四点, 其中任何三点都不在一直线上, 求证: 在 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BDC$ 中至少有一个三角形的内角不超过 45° .

19. 一块地能被 n 块相同的正方形地砖所覆盖, 如果用较小的相同正方形地砖, 那么需 $n + 76$ 块这样的地砖才能覆盖该块地, 已知 n 及地砖的边长都是整数, 求 n (上海市竞赛题)

20. 如图, 凸八边形 $ABCDEFGH$ 的 8 个内角都相等, 边 AB, BC, CD, DE, EF, FG 的长分别为 7, 4, 2, 5, 6, 2, 求该八边形的周长.



综合创新

21. (1) 计算凸十边形所有对角线的条数, 以及以凸十边形顶点为顶点的三角形的个数;
 (2) 在凸十边形每个顶点处任意标上一个自然数, 在(1)中的三角形, 若三个顶点所标三数之和为奇数, 则该三角形为奇三角形; 若三数之和为偶数, 则称偶三角形, 试判断: 奇三角形个数是奇数还是偶数, 并证明你的结论.
22. 一个凸 n 边形由若干个边长为 1 的正方形或正三角形无重叠、无间隙地拼成, 求此凸 n 边形各个内角的大小, 并画出这样的凸 n 边形的草图.

15 平行四边形

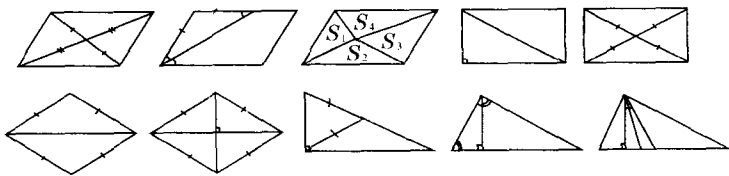
智者寻找机会,更要创造
机会,不要害怕挫折,它是一种
清醒剂,能使原本坚强的人重
新振作起来。

知识纵横

平行四边形(parallelogram)是一类特殊的四边形,它的特殊性体现在边、角、对角线上,矩形(rectangle)、菱形(rhombus)是特殊的平行四边形;矩形的特殊性体现在有一个角是直角,菱形的特殊性体现在邻边相等,所以,它们既有平行四边形的性质,又有各自特殊的性质。

对角线是解决四边形问题的常用线段,对角线本身的特征又可以决定四边形的形状、大小,连对角线后,平行四边形就产生特殊三角形,因此解平行四边形相关问题时,既用到全等三角形法、特殊三角形性质,又要善于在平行四边形的背景下探索问题,利用平行四边形丰富的性质为解题服务。

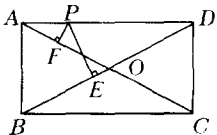
熟悉以下基本图形、基本结论:



例题求解

【例 1】 如图,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AD = 12$, $AB = 5$, P 是 AD 边上任意一点, $PE \perp BD$ 于 E , $PF \perp AC$ 于 F ,那么 $PE + PF$ 的值为
(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 分别求出 PE 、 PF 困难, $\triangle AOD$ 为等腰三角形,若联想“到等腰三角形底边上任一



特殊与一般是对立统一的,在一定条件下可以互相转化,相对于一般而言,特殊的事物往往更简单、更直观、更具体,因而人们常常通过特殊去认识一般;另一方面,一般概括了特殊,一般比特殊更为深刻地反映着事物的本质,所以人们也往往通过一般去了解特殊。

点到两腰距离的和等于腰上的高”这一性质,则问题迎刃而解.



课本中平行四边形的判定定理是从边、角、对角线三个方面探讨的,一般情况是,从四边形边、角、对角线三类元素任意选取两类,任意组合就产生许多判定平行四边形的命题,其中有真命题(truth proposition)与假命题(false proposition),对于假命题,要善于并熟悉构造反例.

构造反例是学习数学的一种重要技能,可以帮助我们理解概念,培养推理能力,数学史上就曾有许多著名的论断被一个巧妙的反例推翻的实例.

【例 2】 在四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , 如果只给出条件“ $AB \parallel CD$ ”, 那么还不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 给出以下 6 个说法:

- ①如果再加上条件“ $AD \parallel BC$ ”, 那么四边形 $ABCD$ 为平行四边形;
- ②如果再加上条件“ $AB = CD$ ”, 那么四边形 $ABCD$ 为平行四边形;
- ③如果再加上条件“ $\angle DAB = \angle DCB$ ”, 那么四边形 $ABCD$ 为平行四边形;
- ④如果再加上条件“ $BC = AD$ ”, 那么四边形 $ABCD$ 是平行四边形;
- ⑤如果再加上条件“ $AO = CO$ ”, 那么四边形 $ABCD$ 为平行四边形;
- ⑥如果再加上条件“ $\angle DBA = \angle CAB$ ”, 那么四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

其中正确的说法有().

- | | |
|--------|--------|
| A. 3 个 | B. 4 个 |
| C. 5 个 | D. 6 个 |

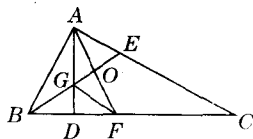
(2001 年北京市宣武区中考题)

思路点拨 逐一检验条件是否符合平行四边形判定的要求, 从而作出判断.

【例 3】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$, BE 、 AF 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle DAC$ 的平分线, BE 和 AD 交于 G , 求证: $GF \parallel AC$.

(湖北省荆州市中考题)

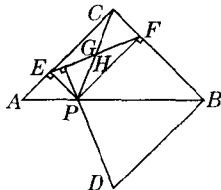
思路点拨 从角的角度证明困难, 连结 EF , 在四边形 $AGFE$ 的背景下思考问题, 证明四边形 $AGFE$ 为平行四边形, 证题的关键是能分解出直角三角形中的基本图形.



【例4】 如图,设 P 为等腰直角三角形 ACB 斜边 AB 上任意一点, $PE \perp AC$ 于点 E , $PF \perp BC$ 于点 F , $PG \perp EF$ 于 G 点,延长 GP 并在其延长线上取一点 D ,使得 $PD = PC$,求证: $BC \perp BD$,且 $BC = BD$.

(全国初中数学联赛试题)

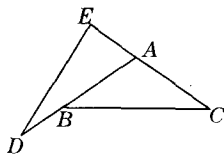
思路点拨 尽管图形复杂,但证明目标明确,只需证明 $\triangle CPB \cong \triangle DPB$,应从图中分离出特殊三角形、特殊四边形,充分运用它们的性质为证题服务.



【例5】 如图,在等腰三角形 ABC 中,延长边 AB 到点 D ,延长边 CA 到点 E ,连结 DE ,恰有 $AD = BC = CE = DE$.求 $\angle BAC$ 的度数.

(2001 年北京市竞赛题)

思路点拨 题设条件给出的是线段的等量关系,要求的却是角的度数,相等的线段可得到全等三角形、特殊三角形,为此需通过构造平行四边形改变它们的位置.



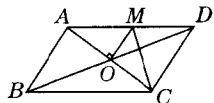
若题设条件中有彼此平行的线段或造成平行的因素,则通过作平行线,构造平行四边形,这是解四边形问题的常用技巧,这是由于平行四边形能使角的位置更理想,送线段到恰当的地方,使线段比良性传递.

学力训练

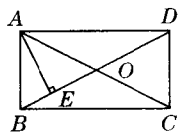
基础夯实

- 如图, $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ,且 $AD \neq CD$,过 O 作 $OM \perp AC$,交 AD 于点 M ,若 $\triangle CDM$ 周长为 a ,则 $\square ABCD$ 的周长为_____.
- 如图,已知矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC 、 BD 相交于 O , $AE \perp BD$ 于 E ,若 $\angle DAE : \angle BAE = 3:1$,则 $\angle EAC =$ _____.

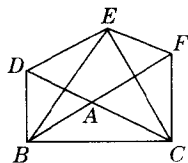
(河南省中考题)



(第1题)



(第2题)



(第3题)

3. 如图,以 $\triangle ABC$ 的三边为边在 BC 的同一侧分别作三个等边三角形,即 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle ACF$.

- (1) 四边形 $ADEF$ 是_____;
 (2) 当 $\triangle ABC$ 满足条件_____时,四边形 $ADEF$ 为矩形;
 (3) 当 $\triangle ABC$ 满足条件_____时,四边形 $ADEF$ 不存在.

(2000年贵州省中考题)

4. 已知一个三角形的一边长为2,这边上的中线为1,另两边之和为 $1 + \sqrt{3}$,则这两边之积为_____.

(2001年天津市选拔赛试题)

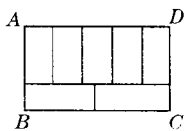
5. 四边形的四条边长分别是 a 、 b 、 c 、 d ,其中 a 、 c 为对边,且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ab + 2cd$,则这个四边形一定是().

- A. 平行四边形
 B. 两组对角分别相等的四边形
 C. 对角线互相垂直的四边形
 D. 对角线相等的四边形

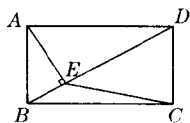
6. 如图,周长为68的矩形 $ABCD$ 被分成7个全等的矩形,则矩形 $ABCD$ 的面积为().

- A. 98
 B. 196
 C. 280
 D. 284

(2000年湖北省荆州市中考题)



(第6题)



(第7题)

7. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $BC = 2$, $AE \perp BD$ 于 E , $\angle BAE = 30^\circ$,那么 $\triangle ECD$ 的面积是().

- A. $2\sqrt{3}$
 B. $\sqrt{3}$
 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2001年重庆市中考题)

8. 给出以下命题:

- ① 对角线相等的四边形是矩形;
 ② 对角线互相垂直的四边形是菱形;
 ③ 一组对边相等,一组对角相等的四边形是平行四边形;
 ④ 一组对边平行,一组对角相等的四边形是平行四边形;

⑤ 菱形的对角线的平方和等于边长的平方的 4 倍.

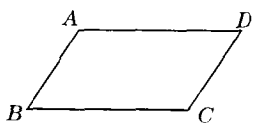
其中,正确命题有()个.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

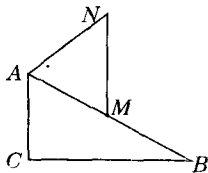
9. 如图,已知 $\square ABCD$, 试用多种方法,将平行四边形 $ABCD$ 分成面积相等的 4 个部分(要求用文字简述你所设计的方法,并在所给的两个平行四边形中正确画图)

(2001 年福建省中考题)

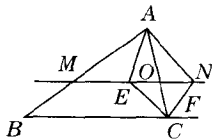
10. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, M 是 AB 的中点, $AM = AN$, $MN \parallel AC$, 求证: $MN = AC$.



(第 9 题)



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 AC 边上的一个动点, 过点 O 作直线 $MN \parallel BC$, 设 MN 交 $\angle BCA$ 的平分线于点 E , 交 $\angle BCA$ 的外角平分线于点 F .

(1) 求证: $EO = FO$;

(2) 当点 O 运动到何处时, 四边形 $AECF$ 是矩形? 并证明你的结论.

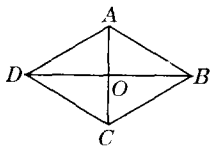
(2000 年江苏省盐城市中考题)

能力拓展

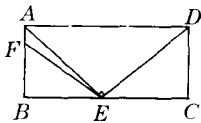
12. 在四边形 $ABCD$ 中, 给出下列论断: ① $AB \parallel DC$; ② $AD = BC$; ③ $\angle A = \angle C$, 以其中两个作为题设, 另外一个作为结论, 用“如果…那么…”的形式, 写出一个你认为正确的结论: _____.

(2001 年四川省中考题)

13. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于 O , $\triangle AOB$ 的周长为 $3 + \sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$, 则菱形 $ABCD$ 的面积为 _____.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. In the rectangle $ABCD$, $AB = 4$, $BC = 7$, if the bisector of $\angle BAD$ through the vertex A meets BC at E , EF perpendicular to ED meets AB at F , then the length of EF is _____.

(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

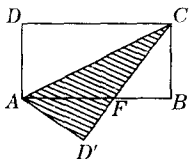


链接

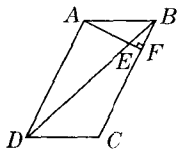
rectangle 长方形
bisector 角平分线

15. 如图,矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=4$,将矩形沿 AC 折叠,点 D 落在点 D' 处,则重叠部分 $\triangle AFC$ 的面积为_____.

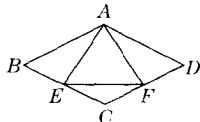
(山东省竞赛题)



(第 15 题)



(第 16 题)



(第 17 题)

16. 如图, $\square ABCD$ 中, $\angle ABC = 75^\circ$, $AF \perp BC$ 于 F , AF 交 BD 于 E , 若 $DE = 2AB$, 则 $\angle AED$ 的大小是().

A. 60° B. 65° C. 70° D. 75°

(“希望杯”邀请赛试题)

17. 如图,正 $\triangle AEF$ 的边长与菱形 $ABCD$ 的边长相等,点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 上,则 $\angle B$ 的度数是().

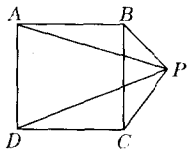
A. 70° B. 75° C. 80° D. 95°

(重庆市竞赛题)

18. 如图,正方形 $ABCD$ 外有一点 P , P 在 BC 外侧,并在平行线 AB 与 CD 之间,若 $PA = \sqrt{17}$, $PB = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{5}$, 则 $PD =$ ().

A. $2\sqrt{5}$ B. $\sqrt{19}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{17}$

(“五羊杯”竞赛题)



(第 18 题)

1	2
...	...
3	4

(第 19 题)

19. 如图,若将正方形分成 K 个全等的矩形,其中上、下各横排 2 个,中间竖排若干个,则 K 的值为().

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

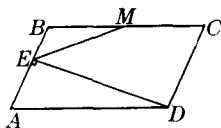
(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛题)

20. 已知四边形 $ABCD$, 从① $AB \parallel DC$; ② $AB = DC$; ③ $AD \parallel BC$; ④ $AD = BC$; ⑤ $\angle A = \angle C$; ⑥ $\angle B = \angle D$ 中取 2 个条件加以组合,能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有哪几种情形? 请具体写出这些组合.

(江苏省竞赛题)

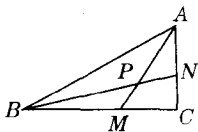
21. 四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = DA$, $\angle BAD = 120^\circ$, M 为 BC 上一点,求证:若 $\triangle AMN$ 有一个内角等于 60° , 则 $\triangle AMN$ 为等边三角形.

22. 如图, $\square ABCD$ 中, $DE \perp AB$ 于 E , $AB:AD = 1:2$, M 是 BC 的中点, 试推断 $\angle EMC$ 与 $\angle BEM$ 的关系, 并说明理由.



综合创新

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 M 在 BC 上, 且 $BM = AC$, N 在 AC 上, 且 $AN = MC$, AM 与 BN 相交于 P , 求证: $\angle BPM = 45^\circ$



(杭州市“求是杯”竞赛题)

24. 如果有两边长分别为 1, a (其中 $a > 1$) 的一块矩形绸布, 要将它剪裁出 3 面矩形彩旗 (面料没有剩余), 使每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同, 画出不同裁剪方法的示意图, 并写出相应 a 的值.

(2001 年北京市海淀区中考题)

16 完美的正方形

在人的心灵深处,都有一种根深蒂固的需要,这就是希望自己是发现者、研究者和探求者。

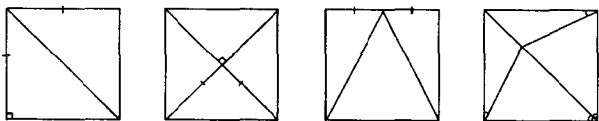
——苏霍姆林斯基

知识纵横

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形(square),换句话说:正方形是各边都相等的矩形,正方形是各角都相等的菱形,正方形既是矩形又是菱形,它具有矩形和菱形的一切性质。

矩形、菱形、正方形都是特殊的四边形,它们的概念交错,关系复杂,性质有许多相似之处,一些判定和性质定理又是可逆的,所以在学习中注重概念的理解,着眼于概念间的区别与联系。

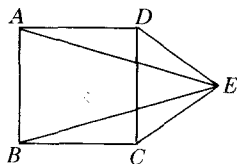
连正方形的对角线,能得到特殊三角形、全等三角形,由于正方形常常与直角三角形联系在一起,所以在解有关正方形问题时要用到直角三角形性质,具有代数风格,体现数形结合思想.熟悉以下基本图形、基本结论:



例题求解

【例1】如图,若四边形 $ABCD$ 是正方形, $\triangle CDE$ 是等边三角形,则 $\angle EAB$ 的度数为_____。(2001年北京市竞赛题)

思路点拨 图中还有等腰三角形,利用等腰三角形性质计算。



·可以证明:在所有周长相等的四边形中,正方形的面积最大。

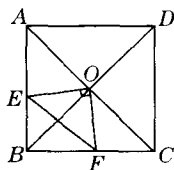
我们熟悉的“七巧板”,那是把一块正方形板切分成三角形、正方形、平行四边形的7块,用它可以拼出许多巧妙的图形,“七巧板”是我国古代人民智慧的结晶。

【例2】如图,在正方形 $ABCD$ 中, O 是对角线 AC 、 BD 的交点,过 O 作 $OE \perp OF$, 分别交 AB 、 BC 于 E 、 F , 若 $AE = 4$, $CF = 3$, 则 EF 的长为 ().

- A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

(2001 年江苏省泰州市中考题)

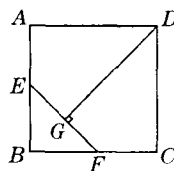
思路点拨 AE 、 CF 、 EF 不在同一个三角形中, 运用全等三角形寻找相等的线段, 使分散的条件集中到同一个三角形中.



【例3】如图, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 是 AB 、 BC 边上两点, 且 $EF = AE + FC$, $DG \perp EF$ 于 G , 求证: $DG = DA$.

(重庆市竞赛题)

思路点拨 构造 $AE + FC$ 的线段是解本例的关键.

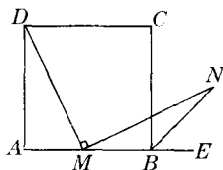


【例4】已知正方形 $ABCD$ 中, M 是 AB 的中点, E 是 AB 延长线上一点, $MN \perp DM$ 且交 $\angle CBE$ 的平分线于 N (如图甲).

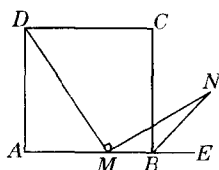
(1) 求证: $MD = MN$;

(2) 若将上述条件中的“ M 是 AB 中点”改为“ M 是 AB 上的任意一点”, 其余条件不变 (如图乙), 则结论“ $MD = MN$ ”还成立吗? 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请说明理由.

(上海市闵行区中考题)



(图甲)



(图乙)



探索是学习的生命线, 深入探究、学会探索是时代提出的新要求, 数学解题中的探索活动可从以下几个方面进行:

(1) 在题设条件不变情况下, 发现挖掘更多的结论;

(2) 通过强化或弱化来改变条件, 考查结论是否改变或寻求新的结论;

(3) 构造逆命题.

对于例3, 请读者思考, 在不改变题设条件的前提下,

(1) $\angle EDF$ 等于多少度?

(2) 怎样证明逆命题?

例4改变点的位置, 赋予运动, 从特殊到一般, (1) 的结果为 (2) 的猜想提供了借鉴的依据, 又为猜想设置了障碍, 前面的证明思路是后面的证明模式.

思路点拨 对于图甲,取 AD 中点 F ,通过构造全等三角形证明 $MD = MN$;这种证法能否迁移到图乙情景中去?从而作出正确的判断.



链接

用正方形分割正方形是一个著名的问题,历史上有人曾提出正方形的完全剖分问题,如果一个正方形可分成 n 个两两边长互不相同的正方形,则这个正方形称为 n 阶完全正方形,现在用计算机已经证明没有低于 20 阶的完全正方形,而且目前的纪录是找到了一个 21 阶完全正方形(其边长为 175).

【例 5】 (1) 试设计一种方法,把一个正方形不重复不遗漏地分割成 8 个正方形(分得的正方形大小可以不相同),又问:如何把正方形按上述要求分成 31 个正方形?

(2) 试设计一种方法,把一个立方体分割成 55 个立方体(分得的立方体大小可以不相同).

(安徽省竞赛题)

思路点拨 从最简单的分割入手,在此基础上再恰当地分割与重组.

学 力 训 练

基础夯实

1. 如图:

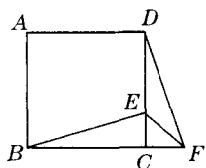
2	1		
---	---	--	--

 是由矩形与正方形从左到右逐个交替并连而成,请观察图形并填下表(表中 n 为正整数)

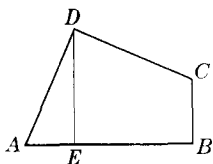
矩形与正方形的个数	1	2	3	4	5	6	...	$2n-1$	$2n$
图形周长	6	8	12	14	18		...		

(2001 年福建省泉州市中考题)

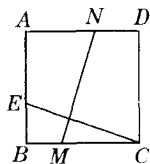
2. 如图,正方形 $ABCD$ 中, E 为 CD 边上一点, F 为 BC 延长线上一点, $CE = CF$,若 $\angle BEC = 60^\circ$,则 $\angle EFD$ 的度数为_____.
- (2000 年苏州市中考题)
3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD = DC$, $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, $DE \perp AB$ 于 E ,若四边形 $ABCD$ 的面积为 8,则 DE 的长为_____.



(第2题)



(第3题)



(第4题)

4. 如图,正方形 $ABCD$ 中, $CE \perp MN$, 若 $\angle MCE = 35^\circ$, 则 $\angle ANM$ 的度数是_____.

5. 用两个全等的直角三角形拼下列图形: ① 平行四边形; ② 矩形; ③ 菱形; ④ 正方形; ⑤ 等腰三角形; ⑥ 等边三角形. 一定可以拼成的图形是().

- A. ①④⑤ B. ②⑤⑥ C. ①②③ D. ①②⑤

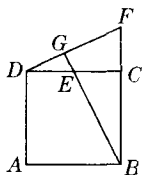
6. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , 设有以下论断: ① $AB = BC$; ② $\angle DAB = 90^\circ$; ③ $BO = DO$, $AO = CO$; ④ 矩形; ⑤ 菱形 $ABCD$; ⑥ 正方形 $ABCD$, 则在下列推论中不正确的是().

- A. $\left. \begin{matrix} ① \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ⑥$ B. $\left. \begin{matrix} ① \\ ③ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ⑤$ C. $\left. \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \right\} \Rightarrow ⑥$ D. $\left. \begin{matrix} ② \\ ③ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ④$

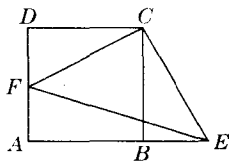
7. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, E 为 CD 上的一点, 延长 BC 至 F , 使 $CF = CE$, 连结 DF , BE 与 DF 相交于 G , 则下面结论错误的是().

- A. $BE = DF$ B. $BG \perp DF$
C. $\angle F + \angle CEB = 90^\circ$ D. $\angle FDC + \angle ABG = 90^\circ$

(2001 年山东省临沂市中考试题)



(第7题)



(第8题)

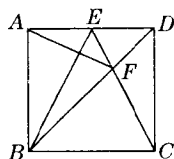
8. 如图,已知正方形 $ABCD$ 的面积为 256, 点 F 在 AD 上, 点 E 在 AB 的延长线上, $\text{Rt}\triangle CEF$ 的面积为 200, 则 BE 的值是().

- A. 15 B. 12 C. 11 D. 10

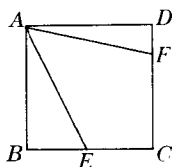
9. 今有一块正方形土地, 要在其上修筑两条笔直的道路, 使道路将这块土地分成形状相同且面积相等的 4 部分, 若道路的宽度可忽略不计, 请设计 3 种不同的修筑方案(在给出的 3 张正方形图纸上分别画图, 并简述画图步骤)

(2000 年山东省中考试题)

10. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AD 边的中点, BD 与 CE 交于 F 点, 求证: $AF \perp BE$.



(第 10 题)



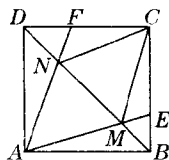
(第 11 题)

11. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3}$, 点 E, F 分别在 BC, CD 上, 且 $\angle BAE = 30^\circ, \angle DAF = 15^\circ$, 求 $\triangle AEF$ 的面积

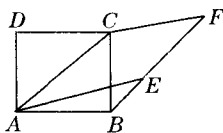
(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

能力拓展

12. 如图, 已知 E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上的点, AE, AF 分别与对角线 BD 相交于 M, N , 若 $\angle EAF = 50^\circ$, 则 $\angle CME + \angle CNF =$ _____.



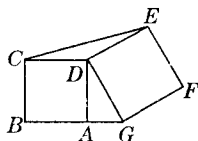
(第 12 题)



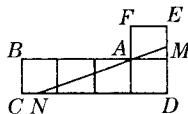
(第 13 题)

13. 如图, 若四边形 $ABCD$ 是正方形, $BF \parallel AC$, $AEFC$ 是菱形, 则 $\angle ACF$ 与 $\angle F$ 度数的比值是 _____.
14. 如图, A 在线段 BG 上, $ABCD$ 和 $DEFG$ 都是正方形, 面积分别为 7 cm^2 和 11 cm^2 , 则 $\triangle CDE$ 的面积等于 _____ cm^2 .

(武汉市选拔赛试题)



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图, 由 5 个边长为 1 cm 的正方形组成的图形中, 过点 A 的一条直线 l 与 ED, CD 分别交于 M, N , 若直线 l 将图形分为面积相等的两部分, 则 $EM =$ _____ cm .

(2001 年天津赛区试题)

16. 将一个正方形分割成 n 个小正方形 ($n > 1$), 则 n 不可能取().

A. 4 B. 5 C. 8 D. 9

(第 16 届江苏省竞赛题)

17. 如图,最大正方形的边长是 8 cm,最小正方形的边长 x 是()
cm.

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. 4

E. $4\sqrt{2}$

F. 以上全不对

(2001 年美国犹他州竞赛题)

18. 如图, $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $EFGH$ 是内接于 $ABCD$ 的正方形, $AE = a$, $AF = b$, 若 $S_{EFGH} = \frac{2}{3}$, 则 $|b - a|$ 等于().

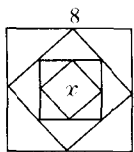
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

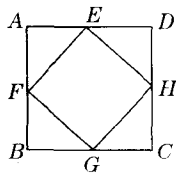
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

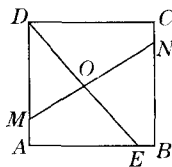
(第 12 届“希望杯”邀请赛试题)



(第 17 题)



(第 18 题)



(第 19 题)

19. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 3, $AE = 1$, E 是边 AB 上的点, O 是 DE 的中点,过 O 作直线分别交 AD 、 BC 于 M 、 N ,且 $MN = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 则().

A. $\angle MOD = \angle DEB$

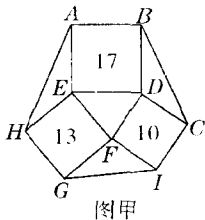
B. $\angle MOD = \angle AED$

C. $\angle MOD = 90^\circ$

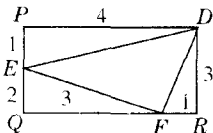
D. $\angle MOD \neq 90^\circ$

20. 图甲中,正方形 $ABDE$ 、 $CDFI$ 、 $EFGH$ 的面积分别为 17, 10, 13, 图乙中, $DPQR$ 为矩形,对照图乙,计算图甲中六边形 $ABCIGH$ 的面积

(第 15 届江苏省竞赛题)

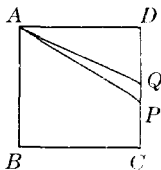


图甲

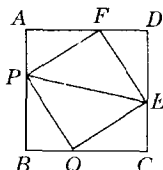


图乙

(第 20 题)



(第 21 题)

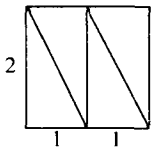


(第 22 题)

21. 如图,在正方形 $ABCD$ 中, P 是 CD 上一点,且 $AP = BC + CP$, Q 为 CD 中点,求证: $\angle BAP = 2\angle QAD$.
22. 如图,有 4 个动点 P 、 Q 、 E 、 F 分别从正方形 $ABCD$ 的 4 个顶点出发,沿着 AB 、 BC 、 CD 、 DA 以同样的速度向 B 、 C 、 D 、 A 各点移动.
- (1) 判定四边形 $PQEF$ 的形状;
 - (2) PE 是否总是经过某一定点,并说明理由;
 - (3) 四边形 $PQEF$ 的顶点位于何处时,其面积最小、最大? 各是多少?

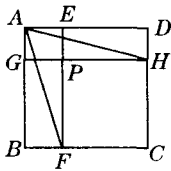
综合创新

23. 如图,把边长为 2 cm 的正方形剪成 4 个全等的直角三角形,请用这 4 个直角三角形拼成符合下列要求的图形(全部用上,互不重叠且不留空隙):
- (1) 不是正方形的菱形(一个);
 - (2) 不是正方形的矩形(一个);
 - (3) 梯形(一个);
 - (4) 不是矩形和菱形的平行四边形(一个);
 - (5) 不是梯形和平行四边形的凸四边形(一个);
 - (6) 与以上画出的图形不全等的其他凸四边形(至少画三个).



(2001 年江苏省徐州市中考题)

24. 如图,正方形 $ABCD$ 被两条与边平行的线段 EF 、 GH 分割成 4 个小矩形, P 是 EF 与 GH 的交点,若矩形 $PFCH$ 的面积恰是矩形 $AGPE$ 面积的 2 倍,试确定 $\angle HAF$ 的大小,并证明你的结论.



(北京市竞赛题)

17 梯形

人类走出工业文明,步入信息时代,有两个最重要的技术杠杆,这就是多媒体和互联网,引发了阅读、写作、计算方式的历史性变革.

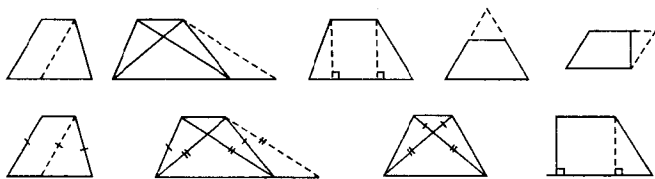
知识纵横

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫梯形(trapezium),等腰梯形(isosceles trapezium)是一类特殊的梯形,其判定和性质定理与等腰三角形的判定和性质类似.

通过作辅助线,把梯形转化为三角形、平行四边形,这是解梯形问题的基本思路,常用的辅助线的作法是:

1. 平移腰:过一顶点作一腰的平行线;
2. 平移对角线:过一顶点作一条对角线的平行线;
3. 过底的顶点作另一底的垂线.

熟悉以下基本图形、基本结论

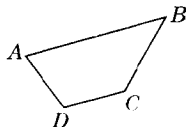


例题求解

【例1】如图,四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle D = 2\angle B$, 若 $AD = a$, $AB = b$, 则 CD 的长是_____.

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 平移腰,构造等腰三角形、平行四边形.



平移腰、平移对角线的作用在于:能得到长度为梯形上下底之差或之和的线段,能把题设条件集中到同一三角形中来.

【例 2】 已知一个梯形的 4 条边的长分别为 1、2、3、4, 则此梯形的面积等于().

- A. 4 B. 6 C. $8\sqrt{2}$ D. $\frac{10}{3}\sqrt{2}$

(2000 年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 给出 4 条线段, 要构成梯形需满足一定条件, 解题的关键是确定可能的上、下底.

【例 3】 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB = DC$, $AC = BD$, 试探索四边形 $ABCD$ 可能是什么形状的四边形, 并证明你的结论.

(2001 年山东省临沂市中考题)

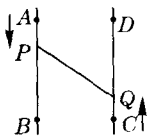
思路点拨 要得出确定的四边形形状, 本题的条件不够, 适当增设条件, 就 $AD = BC$ 及 $AD \neq BC$ 两种情形讨论.

【例 4】 如图, A, B, C, D 为矩形的 4 个顶点, $AB = 16$ cm, $AD = 6$ cm, 动点 P, Q 分别从点 A, C 同时出发, 点 P 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动, 一直到达 B 为止; 点 Q 以 2 cm/s 的速度向 D 移动.

(1) P, Q 两点, 从出发开始到几秒时, 四边形 $PBCQ$ 的面积是 32 cm^2 ?

(2) P, Q 两点从出发开始到几秒时, 点 P 和点 Q 的距离是 10 cm?

思路点拨 引入字母, 把几何问题代数化, 四边形 $PBCQ$ 为一梯形, 结合梯形知识及常用辅助线解题.



给出 4 条线段不一定能构成梯形, 需满足一定的条件, 讨论的方法是通过平移腰, 把问题转化为三角形的问题讨论, 请读者思考, 设 a, b 为梯形的上、下底, c, d 为腰, 那么 a, b, c, d 需满足怎样的条件?

削弱证明的难度, 赋以点(或线)运动, 在动态过程中解几何问题, 这是近年中考试题中几何问题的一个显著特点, 这类问题需要动态分析(以静制动、动中觅静).

分类讨论、数形结合, 给我们深入探究问题留下了广阔的空间, 同时对我们能力的形成与提高提出了新的要求.

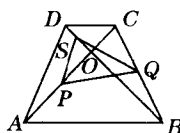
【例5】如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB$, 对角线 AC 、 BD 相交于 O , $\angle AOD = 120^\circ$, 点 S 、 P 、 Q 分别为 OD 、 OA 、 BC 的中点.

(1) 判断 $\triangle SPQ$ 的形状并证明你的结论;

(2) 若 $AB = 5$, $CD = 3$, 求 $\triangle PQS$ 的面积;

(3) 若 $\frac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{7}{8}$, 求 $\frac{CD}{AB}$ 的值.

思路点拨 多个中点给人以广泛的联想: 等腰三角形性质、直角三角形斜边中线、三角形中位线等.

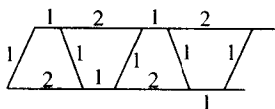


等腰梯形连对角线后, 就产生等腰三角形, 当对角线互相垂直时, 就得到等腰直角三角形, 所以解等腰梯形有关问题时, 需要综合运用特殊三角形的知识.

学力训练

基础夯实

1. 观察下列图形和所给表格中的数据后回答问题:



梯形个数	1	2	3	4	5	...
图形周长	5	8	11	14	17	...

当梯形个数为 n 时, 这时图形的周长为 _____.

(2001 年山东省临沂市中考题)

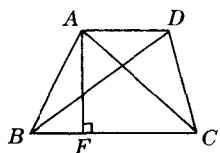
2. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, AC 与 BD 相交于点 O , $\angle BOC = 120^\circ$, $AD = 7$, $BD = 10$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.

(2000 年杭州市中考题)

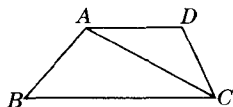
3. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, 且 $AC \perp BD$, 梯形的面积是 49 cm^2 , 则梯形的高 $AF =$ _____ cm .

4. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, $\angle D = 120^\circ$, 对角线 CA 平分 $\angle BCD$, 且梯形的周长为 20, 则 $AC =$ _____, 梯形 $ABCD$ 的面积为 _____.

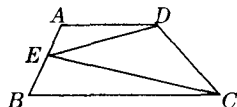
(2001 年北京市海淀区中考题)



(第3题)



(第4题)



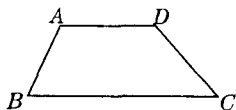
(第5题)

5. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 是 AB 的中点,若 $\triangle DEC$ 的面积为 S ,则四边形 $ABCD$ 的面积为().

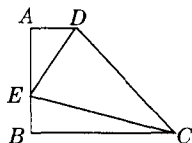
A. $\frac{5}{2}S$ B. $2S$ C. $\frac{7}{4}S$ D. $\frac{9}{4}S$

6. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3} + 1$, $CD = 3$, $AD = 1$,则 $\angle C$ 等于().

A. 30° B. 60° C. 45° D. 不能确定



(第6题)



(第7题)

7. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $AD = 2$, $AB = BC = 4$,在线段 AB 上有一动点 E ,设 $BE = x$, $S_{\triangle DEC} = y$,则 y 与 x 之间的关系式是().

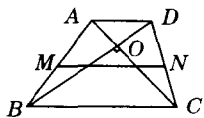
A. $y = 4 - x$ B. $y = 8 - x$ C. $y = 16 - 2x$ D. $y = 20 - x$

(2000年北京顺义中考题)

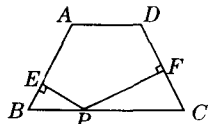
8. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AC = BC + AD$,则 $\angle DBC$ 的度数为().

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

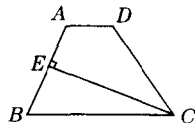
9. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,对角线 AC 与 BD 垂直相交于 O , MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线, $\angle DBC = 30^\circ$,求证: $AC = MN$.



(第9题)



(第10题)



(第11题)

10. 如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$,点 P 为 BC 边上一动点, $PE \perp AB$, $PF \perp CD$,问 $PE + PF$ 的值是否为一定值? 若为一定值,求出这个定值;若不为定值,求出这个值的取值范围.

11. 如图,梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 3AD$, E 为腰 AB 上一点.

(1) 若 $CE \perp AB$, $BE = 3AE$, $AB = CD$,求 $\angle B$;

(2) 设 $\triangle BCE$ 和四边形 $AECD$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 若 $2S_1 = 3S_2$,

求 $\frac{BE}{AE}$.

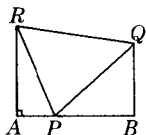
(2001年江苏省无锡市中考题)

能力拓展

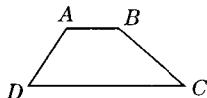
12. 如图, $ABQR$ 是直角梯形, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, P 在 AB 上, 且 $RP = PQ = a$, $RA = h$, $QB = k$, $\angle RPA = 75^\circ$, $\angle QPB = 45^\circ$, 则 $AB =$ _____.

13. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 8$, $BC = 6\sqrt{2}$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$, 则梯形 $ABCD$ 的面积等于 _____.

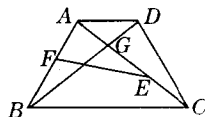
(2000年全国初中数学联赛试题)



(第12题)



(第13题)



(第14题)

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC = 10$ cm, AC 与 BD 相交于 G , 且 $\angle AGD = 60^\circ$, 设 E 为 CG 中点, F 是 AB 中点, 则 EF 长为 _____.

15. 梯形上下底长分别为 1 和 4, 两条对角线长分别为 3 和 4, 则此梯形面积为 _____.

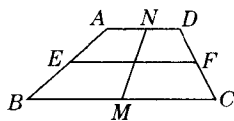
16. 用 4 条线段 $a = 14$, $b = 13$, $c = 9$, $d = 7$ 作为 4 条边构成一个梯形, 则在所构成的梯形中, 中位线的长的最大值为().

- A. 13.5 B. 11.5 C. 11 D. 10.5

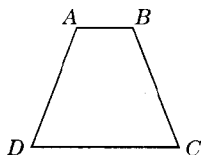
(2001年湖北赛区试题)

17. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, E, M, F, N 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点, 已知 $BC = 7$, $MN = 3$, 则 EF 的长为().

- A. 4 B. $4\frac{1}{2}$ C. 5 D. 6



(第17题)



(第18题)

18. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 998$, $DC = 1001$, $AD = 1999$, 点 P 在线段 AD 上, 则满足条件 $\angle BPC = 90^\circ$ 的点 P 的个

数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 不小于3的整数

(全国初中数学联赛试题)

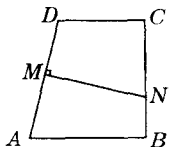
19. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 9$ cm, $BC = 8$ cm, $CD = 7$ cm, M 是 AD 的中点, 从 M 作 AD 的垂线交 BC 于 N , 则 BN 的长为().

A. 1 cm

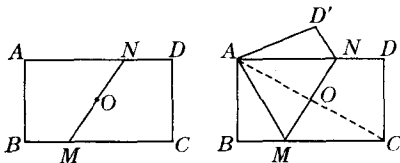
B. 1.5 cm

C. 2 cm

D. 2.5 cm



(第19题)



(第20题)

20. 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AD > AB$, O 为对角线的交点, 过 O 作一直线分别交 BC 、 AD 于 M 、 N .

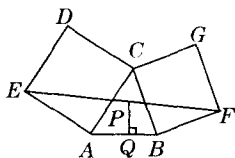
(1) 求证: $S_{\text{梯形}ABMN} = S_{\text{梯形}CDNM}$;

(2) 当 M 、 N 满足什么条件时, 将矩形 $ABCD$ 以 MN 为折痕翻折后能使 C 点恰好与 A 点重合(只写出满足的条件, 不要求证明).

(3) 在(2)的条件下, 若翻折后不重叠部分的面积是重叠部分面积的 $\frac{1}{2}$, 求 $\frac{BM}{MC}$ 的值.

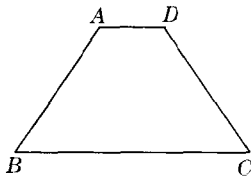
(2001年江苏省连云港市中考题)

21. 如图, 分别以 $\triangle ABC$ 的边 AC 、 BC 为一边, 在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $ACDE$ 和 $CBFG$, 点 P 是 EF 的中点, 求证: 点 P 到 AB 的距离是 AB 的一半.



综合创新

22. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD = \sqrt{2}$, $AD = 1$, $\angle B = 45^\circ$, 动点 E 在折线 $BA - AD - DC$ 上移动, 过点 E 作 $EP \perp BC$ 于 P , 设 $PB = x$, 写出题中所有能用 x 的代数式表示图形的面积.



(2001年江苏省常州市中考题)

18 由中点想到什么

要成为一个有信息素养
(Information literacy)的人,就必须能够确定何时需要信息,并具有检索、评价和有效使用信息的能力,从而形成信息问题解决能力.

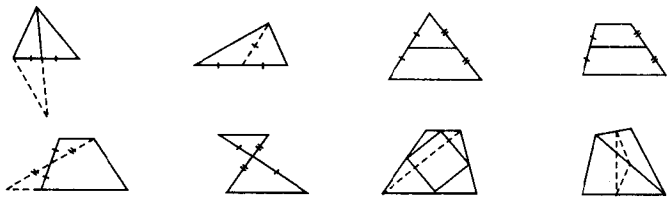
——美国图书馆协会(ALA)

知识纵横

线段的中点(middle point)是几何图形中一个特殊的点,它关联着三角形中线、直角三角形斜边中线、中心对称图形、三角形中位线、梯形中位线等丰富的知识,恰当地利用中点、处理中点是解与中点有关问题的关键,由中点想到什么?常见的联想路径是:

1. 中线倍长;
2. 作直角三角形斜边中线;
3. 构造中位线;
4. 构造中心对称全等三角形等.

熟悉以下基本图形,基本结论:



例题求解

【例1】若平面上 A 、 B 两点到直线 l 的距离分别为3和7,则线段 AB 的中点到 l 的距离为_____.

(2001年成都市中考题)

思路点拨 在有中点的条件下,直接应用中位线的知识也可进行线段的计算,只是 A 、 B 两点与 l 的位置关系不确定.



证明线段倍分关系是几何问题中一种常见题型,利用中点是一个有效途径,基本方法有:

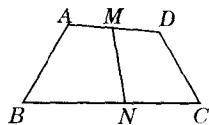
- (1) 利用直角三角形斜边中线定理;
- (2) 运用中位线定理;
- (3) 倍长(或折半)法.

【例2】 如图,在四边形 $ABCD$ 中,一组对边 $AB = CD$,另一组对边 $AD \neq BC$,分别取 AD 、 BC 的中点 M 、 N ,连结 MN ,则 AB 与 MN 的关系是().

- A. $AB = MN$
- B. $AB > MN$
- C. $AB < MN$
- D. 上述三种情况均可能出现

(2001 年河北省初中数学创新与知识应用竞赛试题)

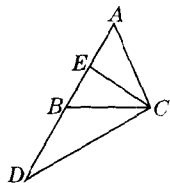
思路点拨 中点 M 、 N 不能直接运用,需增设中点,常见的方法是作对角线的中点.



【例3】 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$,延长 AB 到 D ,使 $BD = AB$, E 为 AB 中点,连结 CE 、 CD ,求证: $CD = 2EC$.

(浙江省宁波市中考题)

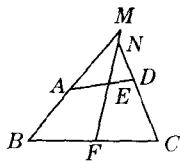
思路点拨 联想到与中位线相关的丰富知识,将线段倍分关系的证明转化为线段相等关系的证明,解题的关键是恰当添辅助线.



三角形与梯形的中位线,在位置上涉及到平行,在数量上是上下底和的一半,它起着传递角的位置关系和线段长度的功能,在证明线段倍分关系、两直线位置关系、线段长度的计算等方面有着广泛的应用.

【例4】 如图,已知四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, E 、 F 分别为 AD 、 BC 中点, BA 、 FE 、 CD 延长线分别交于 M 、 N 点,比较 $\angle M$ 、 $\angle N$ 的大小,并证明你的结论.

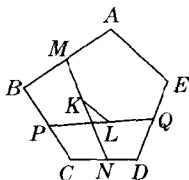
思路点拨 通过传递角,将 $\angle M$ 、 $\angle N$ 转到同一个三角形来比较,从构造三角形中位线入手.



【例5】如图,任意五边形 $ABCDE$ 中, M, N, P, Q 分别为 AB, CD, BC, DE 的中点, K, L 分别为 MN, PQ 的中点, 求证: $KL \parallel AE$ 且 $KL = \frac{1}{4}AE$.

(2001 年天津赛区试题)

思路点拨 通过连线, 将多边形分割成三角形、四边形, 为多个中点的利用创造条件, 这是解本例的突破口.



链接

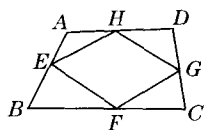
需要什么, 构造什么, 构造基本图形、构造线段的和差(倍分)关系、构造角的关系等, 这是作辅助线的有效思考方法之一.

学力训练

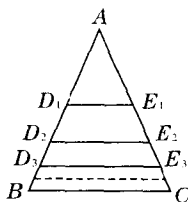
基础夯实

1. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E, F, G, H 分别是梯形 $ABCD$ 各边 AB, BC, CD, DA 的中点, 当梯形 $ABCD$ 满足条件_____时, 四边形 $EFGH$ 是菱形(填上一个你认为正确的结论即可).

(2001 年浙江省金华市中考题)



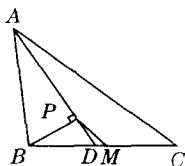
(第1题)



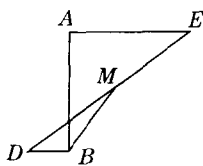
(第2题)

2. 如图, $\triangle ABC$ 中, $BC = a$, 若 D_1, E_1 分别是 AB, AC 的中点, 则 $D_1E_1 = \frac{1}{2}a$; 若 D_2, E_2 分别是 D_1B, E_1C 的中点, 则 $D_2E_2 = \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + a) = \frac{3}{4}a$; 若 D_3, E_3 分别是 D_2B, E_2C 的中点, 则 $D_3E_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}a + a) = \frac{7}{8}a$; ... 若 D_nE_n 分别是 $D_{n-1}B, E_{n-1}C$ 的中点, 则 $D_nE_n =$ _____.

(2001 年山东省济南市中考题)



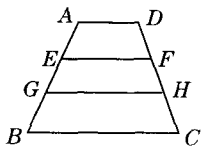
(第3题)



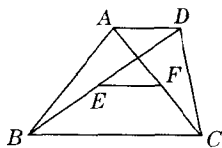
(第4题)

3. 如图, $\triangle ABC$ 边长分别为 $AB = 14$, $BC = 16$, $AC = 26$, P 为 $\angle A$ 的平分线 AD 上一点, 且 $BP \perp AD$, M 为 BC 的中点, 则 PM 的值是 _____.
4. 如图, 已知 $AB = 4$, $DB \perp AB$, $EA \perp AB$, $DB = 3$, $EA = 6$, 又点 M 是 DE 的中点, 则 BM 的长等于 _____.
5. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel EF \parallel GH \parallel BC$, $AE = EG = GB$, $AD = 18$, $BC = 32$, 则 $EF + GH =$ ().

A. 40 B. 48 C. 50 D. 56



(第5题)



(第6题)

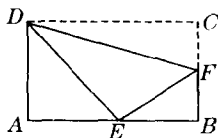
6. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 、 F 分别是对角线 BD 、 AC 的中点, 若 $AD = 6$ cm, $BC = 18$ cm, 则 EF 的长为 ().
7. 如图, 矩形纸片 $ABCD$ 沿 DF 折叠后, 点 C 落在 AB 上的 E 点, DE 、 DF 三等分 $\angle ADC$, AB 的长为 6, 则梯形 $ABFD$ 的中位线长为 ().

A. 不能确定

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3} + 1$



(第7题)

- (2001 年浙江省宁波市中考题)
8. 已知四边形 $ABCD$ 和对角线 AC 、 BD , 顺次连结各边中点得四边形 $MNPQ$, 给出以下 6 个命题:
- ① 若所得四边形 $MNPQ$ 为矩形, 则原四边形 $ABCD$ 为菱形;
 - ② 若所得四边形 $MNPQ$ 为菱形, 则原四边形 $ABCD$ 为矩形;
 - ③ 若所得四边形 $MNPQ$ 为矩形, 则 $AC \perp BD$;
 - ④ 若所得四边形 $MNPQ$ 为菱形, 则 $AC = BD$;
 - ⑤ 若所得四边形 $MNPQ$ 为矩形, 则 $\angle BAD = 90^\circ$;

⑥ 若所得四边形 $MNPQ$ 为菱形, 则 $AB = AD$.

以上命题中, 正确的是().

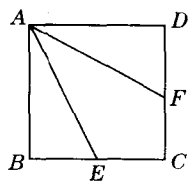
- A. ①② B. ③④ C. ③④⑤⑥ D. ①②③④

(2001 年江苏省苏州市中考题)

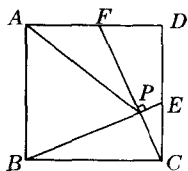
9. 如图, 已知 E 是正方形 $ABCD$ 的 BC 边的中点, F 是 CD 上一点, AE 平分 $\angle BAF$. 求证: $AF = BC + CF$.

(湖北省荆州市中考题)

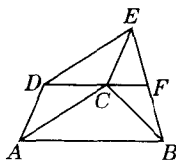
10. 如图, 已知在正方形 $ABCD$ 中, E 为 DC 上一点, 连结 BE , 作 $CF \perp BE$ 于 P , 交 AD 于 F 点, 若恰好使得 $AP = AB$, 求证: E 是 DC 的中点.



(第 9 题)



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 以 AC 、 AD 为边作 $\square ACED$, DC 的延长线交 BE 于 F .

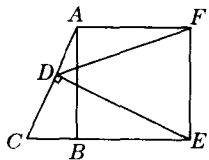
(1) 求证: $EF = FB$;

(2) $S_{\triangle BCE}$ 能否为 $S_{\text{梯形}ABCD}$ 的 $\frac{1}{3}$? 若不能, 说明理由; 若能, 求出 AB 与 CD 的关系.

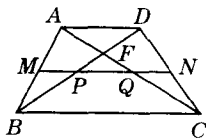
能力拓展

12. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $BC = 2$, D 是 AC 的中点, 从 D 作 $DE \perp AC$ 与 BC 的延长线交于 E , 以 AB 、 BE 为邻边作长方形 $ABEF$, 连结 DF , 则 DF 的长是_____.

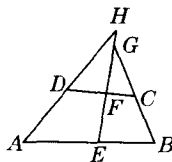
(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)



(第 12 题)



(第 13 题)



(第 14 题)

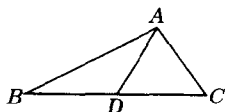
13. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 F , M 、 N 分别为 AB 、 CD 中点, MN 分别交 BD 、 AC 于 P 、 Q , 且 $\angle FPQ = \angle FQP$, 若 $BD = 10$, 则 $AC =$ _____.

(重庆市竞赛题)

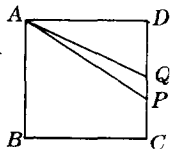
14. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD > BC$, E, F 分别是 AB, CD 的中点, AD, BC 的延长线分别与 EF 的延长线交于 H, G , 则 $\angle AHE$ $\angle BGE$ (填“ $>$ ”或“ $=$ ”或“ $<$ ”号)

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 4$, BC 边上的中线 $AD = 2$, $AB + AC = 3 + \sqrt{7}$, 则 $S_{\triangle ABC}$ 等于().

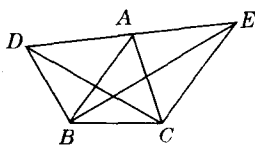
- A. $\sqrt{15}$ B. $\frac{\sqrt{55}}{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$



(第 15 题)



(第 16 题)



(第 17 题)

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, Q 是 CD 的中点, 设 $\angle DAQ = \alpha$, 在 CD 上取一点 P , 使 $\angle BAP = 2\alpha$, 则 CP 的长是().

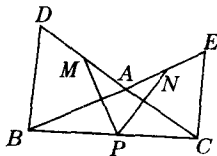
- A. 1 B. 2 C. 3 D. $\sqrt{3}$

17. 如图, 已知 A 为 DE 的中点, 设 $\triangle DBC, \triangle ABC, \triangle EBC$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 S_1, S_2, S_3 之间的关系式是().

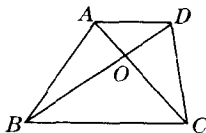
- A. $S_2 = \frac{3}{2}(S_1 + S_3)$ B. $S_2 = \frac{1}{2}(S_3 - S_1)$
C. $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$ D. $S_2 = \frac{3}{2}(S_3 - S_1)$

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, 以 AB, AC 为边分别向外作正三角形 ABD 和正三角形 ACE , M 为 AD 中点, N 为 AE 中点, P 为 BC 中点, 求 $\angle MPN$ 的度数.

(北京市竞赛题)



(第 18 题)



(第 19 题)

19. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$ 于 O , 试判断 $AB + CD$ 与 $AD + BC$ 的大小, 并证明你的结论.

(山东省竞赛题)

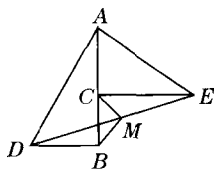
20. 已知: $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是直角三角形, 且 $\angle ABD = \angle ACE = 90^\circ$. 如图甲, 连结 DE , 设 M 为 DE 的中点.

(1) 求证: $MB = MC$;

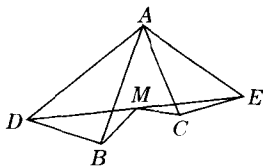
(2) 设 $\angle BAD = \angle CAE$, 固定 $\triangle ABD$, 让 $\text{Rt}\triangle ACE$ 绕顶点 A 在平

面内旋转到图乙的位置,试问: $MB = MC$ 是否还能成立? 并证明其结论.

(江苏省竞赛题)



图甲



图乙

(第 20 题)

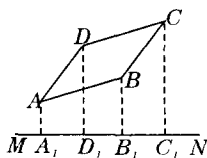
综合创新

21. 如图甲, $\square ABCD$ 外有一条直线 MN , 过 A, B, C, D 4 个顶点分别作 MN 的垂线 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 , 垂足分别为 A_1, B_1, C_1, D_1 .

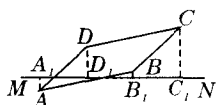
(1) 求证 $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$;

(2) 如图乙, 直线 MN 向上移动, 使点 A 与点 B, C, D 位于直线 MN 两侧, 这时过 A, B, C, D 向直线 MN 引垂线, 垂足分别为 A_1, B_1, C_1, D_1 , 那么 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 之间存在什么关系?

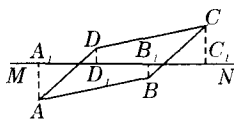
(3) 如图丙, 如果将 MN 再向上移动, 使其两侧各有 2 个顶点, 这时过 A, B, C, D 向直线 MN 引垂线, 垂足分别为 A_1, B_1, C_1, D_1 , 那么 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 之间又存在什么关系?



图甲



图乙



图丙

19 平行截割

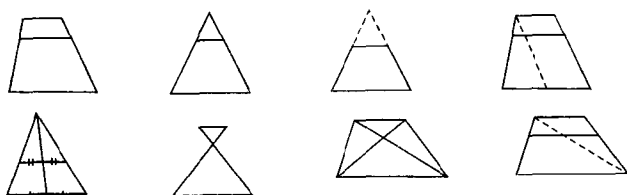
想像力比知识更重要,因为知识是有限的,而想像力概括着世界上的一切,推动着进步.

——爱因斯坦

知识纵横

平行线是初中平面几何中基本而重要的图形,平行线能改变角的位置并传递角,可“送”线段到恰当处,完成等积变形,当一组平行线截两条直线时就得到比例线段(proportional segments),平行线分线段成比例定理是研究比例线段、相似形的重要理论.

利用、挖掘、创造平行线,是运用平行线分线段成比例定理解题的关键,另一方面,需要熟悉并善于从复杂图形中分解或构造如下形如“E”、“A”型或“X”型的基本图形:

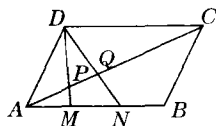


例题求解

【例1】如图,已知在 $\square ABCD$ 中, M 、 N 为 AB 的三等分点, DM 、 DN 分别交 AC 于 P 、 Q 两点,则 $AP:PQ:QC = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2001年河北省初中数学创新与知识应用竞赛试题)

思路点拨 图中有形如“X”型的基本图形,建立含 AP 、 PQ 、 QC 的比例式,并把 AP 、 PQ 、 QC 用同一条线段的代数式表示.



科学家兼艺术大师达·芬奇在其艺术创造、建筑设计中常使用中外比,且誉之为“黄金比”,因而 $0.618\cdots$ 便被人们称为“黄金数”,“黄金数”在建筑造型、生物学、绘画等方面有广泛的应用.

数学家们早就认识到:最无理的数就是黄金数 $0.618\cdots$,因为它用有理数很难逼近.



若题设条件无平行线,需作平行线,而作平行线要考虑好过哪一点作平行线,一般是由比的两条线段启发而得的,其目的是构造基本图形.

平行线分线段成比例定理是证明比例线段的常用依据之一,比例线段丰富了研究几何问题的方法,主要体现在:

(1) 利用比例线段求线段的长度;

(2) 运用比例线段证明线段相等、线段和差倍分关系、两直线平行等问题.

【例2】 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AE:EB=1:3$, $BD:DC=2:1$, AD 与 CE 相交于 F ,则 $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$ 的值为().

A. $\frac{1}{2}$

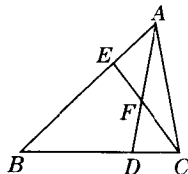
B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

(江苏省泰州市中考题)

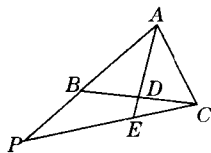
思路点拨 已知条件没有平行线,需恰当作平行线,构造基本图形,产生含 $\frac{EF}{FC}$, $\frac{AF}{FD}$ 的比例线段,并设法沟通已知比例式与未知比例式的联系.



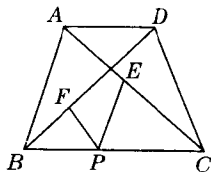
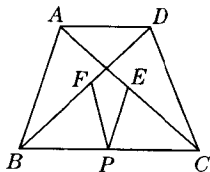
【例3】 如图, $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边的中点,延长 AD 至 E ,延长 AB 交 CE 于 P ,若 $AD=2DE$,求证: $AP=3AB$.

(2001年福建省宁德市中考题)

思路点拨 从比例线段角度看,即要证明 $\frac{AP}{AB}=3$,证题的关键是作出平行线,以便运用平行线分线段成比例定理.



【例4】 如图,梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB=DC$.



(1) 如果 P 、 E 、 F 分别是 BC 、 AC 、 BD 的中点,求证: $AB=PE+PF$;

(2) 如果 P 是 BC 上的任意一点(中点除外), $PE \parallel AB$, $PF \parallel DC$,那么 $AB=PE+PF$ 这个结论还成立吗? 如果成立,请证明;如果不成立,说明理由.

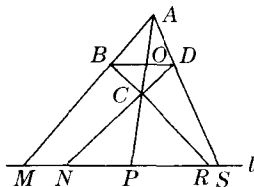
(上海市闵行区中考题)

思路点拨 对于(2),先假设结论成立,从平行线出发证明 $AB = PE + PF$,即需证明 $\frac{PE}{AB} + \frac{PF}{AB} = 1$,将线段和差问题的证明转化为与比例线段有关问题的证明.

【例5】 如图,在四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O ,直线 l 平行于 BD ,且与 AB 、 DC 、 BC 、 AD 及 AC 的延长线分别相交于点 M 、 N 、 R 、 S 和 P ,求证: $PM \cdot PN = PR \cdot PS$

(山东省竞赛题)

思路点拨 由于 PM 、 PN 、 PR 、 PS 在同一条直线上,所以不能直接应用平行线分线段成比例推得结论,需观察分解图形,利用中间比沟通不同比例式的联系.



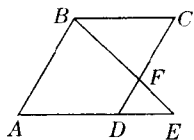
学 力 训 练

基础夯实

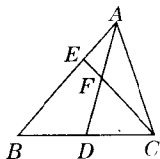
- 如图,已知 E 为 $\square ABCD$ 的边 AD 的延长线上一点,且 D 为 AE 的黄金分割点,即 $AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AE$, BE 交 DC 于点 F ,已知 $AB = \sqrt{5} + 1$,则 CF 的长为_____.

2. 如图, AD 是 BC 边上的中线, F 是 AD 上一点, CF 的延长线交 AB 于点 E , 若 $\frac{AF}{FD} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{AE}{BE} =$ _____; 若 $\frac{AF}{FD} = \frac{1}{n} (n > 0)$, 则 $\frac{AE}{BE} =$ _____.

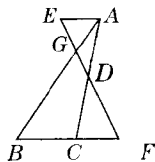
(2001 年江苏省镇江市中考题)



(第 1 题)



(第 2 题)



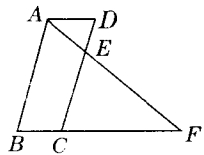
(第 3 题)

3. 如图, 已知点 D 为 $\triangle ABC$ 中 AC 边的中点, $AE \parallel BC$, ED 交 AB 于点 G , 交 BC 的延长线于点 F , 若 $\frac{BG}{GA} = \frac{3}{1}$, $BC = 8$, 则 AE 的长为 _____.

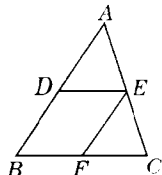
(2000 年苏州市中考题)

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 4$ cm, $BC = 1$ cm, E 是 CD 边上一动点, AE 、 BC 的延长线交于点 F , 设 $DE = x$ (cm), $BF = y$ (cm), 用 x 的代数式表示 y 得 _____.

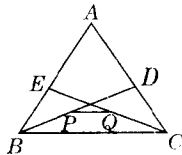
(2001 年黑龙江省中考题)



(第 4 题)



(第 5 题)



(第 6 题)

5. 如图, 已知 $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, 现得到下列结论:

① $\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC}$; ② $\frac{AD}{BF} = \frac{AB}{BC}$; ③ $\frac{EF}{AB} = \frac{DE}{BC}$; ④ $\frac{CE}{CF} = \frac{EA}{BF}$.

其中正确比例式的个数有().

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

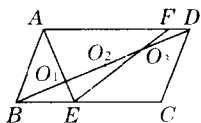
6. 如图, BD 、 CE 是 $\triangle ABC$ 的中线, P 、 Q 分别是 BD 、 CE 的中点, 则 $\frac{PQ}{BC}$ 等于().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

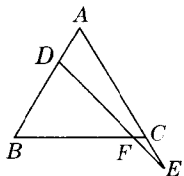
7. 如图, 已知在 $\square ABCD$ 中, O_1 、 O_2 、 O_3 为对角线 BD 上三点, 且 $BO_1 = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3D$, 连结 AO_1 并延长交 BC 于点 E , 连结 EO_3 并延长交 AD 于点 F , 则 $AD:FD$ 等于().

- A. 19:2 B. 9:1 C. 8:1 D. 7:1

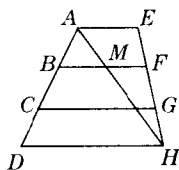
(河北省中考题)



(第7题)



(第8题)



(第9题)

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 在 AB 上, E 在 AC 的延长线上, $BD = 3CE$, DE 交 BC 于 F ,则 $DF:FE$ 等于().

A. 5:2

B. 2:1

C. 3:1

D. 4:1

(江苏省竞赛题)

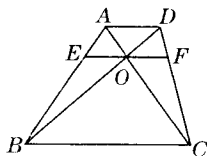
9. 如图, $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$, $AB = \frac{1}{2}BC = CD$, $AE = 12$, $DH = 16$, AH 交 BF 于 M ,求 BM 与 CG .

(2001年广西中考题)

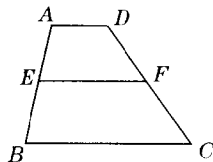
10. 如图,梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, EF 经过梯形对角线的交点 O ,且 $EF \parallel AD$.

(1) 求证: $OE = OF$; (2) 求 $\frac{OE}{AD} + \frac{OF}{BC}$ 的值;

(3) 求证: $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$.



(第10题)



(第11题)

11. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,点 E 在 AB 上,点 F 在 DC 上,且 $AD = a$, $BC = b$.

(1) 如果点 E 、 F 分别为 AB 、 DC 的中点,求证: $EF \parallel BC$,且 $EF = \frac{a+b}{2}$.

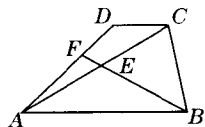
(2) 如果 $\frac{AE}{BE} = \frac{DF}{FC} = \frac{m}{n}$,判断 EF 和 BC 是否平行? 并用 a 、 b 、 m 、 n 的代数式表示 EF ,请证明你的结论.

(2000年北京市朝阳区中考题)

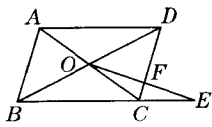
能力拓展

12. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$, E 是对角线 AC 的中点, BE 延长后交 AD 于 F ,那么 $\frac{AF}{FD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

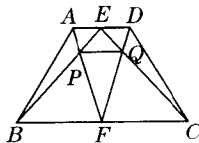
(“祖冲之杯”邀请赛试题)



(第12题)



(第13题)



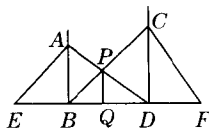
(第14题)

13. 如图, $\square ABCD$ 的对角线交于 O 点, 过 O 任作一直线与 CD 、 BC 的延长线分别交于 F 、 E 点, 设 $BC = a$, $CD = b$, $CE = c$, 则 $CF =$ _____.

(2002 年山东赛区选拔赛试题)

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$, E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点, 且 AF 交 BE 于 P , CE 交 DF 于 Q , 则 PQ 的长为 _____.

15. 如图, 工地上竖立着两根电线杆 AB 、 CD , 它们相距 15 cm, 分别自两杆上高出地面 4 m、 6 m 的 A 、 C 处, 向两侧地面上的 E 、 D 、 B 、 F 点处, 用钢丝绳拉紧, 以固定电线杆, 那么钢丝绳 AD 与 BC 的交点 P 离地面的高度为 _____ m.



(第15题)

(2000 年全国初中数学联赛试题)

16. 已知 $p + q + r = 9$, 且 $\frac{p}{x^2 - yz} = \frac{q}{y^2 - zx} = \frac{r}{z^2 - xy}$, 则 $\frac{px + qy + rz}{x + y + z}$ 等于 ().

A. 9 B. 10 C. 8 D. 7

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

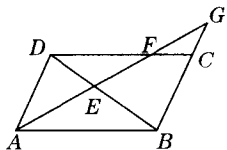
17. 如图, $\square ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交 BD 于 E , 交 CD 于 F , 交 BC 的延长线于 G , 则下列结论正确的是 ().

A. $AE^2 = EF \cdot FG$ B. $AE^2 = EF \cdot EG$
C. $AE^2 = EG \cdot FG$ D. $AE^2 = EF \cdot AG$

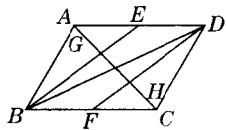
18. 如图, $\square ABCD$ 中, E 、 F 分别是边 AD 、 BC 的中点, AC 分别交 BE 、 DF 于 G 、 H , 试判断下列结论: ① $BE = DF$; ② $AG = GH = HC$; ③

$EG = \frac{1}{2} BG$; ④ $S_{\triangle ABE} = 3S_{\triangle AGE}$, 其中正确的结论有 ().

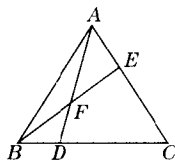
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



(第17题)



(第18题)

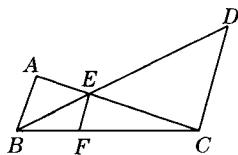


(第19题)

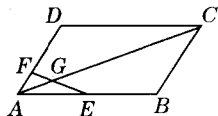
19. 如图, 已知 $\triangle ABC$, $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$, AD 、 BE 交于 F , 则 $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{BF}{FE}$ 的值是().

A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{14}{9}$ C. $\frac{35}{12}$ D. $\frac{56}{15}$

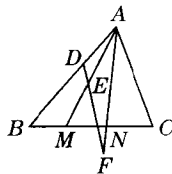
20. 如图, 已知 $AB \parallel EF \parallel CD$, $AC + BD = 240$, $BC = 100$, $EC + ED = 192$, 求 CF .
(2000 年山东省竞赛题)



(第 20 题)



(第 21 题)



(第 22 题)

21. 如图, 已知在 $\square ABCD$ 中, E 为 AB 边的中点, $AF = \frac{1}{2} FD$, FE 与 AC 相交于 G , 求证: $AG = \frac{1}{5} AC$.
22. 如图, 已知 M 、 N 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点, 且满足 $BM = MN = NC$, 一条平行于 AC 的直线分别交 AB 、 AM 和 AN 的延长线于点 D 、 E 和 F , 求证: $EF = 3DE$.
(湖北省黄冈市竞赛题)

综合创新

23. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边的中点, E 为 AC 边上的任意一点, BE 交 AD 于点 O . 某学生在研究这一问题时, 发现了如下的事实:

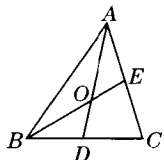
(1) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ 时, 有 $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$ (如图甲);

(2) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$ 时, 有 $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{2}{2+2}$ (如图乙);

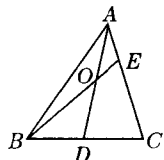
(3) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} = \frac{1}{1+3}$ 时, 有 $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2+3}$ (如图丙);

在图丁中, 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{1+n}$ 时, 参照上述研究结论, 请你猜想用 n 表示

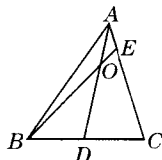
$\frac{AO}{AD}$ 的一般结论, 并给出证明 (其中 n 是正整数).



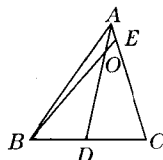
图甲



图乙



图丙



图丁

(2001 年山西省中考题)

20 飞跃——从全等到相似

类比的方法应在经验科学中占很高的地位,而且科学家也曾按照这种推论方法获得很重要的结果.

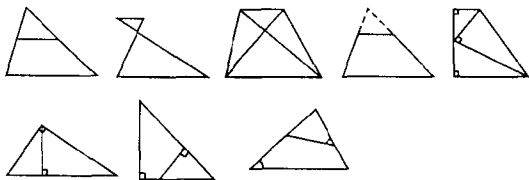
——黑格尔

知识纵横

全等三角形是相似三角形(similar triangle)的相似比(similar ratio)等于1的特殊情况,从全等到相似是认识上的一个巨大飞跃,不但认识形式上有质的变化,而且思维方式也产生突变,相等是全等三角形的主旋律,在相似形的问题中出现的线段间的关系比全等形中的等量关系复杂,不仅有比例式,还有等积式、平方式、线段乘积的和、差、线段比的和差等.

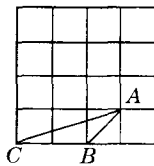
通过寻找(或构造)相似三角形,用以计算或论证的方法,我们称为相似三角形法,在线段长度的计算、角相等的证明、比例线段的证明等方面有广泛的应用,是几何学中应用最广泛的方法之一.

熟悉以下形如“A型”、“X型”“子母型”等相似三角形.



例题求解

【例1】 如图,在大小为 4×4 的正方形方格中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 在单位正方形的顶点上,请在图中画一个 $\triangle A_1B_1C_1$,使 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (相似比不为1),且点 A_1 、 B_1 、 C_1 都在单位正方形的顶点上.



(2001年上海市中考题)

思路点拨 先计算出 $\triangle ABC$ 边角有关值,依据相似三角形判定方



黑格尔(1770—1831),德国著名哲学家.

相似是几何中的一个概念,但相似性不仅表现在事物的几何形态上,而且还体现在事物的功能、结构、原理上.

类比推理也贯穿在物理学的全部发展过程中,著名物理学家麦克斯韦曾说:“借助类比,我试图以便利的形式提出研究电现象所必须的数学手段和公式.”

在新事物面前,人们往往习惯于把它们与原有的、熟知的事物相比,这里蕴含的思想方法就是类比.

法画出 $\triangle A_1B_1C_1$,本例是一道开放题,符合要求的 $\triangle A_1B_1C_1$ 不只一种.

【例2】 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三边的长,且 $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a+b+c}$, 则它的内角 $\angle A, \angle B$ 的关系是().

A. $\angle B > 2\angle A$

B. $\angle B = 2\angle A$

C. $\angle B < 2\angle A$

D. 不确定

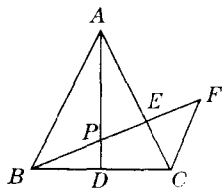
(2000 年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 先化简已知等式,根据所得等式构造相应线段,通过全等或相似寻找角的关系.

【例3】 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是中线, P 是 AD 上一点,过 C 作 $CF \parallel AB$, 延长 BP 交 AC 于 E , 交 CF 于 F . 求证: $BP^2 = PE \cdot PF$.

(吉林省中考题)

思路点拨 由于 BP, PE, PF 在同一条直线上,所以必须通过作辅助线寻找等线段来转化问题.



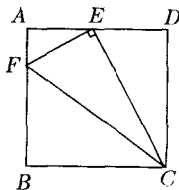
【例4】 如图,在矩形 $ABCD$ 中, E 为 AD 的中点, $EF \perp EC$ 交 AB 于 F , 连结 FC . ($AB > AE$)

(1) $\triangle AEF$ 与 $\triangle EFC$ 是否相似,若相似,证明你的结论;若不相似,请说明理由;

(2) 设 $\frac{AB}{BC} = k$, 是否存在这样的 k 值,使 $\triangle AEF$ 与 $\triangle BFC$ 相似? 若存在,证明你的结论并求出 k 的值;若不存在,说明理由.

(2001 年重庆市中考题)

思路点拨 本例是一道存在性探索问题,对于(2),假设存在,则 $Rt\triangle AEF$ 与 $Rt\triangle BFC$ 中有一对锐角相等,怎样由边的比值得出角的关系? 不妨从特殊角入手,逆推求出 k 的值.



比例线段(或等积式的)证明是几何问题中的常见题型,基本证法有:

(1) 从相似三角形入手;

(2) 利用平行截割定理.

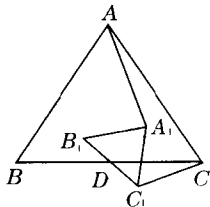
有时需根据要证明的式子,过恰当的点作平行线,在具体证明过程中,常常要作等线段代换、等比代换或等积代换,以促使问题的转化.

将问题置于几何问题的背景中探索,要综合运用几何代数知识,多角度思考尝试,需要注意的是,若题目没有指出具体的对应关系,结论常常具有不确定性,需要分类讨论.

【例5】如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 均为正三角形, BC 和 B_1C_1 的中点均为 D . 求证: $AA_1 \perp CC_1$.

(2000年重庆市竞赛题)

思路点拨 作出等边三角形最基本的辅助线, 并延长 AA_1 交 CC_1 于 E , 寻找相似三角形, 证明 $\angle AEC = 90^\circ$.

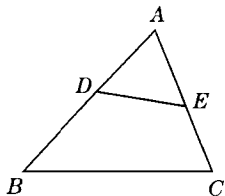


学力训练

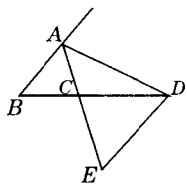
基础夯实

1. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是 AB 、 AC 上的点, 在下列条件中: ① $\angle AED = \angle B$; ② $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$; ③ $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$, 能判断 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ACB$ 相似的条件是_____. (只填序号)

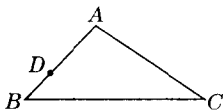
(2000年无锡市中考题)



(第1题)



(第2题)



(第3题)

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm, AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分线, $DE \parallel AB$ 交 AC 的延长线于点 E , 那么 $CE =$ _____ cm.

(2001年重庆市中考题)

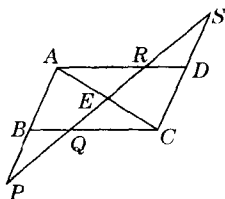
3. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的一点, 已知 $AB = 12$, $AC = 15$, $AD = \frac{2}{3} AB$, 在 AC 上取一点 E , 使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 则 $AE =$ _____.

4. 如图, $\square ABCD$ 中, 直线 PS 分别交 AB 、 CD 的延长线于 P 、 S , 交 BC 、 AC 、 AD 于 Q 、 E 、 R , 图中相似三角形的对数(不含全等形)共有_____对.

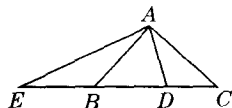
(武汉市选拔赛试题)

5. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, D 是 BC 中点, $AE \perp AD$ 交 CB 延长线于点 E ,则结论正确的是().

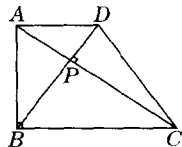
A. $\triangle AED \sim \triangle ACB$ B. $\triangle AEB \sim \triangle ACD$
C. $\triangle BAE \sim \triangle ACE$ D. $\triangle AEC \sim \triangle DAC$



(第4题)



(第5题)



(第6题)

6. 如图,梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,对角线 $AC \perp BD$ 于 P ,若 $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{4}$,则 $\frac{BD}{AC}$ 的值是().

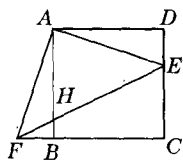
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

(2000年绍兴市中考题)

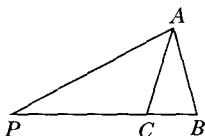
7. 如图,将 $\triangle ADE$ 绕正方形 $ABCD$ 的顶点 A 顺时针旋转 90° ,得 $\triangle ABF$,连结 EF 交 AB 于 H ,则下列结论错误的是().

A. $AE \perp AF$ B. $EF:AF = \sqrt{2}:1$
C. $AF^2 = FH \cdot FE$ D. $\frac{BF}{FC} = \frac{HB}{EC}$

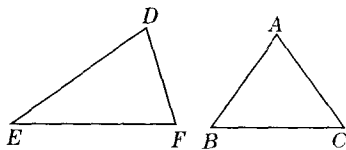
(2001年黑龙江省中考题)



(第7题)



(第8题)



(第9题)

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 6$,延长 BC 至 P ,使得 $\triangle PAB \sim \triangle PCA$,则 PC 等于().

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

9. 如图,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,已知 $\angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle E = 30^\circ$,画直线 l, m ,使直线 l 将 $\triangle ABC$ 分成两个小三角形,直线 m 将 $\triangle DEF$ 分成两个小三角形,并使 $\triangle ABC$ 分成的两个小三角形分别与 $\triangle DEF$ 分成的两个小三角形相似,并标出每个小三角形各个内角的度数.(画图工具不限,不要求写画法)

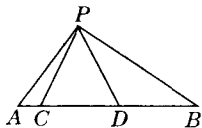
(2000年浙江省温州市中考题)

10. 如图,点 C, D 在线段 AB 上, $\triangle PCD$ 是等边三角形.

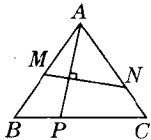
(1) 当 AC 、 CD 、 DB 满足怎样的关系式时 $\triangle ACP \sim \triangle PDB$;

(2) 当 $\triangle ACP \sim \triangle PDB$ 时, 求 $\angle APB$ 的度数.

(2000 年河南省中考题)



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图, 设 P 是等边 $\triangle ABC$ 的一边 BC 上的任意一点, 连结 AP , 它的垂直平分线交 AB 、 AC 于 M 、 N 两点, 求证: $BP \cdot PC = BM \cdot CN$.

(安徽省竞赛题)

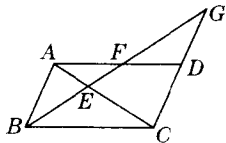
能力拓展

12. 已知 $\square ABCD$ 中, 过点 B 的直线顺次与 AC 、 AD 及 CD 的延长线相交于点 E 、 F 、 G , 若 $BE = 5$, $EF = 2$, 则 FG 的长是_____.

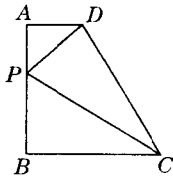
(2000 年“弘晟杯”上海市竞赛题)

13. 如图, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 4$, 点 P 在高 AB 上滑动, 若 $\triangle DAP$ 与 $\triangle PBC$ 相似, 则 $PB =$ _____.

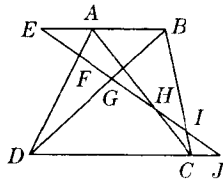
(重庆市竞赛题)



(第 12 题)



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, 一直线交 BA 延长线于 E , 交 DC 延长线于 J , 交 AD 于 F , BD 于 G , AC 于 H , BC 于 I , 已知 $EF = FG = GH = HI = IJ$, 则 $\frac{DC}{AB} =$ _____.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

15. 已知一个梯形被一条对角线分成两个相似三角形, 如果两腰的比为 $\frac{1}{4}$, 那么两底的比为().

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

(第 14 届江苏省竞赛题)

16. 如图, 若 $PA = PB$, $\angle APB = 2\angle ACB$, AC 与 PB 交于点 D , 且 PB

$=4$, $PD=3$, 则 $AD \cdot DC$ 等于().

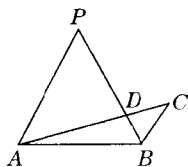
A. 6

B. 7

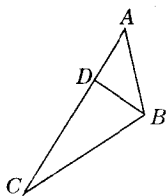
C. 12

D. 16

(2001 年 TI 杯全国初中数学竞赛试题)



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上一点, 下面 4 种情况中, $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ 不一定成立的情况是().

A. $AD \cdot BC = AB \cdot BD$

B. $AB^2 = AD \cdot AC$

C. $\angle ABD = \angle ACB$

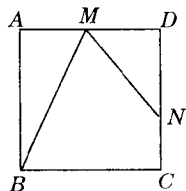
D. $AB \cdot BC = AC \cdot BD$

(2001 年全国初中数学联赛题)

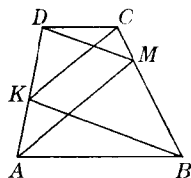
18. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M 为 AD 中点, 以 M 为顶点作 $\angle BMN = \angle MBC$, MN 交 CD 于 N , 求证: $DN = 2NC$.

19. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, K 、 M 分别是 AD 、 BC 上的点, 已知 $\angle DAM = \angle CBK$, 求证: $\angle DMA = \angle CKB$.

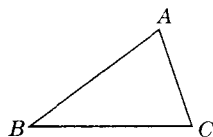
(“祖冲之杯”邀请赛试题)



(第 18 题)



(第 19 题)



(第 20 题)

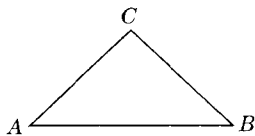
20. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 2\angle ABC$, 求证: $AB^2 = AC^2 + AC \cdot BC$.

综合创新

21. 如图, AB 是等腰直角三角形的斜边, 若点 M 在边 AC 上, 点 N 在边 BC 上, 沿直线 MN 将 $\triangle MCN$ 翻折, 使点 C 落在 AB 上, 设其落点为点 P .

(1) 当点 P 是边 AB 的中点时, 求证: $\frac{PA}{PB} =$

$$\frac{CM}{CN};$$



(2) 当点 P 不是边 AB 的中点时, $\frac{PA}{PB} = \frac{CM}{CN}$ 是否仍然成立? 请证明你的结论.

(2001 年北京市宣武区中考题)

21 相似三角形的性质

有人说,知识就是力量,对我来说,知识就是幸福,有了知识,你就可以区别真理与谬误,可以分清高尚与渺小.
——海伦·凯勒:《我的生活故事》

知识纵横

两个相似三角形的对应角相等,对应边成比例,对应边之比称为它们的相似比,可以想到这两个相似三角形中其他一些对应元素也与相似比有一定的关系.

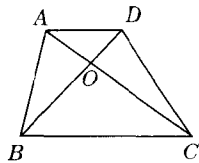
1. 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比;
2. 相似三角形周长之比等于相似比;
3. 相似三角形面积之比等于相似比的平方.

以上诸多相似三角形的性质,丰富了与角、面积等相关的知识方法,开阔了研究角、面积等问题的视野.

例题求解

【例1】如图,梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ ($AD < BC$), AC 、 BD 交于点 O , 若 $S_{\triangle OAB} = \frac{6}{25} S_{\text{梯形}ABCD}$, 则 $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 的周长之比是_____.
(2001 年浙江省绍兴市中考题)

思路点拨 只需求 $\frac{AD}{BC}$ 的值, 而题设条件与面积相关, 应求出 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}$ 的值, 注意图形中隐含的丰富的面积关系.



链接

相似三角形的性质及比例线段的性质, 在生产、生活中有广泛的应用.

人类第一次运用相似原理进行测量, 是 2000 多年前泰勒斯测金字塔的高度, 泰勒斯是古希腊著名学者, 有“科学之父”的美称, 他把逻辑论证引进了数学, 确保了数学命题的正确性, 使数学具有不可动摇的说明力.

【例2】如图,在 $\square ABCD$ 中, E 为 CD 上一点, $DE:CE=2:3$,连结 AE 、 BE 、 BD ,且 AE 、 BD 交于点 F ,则 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EBF}:S_{\triangle ABF}=(\quad)$.

A. 4:10:25

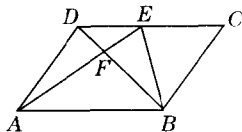
B. 4:9:25

C. 2:3:5

D. 2:5:25

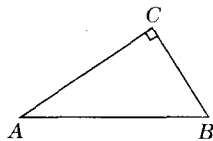
(2001年黑龙江省中考题)

思路点拨 运用与面积相关知识,把面积比转化为线段比.



【例3】如图,有一批形状大小相同的不锈钢片,呈直角三角形,已知 $\angle C=90^\circ$, $AB=5\text{ cm}$, $BC=3\text{ cm}$,试设计一种方案,用这批不锈钢片裁出面积达最大的正方形不锈钢片,并求出这种正方形不锈钢片的边长.

思路点拨 要在三角形内裁出面积最大的正方形,那么这正方形所有顶点应落在 $\triangle ABC$ 的边上,先画出不同方案,把每种方案中的正方形边长求出.

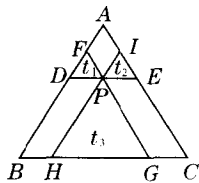


本例是一道有实际应用背景的开放性题型,通过分析、推理、构思可能的方案,再通过比较、鉴别、筛选出最佳的设计方案,问题虽简单,但基本呈现了现实的生产中产生最佳设计方案的基本思路.

【例4】如图,在 $\triangle ABC$ 的内部选取一点 P ,过 P 点作3条分别与 $\triangle ABC$ 的三边平行的直线,这样所得的3个三角形 t_1 、 t_2 、 t_3 的面积分别为4、9和49,求 $\triangle ABC$ 的面积.

(美国数学邀请赛试题)

思路点拨 图中有相似三角形、平行四边形,通过相似三角形性质建立面积关系式,关键是恰当选择相似比,注意等线段的代换,追求形式上的统一.



例4还隐含着下列重要结论:

(1) $\triangle FDP \sim \triangle IPE \sim \triangle PHG \sim \triangle ABC$;

(2) $\frac{DF}{AB} + \frac{IE}{AC} + \frac{HG}{BC} = 1$;

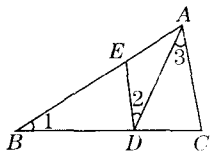
(3) $\frac{DE}{BC} + \frac{HI}{AB} + \frac{FG}{AC} = 2$.

【例5】如图, $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是边 BC 、 AB 上的点, 且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, 如果 $\triangle ABC$ 、 $\triangle EBD$ 、 $\triangle ADC$ 的周长依次是 m 、 m_1 、 m_2 , 证明:

$$\frac{m_1 + m_2}{m} \leq \frac{5}{4}.$$

(全国初中数学联赛试题)

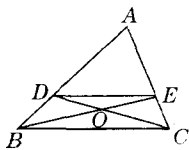
思路点拨 把周长的比用相应线段比表示, 力求统一, 得到同一线段比的代数式, 通过代数变形证明.



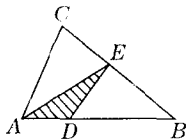
学力训练

基础夯实

1. 如图, 已知 $DE \parallel BC$, CD 和 BE 相交于 O , 若 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle COB} = 9 : 16$, 则 $AD : DB =$ _____.



(第1题)



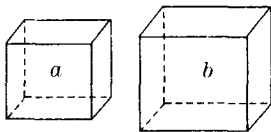
(第2题)

2. 如图, $\triangle ABC$ 中, $CE : EB = 1 : 2$, $DE \parallel AC$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 $\triangle ADE$ 的面积为 _____.
3. 若正方形的 4 个顶点分别在直角三角形的 3 条边上, 直角三角形的两直角边的长分别为 3 cm 和 5 cm, 则此正方形的边长为 _____.

(2000 年武汉市中考题)

4. 阅读下面的短文, 并解答下列问题:

我们把相似形的概念推广到空间: 如果两个几何体大小不一定相等, 但形状完全相同, 就把它们叫做相似体.



(第4题)

如图, 甲、乙是两个不同的正方体, 正方体都是相似体, 它们的一切对应线

段之比都等于相似比: $a : b$, 设 $S_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{乙}}$ 分别表示这两个正方体的表

面积, 则 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{6a^2}{6b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, 又设 $V_{\text{甲}}$ 、 $V_{\text{乙}}$ 分别表示这两个正方体的

体积, 则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$.

(1) 下列几何体中,一定属于相似体的是().

- A. 两个球体 B. 两个圆锥体
C. 两个圆柱体 D. 两个长方体

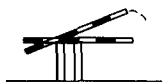
(2) 请归纳出相似体的 3 条主要性质:

- ① 相似体的一切对应线段(或弧)长的比等于____;
② 相似体表面积的比等于____;
③ 相似体体积的比等于_____.

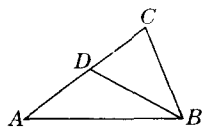
(2001 年江苏省泰州市中考题)

5. 如图,铁道口的栏杆短臂长 1m,长臂长 16m,当短臂端点下降 0.5m 时,长臂端点升高().

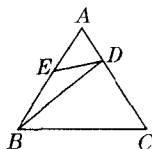
- A. 11.25m B. 6.6m C. 8m D. 10.5m



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 7 题)

6. 如图, D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点, $\angle DBC = \angle A$, 已知 $BC = \sqrt{2}$, $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比是 $2:3$, 则 CD 的长是().

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

7. 如图, 在正三角形 ABC 中, D 、 E 分别在 AC 、 AB 上, 且 $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $AE = BE$, 则有().

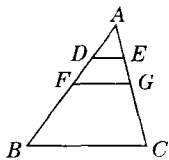
- A. $\triangle AED \sim \triangle BED$ B. $\triangle AED \sim \triangle CBD$
C. $\triangle AED \sim \triangle ABD$ D. $\triangle BAD \sim \triangle BCD$

(2001 年杭州市中考题)

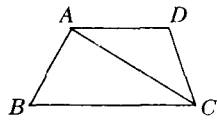
8. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel FG \parallel BC$, 且 $AD:FD:FB = 1:2:3$, 则 $S_{\triangle ADE}:S_{\text{四边形DFGE}}:S_{\text{四边形FBCE}}$ 等于().

- A. $1:9:36$ B. $1:4:9$ C. $1:8:27$ D. $1:8:36$

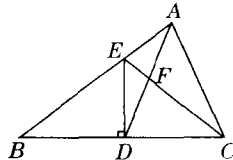
9. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ACD = \angle B$, 求证: $\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{BC}{AD}$.



(第 8 题)



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的中点, 且 $AD = AC$, $DE \perp BC$,

DE 与 AB 相交于点 E , EC 与 AD 相交于点 F .

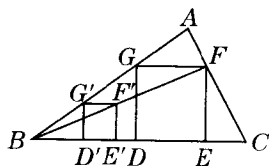
(1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle FCD$;

(2) 若 $S_{\triangle FCD} = 5$, $BC = 10$, 求 DE 的长. (2000 年河北省中考题)

11. 阅读并解答问题.

在给定的锐角 $\triangle ABC$ 中, 求作一个正方形 $DEFG$, 使 D, E 落在 BC 上, F, G 分别落在 AC, AB 边上, 作法如下:

第一步: 画一个有 3 个顶点落在 $\triangle ABC$ 两边上的正方形 $D'E'F'G'$.



第二步: 连结 BF' , 并延长交 AC 于点 F ;

第三步: 过 F 点作 $FE \perp BC$ 于 E ;

第四步: 过 F 点作 $FG \parallel BC$ 交 AB 于点 G ;

第五步: 过 G 点作 $GD \perp BC$ 于点 D .

四边形 $DEFG$ 即为所求作的四边形 $DEFG$, 为正方形,

问题: (1) 证明上述所求作的四边形 $DEFG$ 为正方形;

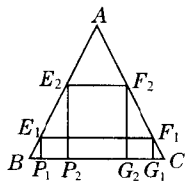
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $BC = 6 + \sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAC = 75^\circ$, 求上述正方形 $DEFG$ 的边长. (江苏省扬州市中考题)

能力拓展

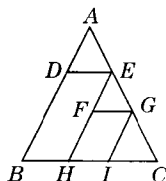
12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = \sqrt{5}$, $BC = 2$, 在 BC 上有 100 个不同的点 $P_1, P_2, P_3 \dots P_{100}$, 过这 100 个点分别作 $\triangle ABC$ 的内接矩形 $P_1E_1F_1G_1, P_2E_2F_2G_2 \dots P_{100}E_{100}F_{100}G_{100}$, 设每个内接矩形的周长分别为 $L_1, L_2 \dots L_{100}$, 则 $L_1 + L_2 + \dots + L_{100} =$ _____.

(安徽省竞赛题)

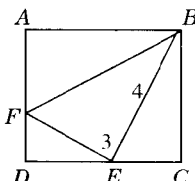
13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel FG \parallel BC$, $GI \parallel EF \parallel AB$, 若 $\triangle ADE, \triangle EFG, \triangle GIC$ 的面积分别为 $20 \text{ cm}^2, 45 \text{ cm}^2, 80 \text{ cm}^2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.



(第 12 题)



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, 一个边长为 3, 4, 5 厘米的直角三角形的一个顶点与正方形的顶点 B 重合, 另两个顶点分别在正方形的两条边 AD, DC 上, 那么这个正方形的面积是 _____ 厘米².

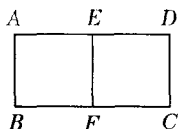
(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

15. 如图,将一个矩形纸片 $ABCD$ 沿 AD 和 BC 的中点连线对折,要使矩形 $AEFB$ 与原矩形相似,则原矩形的长与宽的比为().

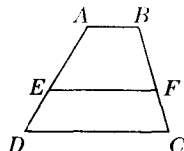
A. $2:1$ B. $\sqrt{3}:1$ C. $\sqrt{2}:1$ D. $1:1$

16. 如图,梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $CD = 3AB$, $EF \parallel CD$, EF 将梯形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分,则 $AE:ED$ 等于().

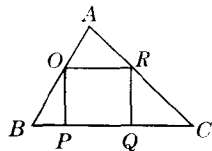
A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$



(第 15 题)



(第 16 题)

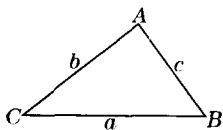


(第 17 题)

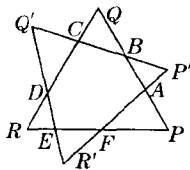
17. 如图,正方形 $OPQR$ 内接于 $\triangle ABC$, 已知 $\triangle AOR$ 、 $\triangle BOP$ 和 $\triangle CRQ$ 的面积分别是 $S_1 = 1$, $S_2 = 3$ 和 $S_3 = 1$, 那么正方形 $OPQR$ 的边长是().

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

18. 在一块锐角三角形的余料上,加工成正方形零件,使正方形的 4 个顶点都在三角形边上,若三角形的三边长分别为 a, b, c , 且 $a > b > c$, 问正方形的 2 个顶点放在哪条边上可使加工出来的正方形零件面积最大?



(第 18 题)



(第 19 题)

19. 如图, $\triangle PQR$ 和 $\triangle P'Q'R'$ 是两个全等的等边三角形, 它们的重叠部分是一个六边形 $ABCDEF$, 设这个六边形的边长为 $AB = a_1$, $BC = b_1$, $CD = a_2$, $DE = b_2$, $EF = a_3$, $FA = b_3$.

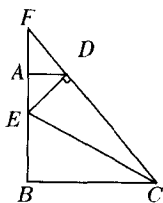
求证: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

综合创新

20. 如图, 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 设 $AB = a$, $AD = b$, $BC = 2b$, ($a > b$), 作 $DE \perp DC$, DE 交 AB 于点 E , 连结 EC .

(1) 试判断 $\triangle DCE$ 与 $\triangle ADE$ 、 $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 是否分别一定相似? 若相似, 请加以证明.

(2) 如果不一定相似, 请指出 a, b 满足什么关系时, 它们就能相似?



22 直角三角形的再发现

世界上最广阔的是海洋，
比海洋更广阔的是天空，比天
空更广阔的是人的心灵。

——雨果

知识纵横

直角三角形是一类特殊三角形，有着丰富的性质：两锐角互余、斜边的平方是两直角边的平方和、斜边中线等于斜边一半、 30° 所对的直角边等于斜边一半等，在学习了相似三角形的知识后，我们利用相似三角形法，能得到应用极为广泛的结论。

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ，则有

1. 同一三角形中三边的平方关系：

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, AC^2 = AD^2 + CD^2, BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

2. 角的相等关系：

$$\angle A = \angle BCD, \angle B = \angle ACD.$$

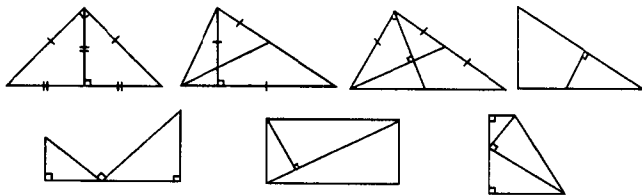
3. 线段的等积式：

$$\text{由面积得 } AC \cdot BC = AB \cdot CD;$$

由 $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$ ，得

$$CD^2 = AD \cdot BD, AC^2 = AD \cdot AB, BC^2 = BD \cdot AB.$$

以直角三角形为背景的几何问题，常以下列图形为载体，综合了全等三角形、相似三角形、等腰三角形，特殊四边形等丰富的知识。



例题求解

链接

直角三角形被斜边上的高分成的3个直角三角形相似，由此导出的等积式的特点是：一线段是两个三角形的公共边，另两条线段在同一直线上，这些等积式广泛应用于与直角三角形问题的计算与证明中。

【例1】 等腰三角形 ABC 的底边长为 8cm , 腰长 5cm , 一动点 P 在底边上从 B 向 C 以 0.25cm/秒 的速度移动, 当点 P 运动到 PA 与腰垂直的位置时, 点 P 运动的时间为 _____ 秒.

(江苏省常州市中考题)

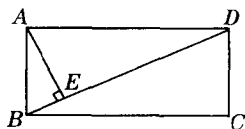
思路点拨 为求 BP 需作出底边上的高, 就得到与直角三角形相关的基本图形, 注意动态过程.

【例2】 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AE \perp BD$ 于 E , $S_{\text{矩形}ABCD} = 40\text{cm}^2$, $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle DBA} = 1:5$, 则 AE 的长为().

- A. 4cm B. 5cm C. 6cm D. 7cm

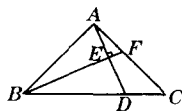
(青岛市中考题)

思路点拨 从题设条件及基本图形入手, 先建立 AB 、 AD 的等式.



【例3】 如图, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, F 为 AC 边的中点, $AD \perp BF$, 求证: $BD = 2CD$.

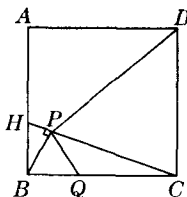
思路点拨 即要证 $\frac{BD}{CD} = 2$, 从构造“X”型相似三角形入手.



【例4】 如图, H 、 Q 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB 、 BC 上的点, 且 $BH = BQ$, 过 B 作 HC 的垂线, 垂足为 P . 求证: $DP \perp PQ$.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

思路点拨 因 $\angle BPQ + \angle QPC = 90^\circ$, 要证 $DP \perp PQ$, 即证 $\angle QPC + \angle DPC = 90^\circ$, 只需证 $\angle BPQ = \angle DPC$, 只要证明 $\triangle BPQ \sim \triangle CPD$ 即可.



题设条件有 midpoint, 图形中有与直角三角形相关的基本图形, 给我们以丰富的联想, 单独应用或组合应用可推出许多结论, 因此, 读者应不拘泥于给出的思路点拨, 多角度探索与思考, 寻找更多更好的解法, 以培养我们发散思维的能力.

【例5】 已知 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC$, CH 是 AB 边上的高, 且满足 $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AH}{BH}$, 试探讨 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的关系, 并加以证明.

(2001年武汉市选拔赛试题)

思路点拨 由题设条件易想到直角三角形中的基本图形、基本结论, 可猜想出 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的关系, 解题的关键是综合运用勾股定理、比例线段的性质, 推导判定两个三角形相似的条件.



构造逆命题是提出问题的一个常用方法, 本例是在直角三角形被斜边上的高分成的相似三角形得出结论基础上提出的一个逆命题, 读者你能提出新的问题吗? 并加以证明.

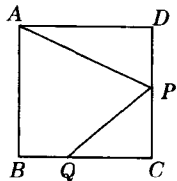
学力训练

基础夯实

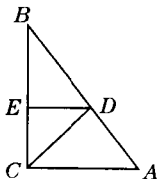
1. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长是1, P 是 CD 边的中点, 点 Q 在线段 BC 上, 当 $BQ = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 三角形 ADP 与三角形 QCP 相似.

(2000年云南省中考题)

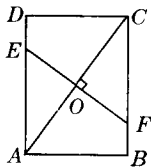
2. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 为斜边 AB 上的高, $DE \perp CB$ 于 E , 若 $BE = 6$, $CE = 4$, 则 $AD = \underline{\hspace{2cm}}$.



(第1题)



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 4$, 过 AC 的中点 O 作 $EF \perp AC$ 交 AD 于 E , 交 BC 于 F , 则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2000年重庆市竞赛题)

4. P 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 上异于 B 、 C 的一点, 过点 P 作直线截 $\triangle ABC$, 使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 满足这样条件的直线共有 ().

A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

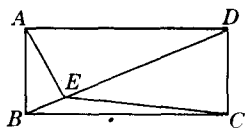
(2001年安徽省中考题)

5. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是高, 且 $AD^2 = BD \cdot CD$, 那么 $\angle BAC$ 的度数是 ().

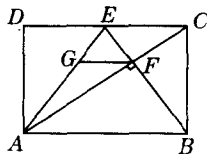
A. 小于 90° B. 等于 90° C. 大于 90° D. 不确定

6. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $AE \perp BD$ 于 E , 则 $EC =$ ().

- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

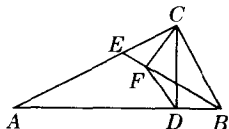


(第6题)

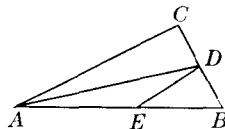


(第7题)

7. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 CD 的中点, $BE \perp AC$ 交 AC 于 F , 过 F 作 $FG \parallel AB$ 交 AE 于 G , 求证: $AG^2 = AF \cdot FC$.
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, E 是 AC 上一点, $CD \perp AB$ 于 D , $CF \perp BE$ 于 F , 求证: $DF \cdot AB = AE \cdot BF$.



(第8题)



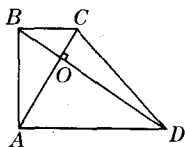
(第9题)

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线, 点 E 在 AB 上, $DE \parallel CA$, $CD = 12$, $BD = 15$, 求 AE 、 BE 的长.

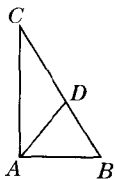
能力拓展

10. 如图, 直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AC \perp BD$, 已知 $\frac{BC}{AD} = k$, 则 $\frac{AC}{BD} =$ _____.

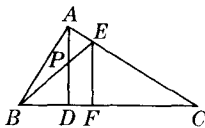
(第15届江苏省竞赛题)



(第10题)



(第11题)



(第12题)

11. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 两条直角边 AB 、 AC 的长分别为 1 厘米、2 厘米, 那么直角的角平分线的长度等于 _____ 厘米.
12. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, P 为 AD 的中点, BP 交 AC 于 E , $EF \perp BC$ 于 F , $AE = 3$, $EC = 12$, 则 $EF =$ _____.
13. 如图, $EFGH$ 是矩形 $ABCD$ 的内接矩形, 且 $EF:FG = 3:1$, $AB:BC =$ _____.

2:1, 则 $AH:AE =$ _____.

(上海市竞赛题)

14. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 下列结论:

- ① $CD \cdot AB = AC \cdot BC$; ② $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD}{BD}$;
③ $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{CD^2}$; ④ $AC + BC > CD + AB$.

其中正确的个数是().

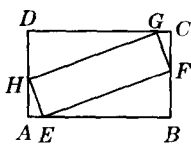
A. 4

B. 3

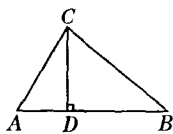
C. 2

D. 1

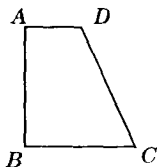
(江苏省竞赛题)



(第13题)



(第14题)



(第15题)

15. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB = 7$, $AD = 2$, $BC = 3$, 如果边 AB 上的点 P 使得以 P, A, D 为顶点的三角形和以 P, B, C 为顶点的三角形相似, 那么这样的点 P 有().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

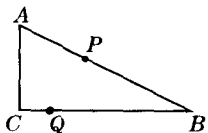
D. 4个

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$, 且 $a > b$, P, Q 分别是边 AB, BC 上的动点, 且点 P 不与点 A, B 重合, 点 Q 不与点 B, C 重合, 当 P 是 AB 的中点时, 若以点 C, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 这时的 Q 点能有几个? 分别求出相应的 CQ 长.

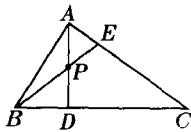
(2000年山东省中考题)

17. 如图, AD 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的高, P 是 AD 的中点, 连结 BP 并延长交 AC 于 E , 已知 $AC:AB = k$, 求 $AE:EC$ 的值.

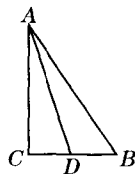
(山东省竞赛题)



(第16题)



(第17题)



(第18题)

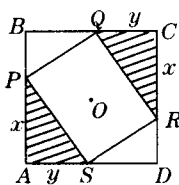
18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 边于 D , 求

证: $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{2BD}$.

(昆明市竞赛题)

综合创新

19. 如图, 已知边长为 a 的正方形 $ABCD$, 在 AB 、 AD 上分别取点 P 、 S , 连结 PS , 将 $\text{Rt}\triangle SAP$ 绕正方形中心 O 旋转 180° 得 $\text{Rt}\triangle QCR$, 从而得四边形 $PQRS$. 试判断四边形 $PQRS$ 能否变化成矩形? 若能, 设 $PA = x$, $SA = y$, 请说明 x 、 y 具有什么关系时, 四边形 $PQRS$ 是矩形; 若不能, 请说明理由.



(2001 年山东省济南市中考题)

23 代数证明

以青年纯洁之躬, 饮尝青春之甘美, 沐浴青春之恩泽, 永续青春之生涯, 至我为青春之我, 我之家庭为青春之家庭, 我之国家为青春之国家, 我之民族为青春之民族.

——李大钊:《青春》

知识纵横

代数证明主要是指证明代数中的一些相等关系或不等关系.

在初中阶段, 要证的等式一般可分为恒等式的证明和条件等式的证明.

恒等式的证明常用的方法有:

- (1) 由繁到简, 从一边推向另一边;
- (2) 从左右两边入手, 相向推进;

(3) 作差或作商证明, 即证明: 左边 - 右边 = 0, $\frac{\text{左边}}{\text{右边}} = 1$ (右边 $\neq 0$).

条件等式的证明实质是有根据、有目的的代数式恒等变换, 证明的关键是寻找条件与结论的联系, 既要注意已知条件的变换, 使之有利于应用; 又要考虑求证的需求情况, 使之有利于与已知条件的沟通.

代数证明不同于几何证明, 几何证明有直观的图形为依托, 而代数证明却取决于代数式化简求值变形技巧、方法和思想的熟练运用.

例题求解

【例 1】 求证: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)^2 = 4 + \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(ab + \frac{1}{ab}\right).$

思路点拨 等式两边都较复杂, 对左、右两边都作变形或作差比较.

链接

如果一个等式的字母在条件允许范围内的任意一个值, 使得等式总能成立, 那么这个等式叫做恒等式. 把一个式子变形为与原式恒等的另一种不同形式的式子, 这种变形叫做恒等变形, 形变值不变是恒等变形的特点.

代数式的化简求值、代数证明其实质都是作恒等变形, 分解、换元、引参、配方、分组、拆分、取倒等是恒等变形常用的技巧与方法.

【例2】 已知 $x + y = a + b$, 且 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, 求证: $x^{2001} + y^{2001} = a^{2001} + b^{2001}$.

(北京市竞赛题)

思路点拨 从完全平方公式入手, 推出 x, y 与 a, b 之间关系, 寻找证题的突破口.

【例3】 已知 $abcd = 1$, 求证:

$$\frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{b}{bcd + bc + b + 1} + \frac{c}{cda + cd + c + 1} + \frac{d}{dab + da + d + 1} = 1.$$

思路点拨 设法使4个分式中的分式的分子、分母相同, 为此, 需将待证式左边第二、三、四个分式的分子、分母分别同乘以恰当的数, 证题的关键是对条件的反复运用.

【例4】 已知 $ax^3 = by^3 = cz^3$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, 求证:

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

思路点拨 条件中有一个连等式, 恰当引入参数, 把待证式两边都变形为与参数相同的同一个代数式.

【例5】 设 a, b, c 是互不相等的实数, 求证:

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} > 0$$

(2000年太原市竞赛题)

思路点拨 通过计算, 努力把左边变形为直接的、显性的、大于零的代数式.



证明条件等式的关键是恰当地使用条件, 常见的方法有:

(1) 将已知条件直接代入求证式;

(2) 变换已知条件, 再代入求证式;

(3) 综合变形已知条件, 凑出求证式;

(4) 根据求证式的需求, 变换已知条件, 凑出结果等.

不等关系证明类似于等式的证明, 在证明过程中常用到如下知识:

(1) 若 $A - B > 0$, 则 $A > B$;

(2) 若 $A - B < 0$, 则 $A < B$;

(3) $a^2 + b^2 \geq 2ab$;

(4) $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

学力训练

基础夯实

1. 已知 $p = \frac{a-b}{a+b}$, $q = \frac{b-c}{b+c}$, $r = \frac{c-a}{c+a}$, 求证: $(1+p)(1+q)(1+r) = (1-p)(1-q)(1-r)$.
2. 已知 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. 求证: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. 已知: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{b+c}{2(b-c)} = \frac{c+a}{3(c-a)}$, 求证: $8a+9b+5c=0$.
4. 设 $\sqrt{39} - \sqrt{432}$ 的小数部分为 b , 求证: $\sqrt{39} - \sqrt{432} = 2b + \frac{1}{b}$.
5. 设 x, y, z 为有理数, 且 $(y-z)^2 + (x-y)^2 + (z-x)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2$, 求证: $\frac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} = 1$.
(重庆市竞赛题)

能力拓展

6. 已知 $14(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b + 3c)^2$, 求证: $a:b:c = 1:2:3$.
7. 已知 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 1$, 求证: x, y, z 中至少有一个为 1.
8. 设 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, 求证: $\frac{x^2+a^2}{x+a} + \frac{y^2+b^2}{y+b} = \frac{(x+y)^2 + (a+b)^2}{x+y+a+b}$.
9. 设 a, b, c 为两两不等的有理数. 求证:
 $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$ 为有理数.
10. 完成同一件工作, 甲单独做所需时间为乙、丙两人合做所需时间的 p 倍; 乙单独做所需时间为甲、丙两人合做所需时间的 q 倍; 丙单独做所需时间为甲、乙两人合做所需时间的 x 倍, 求证: $x = \frac{p+q+2}{pq-1}$.
(天津市竞赛题)
11. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

综合创新

12. 实数 x, y, z 满足等式 $x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz = \frac{1}{2}$, 证明:

x, y, z 中至少有一个恰等于 $\frac{1}{2}$.

(2000 年北京数学科普日“攻擂试题”)

13. 设 a, b, c 都是实数, 考虑如下 3 个命题:

① 若 $a^2 + ab + c > 0$, 且 $c > 1$, 则 $0 < b < 2$;

② 若 $c > 1$ 且 $0 < b < 2$, 则 $a^2 + ab + c > 0$;

③ 若 $0 < b < 2$, 且 $a^2 + ab + c > 0$, 则 $c > 1$.

试判断哪些命题是正确的, 哪些是不正确的, 对你认为正确的命题给出证明; 你认为不正确的命题, 用反例予以否定.

(2001 年武汉市选拔赛试题)

24 配方法的解题功能

音乐能激发或抚慰情怀,
绘画使人赏心悦目,诗歌能动
人心弦,哲学可以获得智慧,科
技可以改善生活,但数学却能
提供以上的一切.

——克莱因

知识纵横

把代数式通过凑配等手段,得到完全平方式,再运用完全平方式是
非负数这一性质达到增加问题的条件的目的,这种解题方法叫配方法.

配方法的作用在于改变代数式的原有结构,是求解变形的一种手
段;配方法的实质在于改变式子的非负性,是挖掘隐含条件的有力工
具,配方法在代数式的化简求值、解方程、解最值问题、讨论不等关系等
方面有广泛的应用.

运用配方法解题的关键是恰当地“配凑”,应具有整体把握题设条
件的能力,即善于将某项拆开又重新分配组合,得到完全平方式.

例题求解

【例 1】 已知实数 x, y 满足方程 $(x^2 + 2x + 3)(3y^2 + 2y + 1) = \frac{4}{3}$,
则 $x + y =$ _____.

(2001 年武汉市选拔赛题)

思路点拨 若将已知方程左边展开,则项数多而繁,注意到“ $x^2 + 2x$ ”暗示的信息: $x^2 + 2x + 3$ 可化为 $(x + 1)^2 + 2$,不妨从配方入手.

【例 2】 计算 $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$ 的值是().

A. 1 B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 5

(2000 年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 复合根式的化简,从内向外配方($\sqrt{a^2} = |a|$),或引入
参数,从整体上解决.

链接

运用配方法解题,
常常要用到以下等式:

$$(1) a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$

$$(2) a \pm 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2;$$

$$(3) a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2;$$

$$(4) a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2];$$

$$(5) a^2 \pm b^2 \geq 2ab;$$

$$(6) x + \frac{1}{x} \geq 2.$$



【例3】 怎样的整数 a, b, c 满足不等式: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$.

(匈牙利数学奥林匹克试题)

思路点拨 一个不等式涉及三个未知量,运用配方法试一试.

【例4】 求方程 $m^2 - 2mn + 14n^2 = 217$ 的自然数解.

(上海市竞赛题)

思路点拨 本例是一个复杂的不定方程,由等式左边的特点,不难想到配方法.

【例5】 求实数 x, y 的值,使得 $(y-1)^2 + (x+y-3)^2 + (2x+y-6)^2$ 达到最小值.

(2001年全国初中数学联赛试题)

思路点拨 展开整理成关于 x (或 y)的二次三项式,从配方的角度探求式子的最小值,并求出最小值存在时的 x, y 的值.

配方的对象具有多样性,数、字母、等式、不等式都可以配方;同一个式子可以有不同的配方结果,可以配一个平方式,也可以配多个平方式.

配方法的实质在于揭示式子的非负性,而非负数有以下重要性质:

(1) 若有限个非负数的和为零,则每一个非负数都为零;

(2) 非负数的最小值为零.

学 力 训 练

基础夯实

1. 计算 $\sqrt{7 - \sqrt{15}} - \sqrt{16 - 2\sqrt{15}}$ 所得结果是_____.

2. 设 $a^2 - b^2 = 1 + \sqrt{2}$, $b^2 - c^2 = 1 - \sqrt{2}$, 则 $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$ 的值等于_____.

(第11届“希望杯”邀请赛试题)

3. 设 $A = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 35$, 则 A 的最小值为_____.

4. 已知实数 x, y, z 满足 $x+y=5$, $z^2=xy+y-9$, 那么 $x+2y+3z=$ _____.
(“祖冲之杯”邀请赛试题)

5. 化简代数式 $\sqrt{6-\sqrt{35}} + \sqrt{6+\sqrt{35}}$ 的结果是().
 A. $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ B. $\sqrt{14}$ C. $2\sqrt{14}$ D. $\sqrt{7} - \sqrt{5}$
6. 已知方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$ 有实数解, 那么它有().
 A. 一组解 B. 二组解 C. 三组解 D. 无数组解
7. 方程 $\sqrt{x^2-2x+2} - 2\sqrt{x^2-2x+1} = 3$ 的所有解的和为().
 A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
8. 已知正整数 a, b, c 满足不等式 $a^2 + b^2 + c^2 + 42 < ab + 9b + 8c$, 求 a, b, c 的值.

(江苏省竞赛题)

9. 已知有理数满足 $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$, 求 $(x-yz)^3$ 的值.

(2001年北京市竞赛题)

能力拓展

10. 实数 x, y, z 满足 $\begin{cases} x=6-3y \\ x+3y-2xy+2z^2=0 \end{cases}$, 则 x^{2y+z} 的值为_____.
11. 已知 $(a^2+1)(b^2+1) = 3(2ab-1)$, 则 $b\left(\frac{1}{a}-a\right)$ 的值为_____.
12. x, y 为实数, 且 $x^2 + \frac{y^2}{2} + 4 \leq xy + 2y$, 则 x, y 的值为 $x =$ _____,
 $y =$ _____.
13. 已知 $M = 4x^2 - 12xy + 10y^2 + 4y + 9$, 那么当 $x =$ _____, $y =$ _____ 时, M 的值最小, M 的最小值为_____.
14. 已知 $a-b=4, ab+c^2+4=0$, 则 $a+b=($ _____ $).$
 A. 4 B. 0 C. 2 D. -2

(重庆市竞赛题)

15. 设 $a > b > 0, a^2 + b^2 = 3ab$, 则 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值为(_____ $).$
 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
16. 若 a, b, c, d 是乘积为 1 的 4 个正数, 则代数式 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$ 的最小值为(_____ $).$
 A. 0 B. 4 C. 8 D. 10

(江苏省竞赛题)

17. 已知 $x + y + z = 1$, 求证: $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

(苏奥尔德莱尼基市竞赛题)

18. 已知 $a > b$, 且 $(a + b) + (a + ab - 1) + \frac{a}{b} = 243$, a, b 为自然数, 求 a, b 的值.

综合创新

19. 已知 x, y, z 满足方程组 $\begin{cases} x + 2y - z = 21, \\ x - y + 2z = 12. \end{cases}$ 当 x, y, z 为何值时, 分式 $\frac{186}{x^2 + y^2 + z^2}$ 有最大值? 并求出这个最大值.

20. 一幢 33 层的大楼有一部电梯停在第一层, 它一次最多能容纳 32 人, 而且只能在第 2 层至第 33 层中的某一层停一次, 对于每个人来说, 他往下走一层楼梯感到 1 分不满意, 往上走一层楼梯感到 3 分不满意, 现在有 32 个人在第一层, 并且他们分别住在第 2 至第 33 层的每一层, 问: 电梯停在哪一层, 可以使得这 32 个人不满意的总分达到最小? 最小值是多少? (有些人可以不乘电梯而直接从楼梯上楼)

(2000 年全国初中数学联赛试题)

25 整体方法

做物理就像作一幅大的画,你要有本领把局部结构画得很精细,但是还要能总体把握,这两点都要能做到才行.

——杨振宁

知识纵横

我们知道成语“一叶障目”和“只见树木,不见森林”,它们的意思是说,如果过分关注细节,而忽视全局,我们就不会真正理解一个问题.

解数学题也是这样,在加强对局部的研究与分析的基础上,从整体上把握问题.所谓整体方法就是从问题的整体性质出发,突出对问题的整体结构的分析和改造,发现问题的整体结构特征,善于用“集成”的眼光,把某些式子或图形看成一个整体,把握它们之间的关联,进行有目的、有意识的整体处理.

整体方法在代数式的化简与求值、解方程(组)、几何解证等方面有广泛的应用,整体代入、叠加叠乘处理、设而不求、几何中的补形等都是整体方法在解数学问题中的具体运用.

例题求解

【例1】 若 x, y, z 满足 $3x + 7y + z = 1$ 和 $4x + 10y + z = 2001$, 则分式 $\frac{2000x + 2000y + 2000z}{x + 3y}$ 的值为_____.

(2000年安庆市竞赛题)

思路点拨 原式 $= \frac{2000(x + y + z)}{x + 3y}$, 视 $x + 3y$ 与 $x + y + z$ 为两个整体, 对方程组进行整体改造.

【例2】 若 $\triangle ABC$ 的三边长是 a, b, c 且满足 $a^4 = b^4 + c^4 - b^2c^2, b^4 = c^4 + a^4 - a^2c^2, c^4 = a^4 + b^4 - a^2b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是().

- A. 钝角三角形 B. 直角三角形
C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形

(第12届“希望杯”邀请赛试题)



在战争中,不计一城一池的得失;在围棋对弈中,“丢卒保车”、“宇宙流”等招数与布局,都是整体方法的娴熟运用.

20世纪中叶以来,以系统论、信息论、控制论为代表的现代系统科学在世界范围内兴起,其核心是把客观对象作为有机整体的系统来认识与处理.

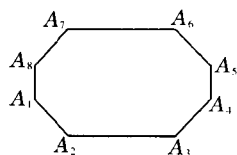
思路点拨 三个等式结构一样,孤立地从一个等式入手,都导不出 a 、 b 、 c 的关系,不妨从整体叠加入手.

【例 3】 已知 $x = \frac{1 + \sqrt{1994}}{2}$, 求多项式 $(4x^3 - 1997x - 1994)^{2002}$ 的值.

思路点拨 直接代入计算繁难,由已知条件得 $2x - 1 = \sqrt{1994}$,两边平方有理化,可得到零值多项式,整体代入求值.

【例 4】 如图,凸八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 中, $\angle A_1 = \angle A_5$, $\angle A_2 = \angle A_6$, $\angle A_3 = \angle A_7$, $\angle A_4 = \angle A_8$, 试证明:该凸八边形内任意一点到 8 条边的距离之和是一个定值. (山东省竞赛题)

思路点拨 将八边形问题转化为熟悉的图形来解决,想象完整四边形截去 4 个角就得到八边形,就可知向外作辅助线,关键是证明对边平行.



【例 5】 已知 4×4 的数表,如果把它的任一行或一列中的所有数同时变号,称为一次变换,试问能否经过有限次变换,使表中的数全变为正数?

-1	2	-3	-4
5	6	-7	-8
9	-10	-11	12
13	-14	15	-16

思路点拨 若按要求去实验,则实验次数不能穷尽,每次变换只改变表中一行(或一列)中 4 个数的符号,但并不改变这 4 个数乘积的符号,这是解本例的关键.



链接

由“残部”想“整体”,修残补缺,向外补形,恢复原形,将其拓展为范围更广的、其特征更为明显、更为熟悉的几何图形,这是解复杂几何问题的常用技巧.

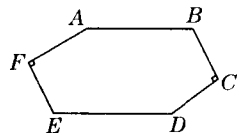
从整体上考察问题的数量性质、表现形式是对整体上不变性质、不变量的特性的把握.

学力训练

基础夯实

1. 已知 $x = \sqrt{3} - 1$, 那么 $\frac{3 - 2x^2 - 4x}{x^2 + 2x - 1} =$ _____.
2. 已知 $\frac{x^2}{x^2 - 2} = \frac{1}{1 - \sqrt{3} - \sqrt{2}}$, 那么 $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) \div \left(\frac{x}{x^2 - 1} + x\right) =$ _____.
(2001 年武汉市中考题)
3. 若 x, y, z 满足条件 $\frac{xy}{x+y} = 1, \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{2}, \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{5}$, 则 $xyz =$ _____.

4. 如图, 六边形 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel DE$ 且 $AB = DE, BC \parallel EF$ 且 $BC = EF, AF \parallel CD$ 且 $AF = CD, \angle ABC = \angle DEF = 120^\circ, \angle AFE = \angle BCD = 90^\circ, AB = 2, BC = 1, CD = \sqrt{3}$, 则该六边形 $ABCDEF$ 的面积是 _____.



5. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}, b = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 则 $\sqrt{a^2 + b^2 + 7}$ 的值为 ().
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
6. 买 20 支铅笔、3 块橡皮、2 本日记本需 32 元; 买 39 支铅笔、5 块橡皮、3 本日记本需 58 元; 则买 5 支铅笔、5 块橡皮、5 本日记本需 ().
A. 20 元 B. 25 元 C. 30 元 D. 35 元
(第 15 届江苏省竞赛题)

7. 已知 $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, 求多项式 $4x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 27x - 4$ 的值.
8. 在 $\triangle ABC$ 内有 1000 个点, 它们与 A, B, C 一起共 1003 个点中没有三点共线, 以这 1003 个点为顶点, 将 $\triangle ABC$ 割分为小三角形, 问共有多少个小三角形?

能力拓展

9. 设 $a^2 - b^2 = 1 + \sqrt{2}, b^2 - c^2 = 1 - \sqrt{2}$, 则 $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$ 的值 = _____.
(“希望杯”邀请赛试题)
10. 若 $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}, y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, 则 $x^6 + y^6$ 的值是 _____.

11. 正数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 同时满足 $\frac{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}{x_1} = 1, \frac{x_1 x_3 x_4 x_5 x_6}{x_2} = 2,$
 $\frac{x_1 x_2 x_4 x_5 x_6}{x_3} = 3, \frac{x_1 x_2 x_3 x_5 x_6}{x_4} = 4, \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6}{x_5} = 6, \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{x_6} = 9,$ 则
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ 的值为_____.

(上海市竞赛题)

12. 已知 $a^2 + b^2 = 6ab$, 且 $a > b > 0$, 则 $\frac{a+b}{a-b} =$ _____.

(2001 年北京市竞赛题)

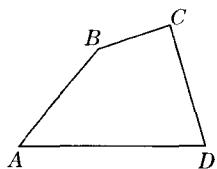
13. 已知实数 x, y 满足 $xy + x + y = 9, x^2 y + xy^2 = 20$, 则 $x^2 + y^2$ 的值为
 ().

A. 6 B. 17 C. 1 D. 6 或 17

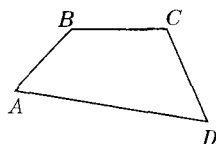
14. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4 - \sqrt{2}, BC = 1, CD = 3, \angle B = 135^\circ,$
 $\angle C = 90^\circ$, 则 $\angle D$ 等于().

A. 60° B. 67.5° C. 75° D. 无法确定

(2000 年重庆市竞赛题)



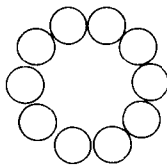
(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 135^\circ, \angle BCD = 120^\circ, AB = \sqrt{6}, BC = 5 - \sqrt{3}, CD = 6$, 求 AD 的长.

16. 如图, 将 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 这 10 个数分别填入图中的 10 个圆圈内, 使任意连续相邻的 5 个圆圈内的数的和均不大于某一个整数 M , 求 M 的最小值并完成你的填图.



综合创新

17. 求系数 a, b, c 间的关系式, 使方程组 $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \end{cases}$ 有实数解.

(第 15 届全俄中学生数学竞赛题)

26 面积问题评说

科学的探讨和研究,其本身就含有至美,其本身给人的愉快就是酬报;所以我在我的工作里面寻得了快乐.

——居里夫人

知识纵横

平面几何学的产生起源于人们对土地面积(area)的测量,面积是平面几何中一个重要的概念,联系着几何图形中的重要元素边与角.

计算图形的面积是几何问题中一种常见问题,求面积的基本方法有:

1. 直接法

根据面积公式和性质直接进行运算.

2. 割补法

通过分割或补形,把不规则图形或不易求解的问题转化为规则图形或易于求解的问题.

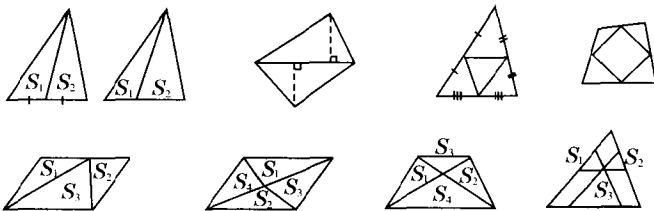
3. 等积法

根据面积的等积性质进行转化求解,常见的有同底等高、同高等底和全等的等积转化.

4. 等比法

将面积比转化为对应线段的比.

熟悉以下基本图形中常见的面积关系:



例题求解

【例1】在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AC 、 BD 相交于点 O , 若 $AC =$



等积定理:

等底等高的两个三角形面积相等.

等比定理:

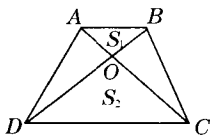
(1) 同底(或等高)的两个三角形面积之比等于对应高之比;同高(或等高)的两个三角形面积之比等于对应底之比.

(2) 相似三角形面积之比等于对应线段的平方比.

5, $BD = 12$, 中位线长为 $\frac{13}{2}$, $\triangle AOB$ 的面积为 S_1 , $\triangle COD$ 的面积为 S_2 , 则 $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} =$ _____.

(2000 年山东省竞赛题)

思路点拨 本例综合了梯形、面积等丰富的知识, 图形中有重要面积的关系: $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = \sqrt{S_1 S_2}$, $S_{\text{梯形}ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ (读者证明), 于是将问题转化为求梯形 $ABCD$ 的面积.

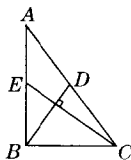


【例 2】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 BD 和 CE 分别是两边上的中线, 并且 $BD \perp CE$, $BD = 4$, $CE = 6$, 那么 $\triangle ABC$ 的面积等于().

- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

(全国初中数学联赛试题)

思路点拨 由中点想到三角形中位线, 这样 $\triangle ABC$ 与四边形 $BCDE$ 面积存在一定的关系, 只要求出四边形 $BCDE$ 面积即可.

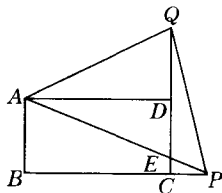


我们知道, 菱形的面积是对角线乘积的一半, 若一个四边形只满足对角线互相垂直, 则它的对角线与面积有怎样的关系?

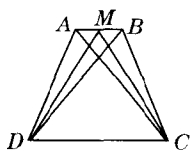
【例 3】 如图, P 、 Q 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 延长线上的两点, AP 与 CQ 相交于点 E , 且 $\angle PAD = \angle QAD$, 求证: $S_{\text{矩形}ABCD} = S_{\triangle APQ}$.

(重庆市竞赛题)

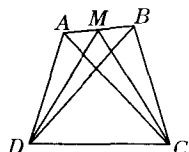
思路点拨 把面积用相应的线段表示, 面积的证明问题就转化为线段的等积式的证明. 注意等线段的代换.



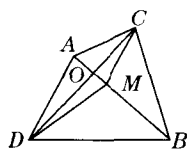
【例4】 如图甲, AB 、 CD 是两条线段, M 是 AB 的中点, $S_{\triangle DMC}$ 、 $S_{\triangle DAC}$ 、 $S_{\triangle DBC}$ 分别表示 $\triangle DMC$ 、 $\triangle DAC$ 、 $\triangle DBC$ 的面积, 当 $AB \parallel CD$ 时, 有 $S_{\triangle DMC} = \frac{S_{\triangle DAC} + S_{\triangle DBC}}{2}$. ①



图甲



图乙



图丙

(1) 如图乙, 若图甲中 $AB \nparallel CD$, ①式是否成立? 请说明理由.

(2) 如图丙, 若图甲中 AB 与 CD 相交于点 O 时, 问 $S_{\triangle DMC}$ 与 $S_{\triangle DAC}$ 和 $S_{\triangle DBC}$ 有何种相等关系? 试证明你的结论.

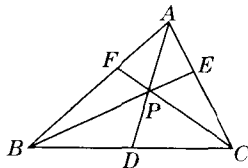
(2001 年安徽省中考题)

思路点拨 对于(1), 因 $\triangle DMC$ 、 $\triangle DAC$ 、 $\triangle DBC$ 同底, 要判断①式是否成立, 只需寻找它们的高之间的关系; 对于(2), 由于 M 为 AB 中点, 可利用等积变换得到相等的面积关系, 通过建立含 $S_{\triangle DMC}$ 、 $S_{\triangle DBC}$ 、 $S_{\triangle DAC}$ 的等式寻找它们的关系.

【例5】 如图, 设 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点, 直线 AP 、 BP 、 CP 交 BC 、 CA 、 AB 于点 D 、 E 、 F .

求证: (1) $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$; (2) $\frac{PA}{AD} + \frac{PB}{BE} + \frac{PC}{CF} = 2$.

思路点拨 过 P 点、 A 点分别作 BC 的垂线, 这样既可得到平行线, 产生比例线段, 又可与面积联系起来, 把 $\frac{PA}{AD}$ 转化为面积比, 利用面积法证明.



链接

本例综合了三角形、梯形中位线、等积变形等知识, 要求我们在动态型数学情景下进行观察、分析、探索、猜想和论证.

通过强化或弱化条件, 改变图形的位置等方式进一步探究问题是发展几何问题的重要途径.

有些几何问题, 虽然题目中没有直接涉及面积, 但由于面积关联着边角两个重要元素, 所以我们可以从面积角度思考问题, 这就是常说的面积法.

用面积法解题的基本步骤是:

(1) 用不同方法或从不同角度计算某一图形面积, 得到一个含边或含角的关系式.

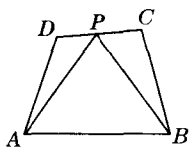
(2) 化简这个面积关系式, 直至得到求解或求证的结果.

当问题涉及三角形的高、垂线或角平分线时, 不妨用面积法试一试.

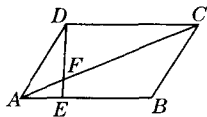
学力训练

基础夯实

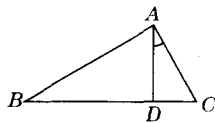
- 如图, P 是四边形 $ABCD$ 的 DC 边上的一个动点, 当四边形满足条件_____时, $\triangle PBA$ 的面积始终保持不变. (只需填上你认为正确的一种条件即可). (2001 年福建省宁德市中考题)
- 如图, $\square ABCD$ 中, $AE:BE = 1:2$, $S_{\triangle AEF} = 6 \text{ cm}^2$, 则 $S_{\triangle CDF}$ 的值_____ cm^2 .



(第1题)

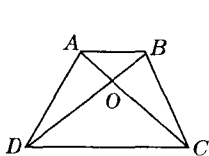


(第2题)

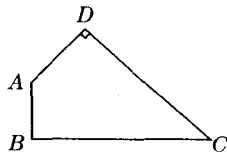


(第3题)

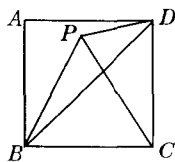
- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle CAD$, $\frac{BD}{AC} = \frac{3}{2}$, 则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CAD}} =$ _____. (2000 年重庆市竞赛题)
- 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$), 对角线 AC 与 BD 相交于 O , $\triangle BOC$ 的面积为梯形 $ABCD$ 的面积的 $\frac{2}{9}$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.
- 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 135^\circ$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AD = 2$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为().
A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 4 D. 6
(2001 年湖北省荆州市中考题)



(第4题)



(第5题)

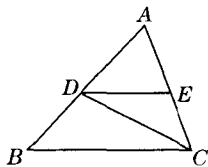


(第6题)

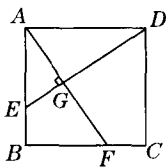
- 如图, $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $\triangle BPC$ 是等边三角形, 则 $\triangle BPD$ 的面积为().
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{2\sqrt{3}-1}{8}$
(2001 年武汉市选拔赛题)

7. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, D 、 E 分别交 AB 、 AC 于 D 、 E ,若 $S_{\triangle ADE} = 2S_{\triangle DCE}$,则 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$ 等于().

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{9}$



(第7题)

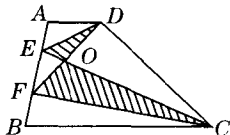


(第8题)

8. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E 在 AB 边上,且 $AE:EB = 2:1$, $AF \perp DE$ 于 G ,交 BC 于 F ,则 $\triangle AEG$ 的面积与四边形 $BEGF$ 的面积比为().
- A. 1:2 B. 1:4 C. 4:9 D. 2:3
9. 今有一块正方形土地,要在其上修筑两条笔直的道路,使道路将这块土地分成形状相同且面积相等的4部分.若道路的宽度可忽略不计,请设计4种不同的修筑方案.

(2000年山东省竞赛题)

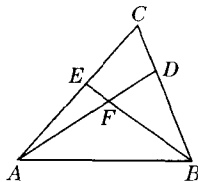
10. 如图,已知梯形 $ABCD$ 的面积为 34 cm^2 , $AE = BF$, CE 与 DF 相交于 O , $\triangle OCD$ 的面积为 11 cm^2 ,求蝶形(阴影部分)的面积.



11. 已知等腰 $\triangle ABC$ 底边上的高为 AH ,从一条边上的一点 P 向另两条边作垂线 PD 、 PE ,若 $AH = PD + PE$,求证: $\triangle ABC$ 为等边三角形.

能力拓展

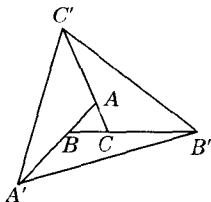
12. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 与 BE 相交于 F ,已知 $S_{\triangle AFB} = 12 \text{ cm}^2$, $S_{\triangle BFD} = 9 \text{ cm}^2$, $S_{\triangle AEF} = 6 \text{ cm}^2$,那么四边形 $CDFE$ 的面积为_____ cm^2 .



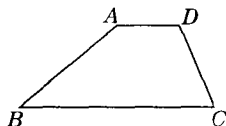
(2000年我爱数学夏令营竞赛题)

13. 如图,分别延长 $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 至 A' 、 B' 、 C' ,使得 $AA' = 3AB$, $BB' = 3BC$, $CC' = 3AC$,若 $S_{\triangle ABC} = 1$,则 $S_{\triangle A'B'C'}$ = _____.
14. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B$ 与 $\angle C$ 互余, $AD = 5$, $BC = 13$, $\angle C = 60^\circ$,则该四边形的面积为_____.

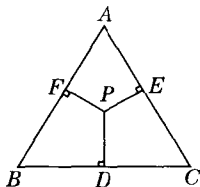
(2001 年湖北省荆州市中考题)



(第 13 题)



(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图,从等边三角形内一点向三边作垂线,已知这三条垂线段的长分别为 1,3,5,则这个等边三角形的边长为_____.

(全国初中数学联赛试题)

16. 如图,矩形 $ABCD$ 中, E 是 BC 上的点, F 是 CD 上的点,已知 $S_{\triangle ABE}$

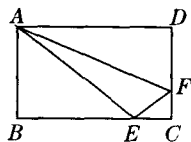
$$= S_{\triangle ADF} = \frac{1}{3} S_{ABCD}, \text{ 则 } \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CEF}} \text{ 的值等于 ()}.$$

A. 2

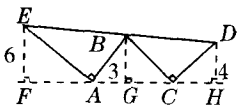
B. 3

C. 4

D. 5



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图, $AE \perp AB$ 且 $AE = AB$, $BC \perp CD$ 且 $BC = CD$,请按照图中所标注的数据,计算图中实线所围成的图形的面积 S 是().

A. 50

B. 62

C. 65

D. 68

(2000 年山东省竞赛题)

18. $\triangle ABC$ 的周长是 24, M 是 AB 的中点, $MC = MA = 5$,则 $\triangle ABC$ 的面积是().

A. 12

B. 16

C. 24

D. 30

19. 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 的乘积等于菱形的一条边长的平方,则菱形的一个钝角的大小是().

A. 165°

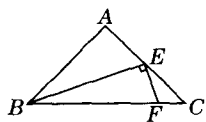
B. 135°

C. 150°

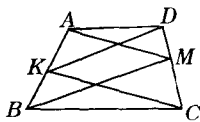
D. 120°

(“希望杯”邀请赛试题)

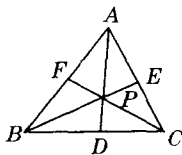
20. 如图,在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $\angle A = 90^\circ$,点 E 为腰 AC 的中点,点 F 在底边 BC 上,且 $EF \perp BE$,求 $\triangle CEF$ 的面积.



(第 20 题)



(第 21 题)

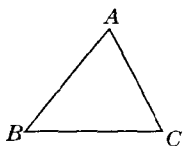


(第 22 题)

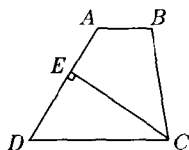
21. 如图, 设凸四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 、 CD 的中点分别为 K 、 M , 求证: $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle DCK}$.
22. 如图, 已知 D 、 E 、 F 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 上的点, 且 AD 、 BE 、 CF 相交于 P 点, $AP = BP = CP = 6$, 设 $PD = x$, $PE = y$, $PF = z$, 若 $xy + yz + zx = 28$, 求 xyz 的值.

综合创新

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中是否存在一点 P , 使得过 P 点的任意一直线都将 $\triangle ABC$ 分成等积的两部分? 为什么?



(第 23 题)



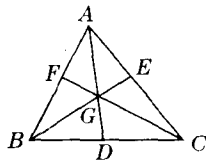
(第 24 题)

24. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, CE 是 $\angle BCD$ 的平分线, 且 $CE \perp AD$ 于 E , $DE = 2AE$, CE 把梯形分为两部分, 其中一部分的面积为 1, 在此条件下, 梯形 $ABCD$ 的面积是否可求? 如果可求, 请求出梯形 $ABCD$ 的面积; 如果不可求, 请增加适当的条件, 并求出梯形的面积.



链接

如图, 设 G (也称重心) 为 $\triangle ABC$ 三条中线 AD 、 BE 、 CF 的交点, 则 $\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2$, 请读者证明.



27 折与剪的启示

无限的未来世界,只有在过去的崇楼顶上,才能看得清楚;无限的过去的崇楼,只有老成练达、踏实奋进的健足才能登得上去。

——李大钊

知识纵横

一页普通的纸,童年时我们用稚气的双手把它折成有趣的动物,民间艺人可以把它剪成美丽的图案.折纸与剪纸是最富于自然情趣而又形象生动的实验,是丰富想象力与心灵手巧的结合.

对图形进行折叠与剪拼,是学习几何不可或缺的重要一环,通过折叠与剪拼图形,我们可以发现一些几何结论并知晓这些结论是怎样被证明的.

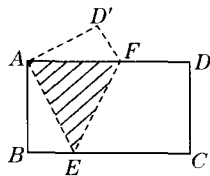
把图形或部分沿某直线翻折叫图形的折叠,对图形通过有限次的剪裁再重新拼接成新的图形叫图形的剪拼.

解与图形折叠或剪拼相关的问题,利用不变量解题是关键,在折叠过程中,线段的长度、角的度数保持不变;在剪拼过程中,新图形与原图形的面积一般保持不变.

例题求解

【例1】如图,矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$,现将 A 、 C 重合,使纸片折叠压平,设折叠为 EF ,则重叠部分 $\triangle AEF$ 的面积为_____.

思路点拨 只需求出 AF 长,设 $AF = x$,由折叠的性质可挖掘隐含线段的长,关键是建立 x 的方程.



链接

图形折叠与剪拼问题可考查我们的动手操作能力和分析推理能力,解题时,需要把计算、推理与合情想象结合起来.

折叠问题可从对称观点认识:

- (1) 折痕两边是全等的;
- (2) 对应点连线被折痕垂直平分.

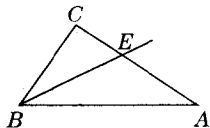
解折叠问题常用到勾股定理、相似形、方程思想等知识与方法.

【例2】 如图,把直角三角形纸片沿过顶点 B 的直线 BE (BE 交 CA 于 E) 折叠,直角顶点 C 落在斜边 AB 上,如果折叠后得到等腰三角形 EBA ,那么下列结论中:(1) $\angle A = 30^\circ$; (2) 点 C 与 AB 的中点重合; (3) 点 E 到 AB 边的距离等于 CE 的长,正确的个数是().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

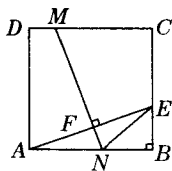
(2001 年山东省中考题)

思路点拨 运用全等三角形、等腰三角形性质推理判断.



【例3】 如图, $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, E 是 BC 上一点,且 $BE = \frac{1}{2}EC$,将正方形折叠,使点 A 与点 E 重合,折痕为 MN ,求 $\triangle ANE$ 的面积.

思路点拨 从相似三角形入手,求出 AN 长,问题可解.



【例4】 如果有两边长分别为 1, a (其中 $a > 1$) 的一块矩形绸布,要将它剪裁出 3 面矩形彩旗(面料没有剩余),使每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同,画出两种不同裁剪方法的示意图,并写出相应 a 的值(不写计算过程).

(2001 年北京市海淀区中考题)

思路点拨 a 的取值确定矩形的形状,直接决定裁剪的结果,而裁剪所得的 3 个矩形有多种关系(全等,只有两个全等,均两两不全等),为我们的探索留下了巨大的空间.

【例5】用10个边长分别为3,5,6,11,17,19,22,23,24,25的正方形,可以拼接成一个矩形.

(1) 求这个矩形的长和宽;

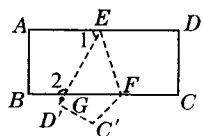
(2) 请画出拼接图.

思路点拨 利用拼接前后图形面积不变求矩形的长和宽;运用矩形对边相等这一性质画拼接图.

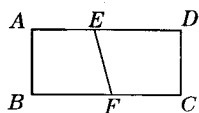
学 力 训 练

基础夯实

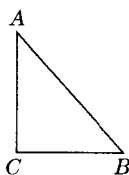
- 如图,把一张长方形 $ABCD$ 的纸片,沿 EF 折叠后, ED 与 BC 的交点为 G ,当 D 、 C 分别落在 D' 、 C' 的位置上,若 $\angle EFG = 55^\circ$,则 $\angle 1 =$ _____, $\angle 2 =$ _____.
- 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm,若将矩形折叠,使 B 点与 D 点重合,则折痕 EF 的长为 _____ cm.



(第1题)

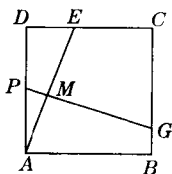


(第2题)

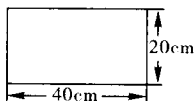


(第3题)

- 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, E 是斜边 AB 上的一点,把 $\triangle ABC$ 沿 CE 折叠,点 A 恰好与点 B 重合,如果 $AC = 4$ cm,那么 $AB =$ _____ cm.
- 如图,将一块长为12的正方形纸片 $ABCD$ 的顶点 A 折至 DC 边上的点 E ,使 $DE = 5$,折痕为 PQ ,则线段 $PM =$ _____.



(第4题)



(第5题)

5. 要从一张长为 40 cm、宽为 20 cm 的矩形纸片中, 剪出长为 18 cm、宽为 12 cm 的矩形纸片, 则最多能剪出().

A. 1 张 B. 2 张 C. 3 张 D. 4 张

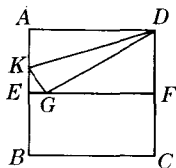
(2001 年江西省中考题)

6. 如图, EF 为正方形 $ABCD$ 的对折线, 将 $\angle A$ 沿 DK 折叠使它的顶点 A 落在 EF 上的 G 点, 则 $\angle DKG$ 为().

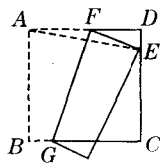
A. 15° B. 30° C. 55° D. 75°

7. 如图, 将边长为 12 厘米的正方形 $ABCD$ 折叠, 使得 A 点落在边 CD 上的 E 点, 然后压平得折痕 FG , 若 FG 的长为 13 厘米, 求线段 CE 的长.

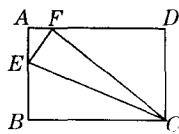
(2001 年北京市竞赛题)



(第 6 题)



(第 7 题)



(第 8 题)

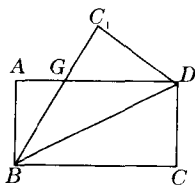
8. 如图, $ABCD$ 是矩形纸片, E 是 AB 上一点, 且 $BE:EA = 5:3$, $EC = 15\sqrt{5}$, 把 $\triangle BCE$ 沿折痕 EC 向上翻折, 若点 B 恰好落在 AD 边上, 设这个点为 F , 求 AB 、 BC 的长.

能力拓展

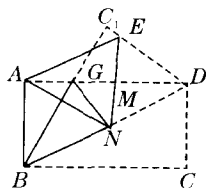
9. 现有一张长 5 cm、宽 1 cm 的矩形纸片, 请你将它分成 5 块, 再拼合成一个正方形(画图表示).



10. 一张宽为 3, 长为 4 的矩形纸片 $ABCD$, 先沿对角线 BD 对折, 点 C 落在 C_1 的位置, 如图甲, BC_1 交 AD 于 G , 再折叠一次, 使点 D 与点 A 重合, 得折痕 EN (图乙), EN 交 AD 于点 M , 则 ME 的长为 _____.



图甲



图乙



先求出裁剪后的图形所需关键线段的长度, 再从裁剪前的图形中寻找这些长度进行裁剪, 这是解裁剪问题的基本思路.

11. 要剪切如图 1(尺寸单位 mm)所示的两种直角梯形零件,且使两种零件的数量相等.有两种面积相等的矩形铝板,第一种长 500 mm,宽 300 mm(如图 2);第二种长 600 mm,宽 250 mm(如图 3);可供选用.

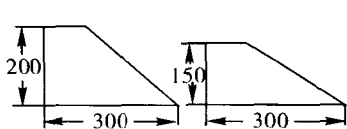


图 1

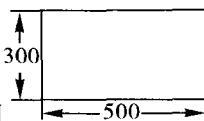


图 2

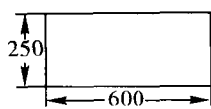
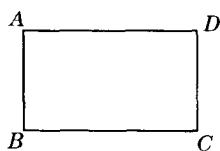
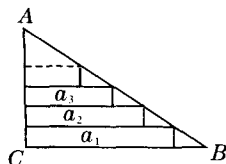


图 3

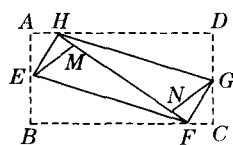
- (1) 填空:为了充分利用材料,应选用第_____种铝板,这时一块铝板最多能剪甲、乙两种零件共_____个,剪出这些零件后,剩余的边角料的面积是_____ mm^2 .
- (2) 画图,从图 2 或图 3 中选出你要用的铝板示意图,在上面画出剪切线,并把边角余料用阴影表示出来.
12. 如图,矩形纸片 $ABCD$ 的长 $AD = 9 \text{ cm}$,宽 $AB = 3 \text{ cm}$,将其折叠,使点 D 与点 B 重合,那么折叠后 DE 的长和折痕 EF 的长分别为().
- A. $4 \text{ cm}, \sqrt{10} \text{ cm}$ B. $5 \text{ cm}, \sqrt{10} \text{ cm}$ C. $4 \text{ cm}, 2\sqrt{3} \text{ cm}$ D. $5 \text{ cm}, 2\sqrt{3} \text{ cm}$
13. 某班在布置新年联欢会会场时,需要将直角三角形彩纸裁成长度不等的矩形彩条,如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 30 \text{ cm}$, $AB = 50 \text{ cm}$,依次裁下宽为 1 cm 的矩形纸条 a_1, a_2, a_3, \dots ,若使裁得的矩形纸条的长都不小于 5 cm ,则每张直角三角形彩纸能裁成的矩形纸条的总数是(). (2001 年山东省济南市中考题)
- A. 24 B. 25 C. 26 D. 27



(第 12 题)



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图,将矩形 $ABCD$ 的 4 个角向内折起,恰好拼成一个既无缝隙又无重叠的四边形 $EFGH$,已知 $EH = 3$, $EF = 4$,求 $AD:AB$ 的值.
- (第 12 届“希望杯”邀请赛试题)

15. 如图,有一张长为 3,宽为 1 的长方形纸片,现要在这张纸片上画两个小长方形,使小长方形的每条边都与大长方形的一边平行,并且每个小长方形的长与宽之比也都



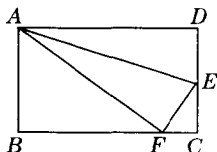
(第 15 题)

为 3:1,然后把它们剪下,这时,所剪得的两张小长方形纸片的周长之和有最大值,求这个最大值.

(第 16 届江苏省竞赛题)

综合创新

16. 如图,已知沿过点 A 的直线 AE 折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD ,使点 D 落在 BC 边上的点 F 处.



- (1) 当图形还满足什么条件时,才能使点 F 恰好是 BC 的中点?(图中不再添加辅助线,要求从图形中的角度、线段及三角形应满足的条件考虑,每种情况写出 1 个条件).
- (2) 请你从变化本题的条件或结论考虑,再提出两个不同的问题.

28 奇妙的对称

对称尽管你可以规定其含义或宽或窄,然而从古到今,都是人们用来理解和创造秩序、美妙以及尽善尽美的一种思想.

——赫尔曼·韦尔

知识纵横

对称(symmetry)是一种客观存在,一朵红花、一片绿叶、一只色彩斑斓的蝴蝶等,最令人惊奇的就是它们外形的几何对称性,自然界的对称性可以在从亚原子粒子的结构到整个宇宙的结构的一个尺度上找到.

对称是一种美的标准,人类心智中的某种东西受对称的吸引,对称对我们的视觉有感染力,影响我们对美的感受,建筑、绘画广泛地应用对称.

对称是一个数学概念,我们熟悉的有代数中的对称式、几何中的轴对称(line symmetry)、中心对称(point symmetry)等,更一般情况是,许多数学问题所涉及的对象具有对称性,不仅包括几何图形中的对称,而且泛指某些对象在有些方面如图形、关系、地位等同彼此相对又相称.

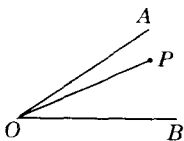
对称是一种解题方法,即解题时充分利用问题自身条件的某些对称性分析问题,在探求几何最值、代数式的化简求值等方面有广泛的应用.

例题求解

【例1】如图, $\angle AOB = 45^\circ$, 角内有一点 P , $PO = 10$, 两边上各有点 Q, R (均不同于 O), 则 $\triangle PQR$ 的周长的最小值为_____.

(2001年第12届“五羊杯”邀请赛试题)

思路点拨 作 P 点关于 OA, OB 的对称点, 确定 Q, R 的位置, 其目的是化折线为直线.



物理学家皮埃尔·居里曾说:“结果与其原因一样对称.”

大千世界,许多事物都具有某种对称性.许多化学分子是对称的,细胞结构是对称的,病毒往往也是对称的,……对称给人们以和谐均衡的美感,完全的对称是重复性的,可预言的,人类在漫长的岁月里,体验着对称,享受着对称.

求几何量的最值问题常用方法有:

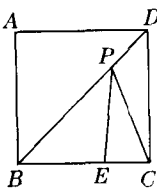
- (1) 应用几何中的不等式性质、定理;
- (2) 对称分析;
- (3) 代数法,即着眼于揭示问题中变动元素的代数关系.

【例2】如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 3, E 在 BC 上,且 $BE = 2$, P 在 BD 上,则 $PE + PC$ 的最小值为().

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{13}$ C. $\sqrt{14}$ D. $\sqrt{15}$

(“新蕾杯”数学竞赛题)

思路点拨 C 、 E 两点位置固定,从对称性考虑,确定 P 点位置.



【例3】已知 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, 试确定 a 、 b 的关系.

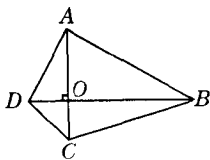
(第15届江苏省竞赛题)

思路点拨 有理化是解根式问题的基本思路,乘方、配方、换元、引入有理化因式等是有理化的常用方法.本例是一道脍炙人口的名题,引入与已知等式地位相对相称的有理化因式,本例可获得简解.

【例4】如图,凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于 O ,且 $AC \perp BD$,已知 $OA > OC$, $OB > OD$,比较 $BC + AD$ 与 $AB + CD$ 的大小.

(“祖冲之杯”邀请赛试题)

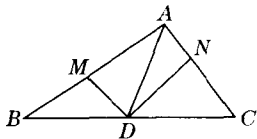
思路点拨 以 AC 为对称轴,将部分图形折叠,把相关线段集中到同一个三角形中去,以便运用三角形三边关系定理,这是解本例的关键.



【例5】如图,在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边的中线,点 M 在 AB 边上,点 N 在 AC 边上,并且 $\angle MDN = 90^\circ$,如果 $BM^2 + CN^2 = DM^2 + DN^2$,求证: $AD^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2)$.

(北京市竞赛题)

思路点拨 易想到勾股定理,需要把分散的条件加以集中,利用中点,构造中心对称全等三角形.



数学中的对称,不仅指几何图形中的对称,代数表示式中,若各个字母互相替代,表示式不变,也称这个表示式关于这些字母是对称的,一个复杂的二元对称式,都可以用最简单对称式 $a + b$, ab 表示.

许多数学问题有着和谐的对称美,对原题匹配一个与之相对的数学式,然后一起参与运算,这就是常说的“对称性地处理具有对称性的问题”,是数学解题中的一个一般性原则.

用对称法解几何题的常见的方式有:

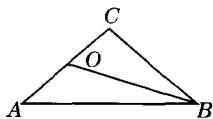
(1) 作出常见轴对称图形的对称轴,或利用题设条件中的垂线、角平分线翻折造全等;

(2) 利用中点构造中心对称图形.

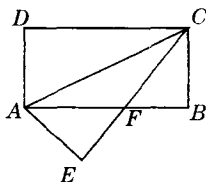
学力训练

基础夯实

1. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 那么 $x^2 + y^2$ 的值为_____.
2. 如图, 在等腰三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$ cm, 如果以 AC 的中点 O 为旋转中心, 将这个三角形旋转 180° , 点 B 落在点 B' 处, 那么 B' 点与 B 点的原来位置相距_____ cm.



(第2题)

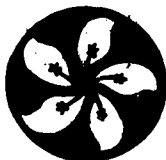


(第3题)

3. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 16$, $BC = 8$, 将矩形沿 AC 折叠, 点 D 落在点 E 处, 且 CE 与 AB 交于点 F , 那么 $AF =$ _____.
4. 选出下列图形中的轴对称图形().



①



②



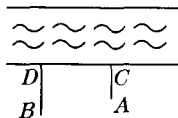
③



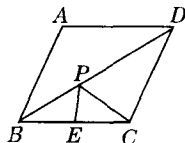
④

- A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ③④
5. 如图, 一牧童在 A 处牧马, 牧童家在 B 处, A 、 B 处距河岸的距离 AC 、 BD 的长分别为 500 m 和 700 m, 且 C 、 D 两地的距离为 500 m, 天黑前牧童从 A 点将马牵引到河边去饮水后, 再赶回家, 那么牧童至少要走().

A. $100\sqrt{29}$ m B. 1200 m C. 1300 m D. 1700 m



(第5题)



(第6题)

6. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 4a$, E 在 BC 上, $BE = 2a$, $\angle BAD =$

120° , P 点在 BD 上, 则 $PE + PC$ 的最小值为().

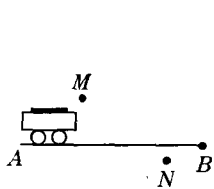
- A. $6a$ B. $5a$ C. $4a$ D. $2\sqrt{3}a$

7. 如图, 一辆汽车在直线形的公路 AB 上由 A 向 B 行驶, M 、 N 分别是位于公路 AB 两侧的村庄.

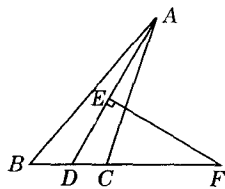
- (1) 设汽车行驶到公路 AB 上点 P 位置时, 距离村庄 M 最近; 行驶到点 Q 位置时, 距离村庄 N 最近, 请在图中的公路 AB 上分别画出点 P 、 Q 的位置(保留画图痕迹).
- (2) 当汽车从 A 出发向 B 行驶时, 在公路 AB 的哪一段路上距离 M 、 N 两村庄都越来越近? 在哪一段路上距离村庄 N 越来越近, 而离村庄 M 却越来越远? (分别用文字表述你的结论, 不必证明)
- (3) 在公路 AB 上是否存在这样一点 H , 使汽车行驶到该点时, 与村庄 M 、 N 的距离相等? 如果存在, 请在图中的 AB 上画出这一点(保留画图痕迹, 不必证明); 如果不存在, 请简要说明理由.

(2001 年浙江省嘉兴市中考题)

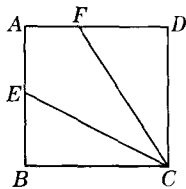
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, AD 的垂直平分线交 AD 于 E , 交 BC 的延长线于 F , 求证: $FD^2 = FB \cdot FC$.



(第 7 题)



(第 8 题)



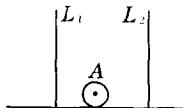
(第 9 题)

9. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, F 是 AD 上的一点, 且 $AF = \frac{1}{4}AD$, 求证: CE 平分 $\angle BCF$.

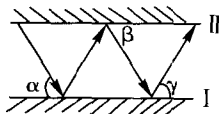
能力拓展

10. 如图, 设 L_1 和 L_2 是镜面平行且镜面相对的两面镜子, 把一个小球放在 L_1 和 L_2 之间, 小球放在镜 L_1 中的像为 A' , A' 在镜 L_2 中的像为 A'' , 若 L_1 、 L_2 的距离为 7, 则 $AA'' =$ _____.

(第 15 届江苏省竞赛题)



(第 10 题)

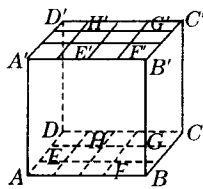


(第 11 题)

11. 光线以如图所示的角度 α 照射到平面镜 I 上, 然后在平面镜 I 、 II 之间来回反射, 已知 $\angle\alpha = 60^\circ$, $\angle\beta = 50^\circ$, 则 $\angle\gamma =$ _____.

(2001 年湖北省荆州市中考题)

12. 如图, $ABCD-A'B'C'D'$ 为长方体, $AA' = 50$ cm, $AB = 40$ cm, $AD = 30$ cm, 把上、下底面都等分成 3×4 个小正方形, 其边长均为 10 cm, 得到点 E, F, G, H 和 E', F', G', H' , 假设一只蚂蚁每秒爬行 2 cm, 则它从下底面 E 点沿表面爬行至上底面 G' 点至少要花时间 _____ 秒.

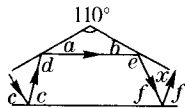


(第 12 题)

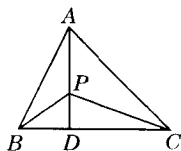
13. 无理数 $(1+\sqrt{2})^4$ 的整数部分是 _____.

(第 12 届“希望杯”邀请赛试题)

14. 一束光线经 3 块平面镜反射, 反射的路线如图所示, 图中字母表示相应的度数, 已知 $c = 60^\circ$, 求 $d + e$ 与 x 的值.



(第 14 题)



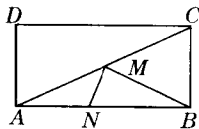
(第 15 题)

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 已知 $\angle ABC > \angle ACB$, P 是 AD 上的任一点, 求证: $AC + BP < AB + PC$.

综合创新

16. 求代数式 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(3-x)^2+4}$ 的最小值.

17. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, 若在 AC 、 AB 上各取一点 M , N , 使 $BM + MN$ 的值最小, 求这个最小值.



(第 17 题)

29 几何动态

初等几何包含了两个重要的有普遍意义的思想,其重要性远远超出了几何学的界限,其中之一是演绎法和几何学的公理基础,另一个是几何的变换和几何学的群论基础.

——亚格龙

知识纵横

世间万物每时每刻都在不断地运动变化,“静”只是“动”的瞬间,是运动的一种形式,事物的本质特征最容易从运动中显示出来,动中觅静,动中求同,动中探索,运动变化是探索的重要手段.

对于一个几何图形来说,我们可以把它的各元素之间的位置关系看成是处在变化的相互依存的状态之中,这种状态我们称之为“几何动态”.

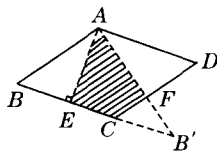
用这种动态观点审视几何图形就产生了几何变换,几何变换是指一个几何图形 F_1 变换成另一个几何图形 F_2 的方法,若仅改变图形的位置,而不改变图形的形状和大小,这种变换称为合同变换,平移、对称、旋转是常见的合同变换.

运用几何动态的观点,可以把表面看来不同的定理统一起来,可以发现新的几何命题,又常常可以找到探求几何中的最值、定值等问题的有效方法.

运用几何动态的观点,有助于启发证题思路,完成辅助元素的添设,化难为易,变分散为集中,从而达到解题的目的.

例题求解

【例 1】如图,在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 45^\circ$, AE 为 BC 上的高,将 $\triangle ABE$ 沿 AE 所在直线翻折得 $\triangle AB'E$,那么 $\triangle AB'E$ 与四边形 $AECD$ 重叠部分的面积是_____.



(2001 年上海市中考题)

链接

在数学学习的过程中,我们应注意动态思维的培养,即面对一个问题,如何进行思考?获得一个解法之后,又是怎样想到其他解法的?同一个问题的不同解法之间有什么联系?能否上升到一般性的结论?如何延伸?怎样拓展?

平移变换常与平行线相关,对称变换常与轴对称图形、翻折联系在一起,旋转变换常用于特殊三角形、特殊四边形图形中,实施几何变换是添辅助线的有效方法,能把分散的条件加以集中,促使问题的解决.

思路点拨 按题意画图,在翻折过程中 $\triangle AB'E \cong \triangle ABE$,应先求出 $\triangle CFB'$ 的面积.

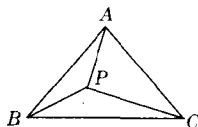


相似变换、等积变换也是一种常见的几何变换,它们不同于合同变换.相似变换,只保留线段间的比例关系,而线段本身的大小要改变;等积变换,只是图形在保持面积不变情况下的形变.

【例 2】 如图, P 是等边三角形 ABC 内的一点, $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$, 则 $\angle APB$ 的度数是().

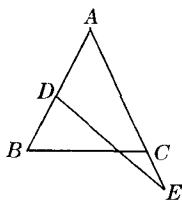
- A. 120° B. 135° C. 150° D. 无法确定

思路点拨 考虑到数据 3、4、5 是一组勾股数,应设法把它们集中,不妨实施旋转变换.



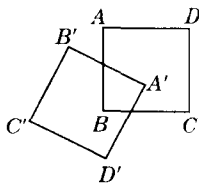
【例 3】 如图,在等腰 $\triangle ABC$ 的一腰 AB 上取一点 D ,在另一腰 AC 的延长线上取 $CE = BD$;连结 DE ,则 $DE > BC$.

思路点拨 DE 与 BC 是相交关系,难以直接比较大小,若将 BC 平移到恰当的位置,使 DE 、 BC 集中到一个三角形,则可将问题转化为角的不等关系的证明.



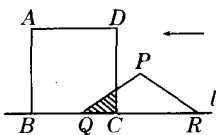
【例 4】 如图,平面上有两个边长相等的正方形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$,且正方形 $A'B'C'D'$ 的顶点 A' 在正方形 $ABCD$ 的中心,当正方形 $A'B'C'D'$ 绕 A' 转动时,两个正方形的重合部分的面积必然是一个定值,这个结论对吗? 证明你的判断.

思路点拨 考查转动到特殊位置(如两组边分别平行)时重叠部分面积与正方形面积的联系,再分析一般情况下重叠部分面积与上述值是否相等,从而作出判断.



变动的图形中某些几何元素的量,或几何元素间的某些几何性质或位置关系不变,称为几何定值问题,解这类问题的基本思路是:通过变量在图形中的特殊位置或极限位置先探求出定值,然后给出一般情况下的证明.

【例5】 如图,有一块长为5 cm的正方形 $ABCD$ 和等腰 $\triangle PQR$, $PQ = PR = 5$ cm, $QR = 8$ cm,点 B, C, Q, R 在同一条直线上,当 C, Q 两点重合时,等腰 $\triangle PQR$ 以1 cm/秒的速度沿直线 l 按箭头所示方向开始匀速运动, t 秒后正方形 $ABCD$ 与等腰 $\triangle PQR$ 重合部分的面积为 S cm²,解答下列问题.



通过有关命题的特定想到任意点,由线段上的任意点想到线段延长线上的任意点,当获得各种情况的有关结论之后,又以更高的观点把几种情况统一起来,从而获得适用于各种情况的更一般的结论.

(1) 当 $t = 3$ 秒时,求 S 的值;

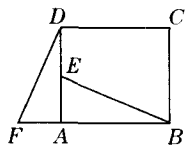
(2) 当 $t = 5$ 秒时,求 S 的值.

思路点拨 随着运动时间不同,两图形重合部分的形状也发生改变,画出重合部分的示意图,再分步分类求其面积.

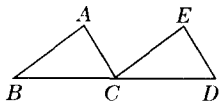
学力训练

基础夯实

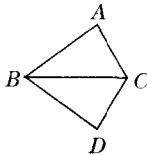
1. 如图甲,在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, F 是 BA 延长线上的一点, $AF = \frac{1}{2} AB$.



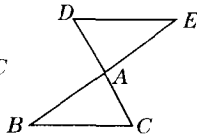
图甲



图乙



图丙



图丁

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$.

(2) 阅读下面材料:

如图乙,把 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 平行移动线段 BC 的长度,可以变到 $\triangle ECD$ 的位置;

如图丙,以 BC 为轴把 $\triangle ABC$ 翻折 180° ,可以变到 $\triangle DBC$ 的位置;

如图丁,以点 A 为中心,把 $\triangle ABC$ 旋转 180° ,可以变到 $\triangle AED$ 的位置.

像这样,其中一个三角形是由另一个三角形按平行移动、翻折、旋转等方法变成的.这种只改变位置,不改变形状大小的图形变换,叫做三角形的全等变换.

(3) 回答下列问题:

① 在图甲中,可以通过平行移动、翻折、旋转中的哪一种方法,使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置? 答:_____.

② 指出图甲中线段 BE 与 DF 之间的关系. 答:_____.

2. 如图, P 为正方形内一点, 若 $PA:PB:PC = 1:2:3$, 则 $\angle APB$ 的度数是_____.

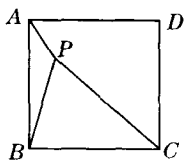
3. 如图, $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDE$ 都是等边三角形, $AB < BD$, 若 $\triangle ABC$ 不动, 将 $\triangle BDE$ 绕 B 点旋转, 则在旋转过程中, AE 与 CD 大小关系为().

A. $AE = CD$

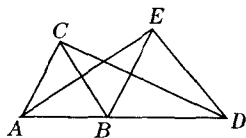
B. $AE > CD$

C. $AE < CD$

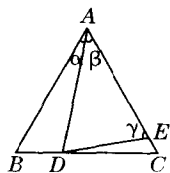
D. 无法确定



(第2题)



(第3题)



(第4题)

4. 如图, D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC 、 AC 上的点, 若 $AB = AC$, $AD = AE$, 则().

A. 当 $\angle B$ 为定值时, $\angle CDE$ 为定值

B. 当 $\angle \alpha$ 为定值时, $\angle CDE$ 为定值

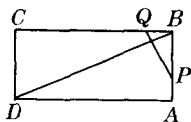
C. 当 $\angle \beta$ 为定值时, $\angle CDE$ 为定值

D. 当 $\angle \gamma$ 为定值时, $\angle CDE$ 为定值

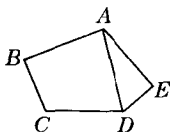
5. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $BC = 10$, 点 P 从点 A 出发, 沿 AB 作匀速运动, 1 分钟可到 B 点, 而点 Q 从 B 点出发, 沿 BC 作匀速运动也用 1 分钟可到 C 点, 现假定点 P 、点 Q 同时自 A 点、 B 点出发, 问经过多少时间, 线段 PQ 恰与线段 BD 垂直?

6. 如图, 五边形 $ABCDE$ 中, $AB = AE$, $BC + DE = CD$, $\angle ABC + \angle AED = 180^\circ$, 连结 AD , 求证: AD 平分 $\angle CDE$.

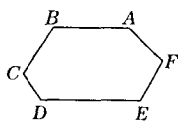
(“希望杯”邀请赛试题)



(第5题)



(第6题)



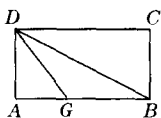
(第7题)

7. 如图, 六边形 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel DE$, $BC \parallel FE$, $CD \parallel AF$, 对边之差 $BC - FE = ED - AB = AF - CD > 0$, 求证: 该六边形的各角都相等.

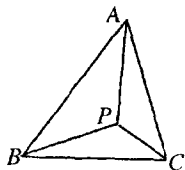
(全俄数学奥林匹克试题)

能力拓展

8. 如图, 折叠矩形纸片 $ABCD$, 先折出折痕(对角线 BD), 再折叠, 使 AD 落在对角线 BD 上, 得折痕 DG , 若 $AB = 2$, $BC = 1$, 是 $AG =$ _____.



(第8题)



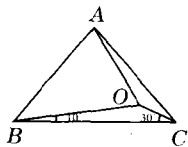
(第9题)

9. 如图, P 为等边 $\triangle ABC$ 中一点, $PA = 5$, $PB = 4$, $PC = 3$, 则 $BC =$ _____.

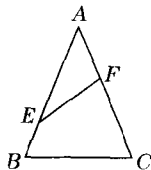
10. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 80^\circ$, O 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle OBC = 10^\circ$, $\angle OCB = 30^\circ$, 求 $\angle BAO$ 的度数.

11. 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 的两腰 AB 、 AC 上分别取点 E 和 F , 使 $AE = CF$, 已知 $BC = 2$, 求证: $EF \geq 1$.

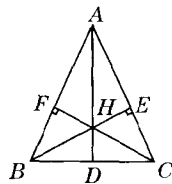
12. 如图, 设 H 是等腰三角形 ABC 的三边上的高线的交点, 在底边 BC 保持不变的情况下, 让顶点 A 至底边 BC 的距离变小(仍保持三角形为等腰三角形), 这时乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC}$ 的值变小、变大、还是不变?



(第10题)



(第11题)



(第12题)

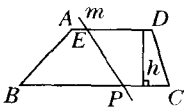
综合创新

13. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AD = 3$, $BC = 6$, 高 $h = 2$, P 是 BC 边上的一个动点, 直线 m 过 P 点, 且 $m \parallel DC$ 交梯形另外一边于 E , 若 $BP = x$, 梯形位于直线 m 左侧的图形面积为 y .

(1) 当 $3 < x \leq 6$ 时, 求用 x 表示 y 的代数式;

(2) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 求用 x 表示 y 的代数式;

(3) 若梯形 $ABCD$ 的面积为 S , 当 $y = \frac{1}{2}S$ 时, 求 x 的值.



(2001 年福建省龙岩市中考题)

只要代数同几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄.但是,当这两门学科结合成伴侣时,它们就互相吸收新鲜的活力,从那以后就以快速的步伐走向完善.

——拉格朗日

知识纵横

数和形是数学研究的基本对象,是数学产生和发展的两块基石,在数学发展的过程中,数和形常常结合在一起,在方法上互相渗透,在内容上互相联系.

以数助形,即恰当地引参或设元,把一些几何量如角度的大小、线段的长度等用字母或代数式表示,利用图形的性质,寻找几何图形元素之间的关系,通过解方程、等式变形、等式运算等代数方法解证几何题.

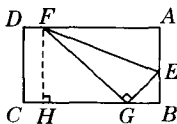
用形辅数,即把一个代数问题转化为一个图形,问题中的条件与结论直观地、整体地表示出来,借助图形的直观性辅助解题,在代数的学习中,我们广泛地使用了用形辅数的方法,如用数轴赋予抽象的代数概念以直观的形象、乘法公式的几何表示、解应用题时常借助直线图、图表帮助分析等.

例题求解

【例1】 如图,在矩形 $ABCD$ 的边 AB 上有一点 E ,且 $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$, DA 边上有一点 F ,且 $EF = 18$,将矩形沿 EF 对折后,点 A 落在边 BC 上的点 G ,则 $AB =$ _____.

(山东省竞赛题)

思路点拨 设 $AE = 3k$,则 $EB = 2k$, $AB = 5k$,解题的关键是建立关于 k 的方程,过 F 作 BC 的垂线,构造相似三角形,有更多的线段都可以用 k 的代数式表示.



链接

古埃及,在长期土地测量、划分界限的过程中形成了最初的几何学。“Geometry (几何)”一词在希腊文中意为“测量”,我国宋元时期已将某些几何问题代数化,把图形之间的几何关系,表示成代数式之间的代数关系.

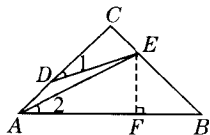
17 世纪笛卡尔的解析几何引进坐标,用“数”研究“形”,为 18、19 世纪数学的空前发展作了准备.

【例2】 如图, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle C = 90^\circ$, 若 $AD = \frac{1}{3}AC$, $CE = \frac{1}{3}BC$, 则 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小关系是().

- A. $\angle 1 > \angle 2$ B. $\angle 1 < \angle 2$
C. $\angle 1 = \angle 2$ D. 无法确定

(2001 年天津赛区选拔赛题)

思路点拨 过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , 这样 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 都是直角三角形的锐角, 设 $AD = a$, 则图中许多线段都可以用 a 的代数式表示, 便于探寻 $\text{Rt}\triangle CDE$ 与 $\text{Rt}\triangle FAE$ 的关系.



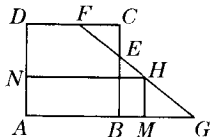
对于一个几何问题, 能否通过代数运算解决, 关键在于几何问题中数量关系能否方便地表示成适应代数运算的表达式; 一个几何问题, 能否通过列方程的手段解决, 在于问题本身是否存在着构成方程的等量关系, 在寻找等量关系的过程中, 常用到勾股定理、全等三角形、相似三角形等知识与方法.

【例3】 如图, E 、 F 分别是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上的点, $CE = 1$, $CF = \frac{4}{3}$, 直线 FE 交 AB 的延长线于 G , 过线段 FG 上的动点 H 作 $HM \perp AG$, $HN \perp AD$, 垂足分别为 M 、 N , 设 $HM = x$, 矩形 $AMHN$ 的面积为 y .

- (1) 用 x 的代数式表示 y ;
(2) 当 x 为何值时, 矩形 $AMHN$ 的面积最大, 最大面积是多少?

(2001 年南京市中考题)

思路点拨 对于(1) $S_{\text{矩形}AMHN} = HM \cdot AM$, $AM = AB + BM$, 只需把 BM 用 x 的代数式表示即可; 对于(2), 把关于 x 的代数式通过配方变形可获解. 注意相似三角形基本图形的运用.



【例4】 已知正数 a 、 b 、 c 和 x 、 y 、 z 满足 $a + x = b + y = c + z = k$, 求证: $ay + bz + cx < k^2$.

(前苏联第 21 届中学生奥数题)

思路点拨 相等的量赋予它的几何意义, 易想到等边三角形、正方形, 从构造边长为 k 的正方形入手.



美国数学家斯蒂恩说：“如果一个特定的问题可以转化为一个图形，那么思维就整体地把握了问题，并且能创造性地思考问题的解法。”图形能直观、形象地表示数量关系，能帮助分析、理顺复杂的数量关系。用形辅数目前常见的方式是：

(1) 利用等量构造等边三角形、正方形；

(2) 利用根式的几何意义构造直角三角形、矩形。

【例 5】 设 a, b, c, d 是正数，求证：存在以 $\sqrt{a^2 + d^2}$ 、 $\sqrt{b^2 + (c+d)^2}$ 、 $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ 为三边的三角形，并求此三角形的面积。

思路点拨 用代数方法验证三边可构成三角形，并求出其面积是极为困难的，考虑到已知三个根式是三个直角三角形的斜边，而其直角边可拼凑出一个以 $a+b$ 和 $c+d$ 为二邻边的矩形，故想到构造矩形来解决问题。

学力训练

基础夯实

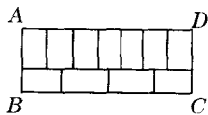
1. 如图是一块在电脑屏幕上出现的矩形色块图，由 6 个颜色不同的正方形组成，设中间最小的一个正方形边长为 1，则这个矩形色块图的面积为_____。

(2001 年山东省济南市中考题)

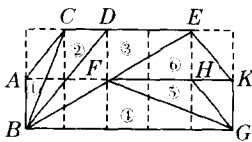
2. 如图，某矩形平台 $ABCD$ 用 11 块大小、形状完全相同的瓷砖铺成（不考虑接缝的宽），已知矩形 $ABCD$ 的面积为 7700 cm^2 ，则每块瓷砖的长和宽分别是_____。



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，在正方形网格上有 6 个斜三角形：① $\triangle ABC$ ，② $\triangle BCD$ ，③ $\triangle BDE$ ，④ $\triangle BFG$ ，⑤ $\triangle FGH$ ，⑥ $\triangle EFK$ ，其中②~⑥中，与三角形

①相似的是().

- A. ②③④ B. ③④⑤ C. ④⑤⑥ D. ②③⑥

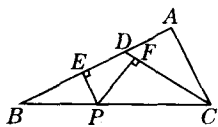
4. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, D 是 AB 上的任意一点,且 $DB = DC$,过 BC 上一点 P 作 $PE \perp AB$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F ,已知 $AD:DB = 1:3$, $BC = 4\sqrt{6}$,则 $PE + PF$ 的长为().

- A. $4\sqrt{6}$ B. 6 C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$

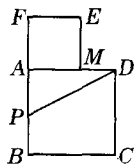
5. 如图,以长为2的定线段为边作正方形 $ABCD$,取 AB 的中点 P ,在 BA 的延长线上取点 F ,使 $PF = PD$,以 AF 为边作正方形 $AMEF$,点 M 在 AD 上.

(1) 求 AM, DM 的长;

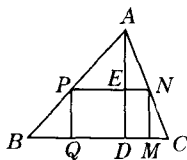
(2) 求证: $AM^2 = AD \cdot DM$



(第4题)



(第5题)



(第6题)

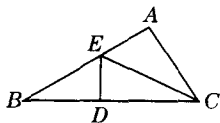
6. 如图, $\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料,边 $BC = 120$ mm,高 $AD = 80$ mm,要把它加工成一个矩形零件,使矩形的一边在 BC 上,其余两个顶点分别在 AB, AC 上,设该矩形的长 $QM = y$ mm,宽 $MN = x$ mm.

(1) 求证: $y = 120 - \frac{3}{2}x$;

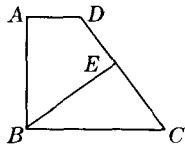
(2) 当 x 与 y 分别取什么值时,矩形 $PQMN$ 的面积最大? 最大面积是多少?

能力拓展

7. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $BC = 4$, $\angle ACB = 60^\circ$,将 $\triangle ABC$ 折叠,使点 B 和点 C 重合,折痕为 DE ,则 $\triangle AEC$ 的面积是_____.



(第7题)



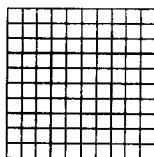
(第8题)

8. 如图,梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, E 为 CD 的中点, $BE = 13$,梯形 $ABCD$ 的面积为120,那么 $AB + BC + DA =$ _____.
9. 甲、乙、丙、丁、戊5名同学参加推铅球比赛,通过抽签决定出赛顺

序,在未公布顺序前每人都对出赛顺序进行了猜测.甲猜:乙第三,丙第五;乙猜:戊第四,丁第五;丙猜:甲第一,戊第四;丁猜:丙第一,乙第二;戊猜:甲第三,丁第四.老师说每人的出赛顺序至少被一人猜中,则出赛顺序中,第一、第三、第五分别是_____.

10. 代数式 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-24x+153}$ 的最小值是_____.

11. 在方格纸中,每个小格的顶点叫做格点.以格点连线为边的三角形叫做格点三角形.请你在右图所示的 10×10 的方格纸中,画出两个相似但不全等的格点三角形,并加以证明.要求所画三角形是钝角三角形,并标明相应字母.

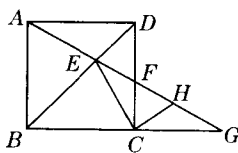


(2001年山西省中考题)

12. 已知 a, b, c 均为非负实数,求证: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$.

综合创新

13. 如图,已知正方形 $ABCD$,直线 AG 分别交 BD, CD 于点 E, F ,交 BC 的延长线于点 G ,点 H 是线段 FG 上的点,且 $HC \perp CE$.



(1) 求证:点 H 是 GF 的中点;

(2) 设 $\frac{DE}{BE} = x (0 < x < 1)$, $\frac{S_{\triangle ECH}}{S_{\triangle GCF}} = y$,请用

含 x 的代数式表示 y .

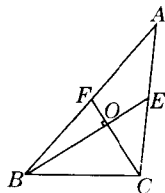
(2001年浙江省嘉兴市中考题)

14. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, BE, CF 是中线,且 $BE \perp CF$,

$AC = b, AB = c (c > b)$

(1) 求 BC 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 存在,讨论 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.



参考答案

1 分解方法的延拓——换元法与主元法

【例题求解】

例1 设 $x^4 + x^2 = y$, 则原式 $= (y-4)(y+3) + 10 = y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = (x^4 + x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 + 2)(x+1)(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$

例2 选A 将原式重新整理成关于 x 的二次三项式, 则原式 $= (y-z)x^2 + (y^2 - 2yz + z^2)x - (zy^2 - z^2y) = (y-z)[x^2 + (y-z)x - yz] = (y-z)(x+y)(x-z)$

例3 (1) 原式 $= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) + x^2 = (x^2 + 6x + 6)^2$ 提示: 令 $x^2 + 6 = a$

(2) 原式 $= (1999x + 1)(x - 1999)$ 提示: 令 $1999 = a$

(3) 原式 $= (x-1)^2(y-1)^2$ 提示: 令 $x+y=a, xy=b$

例4 (1) 原式 $= a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b = (b-c)a^2 + (c^2 - b^2)a + b^2c - c^2b = (b-c)[a^2 - (c+b)a + bc] = (b-c)(a-b)(a-c)$

(2) 原式 $= x^2 + (y-1)x - (2y^2 - 7y + 6) = x^2 + (y-1)x - (2y-3)(y-2) = (x-y+2)(x+2y-3)$

例5 下列填法仅供参考:

原式 $= m^3 + am^2 - m - a = m(m^2 - 1) + a(m^2 - 1) = (m+a)(m+1)(m-1)$

【学力训练】

1. $(x-1)(x+4)(x+1)(x+2)$ 2. $(x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2)$

3. 原式 $= (x^2 - xy - 2y^2) - (x+y) = (x+y)(x-2y) - (x+y) = (x+y)(x-2y-1)$

4. $-8 = (-1) \times 8, (-2) \times 4, (-4) \times 2, (-8) \times 1$, 则 $-m$ 的值可能为: $(-1) + 8, (-2) + 4, (-4) + 2, (-8) + 1$, 故 m 的可能取值有 $-7, -2, 2, 7$ 四个

5. C 6. B 7. C 8. C

9. (1) 原式 $= (x+2)(x+4)(x^2 + 5x + 8)$

(2) 原式 $= x(2x-3)(x-3)(2x+3)$ 提示: 令 $2x^2 - 3x = y$

(3) 原式 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2001)$ 提示: 令 $2000 = a$, 则 $2001 = a + 1$

(4) 原式 $= (6x^2 - 7x + 1)(6x^2 - 5x + 1) + x^2 = (6x^2 - 6x + 1)^2$ 提示: 令 $6x^2 + 1 = y$.

(5) 原式 $= a^2 + (3b+4c)a + 2b^2 + 5bc + 3c^2 = a^2 + (3b+4c)a + (2b+c)(b+3c) = (a+2b+c)(a+b+3c)$

(6) 原式 $= x^2 + (y+1)x - (6y^2 - 13y + 6) = x^2 + (y+1)x - (3y-2)(2y-3) = (x+3y-2)(x-2y+3)$

10. $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 4x + 1)$ 11. 原式 $= (x^2 + 5xy + 6y^2) + (x+3y) = (x+3y)(x+2y+1)$

12. 设 $x-2=a, y-2=b$, 则 $x-y=a-b$, 原式 $= a^3 - b^3 - (a-b)^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) - (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = 3ab(a-b) = 3(x-2)(y-2)(x-y)$

13. 9 14. A 15. A

16. (1) 原式 $= (a-1)^2(a^2 - 3a + 1)$ 提示: 令 $a^2 + 1 = b$

(2) 原式 $= [(2a+5)(a-3)][(a+3)(2a-7)] - 91 = (2a^2 - a - 15)(2a^2 - a - 21) - 91 = (2a^2 - a - 15)(2a^2 - a - 21) - 91 = (a-4)(2a+7)(2a^2 - a - 8)$

(3) 设 $x+y=a, xy=b$, 则原式 $= (b^2 + 2b + 1) - a^2 = (b+1+a)(b+1-a) = (xy+1+x+y)(xy+1-x-y) = (x+1)(y+1)(x-1)(y-1)$

$$(4) \text{ 原式} = (2x-3y)^3 + (3x-2y)^3 - [5(x-y)]^3 = (2x-3y)^3 + (3x-2y)^3 - [(2x-3y) + (3x-2y)]^3 \\ = -15(x-y)(2x-3y)(3x-2y)$$

$$(5) \text{ 令 } x^4+1=a, \text{ 则原式} = (a-4x^2)(a+3x^2) + 10x^4 = a^2 - x^2a - 2x^4 \\ = (a-2x^2)(a+x^2) = (x^4+1-2x^2)(x^4+1+x^2) = (x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$(6) \text{ 原式} = (2x-z)y^2 + (2xz-4x^2)y + (2x^3-x^2z) \\ = (2x-z)y^2 + 2x(z-2x)y + x^2(2x-z) = (2x-z)(x-y)^2$$

$$17. \text{ 由公式有: } x^{10}-1 = (x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)$$

$$\text{故 } x^8+x^6+x^4+x^2+1 = \frac{x^{10}-1}{x^2-1} = \frac{x^5-1}{x-1} \cdot \frac{x^5+1}{x+1} = (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

18. (1) a 的所有可能取值为 $\pm 17, \pm 7, \pm 3$, b 的所有可能取值为 $\pm 49, \pm 26, \pm 16, \pm 14, \pm 19$.

(2) p 的可能取值有无穷多个, 其一般表达式为:

$$p = n(7-n), (n \text{ 为任意整数, 且 } n \neq 0, n \neq 7)$$

(3) 共同点: 两个问题都是讨论 x^2+px+q 在整数范围内的因式分解问题, 在系数 p, q 之中有一个是已知数, 另一个是待定的数.

不同点: 问题(1)中 q 是已知数, 若 $q = m \times n$ (m, n 均为整数), 则 $p = m+n$, 因为 q 的分解方法是有限的, 所以 p 可取的整数值也有限; 问题(2)中, p 是已知数, 若 $p = m+n$ (m, n 均为整数), 则 $q = m \times n$, 因为 p 表示为两个整数的方法是无限的, 所以 q 可取的值有无限多个.

② 分解方法的延拓——配方法与待定系数法

【例题求解】

$$\text{例 1 原式} = (a^2+4a+4) - (b^2-2b+1) = (a+2)^2 - (b-1)^2 = (a+b+1)(a-b+3)$$

例 2 选 D 提示: 设 $x^3+ax^2+bx+8 = (x+1)(x+2)(x+c) = x^3 + (3+c)x^2 + (2+3c)x + 2c$, 比较得 $c=4$, 从而 $a=7, b=14$.

$$\text{例 3 (1) 原式} = x^4+2x^2+1-9x^2 = (x^2+1)^2 - (3x)^2 = (x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$$

$$(2) \text{ 原式} = x^4+2x^2+1-x^2+2ax-a^2 = (x^2+1)^2 - (x-a)^2 \\ = (x^2+x+1-a)(x^2-x+a+1)$$

$$(3) \text{ 原式} = (1+y)^2 + 2(1+y) \cdot x^2(1-y) + x^4(1-y)^2 - 2(1+y) \cdot x^2(1-y) - 2x^2(1+y^2) \\ = [(1+y) + x^2(1-y)]^2 - 4x^2 = (1+y+x^2-x^2y+2x)(1+y+x^2-x^2y-2x) \\ = [(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)] \\ = (x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$$

例 4 提示: 因 $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, 故可令原式 $= (x+my+1)(x+ny+2)$ 展开比较对应项系数求得 $k = -3$.

$$\text{例 5 提示: 左边} = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 + (a^2+b^2+2ab)^2 \\ = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2+b^2) + 4a^2b^2 \\ = 2(a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2+b^2) + 2a^2b^2 = 2(a^2+b^2+ab)^2 = \text{右边}$$

【学力训练】

$$1. \text{ 原式} = b[(a^3+27) + (a+3)] = b(a+3)(a^2-3a+10)$$

$$2. \text{ 令 } x^3+3x^2-3x+k = (x+1)A \quad x = -1 \text{ 代入, 得 } k = -5 \quad 3. \frac{3}{2}$$

$$4. \text{ 展开得 } 2x^2+3xy-2y^2+(2m+n)x+(2n-m)y+mn = 2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6, \text{ 比较得 } 2m+n = -1, 2n-m = 8, mn = -6, \text{ 解得 } m = -2, n = 3$$

5. B 6. A 7. D

8. (1) 原式 = $(a^2 + 8b^2 - 4ab)(a^2 + 8b^2 + 4ab)$

(2) 原式 = $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$

(3) 原式 = $x^2 + 1 + 2x + x^2 + (x + x^2)^2 = 1 + 2(x + x^2) + (x + x^2)^2 = (1 + x + x^2)^2$

(4) 原式 = $(a + c - 2b)^2$ 提示: 设 $b - c = x, a - b = y$, 则 $c - a = -(x + y)$

(5) 原式 = $x^3 - x - 8x + 8 = x(x^2 - 1) - 8(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 8)$

(6) 原式 = $(x^3 + x^2) + (x^2 + x) - (6x + 6) = x^2(x + 1) + x(x + 1) - 6(x + 1)$
 $= (x + 1)(x + 3)(x - 2)$

9. 设 $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + mx + n) = x^4 + (2 + m)x^3 + (2m + n + 5)x^2 + (5m + 2n)x + 5n$

比较对应项系数得:
$$\begin{cases} 2 + m = 0 \\ 2m + n + 5 = a \\ 5m + 2n = 0 \\ 5n = b \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m = -2 \\ n = 5 \end{cases} \quad \text{故} \begin{cases} a = 2m + n + 5 = 6, \\ b = 5n = 25, \\ a + b = 31. \end{cases}$$

10. 令 $2x^4 + x^3 - ax^2 + bx + a - b - 1 = (x^2 + x - 6) \cdot A = (x + 3)(x - 2) \cdot A$, 取 $x = -3, x = 2$ 代入上式, 可求得 $a = 16, b = 3$

11. $x^2 - 3x - 1$ 令 $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + b = (x^2 + mx + n)^2$, 解得 $m = -3, n = -1$ 12. -3

13. $n = 1003$ 或 $n = 3988$ 提示: 原式 = $(2^7)^2 + 2 \cdot 2^7 \cdot 2^{2n-8} + (2^{1998})^2 = (2^7)^2 + 2 \cdot 2^7 \cdot 2^{3988} + (2^n)^2$

14. C 15. D

16. C 提示 由 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, 得 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$, 由 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, 得 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0$, 由 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, 得 $(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$

17. (1) 原式 = $4x^3 - x - 30x + 15 = x(2x + 1)(2x - 1) - 15(2x - 1) = (2x - 1)(2x - 5)(x + 3)$

(2) 原式 = $4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
 $= (a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b)$

(3) 原式 = $x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

(4) 原式 = $(x^3 - x^2) + (6x^2 - 6x) + (9x - 9) = (x + 3)^2(x - 1)$

18. 提示: 因 $x^2 + xy - 2y^2 = (x + 2y)(x - y)$, 故可设原式 = $(x + 2y + 2)(x - y + n)$

展开比较对应项的系数, 得
$$\begin{cases} n + 2 = 8 \\ 2n - 2 = 10 \\ k = 2n \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} n = 6 \\ k = 12 \end{cases}$$

19. 提示: 假设原式 = $(ax + by)(cx + dy + e)$ 且 $e \neq 0$, 展开比较对应项的系数得 $ac = 1$ ①, $ad + bc = -1$ ②, $bd = 1$ ③, $ae = 1$ ④, $be = 1$ ⑤, 由④、⑤得 $a = b$, 代入③并与①比较得 $c = d$, 于是 $ad + bc = bd + bd = -1$, 即 $bd = -\frac{1}{2}$, 这与③矛盾, 所以原式不能分解成两个一次因式的乘积.

20. 提示: 设 $2001 = x$, 则 $2002 = x + 1, a = x^2 + x^2(x + 1)^2 + (x + 1)^2 = x^2 + 1 + 2x + x^2 + x^2(x + 1)^2$
 $= 1 + 2x(x + 1) + [x(x + 1)]^2 = (1 + x + x^2)^2$

故 a 是一个完全平方数.

3 因式分解的应用

【例题求解】

例 1 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 由已知得 $(a + 2b)(a - b) = 0$, 故 $a + 2b = 0$ 或 $a - b = 0$.

例 2 选 B 原式 $= (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) - 4a^2b^2$
 $= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) < 0$

例 3 (1) 考虑一般性: $n(n+3)+2=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

$$\text{原式} = \frac{(3 \times 4) \cdot (5 \times 6) \cdot (7 \times 8) \cdot (9 \times 10) \cdots (1995 \times 1996)}{(2 \times 3) \cdot (4 \times 5) \cdot (6 \times 7) \cdot (8 \times 9) \cdots (1994 \times 1995)} = 998.$$

$$(2) \text{ 设 } 2000 = a, \text{ 则原式} = \frac{a^3 - 2a^2 - (a-2)}{a^3 + a^2 - (a+1)} = \frac{(a-2)(a^2-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{a-2}{a+1} = \frac{1998}{2001}.$$

例 4 $n^4 - 16n^2 + 100 = n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2 = (n^2 + 10)^2 - 36n^2 = (n^2 + 6n + 10)(n^2 - 6n + 10)$

因 $n^2 + 6n + 10 \neq 1$, 而 $n^4 - 16n^2 + 100$ 为质数且 n 为正整数,

故 $n^2 - 6n + 10 = 1$, 即 $(n-3)^2 = 0$, 得 $n = 3$.

例 5 (1) 由 $(2x-3)(2+3y)=1$, 得 $2x-3=1, 2+3y=1$ 或 $2x-3=-1, 2+3y=-1$

解得 $x=2, y=\frac{1}{3}$ (舍去) 或 $x=1, y=1$.

(2) 原方程变形为 $(xy-6)^2 + 13 = (x+y)^2$, 可得

$(x+y+xy-6)(x+y-xy+6) = 13$, 则有

$$\begin{cases} x+y+xy-6=1 \\ x+y-xy+6=13 \end{cases}, \begin{cases} x+y+xy-6=13 \\ x+y-xy+6=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+xy-6=-1 \\ x+y-xy+6=-13 \end{cases}, \begin{cases} x+y+xy-6=-13 \\ x+y-xy+6=-1 \end{cases}.$$

分别考察上述四个方程组, 得原方程两组非负整数对为 $(3, 4), (4, 3)$

【学力训练】

1. 36 2. 10 或 14 3. 1998 $(a+b)(c+d) = 1997 \times 1$, 1997 为质数

4. (1) 设 $a = 2002$, 则原式 $= \frac{a^2 + 5a + 6}{(a^3 + 5a^2 + 6a) + (a^2 + 5a + 6)} = \frac{1}{a+1} = \frac{1}{2003}$;

$$(2) \text{ 设 } 1994 = b, \text{ 则原式} = \frac{[b^2 - (b+6)][b^2 + (2b-3)](b+1)}{(b-3)(b-1)(b+2)(b+3)}$$

$$= \frac{(b-3)(b+2)(b+3)(b-1)(b+1)}{(b-3)(b-1)(b+2)(b+3)} = b+1 = 1995$$

5. C 原式 $= (7^{12} + 1)(7^6 + 1) \times (7+1)(7^2 - 7 + 1)(7-1)(7^2 + 7 + 1) = (7^{12} + 1)(7^6 + 1) \times 8 \times 43 \times 6 \times 57$

6. A 7. C 原式 $= (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{1985})$

8. D 原式 $= 3x(3x^3 - x - 1) + 4(3x^3 - x - 1) + 2005$

9. (1) 略; (2) 从反面说明, 结合奇数、偶数性质.

10. 原式 $= (a^4 + 6a^2 + 9) - 9a^2 = (a^2 + 3a + 3)(a^2 - 3a + 3)$

当 $a=0$ 时, 原式 $= 9$ 是合数; 当 $a=1$ 时, 原式 $= 7$ 是质数; 当 $a=2$ 时, 原式 $= 13$ 也是质数; 当 $a>2$ 时, $a^2 + 3a + 3 > 1, a^2 - 3a + 3 = (a-2)(a-1) + 1 > 1$, 这说明, 此时 $a^4 - 3a^2 + 9$ 可以分解为两个大于 1 的自然数的积, 即它为合数.

11. 0 将 $a=5-b$ 代入另一等式, 配方

12. 8 由已知得 $(a+1) \cdot (b+1) = 4, (b+1)(c+1) = 4, (a+1)(c+1) = 4$

13. 15 $(3a+5)(2b-3) = 288 = 2^5 \times 3^2$, 只有 $3a+5=2^5, 2b-3=3^2$ 成立

14. 45 人, 设晚宴共有 n 个人, 则 $\frac{n(n-1)}{2} = 990$, 即 $n(n-1) = 45 \times 44$

15. A $(x-y) = (a-d)(c-b) < 0$, 即 $x < y$, 同理 $y < z$ 16. A

17. B 两式相减, 得 $(p-q)(p+q-2001) = 0$, 由 $p \neq q$ 得 $p+q = 2001$, 而 p, q 为质数, 故 p, q 中有一个为 2, 另一个为 1999

18. D 原式 $= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 1 = (x^2 + 2)^2 - 4x(x^2 + 2) + (2x)^2 + 1 = [(x^2 + 2) - 2x]^2 + 1 = [(x-1)^2 + 1]^2 + 1 \geq 2$

19. 取 $k = 4a^4$ (a 为自然数时), $n^4 + k = n^4 + 4a^2 = n^4 + 4n^2a^2 + 4a^4 - 4n^2a^2$

$$= (n^2 + 2a^2)^2 - (2an)^2 = (n^2 + 2an + 2a^2)(n^2 - 2an + 2a^2)$$

当 $a \geq 2$ 时,这是两个大于 1 的自然数的乘积,因为 a 有无穷多个,所以 k 也有无穷多个.

20. $mn + 9m + 11n + 145 = (m + 11)(n + 9) + 46$, 由已知知 $m + 11 \mid (mn + 9m + 11n + 145)$, $n + 9 \mid (mn + 9m + 11n + 145)$ $m + 11 = n + 9$, 得 $m + 11 \mid 46$, $n + 9 \mid 46$, 而 $46 = 46 \times 1 = 23 \times 2$, 所以 $m + 11 = n + 9 = 46$, 或 $m + 11 = n + 9 = 23$, 由此可得,每人捐款数为 47 元或 25 元

$$\begin{aligned} 21. m &= \frac{1}{4} [4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] = \frac{1}{4} (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) \\ &= \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2] \\ &= \frac{1}{4} (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(c + d - a + b) \end{aligned}$$

因 $a + b + c - d$, $a + b - c + d$, $a - b + c + d$, $c + d - a + b$ 奇偶性相同,而 m 为整数,则它们必同时为偶数,从而 $4 \mid m$, 故 $|m|$ 一定是个合数

22. (1) 第一次只能得到 $1 \times 4 + 4 + 1 = 9$, 因为要求最大新数, 所以, 第二次取 4 和 9, 得到 $4 \times 9 + 4 + 9 = 49$, 同理, 第三次取 9 和 49, 就得到扩充三次的最大数为 499.
- (2) 因 $c = ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$, 故 $c + 1 = (a + 1)(b + 1)$, 取数 a, c 可得新数 $d = (a + 1)(c + 1) - 1 = (a + 1)(b + 1)(a + 1) - 1 = (a + 1)^2(b + 1) - 1$, 即 $d + 1 = (a + 1)^2(b + 1)$; 取数 b, c 同理可得 $e = (b + 1)(c + 1) - 1 = (b + 1)(a + 1)(b + 1) - 1$, $e + 1 = (b + 1)^2(a + 1)$. 设扩充后的新数为 x , 则总可以表示为 $x + 1 = (a + 1)^m \cdot (b + 1)^n$, 式中 m, n 为整数, 当 $a = 1, b = 4$ 时, $x + 1 = 2^m \times 5^n$, 又因 $1999 + 1 = 2000 = 2^4 \times 5^3$, 故 1999 可以通过上述规则扩充得到.

4 分式的概念、性质及运算

【例题求解】

例 1 $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$

例 2 选 B 由已知得 $\frac{2x-3}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-B}{x(x-1)}$, 则 $A+B=2, -B=-3$.

例 3 (1) 原式 $= \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} = \frac{4a^3}{a^4-b^4} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} = \frac{8a^7}{a^8-b^8}$

(2) 原式 $= \frac{x(x-z)+z(x+y)}{(x+y)(x-z)} + \frac{y(y+x)-x(y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(z+y)-y(z-x)}{(z-x)(z+y)}$

$$= \left(\frac{x}{x+y} + \frac{z}{x-z} \right) + \left(\frac{y}{y+z} - \frac{x}{y+x} \right) + \left(\frac{z}{z-x} - \frac{y}{z+y} \right) = 0$$

(3) 原式 $= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} + \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)} - \frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = 0$$

例 4 (1) 原方程可以为 $\left(5 - \frac{1}{x-19}\right) + \left(1 + \frac{1}{x-9}\right) = \left(4 + \frac{5}{x-6}\right) + \left(2 - \frac{5}{x-8}\right)$

即 $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-19} = \frac{5}{x-6} - \frac{5}{x-8}, \frac{-10}{(x-9)(x-19)} = \frac{-10}{(x-6)(x-8)}$

故 $(x-9)(x-19) = (x-6)(x-8)$, 解得 $x = \frac{123}{14}$.

(2) 原方程组可化为

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3 & \text{①} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4 & \text{②} \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 5 & \text{③} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{①} + \text{②} + \text{③}, \text{得} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6 \quad \text{④} \\ &\text{④} - \text{①} \text{得} c = \frac{1}{3}, \text{④} - \text{③} \text{得} b = 1 \\ &\text{④} - \text{②} \text{得} a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 5 因 $n+6|(n^3+6^3)+1780$, 而 $n+6|n^3+6^3$

故 $n+6|1780$, 得 $n=4, 14, 83, 172, 350, 439, 884, 1774$

所以, 所有吉祥数的和为 $4+14+83+172+350+439+884+1774=3720$

【学力训练】

1. 0 或 $-\frac{1}{5}$ 2. 12 3. 2, 2

4. 100 设钢笔 x 元/枝, 日记本 y 元/本, 则 $60(x+2y)=50(x+3y)$, 得 $x=3y$, $\frac{60(x+2y)}{x}=100$

5. C 6. A 7. D 由已知得 $(m-n)x-3(m+n)=8x$, 则 $\begin{cases} m-n=8 \\ m+n=0 \end{cases}$ 8. B

9. (1) $\frac{16}{x^{16}-1}$; (2) 原式 $= (3x+6) + \frac{1}{x+1} - (2x+6) - \frac{3}{x-1} - x - \frac{2x+1}{x^2-1} = -\frac{4x+5}{x^2-1}$

(3) 原式 $= \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} - \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} - \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{2}{c-a}$

(4) $\frac{x^2-x+1}{x}$ 令 $x+\frac{1}{x}=a$

10. 设隧道长为 x 米, 火车原速度为每分钟 y 米, 则 $\begin{cases} \frac{x+400}{y}=10 \\ \frac{x+400}{y+100}=9 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=8600 \\ y=900 \end{cases}$

11. 原式 $= \frac{-3}{a-2}, \frac{-3}{a-2} > 0$ 且 $a-2| -3$, 得 $a=1$ 或 -1

12. $x=\frac{1}{3}(2-a)$, 由题意得 $\frac{1}{3}(2-a) > 0$ 且 $\frac{1}{3}(2-a) \neq 2$, 得 $a < 2$ 且 $a \neq -4$

13. 原方程可化为 $(5-2x)y = -4x^2+12x-11$, $y=2x-1+\frac{6}{2x-5}$, $2x-5|6$, $2x-5 = \pm 1$ 或 ± 3 或 ± 2 或 ± 6 , 得 $x=3, y=11$, 或 $x=4, y=9$, 共 2 组正整数解

14. $\frac{n^2+3n-10}{n^2+6n-16} = \frac{(n-2)(n+5)}{(n-2)(n+8)}$, $n-2=1$, 得 $n=3$

15. A 由条件得 $\frac{a+b}{c} > \frac{b+c}{a} > \frac{c+a}{b}$, $\frac{a+b}{c} + 1 > \frac{b+c}{a} + 1 > \frac{c+a}{b} + 1$, $\frac{a+b+c}{c} > \frac{a+b+c}{a} > \frac{a+b+c}{b}$, $c < a < b$

16. C 17. A 原式 $= 6 - \frac{2}{(x+1)^2+1}$

18. C 由条件得 $b^2+c^2-a^2=-2bc$, $a^2+b^2-c^2=-2ab$, $a^2+c^2-b^2=-2ac$.

19. (1) 原方程可化为 $\left(1+\frac{2}{11-2x}\right) + \left(1+\frac{2}{15-2x}\right) = \left(1+\frac{2}{17-2x}\right) + \left(1+\frac{2}{9-2x}\right)$
 即 $\frac{1}{11-2x} - \frac{1}{9-2x} = \frac{1}{17-2x} - \frac{1}{15-2x}$, $\frac{-2}{(11-2x)(9-2x)} = \frac{-2}{(17-2x)(15-2x)}$
 $(11-2x)(9-2x) = (17-2x)(15-2x)$, 得 $x = \frac{13}{2}$.

(2) 原方程化为 $\frac{3x+2}{2x+1} = \left| \frac{3x+2}{2x+1} \right|$, 于是得

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0 \\ \frac{3x+2}{2x+1} \geq 0 \end{cases} \quad \text{则} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{2}{3} \text{ 或 } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

故原方程的解为 $x \leq -\frac{2}{3}$ 且 $x \neq -1$

或 $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$

(3) 原方程组化为

$$\begin{cases} \frac{x(y+1)}{x+(y+1)} = 2 \\ \frac{x(z+2)}{x+(z+2)} = 3 \\ \frac{(y+1)(z+2)}{(y+1)+(z+2)} = 4 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{x+(y+1)}{x(y+1)} = \frac{1}{2} \\ \frac{x+(z+2)}{x(z+2)} = \frac{1}{3} \\ \frac{(y+1)+(z+2)}{(y+1)(z+2)} = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

故 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+2} = \frac{13}{24}$, 得 $(x, y, z) = (3\frac{3}{7}, 3\frac{4}{5}, 22)$

20. 设甲、乙、丙三队独做所需的天数分别为 x, y, z 天, 则 $x = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{ayz}{y+z}$, 得 $a+1 = \frac{xy+yz+zx}{yz}$,

$$\frac{1}{a+1} = \frac{yz}{xy+yz+yz}, \text{ 同理 } \frac{1}{b+1} = \frac{xz}{xy+yz+yz}, \frac{1}{c+1} = \frac{xy}{xy+yz+yz}, \text{ 故 } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

21. $\frac{n^3+100}{n+10} = \frac{n^3+1000-900}{n+10} = n^2-10n+100 - \frac{900}{n+10}$, $n+10 \mid 900$, 又要 n 取最大值, 从而符合要求的正整数 n 的最大值是 890.

22. 根据营业员的话, y 只能是 1 或 2

(1) 当 $y=1$ 时, 则原来每枝价为 $\frac{1}{x}$ 元, 多买 10 枝每枝节省钱 $\frac{1}{15}$, 现在每枝价是 $(\frac{1}{x} - \frac{1}{15})$ 元, 设多买 10 枝后共 m 枝, 则有 $(\frac{1}{x} - \frac{1}{15}) \times m = 2$, 此时, m 只能取 15, 30, 45, 60... 经讨论只有当 $m=5, x=5$ 时, 才符合题意.

(2) 当 $y=2$ 时, 则 $(\frac{2}{x} - \frac{2}{15}) \times m = 2$, 无论 m 为任何整数, 都不合题意, 故 $x=5, y=1$

5 有条件的分式化简与求值

【例题求解】

例 1 设 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$, 则 $d = ak, c = dk = a \cdot k^2, b = c \cdot k = a \cdot k^3, a = b \cdot k = a \cdot k^4$, 得 $k^4 = 1$, 即 $k = \pm 1$, 当 $k=1$ 时, $a=b=c=d$, 原式 $= 0$; 当 $k=-1$ 时, 原式 $= -2$

例 2 选 A 由 $\frac{x}{3y} = \frac{y}{2x-5y}$, 得 $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$, 则 $x = 3y$ 或 $x = -\frac{y}{2}$, $x = -\frac{y}{2}$ 不适合 $\frac{x}{3y} = \frac{6x-15y}{x}$, 应舍去, 把 $x = 3y$ 代入, 得原式 $= \frac{36y^2 - 15y^2 + 6y^2}{9y^2 - 6y^2 + 3y^2} = \frac{9}{2}$.

例 3 由已知得 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$, 原式 $= \frac{x^8(x^2+1) + (x^2+1)}{x^6(x^4+1) + (x^4+1)} = \frac{(x^2+1)(x^8+1)}{(x^4+1)(x^6+1)} = \frac{(x + \frac{1}{x})(x^4 + \frac{1}{x^4})}{(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3})} = \frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2}{(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)} = \frac{119}{110}$.

例 4 由已知条件, 得 $(ab + b^2 + ac + bc)c + (ab + b^2 + ac + bc)a = [b(a+b) + c(a+b)](a+c) = (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

例 5 $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(a-b)(b+c)(c+a) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(c+a)(2ab-2bc) + (c-a)(ab+b^2+ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$$= \frac{(a-c)[2bc+2ba-ab-b^2-ac-bc]}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = -\frac{5}{132}$$

$$\text{所以 } \left(\frac{a-b}{a+b}+1\right) + \left(\frac{b-c}{b+c}+1\right) + \left(\frac{c-a}{c+a}+1\right) = 3 - \frac{5}{132} = \frac{391}{132}$$

$$\text{即 } \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} = \frac{391}{132} \quad \text{故 } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{391}{264}$$

【学力训练】

1. $\frac{7991}{7993}$ 2. 由条件得 $x + \frac{1}{x} = \frac{8}{7}$, 则 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{15}{49}$, 故原式 = $\frac{49}{15}$

3. 1 4. $\frac{50}{101}$ 设 $\frac{a+b}{2} = \frac{b-2c}{3} = \frac{3c-a}{4} = k$, 则 $a = -\frac{11}{5}k, b = \frac{21}{5}k, c = \frac{3}{5}k$ 5. D

6. A 由等比性质有: $\frac{b}{a} = \frac{a-c+c+b}{b+a+b+a} = \frac{1}{2}$, 得 $a=2b$, 代入原式得 $3b=2c$

7. C 取倒数 $x + \frac{1}{x} = 1+m$, 原式 = $x^3 + \frac{1}{x^3} - m^3$ 8. C 作商比较大小

9. $a+b=-c, c=-a-b$, 则 $2a^2+bc=2a^2+b(-a-b)=(a-b)(a+a+b)=(a-b)(a-c)$,
同理 $2b^2+ac=(b-c)(b-a), 2c^2+ac=(c-a)(c-b)$

$$\text{原式: } \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

10. 由 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$, 得 $x-y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$, 得 $zy = \frac{y-z}{x-y}$, 同理 $zx = \frac{x-z}{y-z}, xy = \frac{y-x}{x-z}$.

11. -1 或 8 设 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = k$, 则 $k = -1$ 或 $k = 2$

12. $\frac{1}{18}$ 由已知得 $a + \frac{1}{a} = 3$, 原式 = $\frac{1}{a^3 + \frac{1}{a^3}}$ 13. $x = \frac{12}{5}$ 取倒数

14. 3 由条件得 $\frac{ab}{a+b} = \frac{2}{3}$, 得 $(3b-2)(3a-2)=4, a \neq b$ 且为整数, 则 $3b-2, 3a-2$ 只可能取值 1, 4 或 -1, -4.

15. A 16. D $ab+c-1=(a-1)(b-1), bc+a-1=(b-1)(c-1), ca+b-1=(c-1)(a-1)$

17. A

18. D 原式 = $\frac{(x-2)^4+x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-2)^3+x}{x-1} = \frac{x^3-6x^2+12x-8+x}{x-1}$
= $\frac{x^2(x-1)-5x(x-1)+8(x-1)}{x-1} = x^2-5x+8$

19. 原式 = $\frac{a^2b^2c^2}{a^3+b^3+c^3} \cdot \frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{a^3b^3c^3} = \frac{1}{a^3+b^3+c^3} \cdot \frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{abc}$
= $\frac{b^3(a^3+b^3+c^3)}{(a^3+b^3+c^3)abc} = \frac{b^2}{ac} = 1$

20. 由条件得 $(a+b)(b+c)(a+c)=0$, 即 $a=-b, b=-c, c=-a$ 至少有一个成立.

21. 由条件得 $a - \frac{1}{a} = 0, \frac{2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 3x}{\left(a - \frac{1}{a}\right) + 2x} = -\frac{93}{112}$, 进而求得 $x = 5.1$.

22. (1) 由于每个车间原有 a 件成品, 每天生产 b 件成品, 则每个车间 5 天后的成品数为 $(a+5b)$ 件, 故 B 组检验员检验的所有成品总数为: $5(a+5b) = 5a+25b$ (件).

(2) 对于 A 组 8 名检验员, 在前 2 天内每天检验的成品数为 $\frac{2(a+2b)}{2}$, 后检验的两个车间 3 天后的成品数为 $2(a+5b)$, 8 名检验员在后 3 天内每天检验的成品数为 $\frac{2(a+5b)}{3}$, 因为检验员的检验速度相同, 则

有 $\frac{2(a+2b)}{2} = \frac{2(a+5b)}{3}$, 得 $a = 4b$, 所以, 一名检验员每天检验的成品数为 $\frac{2(a+2b)}{2 \times 8} = \frac{3}{4}b$ (件). 对于 B 组检验员, 由(1)知, 5 个车间 5 天后的成品数为 $5(a+5b)$, 则 B 组检验员每天检验的成品数为 $\frac{5(a+5b)}{5}$ 件, 即 $(a+5b)$ 件, $a \neq 0, b \neq 0$, 故 B 组检验员的人数为 $\frac{a+5b}{\frac{3}{4}b} = \frac{9b}{\frac{3}{4}b} = 12$ (人)

⑥ 实数的概念及性质

【例题求解】

例 1 $-\frac{21}{5} \leq s \leq \frac{14}{3}$ 由条件得 $19\sqrt{a} = 21 + 5s, 19|b| = 14 - 3s, \sqrt{a} \geq 0, |b| \geq 0$, 则 $\begin{cases} 21 + 5s \geq 0 \\ 14 - 3s \geq 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{21}{5} \leq s \leq \frac{14}{3}$

例 2 选 B 由条件得 $(a-1)(b-1) = 0$ 因 a 为无理数, 故 $a-1 \neq 0$, 则 $b-1 = 0$, 得 $b = 1$

例 3 已知等式整理, 得 $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b - 2\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{12}b - 1\frac{9}{20}\right)\sqrt{3} = 0$.
因为 a, b 是有理数, 所以 $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b - 2\frac{1}{4} = 0$ 且 $\frac{1}{2}a - \frac{1}{12}b - 1\frac{9}{20} = 0$, 解得 $\begin{cases} a = 3\frac{3}{5} \\ b = 4\frac{1}{5} \end{cases}$

例 4 图甲所示方案的线路总长为 $AB + AC = 2a$, 图乙所示方案的线路总长为 $AD + BC = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)a$, 图丙所示方案的线路总长为 $OA + OB + OC = \sqrt{3}a$, 比较可知 $\sqrt{3}a < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)a < 2a$, 故图丙所示的铺设方案最好.

例 5 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则可设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (m, n 是互质的正整数), 则 $\frac{m^2}{n^2} = 2, m^2 = 2n^2$, 则 m 为偶数, 又设 $m = 2k$ (k 为正整数), 有 $m^2 = 4k^2 = 2n^2$, 得 $n^2 = 2k^2$, 从而 n 也为偶数, m, n 均为偶数, 这与 m, n 互质的假设矛盾, 所以假设不成立, 故 $\sqrt{2}$ 是无理数.

【学力训练】

1. $-\frac{1}{\sqrt{x}}, -\frac{x^2+1}{\sqrt{3x}}$ (仅供参考) 2. 1, 4 3. 2, -1 4. 说明无理数可以在数轴上表示出来 5. A

6. A 由 $-(x-4)^2 \geq 0$, 得 $(x-4)^2 \leq 0$, 而 $(x-4)^2 \geq 0$, 故 $(x-4)^2 = 0$

7. B 由条件得 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $x \geq 2$, 此时 $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{2} + \sqrt{2-1} + \sqrt{2-2} = \sqrt{2} + 1$

8. 由条件得 $(x-y)^2 + \sqrt{5x-3y-16} = 0$, 由非负数及其性质, 得

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 5x-3y-16=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases}, \text{故} \sqrt{x^2+y^2} = 8\sqrt{2}$$

9. 要使等式有意义, 须得 $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases}$, 得 $x = \frac{1}{2}$, 代入原等式得 $y = 4$, 故 $\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$. 10. $-\frac{1}{16}$

11. 1 或 -9 原等式变形得 $(x^2 + 2y - 17) + (4 + y)\sqrt{2} = 0$, 因 $x^2 + 2y - 17$ 和 $y + 4$ 都是有理数, 故 $\begin{cases} x^2 + 2y - 17 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \pm 5 \\ y = -4 \end{cases}$

12. 17 由已知, 得 $\begin{cases} 1-y = |\sqrt{x}-\sqrt{3}| + a^2 \geq 0 \\ y-1 = |x-3| + b^2 \geq 0 \end{cases}$, 得 $y = 1$, 从而可得 $x = 3, a = b = 0$.

13. 仅供参考: $\left| \frac{y}{x} \right| + \sqrt{xy}; |x| + y + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{2x} - \sqrt[3]{2x+y}; \frac{2x^2y-1}{\sqrt{x+y}}$ 等 14. C

15. C 原等式化为 $\sqrt{3}(a-b) = (1-\sqrt{2})(b-c)$, $b \neq c$, $b-c \neq 0$, 则 $\frac{a-b}{b-c} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 0$

16. D 从特殊值入手, $p = \sqrt{9 \times \underbrace{(11 \cdots 1)}_n} = 3 \times \underbrace{11 \cdots 1}_n = \underbrace{33 \cdots 3}_n$

17. 原等式化为 $(x^2 + y^2 - 25)\sqrt{3} + (x - y - 1)\sqrt{2} = 0$, 得 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$, 从而求得 $xy = 12$.

18. 设铁块的质量为 m 千克, 天平的左、右臂长分别为 l_1, l_2

则 $\begin{cases} ml_1 = 300l_2 & \text{①} \\ ml_2 = 900l_1 & \text{②} \end{cases}$ ① \times ② 得 $m^2 l_1 l_2 = 270000 l_1 l_2$ 即 $m = \sqrt{270000} \approx 519.6$ (克)

19. 设题中原三个数为 a, b, c , 则经过一次运算后得到的三个数是 $\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c$, 因为 $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, 即题设的三个数经过一次运算后始终保持其平方和不变, 但 $89^2 + 12^2 + 3^2 = 8074 \neq 8396 = 90^2 + 14^2 + 10^2$, 故不能经过若干次规定的运算由已知的三个数得到 90, 14, 10 三个数.

20. (1) c, d 不能同时为 0, 否则 y 无意义

若 $c = 0$, 由 $bc = ad, d \neq 0$, 得 $a = 0$, 此时 $y = \frac{b}{d}$ 为有理数;

若 $d = 0$, 则 $c \neq 0$, 由 $bc = ad$, 得 $b = 0$, 此时 $y = \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$ 为有理数;

若 $c \neq 0$ 且 $d \neq 0$, 由 $bc = ad$ 得 $a = \frac{bc}{d}$, 代入 y 得 $y = \frac{b}{d}$ 为有理数.

(2) 假设 $bc \neq ad$ 时, y 为有理数, 则 $(cx + d)y = ax + b$, 即 $(cy - a)x + (dy - b) = 0$

因 $cy - a, dy - b$ 为有理数, x 为无理数, 故有

$cy - a = 0, dy - b = 0$, 从而 $bc = cdy = (cy)d = ad$.

这与已知条件 $bc \neq ad$ 矛盾, 从而 y 不是有理数, y 一定是无理数.

7 二次根式的运算

【例题求解】

例 1 6 由 $\frac{x^2-2}{5x-4} \geq 0, \frac{x^2-2}{4-5x} \geq 0$ 得 $\frac{x^2-2}{5x-4} = 0$, 则 $x^2 = 2, y = 2$

例 2 选 C $\sqrt{2001}$ 是最简根式, $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{2001}$ 是同类根式, 这个方程恰有两组解 $(0, 2001), (2001, 0)$

例 3 (1) 原式 = $\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

(2) 原式 = $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7}) - \sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7}) + \sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - 5$

(3) 考察一般情形: $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1} + (2n-1)\sqrt{2n+1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1}}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right)$, 原式 = $\frac{3}{7}$

(4) 原式 = $\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1} = \frac{(3\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1} = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

例4 因 $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$
 $= \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \left|\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
 故 $S = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + 1 + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} = 2000 - \frac{1}{2000}$, 得 $[S] = 1999$

例5 将等式整理配方, 得 $(\sqrt{a-1}-1)^2 + (\sqrt{b-2}-2)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{c-3}-3)^2 = 0$

则 $\sqrt{a-1}-1=0, \sqrt{b-2}-2=0, \sqrt{c-3}-3=0$, 得 $a=2, b=6, c=12$, 故 $a+b+c=20$

【学力训练】

1. $-\sqrt{2}$ 2. $(b^2-a^2)\sqrt{a+b}$ 3. 2001 4. $\sqrt[3]{n + \frac{n}{n^3-1}} = n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$ (n 为大于1的自然数)

5. D 6. C 7. D 8. D

9. (1) 设 $n=1999$, 则原式 $= \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+n} = \sqrt{(n^2+3n+1)^2} = n^2+3n+1$

(2) 原式 $= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2} = 2$

(3) 原式 $= \frac{(\sqrt{11}+\sqrt{7})+4(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}(\sqrt{11}+\sqrt{7})+\sqrt{6}(\sqrt{11}+\sqrt{7})} = \frac{(\sqrt{11}+\sqrt{7})+4(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = \frac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \sqrt{11}-\sqrt{6}$

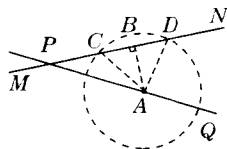
(4) 设 $\sqrt{1997}=a, \sqrt{1999}=b, \sqrt{2001}=c$, 原式 $= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$

10. 因 $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{6}$, 故 $12 < 9 + \sqrt{13} < 13$, 得 $9 + \sqrt{13} = 12 + a, a = \sqrt{13} - 3$, 同理可得 $b = 4 - \sqrt{13}$, 代入得原式 $= 8$

11. 作 $AB \perp MN$ 于 $B, AB = \frac{1}{2}AP = 80$. 因点 A 到直线 MN 的距离小于 100 米, 故这所

中学会受到噪声的影响, $AC = AD = 100, CD = 2DB = 2\sqrt{AC^2 - AB^2} = 120$, 则学

校受噪声影响的时间 $t = \frac{120}{18} = 24$ (秒)



12. 970 13. 0 由条件得 $(\sqrt{a-2}-2)^2 + (\sqrt{b+1}-1)^2 + |\sqrt{c-1}-1| = 0$

14. $6\sqrt{2}-7$ 15. 1 因为 $(\sqrt{2}-1)a = 2-1$, 即 $\frac{1}{a} = \sqrt{2}-1$

16. B $\frac{1}{a} = 1 + |a| > 0, a > 0 \left(\frac{1}{a} - |a| \right)^2 = 1, \frac{1}{a^2} + |a|^2 = 3, \left(\frac{1}{a} + |a| \right)^2 = 5, \frac{1}{a} + |a| = \sqrt{5}$ 17. C

18. C 赋值可排除 A、B、D, 不妨设 $a > b > c > 0, a < b+c, (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = b+2\sqrt{bc}+c > a$, 即 $(\sqrt{b}+\sqrt{c}) > \sqrt{a}$

19. A $a\beta + \alpha - \beta = (\alpha-1)(\beta+1)+1$, 令 $\alpha = 1+\sqrt{2}, \beta = -1+\sqrt{2}$, 则 $a\beta + \alpha - \beta$ 为有理数; 令 $\alpha = 2\sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}$, $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ 为有理数, 令 $\alpha = \sqrt[3]{2}, \beta = -\sqrt{2}, \sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = 0$ 为有理数

20. (1) 原式 $= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ (2) 原式 $= \frac{3+2\sqrt{6}+2-5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

(3) $\frac{9}{10}$ 考察一般情形: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(4) 原式 $= \sqrt{12-2\sqrt{3 \times 4}-2\sqrt{4 \times 5}+2\sqrt{3 \times 5}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{5}-2$

(5) -3

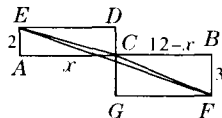
21. (1) $\left(a + \frac{1}{b} - \frac{a}{ab+1}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2} + 2\left[\frac{a}{b} - \frac{a^2}{ab+1} - \frac{a}{(ab+1)b}\right] = a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2} + 2$

$$\left[\frac{a(ab+1) - a^2b - a}{(ab+1)b} \right] = a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2}, \text{两边平方得证.}$$

$$(2) \text{ 在(1)中, 令 } a=1999, b=1, \text{ 则原式} = \left| 1999+1 - \frac{1999}{2000} \right| - \frac{1}{2000} = 1999$$

$$\begin{aligned} 22. f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{[\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}](\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})} = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{2} \\ \text{原式} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{998}}{2} = 5. \end{aligned}$$

23. 作线段 $AB=12$, 在 AB 上取 $AC=x$, 则 $BC=12-x$, 以 AC 为长, 2 为宽作长方形 $ACDE$, 则 $CE=\sqrt{x^2+4}$. 在 AB 的另一侧作长方形 $BCGF$, 使 $BF=3$, 则 $CF=\sqrt{(12-x)^2+9}$, $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{(12-x)^2+9} = EC + CF$, 由图知, 当 E, C, F 不在一条直线上时, $EC + CF > EF$. 当 E, C, F 三点在同一条直线上时, $EC + CF = EF = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, 故原式的最小值为 13.



24. 设 $\sqrt{6} + \sqrt{5} = x, \sqrt{6} - \sqrt{5} = y$, 则 $x + y = 2\sqrt{6}, xy = 1$, 于是
 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2\sqrt{6})^2 - 2 \times 1 = 22, x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 42\sqrt{6}$.
 所以, $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^6 + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^6 = x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3 = (42\sqrt{6})^2 - 2 \times 1^3 = 10582$
 又 $0 < \sqrt{6} - \sqrt{5} < 1$, 从而 $0 < (\sqrt{6} - \sqrt{5})^6 < 1$ 故 $10581 < (\sqrt{6} + \sqrt{5})^6 < 10582$
 所以, 比 $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^6$ 大的最小整数是 10582.

8 二次根式的化简求值

【例题求解】

例 1 由条件得 $x + \frac{1}{x} = 2$, 原式 $= \sqrt{\frac{1}{x + \frac{1}{x} + 3}} - \sqrt{\frac{1}{x + \frac{1}{x} + 9}} = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{11}}{11}$

例 2 选 D $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = \sqrt{2001}$, 原式 $= (a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = \sqrt{2001} \sqrt{(\sqrt{2001})^2 - (\sqrt{2000})^2} = \sqrt{2001}$

例 3 $a + b = 0$ 原等式两边分别乘以 $(\sqrt{1+a^2} - a), (\sqrt{1+b^2} - b)$, 得 $a + \sqrt{1+a^2} = \sqrt{b^2+1} - b, b + \sqrt{1+b^2} = \sqrt{1+a^2} - a$. 两式相加, 得 $a + b = -(\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2})$, 故 $a + b = 0$.

例 4 由 $0 < |a-b| = \frac{b}{a} < 1$, 知 a, b 同号, 且 $-1 < a-b < 1$,

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) [1 - (a-b)] = \frac{b-a}{ab} [1 - (a-b)]$$

(1) 当 a, b 同为正数时, 由 $\frac{b}{a} < 1$, 得 $a > b$ 则 $a-b = \frac{b}{a}$, 解得 $b = \frac{a^2}{a+1}$.

$$\text{故原式} = \frac{-\frac{b}{a}}{ab} \left(1 - \frac{b}{a} \right) = -\frac{b}{a^4} = -\frac{1}{a^2(a+1)}.$$

(2) 当 a, b 同为负数时, 由 $\frac{b}{a} < 1$, 得 $b > a$ 则 $a-b = -\frac{b}{a}$, 解得 $b = \frac{a^2}{a-1}$.

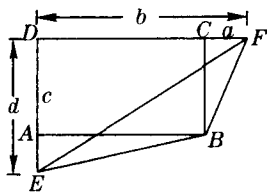
$$\text{故原式} = \frac{\frac{b}{a}}{ab} \left(1 + \frac{b}{a} \right) = \frac{a+b}{a^3} = \frac{a + \frac{a^2}{a-1}}{a^3} = \frac{2a-1}{a^2(a-1)}$$

例5 如图,作长方形 $ABCD$,使 $AB = b - a$, $AD = c$,延长 DA 至 E ,使 $DE = d$;延

长 DC 至 F ,使 $DF = b$,连结 EF , FB ,则 $BF = \sqrt{a^2 + c^2}$, $EF = \sqrt{b^2 + d^2}$,

$BE = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$,从而知 $\triangle BEF$ 就是题设的三角形,而 $S_{\triangle BEF}$

$$= S_{\text{长方形}ABCD} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle ABE} - S_{\triangle DEF} = (b-a)c + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}(d-c)(b-a) - \frac{1}{2}bd = \frac{1}{2}(bc - ad).$$



【学力训练】

1. $-\frac{101}{99}$ 2. $-\sqrt{2}$

3. $\frac{x+2}{x+3} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$, 则 $\frac{x+2}{x+3} - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $-\frac{1}{x+3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 原式 $= -\frac{1}{2(x+3)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

4. $x + \frac{1}{x} = \frac{4-\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{4-\sqrt{7}} = \frac{8}{3}$, 原式 $= \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} = \frac{9}{55}$

5. A 6. B 7. C 8. B

9. $x = \frac{16(\sqrt{17}-1)}{16} = \sqrt{17}-1$, $x+1 = \sqrt{17}$, 则 $x^2 + 2x - 16 = 0$, 则原式 $= (x^2 + 2x - 16)(x^3 - x + 1) - 1 = -1$.

10. 由条件得 $a - 2\sqrt{ab} - 15b = 0$, 即 $(\sqrt{a} - 5\sqrt{b})(\sqrt{a} + 3\sqrt{b}) = 0$, 因 $a > 0, b > 0$, 故只有 $\sqrt{a} - 5\sqrt{b} = 0$, 得 $a = 25b$, 则 原式 $= \frac{2 \times 25b + 3b + \sqrt{25b^2}}{25b - b + \sqrt{25b^2}} = \frac{58b}{29b} = 2$.

11. 由 $\begin{cases} 1-a \geq 0 \\ 2-a \geq 0 \end{cases}$ 得 $a \leq 1, a-3 < 0$, 原式 $= 0$

12. 将已知式左边分子有理化, 得 $\sqrt{a+4} - \sqrt{a-1} = 1$, 两式相加得 $\sqrt{a+4} = 3$, $a = 5$, 原式 $= \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$

13. $(2x-1)^2 = 5, x+1 = x^2$. 原式 $= \frac{x^3 + x^2}{x^5} = \frac{x+1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

14. 设 $m = \sqrt{1+x^2}, n = \sqrt{1-x^2}$, 则 $\frac{m+n}{m-n} = 7$, 又 $m^2 + n^2 = 2$, 得 $\frac{2+mn}{2-mn} = 49$, $mn = \frac{24}{25}$, 故原式 $= \frac{24}{25}$

15. C $x = \frac{1}{\sqrt{2001} + \sqrt{2000}} < \frac{1}{\sqrt{2000} + \sqrt{1999}} = y$

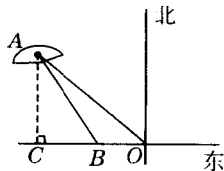
16. C 由已知得 $a - 2001 \geq 0, a \geq 2001$, 则 $a - 2000 + \sqrt{a-2001} = a$

17. B 设 $n (n \geq 2)$ 为自然数, 若 $n-1 < \sqrt[3]{(n-1)n(n+1)} < n$, 于是 $[\sqrt[3]{(n-1)n(n+1)}] = n-1$, 原式 $= 1 + 2 + \dots + 2000 = 2001000$

18. B $5 + 2\sqrt{b} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$, 则 $a = 0, b = 1, c = 1$.

19. 如图, $\angle AOB = 30^\circ, \angle ABC = 45^\circ, OB = 20$, 过 A 作 $AC \perp OB$ 的延长线于 C , 设 $BC = x$, 则 $AC = x, OA = 2x$, 由勾股定理得

$AC^2 + OC^2 = OA^2$, 即 $x^2 + OC^2 = (2x)^2$, 得 $OC = \sqrt{3}x$, 所以 $x + 20 = \sqrt{3}x$, 解得 $x = (10\sqrt{3} + 10)$ (海里)



20. $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \geq 0, a \geq 1$ $x = a + \frac{1}{a} - 2, x + 2 = a + \frac{1}{a}$, 则

$4x + x^2 = (x+2)^2 - 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$, 得 $\sqrt{4x + x^2} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \left|a - \frac{1}{a}\right| = a - \frac{1}{a}$.

原式 $= \frac{a + \frac{1}{a} + a - \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a} - a + \frac{1}{a}} = a^2$.

$$21. x+2 = \frac{(a+1)^2}{a}, x-2 = \frac{(a-1)^2}{a}, \quad \text{原式} = \frac{\left(\frac{a+1}{a} - \frac{|a-1|}{a}\right)\sqrt{a}}{\left(\frac{a+1}{a} + \frac{|a-1|}{a}\right)\sqrt{a}} = \frac{a+1-|a-1|}{a+1+|a-1|}.$$

当 $a \geq 1$ 时, 原式 $= \frac{1}{a}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 原式 $= a$.

$$22. \text{由} \left(a + \frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}}\right)^2 \text{得} a^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-a), a^4 = \frac{1}{8}(1-a)^2$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{8}(1-a)^2 + (a+1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-a) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(1-a)^2 + 8(a+1)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1-a) + (a+3)] = \sqrt{2} \end{aligned}$$

9 三角形的边与角

【例题求解】

例 1 设 $\angle C = x^\circ$, 则 $\angle A = \left(\frac{4}{7}x\right)^\circ$, $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - \frac{11}{7}x^\circ$, 则 $\frac{4}{7}x < 180 - \frac{11}{7}x < x$, 解得 $70 < x < 84$, 又 $\frac{4}{7}x$ 是整数, 得 $x = 77$, 故 $\angle A = 44^\circ$, $\angle B = 59^\circ$.

例 2 选 C $1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$ 等边三角形共 4 种, 底和腰不等的等腰三角形为 $(3, 3, 5), (5, 5, 3), (5, 5, 7), (7, 7, 3), (7, 7, 5), (19, 19, 3), (19, 19, 5), (19, 19, 7)$ 共 8 种, 不等边三角形为 $(3, 5, 7)$, 共 1 种, 总计有 13 种.

例 3 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时, $\angle BOC = 130^\circ$; 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, $\angle BOC = 50^\circ$

例 4 不妨设 $a < b < c$, 则由 $\begin{cases} a+b=30-c \\ a+b>c \end{cases}$, 得 $10 < c < 15$ 因 c 为整数, 故 $c = 11, 12, 13, 14$.

当 $c = 11$ 时, $b = 10, a = 9$.

当 $c = 12$ 时, $b = 11, a = 7; b = 10, a = 8$.

当 $c = 13$ 时, $b = 12, a = 5; b = 11, a = 6; b = 10, a = 7; b = 9, a = 8$.

当 $c = 14$ 时, $b = 13, a = 3; b = 12, a = 4; b = 11, a = 5; b = 10, a = 6; b = 9, a = 7$.

例 5 依题意, 有

$$\begin{cases} x+y+3x=100 & \text{①} \\ x \leq y \leq 3x & \text{②} \\ x+y < 3x & \text{③} \end{cases}$$

由①, ②得 $\frac{100}{7} \leq x \leq 20$, 由③得 $x < \frac{50}{3}$,
因 x 为正整数, 故 $x = 15$ 或 16 .
所以, 满足条件的三角形有两组,
需用火柴杆数目分别为 15, 40, 45 或 16, 36, 48.

【学力训练】

1. $5:3:1$ 三个外角和为 360° 2. $\frac{3}{2} < a < 5$ 3. 122° 4. $\frac{\alpha+\beta}{2}$

5. D 设等腰三角形的腰长为 a , 底边为 b , 则 $2a+b=10, b=10-2a$ 为偶数, 又 $b < 2a$, 故 $2b < 10, b < 5$.

6. C $\angle B < \frac{3}{5}\angle A, \angle C \leq \frac{2}{3}\angle B \leq \frac{2}{5}\angle A, \angle B + \angle C < \angle A, 180^\circ - \angle A < \angle A, \angle A > 90^\circ$

7. C 8. A $\angle A_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \angle A$ 9. 过 G 作 $GH \parallel EB$, 由已知条件推得 $BE \parallel CF$

10. 设最大角为 x° , 最小角为 y° , 则

$$\begin{cases} x + y + 180 - n = 180 \\ x - y = 24 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{n}{2} + 12 \\ y = \frac{n}{2} - 12 \end{cases} \quad \text{又 } \frac{n}{2} - 12 \leq 180 - n \leq \frac{n}{2} + 12, \text{ 解得 } 112^\circ \leq n^\circ \leq 128^\circ.$$

11. 8 12. $42^\circ \leq \beta \leq 72^\circ$ $\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ, \alpha = 2\gamma, \gamma = \frac{180^\circ - \beta}{3}$, 得 $\frac{180^\circ - \beta}{3} \leq \beta \leq \frac{2(180^\circ - \beta)}{3}$

13. $b > a, b > c$, 又 $a + c > b$, 则 $a + b + c \leq 3b$, 且 $a + b + c > 2b$, 得 $2b < 12 \leq 3b$, 得 $4 \leq b < 6$.

14. 55°

15. A $\angle B = 60^\circ, \angle C > \angle A$, 设 $\angle C = 60^\circ + x$, 则 $\angle A = 60^\circ - x, \angle B^2 = (\angle C)^2 - (\angle A)^2 = (\angle C + \angle A) \cdot (\angle C - \angle A)$, 得 $3600 = 120 \times 2x, x = 15^\circ, \angle C = 75^\circ, \angle A = 45^\circ$

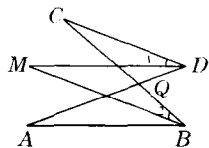
16. B

17. C $7 < c < 7 + a$, 而 $a \leq 7$ 且 a 为整数, 故 a 可取 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 再分别讨论

18. A 可以证明 $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{z}$

19. $\because OD, OB$ 分别平分 $\angle ADC, \angle ABC, \therefore \angle CDQ = 2\angle 1, \angle QBA = 2\angle 2$

由对顶三角形性质, 得 $\begin{cases} 2\angle 1 + \angle C = 2\angle 2 + \angle A \\ \angle 1 + \angle C = \angle 2 + \angle M \end{cases}$, 解得 $\angle C = 43^\circ$



20. 设长度为 4 和 12 的高分别是边 a, b 上的, 边 c 上的高为 $h, \triangle ABC$ 的面积为 S , 则 $a = \frac{2S}{4}, b = \frac{2S}{12}, c = \frac{2S}{h}$, 由 $\frac{2S}{4} - \frac{2S}{12} < \frac{2S}{h} < \frac{2S}{4} + \frac{2S}{12}$, 得 $3 < h < 6$, 故 $h = 5$.

21. $(a+b)(b+c)(c+a) > abc$, 即 $(2-c)(2-a)(2-b) > abc$, 得 $1 + abc < ab + bc + ac, a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) + 2abc < 4 - 2(ab+bc+ac) + 2(ab+bc+ac-1) = 2$.

22. (1) 当 $n = 4$ 时, 铅丝长度为 8, 满足题意的 (a, b, c) 只有一组: (2, 3, 3); 当 $n = 5$ 时, 铅丝长度为 10, 满足题意的 (a, b, c) 有两组: (2, 4, 4), (3, 3, 4); 当 $n = 6$ 时, 铅丝长度为 12, 满足题意的 (a, b, c) 有三组 (2, 5, 5), (3, 4, 4), (4, 4, 4).

(2) 当 $n = 12$ 时, 铅丝长度为 24, 则 $a + b + c = 24$, 且 $\begin{cases} a + b > c \\ a \leq b \leq c \end{cases}$.

由此得 $8 \leq c \leq 11$, 即 $c = 8, 9, 10, 11$, 故满足题意的 (a, b, c) 共有如下 12 组: A(2, 11, 11); B(3, 10, 11); C(4, 9, 11); D(5, 8, 11); E(6, 7, 11); F(4, 10, 10); G(5, 9, 10); H(6, 8, 10); I(7, 7, 10); J(6, 9, 9); K(7, 8, 9); L(8, 8, 8)

(3) 不同的分类标准, 决定不同的分类, 现举例如下: ① 按最大边 c 的值分类, 有四类; ② 根据是否等边、等腰三角形分类, 共有三类; ③ 根据最大角与直角的关系分类, 共有三类.

10 全等三角形

【例题求解】

例 1 方案(2): 若这个角是这两边的夹角, 则这两个三角形全等; 方案(3): 若这个角是钝角, 则这两个三角形全等; 方案(4): 若这两个三角形都是锐角三角形, 则这两个三角形全等.

例 2 选 B 延长 AD 到 E , 使 $DE = AD$, 连结 EC , 则 $\triangle ABD \cong \triangle ECD, AB = EC, 2AD - EC < AB < 2AD + EC$.

例 3 $\angle EBQ = \angle DCQ$, 由 SAS 得 $\triangle ABP \cong \triangle QCA$.

例 4 (1) 当这两个三角形同是锐角、直角或钝角三角形时, 可证出第三边所对的角相等;

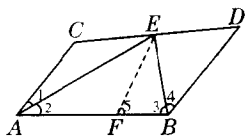
(2) 当有一个是锐角三角形, 一个是钝角三角形时, 可证出第三边所对的角互补.

例 5 如图, 在 AB 上截取 AF , 使 $AF = AC$, 连结 EF , 由 $\triangle ACE \cong \triangle AFE$, 得 $\angle C = \angle AFE, \therefore AC \parallel BD, \therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$

而 $\angle 5 + \angle AFE = 180^\circ$, 则 $\angle 5 = \angle D$.

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BDE$ 中, $\because \angle 5 = \angle D, \angle 3 = \angle 4, BE = BE$,

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BDE$, 得 $BF = BD$. 故 $AB = AF + BF = AC + BD$.



【学力训练】

1. $BC = B'C'$ (或 $\angle BAC = \angle B'A'C', \angle C = \angle C'$) 2. ①③④ \Rightarrow ② (或 ①②④ \Rightarrow ③)

3. 略 4. 90° 5. B 6. B 7. D

8. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C', \angle ACB' = \angle ACB$, 而 $\angle BCB' = 35^\circ$, 得 $\angle A'CD = 35^\circ$, 又 $\angle A' + \angle A'CD = 90^\circ$, 则 $\angle A' = \angle A = 55^\circ$

9. $BE = CD, \angle ABE = \angle ACD, AB = AC, \triangle DOB \cong \triangle EOC$ 等, 证明略

10. $\triangle AEP \cong \triangle AFP, \angle AEP = \angle AFE$, 而 $\angle AEP = \angle B + \angle M, \angle ACB = \angle CFM + \angle M = \angle AFE + \angle M$, 代入即可证.

11. 45° 或 135° , 对高的位置进行讨论. 12. $AB - AC$, 在 AB 上截取 $AQ = AC$, 连 $PQ, \triangle APQ \cong \triangle ACP$

13. 3 由其中任两个论断为条件, 均可推得 $\triangle AED \cong \triangle CEF$

14. 6 在 AB 上截取 $AF = AD$, 连 EF 15. A 在 BA 延长线上截取 $AQ = AC$, 连结 PQ

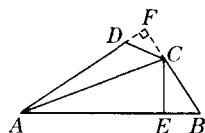
16. C $\angle FBC + \angle FCB = 60^\circ, \angle ACD = \angle CBE$, 可证 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$ 17. C (3)、(4) 为假命题

18. 如图, 作 $CF \perp AD, AB + AD = 2AE = AE + AF$

$\therefore AB - AE = AF - AD$, 即 $BE = DF$.

可证: $\text{Rt}\triangle CBE \cong \text{Rt}\triangle CDF$, 得 $\angle ABC = \angle CDF$

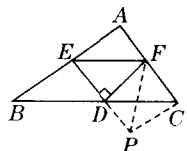
$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \angle CDF + \angle ADC = 180^\circ$



19. 延长 ED 至 P , 使 $DP = DE$, 连结 FP, CP

由 $\triangle BDE \cong \triangle CDP$, 得 $BE = CP$; 由 $\triangle EDF \cong \triangle PDF$, 得 $EF = FP$.

在 $\triangle CEP$ 中, $CP + CF = BE + CF > FP = EF$.

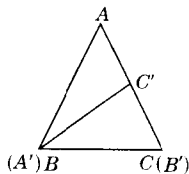


20. 当 $a \neq b$, 一定有 $\angle D + \angle B = 180^\circ$; 当 $a = b$ 时, 只有 $\angle D = \angle B = 90^\circ$, 才有 $\angle D + \angle B = 180^\circ$

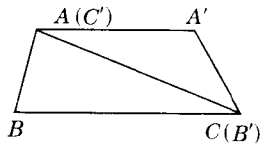
21. (1) 不能保证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; (2) 能保证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

(3)、(4) 不能保证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, 给出反例仅供参考:

图(1)中, $\angle A = \angle C'A'B, \angle ABC = \angle A'B'C', \angle C = \angle A'C'B', BC = A'B'$, 图(2)中, $\angle BAC = \angle A', \angle B' = \angle C'B'A, \angle ACB = \angle A'C'B', AC = B'C', AB = A'C'$



图(1)



图(2)

22. (1) 分别过 B, B' , 作 $CA, C'A'$ 的垂线于 D, D' , 先证明 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle A'B'D'$, 再证明 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;
(2) 不成立

11 等腰三角形的性质

【例题求解】

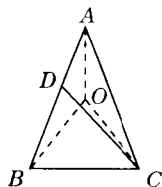
例 1 8

例 2 选 C $\angle BGH = \angle BHK, \angle ABC = 2\angle BGH = \angle ACB, \angle BAC = \angle BGH, 5\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

例 3 当 $AD = CD$ 时, $\angle ADG = \angle CDF$, 过 A 作 $\angle A$ 的平分线交 BD 于 G, 先证明 $\triangle ABG \cong \triangle ACF$, 再证明 $\triangle AGD \cong \triangle CFD$, 由此可得 $AD = CD$

例 4 延长 BC, AE 交于 F 点, 先证明 $\triangle AFC \cong \triangle BDC$, 得 $AF = BD = 2AE$, 则 $AE = FE$, 再证 $\triangle ABE \cong \triangle FBE$.

例 5 如图, 以 BC 边为边在 $\triangle ABC$ 内作等边 $\triangle BCO$, 连 AO , 由图形的轴对称知 $\triangle ABO \cong \triangle ACO$, 则 $\angle BAO = \angle CAO = 10^\circ, \angle ABO = 20^\circ, \angle AOB = \angle AOC = 150^\circ$
又 $BO = BC = AD$, 得 $\triangle ACD \cong \triangle BAO$
则 $\angle ADC = \angle AOB = 150^\circ$, 故 $\angle BDC = 30^\circ$.



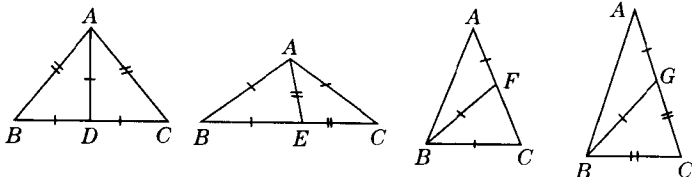
【学力训练】

1. 略 2. 5 cm 注意讨论 3. $70^\circ \triangle BDP \cong \triangle CPE$

4. 20° 由 $\angle ADC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$, 得 $\angle B = 80^\circ$ 5. B 6. C 7. B

8. A 设 $\angle EDC = x$, 则 $\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD$, 即 $\angle ADE + x = \angle ABC + \alpha = \angle C + \alpha, \angle ADE = \angle AED = x + \angle C$, 即 $x + \angle C + x = \angle C + \alpha$

9. 符合题意的图形, 有以下 4 种情形:



由此得相应的度数为: $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ), (36^\circ, 36^\circ, 108^\circ), (36^\circ, 72^\circ, 72^\circ), (\frac{180^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7})$

10. 过 D 作 $DF \parallel AC$ 交 BC 于 F, 证明 $\triangle DFG \cong \triangle ECG$.

11. 作 $DF \parallel AC$ 交 BE 于 F, 构造以 EC, ED 为边的两个全等三角形, $\triangle ABC, \triangle BFD$ 都为等边三角形, $\triangle ACE \cong \triangle FED$ (或延长 BD 至 G, 使 $DG = AB$, 证明 $\triangle BEC \cong \triangle GED$)

12. $(30^\circ, 30^\circ, 120^\circ), (15^\circ, 150^\circ, 15^\circ), (75^\circ, 30^\circ, 75^\circ)$, 由题意可画出三种图形.

13. 45° 14. $60^\circ \triangle ABP \cong \triangle CAQ$ 15. 8

16. A 在 BC 上截取 $DE = BD, \triangle ABD \cong \triangle AED, AB = AE$, 而 $AB + BD = DC = CE + DE$, 则 $AB = AE = CE, \angle B = \angle AED = 2\angle C$, 又 $\angle B + \angle C = 60^\circ$

17. B $\angle AED = \angle AEG + \angle FED, \angle AGF = \angle AEG + \angle EAG$, 则 $\angle FED = \angle EAG = 45^\circ$

18. D

19. B 设底为 $2a$, 则高为 a , 周长为 $2\sqrt{2}a + 2a = 2a(\sqrt{2} + 1)$ 是有理数, 则 a 为 $(\sqrt{2} + 1)$ 的有理化因式.

20. (1) 用面积法证明; (2) $PD - PE = CF$, 证法同上:

21. 过 C 作 AB 的平行线交 AF 的延长线于 P, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACP, \triangle MCF \cong \triangle PCF$, 得 $BE = AP, MF = PF, EG = MG$, 则 $BE + EG = AP + MG = AF + FP + MG = AF + FM + MG$, 故 $BG = AF + FG$.

22. 作 $\angle BAC$ 的平分线与 CO 的延长线交于 D, 连 BD , 则 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 则 $\angle ABD = \angle ACD = 30^\circ, \angle OBD =$

$\angle ABC - \angle OBC - \angle ABD = 20^\circ = \angle ABD$, $\angle DOB = \angle OBC + \angle OCB = 40^\circ = \angle DAB$, 从而 $\triangle ABD \cong \triangle OBD$,

$AB = OB$, 即 $\triangle ABO$ 为等腰三角形, 得 $\angle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$

23. (1) $BD = CE$; (2) $BE = CD$; (3) $\angle BAD = \angle CAE$; (4) $\angle BAE = \angle CAD$; (5) $\angle B = \angle C$

24. 如图, 在 AC 延长线上截取 $CM_1 = BM$, 由 $\text{Rt}\triangle BDM \cong \text{Rt}\triangle CDM_1$, 得 $MD = M_1D$,

$\angle MDB = \angle M_1DC$

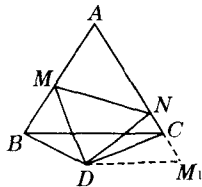
$\therefore \angle MDM_1 = 120^\circ - \angle MDB + \angle M_1DC = 120^\circ$, 又 $\angle MDN = 60^\circ$,

$\therefore \angle NDM_1 = 60^\circ$

$\therefore MD = M_1D$, $\angle MDN = \angle NDM_1 = 60^\circ$, $DN = DN$

$\therefore \triangle MDN \cong \triangle M_1DN$, 得 $MN = NM_1$

故 $\triangle AMN$ 的周长 $= AM + MN + AN = AM + AN + NM_1 = AM + AM_1 = AB + AC = 2$.



12 等腰三角形的判定

【例题求解】

例1 37 例2 选C

例3 延长 DB 于 E , 使 $BE = AB$, 连 AE , 则 $\angle ABC = 2\angle E = 2\angle C$, $\angle C = \angle E$

例4 连结 BP , 可证明 $\triangle ADC \cong \triangle CPB$, 则 $AD = BP$, 又 $\angle RAB + \angle BAC + \angle QAE = 180^\circ$,

$\therefore R, A, Q$ 三点共线, 又 $\angle CBP = \angle CAD = 60^\circ$, $\angle RBA + \angle ABC + \angle CBP = 180^\circ$,

$\therefore R, B, P$ 三点共线, 而 $AQ = AE = AD = BP$

$\therefore RQ = RA + AQ = RB + BP = RP$, 又 $\angle P = 60^\circ$.

故 $\triangle PQR$ 是等边三角形

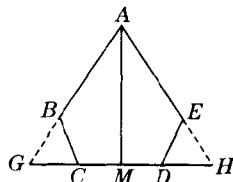
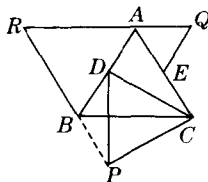
例5 双向延长 CD 与 AB 、 AE 的延长线交于 G 、 H , 易证 $\triangle BCG \cong \triangle EDH$, 则 $BG =$

EH , $\angle G = \angle H$, $GC = DH$.

$\therefore AG = AH$, $GM = MH$.

易证 $\triangle AGM \cong \triangle AHM$, 则 $\angle AMG = \angle AMH = 90^\circ$,

故 $AM \perp CD$



【学力训练】

1. 30 2. 6 3. 2:1 4. 2 5. B 6. D 7. D 8. D

9. (1) 4个条件两两组合有: ①②、①③、①④、②③、②④和③④, 逐一验证发现: ①③、①④、②③、②④都能判定 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. (2) 证明略

10. 延长 AD 至 G , 使 $DG = AD$, 连结 BG , 由 $\triangle ADC \cong \triangle GDB$, 得 $AC = BG$, $AC \parallel BG$, 又 $BE = AC$, 则 $BE = BG$, $\angle BED = \angle BGD$, 得 $\angle FAE = \angle BGD = \angle BED = \angle AEF$, 故 $AF = EF$.

11. 延长 BC 到 E , 使 $CE = AB$, 延长 CB 到 F , 使 $BF = AC$, 连结 AF , AE , 易证 $\triangle AFB \cong \triangle EAC$, 则 $\angle F = \angle CAE$, $\angle E = \angle BAF$, 得 $\angle E = \angle CAE$, 故 $AC = CE = AB$.

12. 45°

13. 设 $\angle A = x^\circ$, 则 $\angle BED = 2x^\circ$, $\angle EBD = 2x^\circ$, $\angle C = 3x^\circ$, $x + 3x + 3x = 180^\circ$, $x = \frac{180^\circ}{7}$, 即 $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$

14. 设 $\angle B = \angle BAD = x^\circ$, $\angle C = \angle CAE = y^\circ$, 则 $2x + 2y + \angle DAE = 180^\circ$, $x + y + \angle DAE = 150^\circ$, 从而 $\angle DAE = 40^\circ$, $x + y = 70^\circ$, $\angle BAC = 110^\circ$

15. 360° 或 $\frac{180^\circ}{7}$ 16. D 17. C 在五边形内作等边三角形 ABF , 则 E, F, C 在一条直线上

18. B 将 $\triangle APC$ 绕A点逆时针旋转 60° ,得 $\triangle AP'C'$,则 $\triangle APC \cong \triangle AP'C'$, $\triangle PAP'$ 为等边三角形.

19. 延长FM至P,使 $PM = FM$,连结BP,则 $\triangle BMP \cong \triangle CMF$, $AE = AF$, $BE = BM$

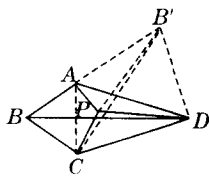
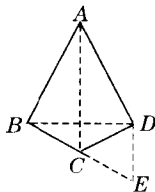
20. 延长BD至E,使 $DE = DC$,连AE, $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BDC$,又 $\angle ADE = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BDC$,则 $\angle ADC = \angle ADE$,从而 $\triangle ADC \cong \triangle ADE$, $AE = AC = AB$,又 $\angle ABD = 60^\circ$,故 $\triangle ABE$ 为等边三角形,即 $AE = AC = BD + DC$.

21. 以AD为边,在 $\triangle ADB$ 内作等边 $\triangle ADE$,连结BE, $\triangle EAB \cong \triangle DAC$, $\angle BEA = 150^\circ$,又 $\angle BED = 360^\circ - \angle BEA - \angle AED = 150^\circ$,且 $\angle BEA = \angle BED$,由 $\triangle BEA \cong \triangle BED$,得 $BD = BA$.

22. 当D为BC的端点,显见 $\triangle AED$ 为等边三角形;当D为BC边的中点,取AC的中点,连结DF,易证 $\triangle CDF$ 为等边三角形,又 $\triangle ADF \cong \triangle EDC$,故 $\triangle ADE$ 为等边三角形,猜测:当D为BC上任意点时, $\triangle ADE$ 也为等边三角形.

23. (1) 延长BC至E,使 $CE = CD$, $\angle DCE = 60^\circ$,又 $CD = CE$,则 $\triangle CDE$ 为等边三角形,故 $DE = CD = CE$, $\angle CDE = 60^\circ$, $\triangle ABD$ 为等边三角形.可证 $\triangle ACD \cong \triangle BED$, $AC = BE = BC + CE = BC + CD$,即 $AC = BE = BC + CE$

(2) 在四边形ABCD外侧作正三角形 $AB'D$,利用 $\angle APD = 120^\circ$,则四边形 $AB'DP$ 符合(1)中的条件,于是 $B'P = AP + PD$,易知 $B'C \leq PB' + PC$,得 $B'C \leq AP + PD + PC$,易证 $\triangle AB'C \cong \triangle ADB$,得 $B'C = DB$,故 $PA + PD + PC \geq BD$.



13 从勾股定理谈起

【例题求解】

例1 由 $\triangle BED \cong \triangle ACD$,得 $BE = AC$

例2 选A 过A作 $AD \perp BC$ 于D,则 $AP^2 + BP \cdot PC = AD^2 + PD^2 + (BD - DP)(DC - PD) = AB^2$

例3 过C作 $CQ \perp AP$ 于Q,连结BQ,则 $AQ = BQ = CQ$,可得 $\angle ACB = 75^\circ$.

例4 如图,连结AC,则可证 $\triangle ADC$ 为等边三角形, $DC = CA = AD$

以BC为边向外作等边三角形BCE,即 $BC = BE = CE$,则 $\angle BCE = \angle EBC = \angle CEB = 60^\circ$, $\angle ABE = \angle ABC + \angle EBC = 90^\circ$,连结AE,则 $AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + BC^2$,易证 $\triangle BDC \cong \triangle EAC$,得 $BD = AE$,故 $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

例5 如图,把 $\triangle BPC$ 绕B点逆时针旋转 60° ,得 $\triangle BP'A$,则 $\triangle BPC \cong \triangle BP'A$, $BP' = BP$, $P'A = PC$,又 $\angle P'BP = 60^\circ$,得 $\triangle P'BP$ 为等边三角形, $P'P = BP$.

$$\therefore PC^2 = P'A^2 = PB^2 + PA^2 = P'P^2 = PA^2$$

$$\therefore \angle APP' = 90^\circ, \angle APB = 150^\circ$$

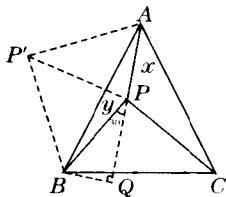
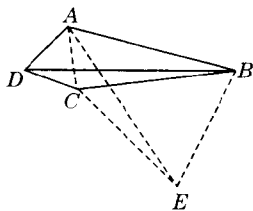
延长AP,过B作 $BQ \perp AP$ 交AP延长线于Q,设 $PA = x$, $PB = y$,则

$$BQ = \frac{1}{2}y, PQ = \frac{\sqrt{3}}{2}y, AQ = x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABQ \text{ 中, } BQ^2 + AQ^2 = AB^2, \text{ 即 } \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = (\sqrt{25 + 12\sqrt{3}})^2 \quad ①$$

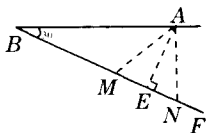
$$\text{又 } PC^2 = PA^2 + PB^2, \text{ 即 } x^2 + y^2 = 25 \quad ②$$

解①、②联立的方程组得 $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 故 $PA=4, PB=3$ 或 $PA=3, PB=4$



【学力训练】

1. $BC = \sqrt{2} BC'$ 2. $3\sqrt{2}$ 3. 12 设 $BD = t$, 则 $13^2 - t^2 = 15^2 - (14 - t)^2$
4. 36 连 AC , $AC = 5$, 又 $AD^2 = AC^2 + CD^2$, 则 $\angle ACD = 90^\circ$ 5. C 6. D
7. D 延长 AD , BC 交于 E 点
8. D 在 AB 上截取 $AE = AC$, 连 DE , 则 $\triangle ADE \cong \triangle ACD$, $\angle DEB = \angle C = 90^\circ$, $DC = DE$
9. (1) 作 $AE \perp BF$ 于 E , $AE = \frac{1}{2} AB = 150 < 200$, 故 A 市必受这次沙尘暴的影响.
 (2) 以 A 为圆心, 200 千米为半径作弧, 交 BF 于 M, N , 连 AM, AN , $ME = \sqrt{AM^2 - AE^2} = 50\sqrt{7}$, $MN = 2ME = 100\sqrt{7}$.
 故 A 市受沙尘暴影响的时间为 $100\sqrt{7} \div 10\sqrt{7} = 10$ (小时)
10. 连结 AM , 则 $BM = AM$, $\angle MAC = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 30^\circ$
11. 延长 ED 至 G , 使 $DC = ED$, 连结 CG, FG , 则 $BE = CG$, $EF = FG$, $\angle FDG = 90^\circ$
12. $2\sqrt{61}$ 延长 AD 到 E , 使 $DE = AD$, 连结 BE , 则 $BE = AC = 13$, $AE = 12$, 又 $AB = 5$, 则 $\angle BAE = 90^\circ$
13. 150° 14. 1994004 设邻边为 y , 另一直角边为 x , 由 $(y+x)(y-x) = 1997^2$, 得 $\begin{cases} y+x = 1997^2 \\ y-x = 1 \end{cases}$
15. $5\sqrt{2} \leq x < 10$, 连 CD , 则 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$, $x = 2DE$, 当 E 为 AC 中点时, DE 取最小值, 当点 E 向 A 运动或向 C 运动时, DE 增长, $DE < 5$
16. D 设第三边为 x , 则 $\begin{cases} x > 3-1 \\ 1+3 > x \end{cases} \begin{cases} 1^2 + x^2 > 3^2 \\ 1^2 + 3^2 > x^2 \end{cases}$ 17. A
18. D $h_a \leq b, h_b \leq a$, 因此 $a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$, $\therefore a = h_a = b = h_b = a$, 又由 $a = h_b$ 知 $\angle C = 90^\circ$
19. B $CE = CF$, 可证明 $CG = BF$, 从而 $CF = BG$
20. $\frac{169}{4}$ 连结 AD , 由 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$, 得 $ED = DF$, $AE = CF = 5$, $AF = BE = 12$, $EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = 13$
21. 过 E 作 $EG \perp AB$ 于 G , 先证明 $\text{Rt}\triangle EAG \cong \text{Rt}\triangle ABC$, 再证明 $\triangle EFG \cong \triangle DFA$
22. $EF^2 = BE^2 + CF^2$ 将 $\triangle BAE$ 绕 A 点旋转 90° 得 $\triangle CAE'$, 连结 $E'F$, 则 $\triangle BAE \cong \triangle CAE'$, $\triangle EAF \cong \triangle E'AF$
23. 若不再引辅助线, 要使 D 为 AB 的中点, 可添加下列条件之一: ① $\angle A = \angle DBE$; ② $\angle A = \angle CBE$; ③ $\angle DEA = \angle DEB$; ④ $\angle DEA = \angle BEC$; ⑤ $\angle A = 30^\circ$; ⑥ $\angle CBD = 60^\circ$; ⑦ $\angle AED = 60^\circ$; ⑧ $\angle CED = 120^\circ$ (以上是角的关系); ⑨ $AB = 2BC$; ⑩ $2AC = \sqrt{3}AB$; ⑪ $AC = \sqrt{3}B$; ⑫ $BE = AE$ (以上是边的关系); ⑬ $\triangle BEC \cong \triangle AED$ (三角形的关系)
24. 假设存在符合要求的直角三角形, 并设边长分别为 a, b, c , c 为斜边, a, b 都为正整数, 则 $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 & \text{①} \\ a + b + c = \frac{1}{2}ab & \text{②} \end{cases}$
 由①, 得 $c = \frac{1}{2}ab - (a+b)$ 代入②, 得 $a^2 + b^2 = \left[\frac{1}{2}ab - (a+b) \right]^2$ ③
 化简③, 得 $ab - 4a - 4b + 8 = 0$, 从而 $a = \frac{4b-8}{b-4} = 4 + \frac{8}{b-4}$
 因 a 为正整数, 故 $b-4 \mid 8$, $b-4 = 1, 2, 4, 8$, 得 $b = 5, 6, 8, 12$ 代入得 $a = 12, 8, 6, 5$, $c = 13, 10, 10, 13$
 综上知符合要求的直角三角形有两个, 边长分别为 $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$.



14 多边形的边角与对角线

【例题求解】

例1 A_1 的周长是 3, A_2 的周长是 $\frac{4}{3} \times 3$, A_3 的周长是 $(\frac{4}{3})^2 \times 3$, 由此可知 A_4 的周长为 $(\frac{4}{3})^3 \times 3 = \frac{64}{9}$.

例2 选 C 设 x 为一个内角度数, 则 $(n-2) \times 180 = 1993 + x$, $n-2 = \frac{1993+x}{180} = 11 + \frac{13+x}{180}$ $180 \mid 13+x$, 又 $0 < x < 180$, 则 $13+x=180$, $n-2=11+1$, $n=14$

例3 假定在接合处一共有 k 块正 n 边形地砖, 由于正 n 边形的所有内角都相等, 则 $k \cdot \frac{(n-2) \times 180}{n} = 360$

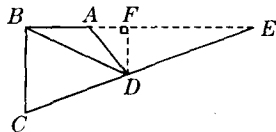
即 $k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$. 因 k 为整数, 故 $n-2 \mid 4$, $n-2=1, 2, 4$ 得 $n=3, 4$ 或 6

由此可见, 只有三种正多边形的瓷砖, 可以按要求铺地, 即正三角形、正方形和正六边形.

例4 如图, 延长 BA 、 CD 交于 E , 过 D 作 $DF \perp BE$ 于 F , 则 $\angle FAD = 60^\circ$, $AF = \frac{3}{2}$, $DF = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

在 $Rt\triangle BDF$ 中, $BF = \sqrt{BD^2 - DF^2} = \sqrt{7^2 - (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{13}{2}$

故 $AB = BF - AF = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = 5$.



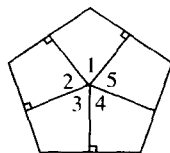
例5 (1) 图中 5 块阴影部分能拼成一个小五边形

$BF = AG = AH = EI = EK = DL = DM = CN = CO = BP = 4$

$\angle BFB' = \angle AGA' = \angle COC' = \angle BPB' = \angle DMD' = \angle CNC' = \angle EKE' = \angle DLD' = \angle AHA' = \angle EIE' = 90^\circ$

又 $(\angle A' + \angle B' + \angle C' + \angle D' + \angle E') + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5) = 5 \times 180^\circ$, 而 $\angle A' + \angle B' + \angle C' + \angle D' + \angle E' = (5-2) \times 180^\circ = 3 \times 180^\circ$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$



(2) 多边形增加的周长等于 $A'H + A'G + B'F + B'P + C'O + C'N + D'M + D'L + E'K + E'I$, 其值恰为图中阴影, 区域构成的五边形的周长, 该五边形存在一个半径为 4 的最大圆, 其周长 $S >$ 圆周长 8π , $S > 8\pi > 8 \times 3.14 = 25.12 > 25$.

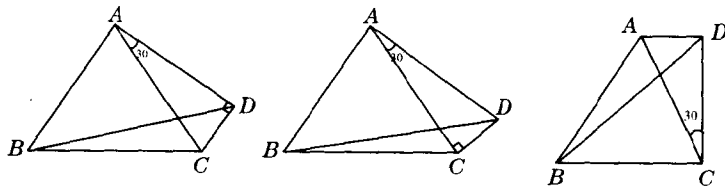
【学力训练】

1. 72, 56 2. 360° 3. 设 $AD = x$, 则 $7 - (4+2) < x < 7 + 4 + 2$, 得 $1 < x < 13$

4. $n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ = 360^\circ$

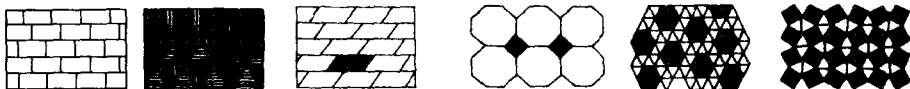
5. B n 边形外角中最多有 3 个角为钝角, 即内角中最多有 3 个不是锐角, 得 $n \leq 3+2=5$

6. D 7. C 8. 如图, 可分别求得 $BD = \sqrt{7}$, $\frac{2}{3}\sqrt{21}$, $2\sqrt{7}$



9. 延长 CD 与 FE 的延长线交于 H , 延长 CB 与 FA 的延长线交于 G , 则 $\angle BAG = 34^\circ$, $\angle G = 56^\circ$, $\angle HDE = 34^\circ$, $\angle H = 46^\circ$, $\angle F = 134^\circ$

10. (1) 略; 符合 (2)、(3) 小题要求的铺地方案很多, 下面提供几例仅供参考:



11. $7, 540^\circ$ 12. $180^\circ, (n-2) \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + (n-2) \cdot 180^\circ = (n-4) \cdot 180^\circ$ 13. 540°

14. 14 向外补形得正三角形 15. B $1080^\circ \div 8 = 135^\circ, 135^\circ \div 6 = 22.5^\circ$

16. D 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E 17. D

18. 假设从四点中任选出的三点构成的三角形的三个内角都大于 45° , 当 $ABCD$ 构成凸四边形时, 可得各角和大于 360° , 与四边形内角和为 360° 矛盾; 当 $ABCD$ 构成凹四边形时, 可得各角和大于 180° , 与三角形内角和为 180° 矛盾.

19. 设大小正方形边长分别为 x, y , 则 $nx^2 = (n+76)y^2$

若 $(x, y) = d$, 记 $x = dx_1, y = dy_1, (x_1, y_1) = 1$, 则 $nx_1^2 = (n+76)y_1^2$

变形得 $(x_1 + y_1)(x_1 - y_1)n = 76y_1^2 = 2^2 \times 19 \times y_1^2, (x_1^2 - y_1^2, y_1^2) = 1$

则 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 19 \\ x_1 - y_1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 2 \times 19 \\ x_1 - y_1 = 2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = 9 \end{cases}$, 得 $x = 324$

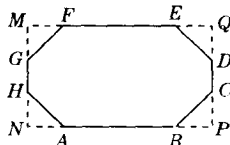
20. 双向延长 AB, CD, EF, GH 得四边形 $MNPQ$, 原八边形内角都相等, 其每一个

内角为 $\frac{(8-2) \times 180^\circ}{8} = 135^\circ$, 每一个外角为 45° , 因此 $MNPQ$ 为长方形,

$\triangle BPC, \triangle DQE, \triangle FMC, \triangle ANH$ 都是等腰直角三角形, 设 $GH = x, HA = y$, 由

$MQ = NP$, 得 $MF + FE + EQ = NA + AB + BP$, 即 $\sqrt{2} + 6 + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}y + 7 +$

$2\sqrt{2}$, 解得 $y = 3 - \sqrt{2}$, 同理由 $MN = QP$, 得 $x = 3 + 2\sqrt{2}$. 故该八边形周长为 $32 + \sqrt{2}$.



21. (1) 共有 $\frac{(10-3) \times 10}{2} = 35$ 条对角线, 因为边与对角线共有 45 条, 每条属于 8 个三角形的边, 则三角形数为 $\frac{48 \times 8}{3} = 120$ 个.

(2) 奇三角形个数是偶数. 因为凸十边形每个顶点属于 40 个三角形, 也就是说凸十边形每个顶点所写的数在总和中计算了 40 次, 那么总和应为十顶点所标数和的 40 倍, 则一定是偶数, 偶三角顶点之和必为偶数, 故奇三角形个数必为偶数.

22. 因为凸十一边形是由正三角形和正方形拼成的, 所以, 各内角的大小只可能是 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$, 设这 4

个角个数分别为 x, y, z, w , 则 $\begin{cases} x + y + z + w = 11 \\ 60x + 90y + 120z + 150w = (11-2) \times 180 \end{cases}$

化简得 $3x + 2y + z = 1$, 正整数解为 $x = y = 0, z = 1, w = 10$

这说明, 所求凸十一边形一个角是 120° , 它由两个正三角形的内角拼成, 其余 10 个角都是 150° , 是由一个正三角形的内角和一个正方形的内角拼成, 草图略.

15 平行四边形

【例题求解】

例 1 $\frac{60}{13}$ 过 A 作 $AG \perp BD$ 于 G, 则 $PE + PF = AG$, 由 $AG \cdot BD = AB \cdot AD$, 得 $AG = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{12 \times 5}{13} = \frac{60}{13}$

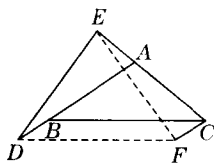
例 2 选 A 其中①、②、③正确

例 3 连结 EF , 可证 $\angle AGE = \angle AEG$, 则 $AG = AE$, 又 AF 平分 $\angle DAC$, 则 $AO \perp BE$, $GO = EO$, 由 $\triangle ABO \cong$

$\triangle FBO$, 得 $AO = FO$, 故四边形 $ACFE$ 为平行四边形, 所以 $GF \parallel AC$.

例 4 $PC = EF = PD$, $\angle CPB = 45^\circ + \angle HPF = 45^\circ + \angle PFH = 45^\circ + \angle EPG = \angle GPA = \angle BPD$, 可证明 $\triangle CPB \cong \triangle DPB$, 故 $BC \perp BD$, $BC = BD$

例 5 $\triangle ADE$ 中, $AD = ED$, 其底角 $\angle EAD$ 必为锐角, 则 $\angle BAC$ 为钝角, 必为顶角, 从而 $AB = AC$, 过 C 作 AD 的平行线, 与过 D 作 BC 的平行线交于点 F , 连结 EF , 则 $BCFD$ 为平行四边形, 得 $DB = CF$, $BC = DF$, $\angle EAD = \angle ECF$, 又 $AD = CE$, $AE = DB = CF$, $\angle EAD = \angle ECF$, 则 $\triangle ADE \cong \triangle CEF$, 得 $ED = EF = DF$, $\triangle DEF$ 为等边三角形.



设 $\angle BAC = \alpha$, 则 $\angle ADF = \angle ABC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\angle DAE = 180^\circ - \alpha$, $\angle ADE = 180^\circ - 2\angle DAE = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ$

由 $\angle ADF + \angle ADE = \angle EDF = 60^\circ$, 得 $\frac{180^\circ - \alpha}{2} + (2\alpha - 180^\circ) = 60^\circ$, 得 $\alpha = 100^\circ$, 故 $\angle BAC = 100^\circ$

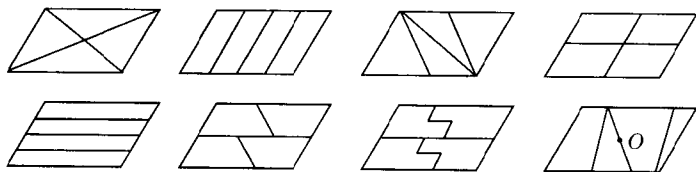
【学力训练】

1. $2a$ 2. 45° 3. 平行四边形, $\angle BAC = 150^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ 4. $\sqrt{3}$ 此三角形为直角三角形 5. C

6. C 设每个小矩形的较短边为 x , 较长边为 y , 则 $AB = CD = x + y$, $BC = 2y$, $AD = 5x$, 得 $\begin{cases} 7x + 4y = 68 \\ 2y = 5x \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases}$, 故 $S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot BC = 14 \times 20 = 280$

7. D $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 同底等高, 面积相等 8. A

9. 可以从作对角线, 作边的平行线, 过中心任作一直线 3 个方面讨论, 下面设计仅供参考



10. 连结 CM , 证明 $ACMN$ 为平行四边形.

11. (1) $EO = OC = FC$

(2) $\angle ECF = 90^\circ$, 当 $OA = OC$ (即 O 为 AC 中点) 时又 $EO = FO$, $\angle ECF = 90^\circ$, 则四边形 $AECF$ 为矩形.

12. 在四边形 $ABCD$ 中, 如果 $AB \parallel DC$, $\angle A = \angle C$, 那么 $AD = BC$. 13. $2\sqrt{3}$

14. $CE = BC - BE = 3$, 在 $\text{Rt}\triangle BEF \cong \text{Rt}\triangle CDE$, $BF = CE = 3$, $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 5$

15. 设 $AF = CF = x$, 则 $FB^2 + CB^2 = FC^2$, 即 $(8 - x)^2 + 4^2 = x^2$, 解得 $x = 5$, 故 $S_{\triangle AFC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCF} = 10$

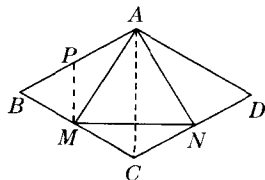
16. B 取 DE 中点 G , 连 AG , 则 $DE = 2AG = 2AB$, 得 $AG = AB$ 17. C

18. A 无论 P 在正方形 $ABCD$ 外或内, 都可以证明 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. 19. B

20. 从 6 个条件中任取 2 个, 只有 15 种组合, 其中能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有以下 9 种情形: ①与③; ②与④; ⑤与⑥; ①与②; ③与④; ①与⑤; ①与⑥; ③与⑤; ③与⑥

21. (1) 若 $\angle MAN = 60^\circ$, 则易证 $\triangle AMN$ 为等边三角形

(2) 若 $\angle AMN = 60^\circ$, 过 M 作 CA 的平行线交 AB 于 P , 得 $\triangle BPM$ 为等边三角形, $BP = BM$, $BA = BC$, $AP = MC$, 又 $\angle APM = 120^\circ = \angle MCN$, $\angle PAM = \angle AMC - \angle B = \angle AMC - 60^\circ = \angle AMC - \angle AMN = \angle CMN$
 $\therefore \triangle PAM \cong \triangle CMN$; 得 $AM = MN$, 又 $\angle AMN = 60^\circ$, 故 $\triangle AMN$ 为等边三角形.



22. 延长 EM 、 DC 交于 N , 连 DM , 由 $\triangle BEM \cong \triangle NCM$ 得 $EM = MN$, 又 $AB \parallel CD$, $DE \perp AB$, 则 $\angle EDN = 90^\circ$, $\angle BEM = \angle N$, 得 $EM = MN = DM$, 从而 $\angle EMD = 2\angle N = 2\angle BEM$, 由 $MC = CD$, 得 $\angle MDC = \angle CMD = \angle N$.
故 $\angle EMC = \angle EMD + \angle CMD = 3\angle BEM$

23. 过 M 作 $ME \parallel AN$, 连 NE 、 BE , 则四边形 $AMEN$ 为平行四边形, 得 $NE = AM$, $ME \perp BC$

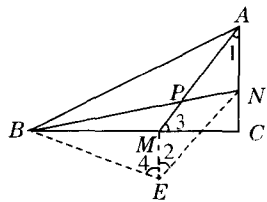
$\therefore ME = CM$, $\angle EMB = \angle MCA = 90^\circ$, $BM = AC$

$\therefore \triangle BEM \cong \triangle AMC$, 得 $BE = AM = NE$, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$, $\therefore \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ 且 $BE = NE$

$\therefore \triangle BEN$ 为等腰直角三角形, $\angle BNE = 45^\circ$

$\therefore AM \parallel NE$, $\therefore \angle BPM = \angle BNE = 45^\circ$



24. (1) 如图①, 三个小矩形的宽都为 $\frac{1}{a}$, 则

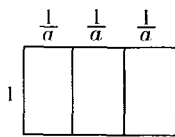
$$\frac{3}{a} = a, \text{ 得 } a = \sqrt{3};$$

- (2) 如图②, 一个小矩形的宽为 $\frac{1}{a}$, 另两

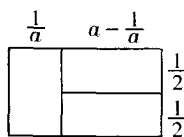
个小矩形的长都为 $a - \frac{1}{a}$, 宽都为

$$\frac{1}{2}, \text{ 于是 } \frac{a - \frac{1}{a}}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{1}, \text{ 得 } a = \sqrt{2};$$

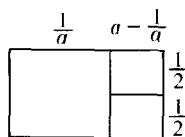
- (3) 如图③, 一个小矩形的宽为 $\frac{1}{a}$, 另两个小矩形的宽都为 $a - \frac{1}{a}$, 长都为 $\frac{1}{2}$, 于是 $\frac{\frac{1}{2}}{a - \frac{1}{a}} = \frac{a}{1}$, 得 $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$



图①



图②



图③

16 完美的正方形

【例题求解】

例 1 75° $\triangle ADE \cong \triangle BCE$, $\angle AEB = 30^\circ$

例 2 选 B $\triangle BOE \cong \triangle COF$, $\triangle BOF \cong \triangle AOE$, 得 $BE = CF = 3$, $BF = AE = 4$

例 3 延长 BC 至 H 点, 使 $CH = AE$, 连结 DE , DF , 由 $\text{Rt}\triangle DAE \cong \text{Rt}\triangle DCH$, 得 $DE = DH$, 进而推证 $\triangle DEF \cong \triangle DFH$, $\text{Rt}\triangle DGE \cong \text{Rt}\triangle DCH$.

例 4 (1) 在 AD 上截取 $AF = AM$, $\angle DFM = \angle MBN$, 由 $\triangle DFM \cong \triangle MBN$, 得 $MD = MN$.

(2) 结论仍然成立, 证法同上.

例 5 (1) 容易把一个正方形分成 $4^2 = 16$ 个正方形, 把其中位于一角的 9 个拼成一个正方形, 共得 $16 - 9 + 1 = 8$ 个正方形, 分成 16 个正方形后, 把其中任意 5 个各分成 4 个小正方形, 共 $16 - 5 + 5 \times 4 = 31$ 个正方形.

(2) 把立方体分割成 $3^3 = 27$ 个立方体, 再把其中 4 个各分成 $2^3 = 8$ 个立方体, 共 $27 - 4 + 4 \times 8 = 55$ 个立方体. 关于本题有下述一般结论: 对任何自然数 $n \geq 6$, 可以把一个正方形剖分成 n 个正方形; 对任何自然数 $n \geq 55$, 可以把一个立方体分成 n 个立方体.

【学力训练】

1. $20, 6n, 6n + 2$ 2. 15°

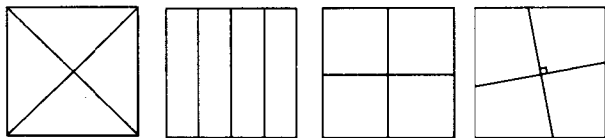
3. $2\sqrt{2}$ 过 D 作 $DF \perp BC$ 交 BC 延长线于 F , $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle CDF$, $DEBF$ 为正方形

4. 55° 过 N 作 $NP \perp BC$ 于 P , 由 $\triangle BEC \cong \triangle PMN$ 得, $CE = NM$, $\angle BCE = \angle PNM$

5. D 6. C 7. C

8. B $\triangle DFC \cong \triangle BEC$, $CF = CE$, $\triangle CEF$ 为等腰直角三角形

9. 以下设计供参考.



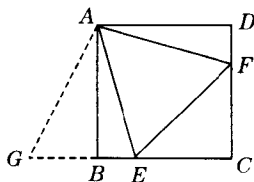
10. $\triangle ABE \cong \triangle DEC$, $\triangle ADF \cong \triangle DFC$, 证明 $\angle ABE + \angle BAF = 90^\circ$.

11. 延长 CB 至 G , 使 $BG = DF$, 连结 AG , 则 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$, $AG = AF$, $\angle BAG = \angle DAF = 15^\circ$, $\angle GAE = \angle FAE = 45^\circ$, $\triangle GEA \cong \triangle FEA$, $EF = EG$, $\angle AEF = \angle AEG = 60^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $\angle BAE = 30^\circ$, $CE = \sqrt{3} - 1$.

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $\angle EFC = 30^\circ$, $EF = 2(\sqrt{3} - 1)$

故 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} EG \cdot AB = 3 - \sqrt{3}$.



12. 100° 连 AC

13. $5:1$ 连 DB 交 AC 于 O , 过 E 作 $EG \perp AC$, 则 $EG = BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AC$.

14. $2\sqrt{7}$ 过 E 作 $EH \perp CD$ 交 CD 延长线于 H , $\triangle DEH \cong \triangle DAG$, $EH = AG$, $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADG}$.

15. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 16. B 17. C 18. D $\triangle AEF \cong \triangle DHE$, $AF = DE$, 则 $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=\frac{2}{3} \end{cases}$

19. D $DE^2 = 5 + \sqrt{25}$, $MN^2 = 5 + \sqrt{24}$, $DE > MN$

20. $S_{\triangle AHE} + S_{\triangle BDC} + S_{\triangle GFI} = 3S_{\triangle DEF} = 3 \times (S_{\text{矩形} PQRD} - S_{\triangle PDE} - S_{\triangle DFR} - S_{\triangle QEF}) = 16.5$, 故六边形 $ABCIGH$ 的面积为 $16.5 + 5.5 + 17 + 13 + 10 = 62$

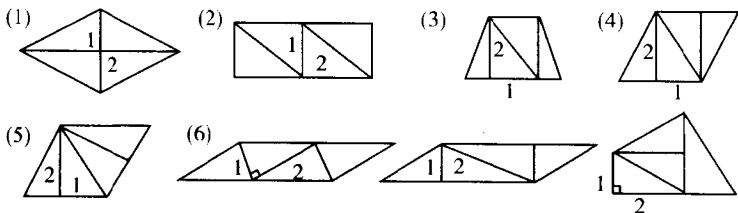
21. 作 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 N , 交 DC 的延长线于 F , $CF = BC$, $\triangle ABN \cong \triangle FCN$, $\triangle ABN \cong \triangle ADQ$.

22. (1) 四边形 $PQEF$ 为正方形;

(2) 连结 AC 交 PE 于 O , 四边形 $APCE$ 为平行四边形, O 是 AC 中点, 即 PE 必过 AC 的中点;

(3) 正方形 $ABCD$ 与正方形 $PQEF$ 的对角线交点是重合的. 当 $OP \perp AB$ 时, 四边形 $PQEF$ 面积最小, 为原正方形面积的一半; 当 P 与顶点 B 重合时, 其最大面积等于原正方形面积.

23. 参考答案:



24. 设 $AG = a$, $BG = b$, $AE = x$, $ED = y$, 则 $\begin{cases} a+b=x+y & ① \\ 2ax=by & ② \end{cases}$

由①得 $a-x=y-b$, 平方得

$$a^2 - 2ax + x^2 = y^2 - 2by + b^2$$

将②代入得 $a^2 - 2ax + x^2 = y^2 - 4ax + b^2$.

$\therefore (a+x)^2 = b^2 + y^2$, 得 $a+x = \sqrt{b^2 + y^2}$

$\therefore b^2 + y^2 = CH^2 + CF^2 = FH^2$,

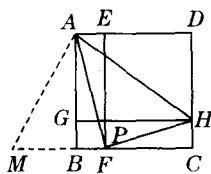
$\therefore a+x = FH$, 即 $DH + BF = FH$.

延长 CB 至 M , 使 $BM = DH$, 连结 AM , 由 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ADH$, 得 $AM = AH$,

$\angle MAB = \angle HAD$

$\therefore \angle MAH = \angle MAB + \angle BAH = \angle BAH + \angle HAD = 90^\circ$

再证 $\triangle AMF \cong \triangle AHF$, $\therefore \angle MAF = \angle HAF$. 即 $\angle HAF = \frac{1}{2} \angle MAH = 45^\circ$



17 梯形

【例题求解】

例1 $a-b$ 过 C 作 $CE \parallel AD$ 交 AB 于 E 例2 选 D 经讨论只有以 $1, 4$ 为底, $2, 3$ 为腰才能够成梯形

例3 (1) 当 $AD = BC$ 时, 四边形 $ABCD$ 是矩形;

(2) 当 $AD \neq BC$ 时, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 只要证明 $AD \parallel BC$ 即可.

例4 (1) 5;

(2) 设 t 秒时, 点 P 和点 Q 的距离是 10cm , 过点 P 向直线 CD 作垂线, 垂足为 P' , 此时 $P'Q = 116 - 3t - 2t = 116 - 5t$, $PP' = 2 \times 3$, $PQ = 2 \times 5$, 由勾股定理得 $P'Q = 2 \times 4 = 8$

$\therefore 116 - 5t = 8$, 解得 $t_1 = \frac{8}{5}$, $t_2 = \frac{24}{5}$, 依题意, $0 \leq t \leq \frac{16}{3}$, t_1, t_2 符合题意, 即 P, Q 两点, 从出发开始到 $\frac{8}{5}$ 秒或 $\frac{24}{5}$ 秒时, 点 P 和 Q 的距离是 10cm .

例5 (1) $\triangle SPQ$ 为等边三角形, 连结 SC, PB , 证明略. (2) $S_{\triangle SPQ} = \frac{49\sqrt{3}}{16}$;

(3) 设 $CD = a, AB = b (a < b)$, $BC^2 = SC^2 + BS^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + ab$

$\therefore S_{\triangle SPQ} = \frac{\sqrt{3}}{16}(a^2 + ab + b^2)$ 又 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{b}{a}$, 则 $S_{\triangle AOD} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$

$\therefore \frac{S_{\triangle PQS}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{7}{8}$, $\therefore 8 \times \frac{\sqrt{3}}{16}(a^2 + ab + b^2) = 7 \times \frac{\sqrt{3}}{4}ab$

即 $2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$, 化简得 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, 故 $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$.

【学力训练】

1. $3n+2$ 2. $25\sqrt{3}$ 或 $15\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ 四边形 $ABCD$ 可能为平行四边形或梯形

3. 7 4. $4\sqrt{3}, 12\sqrt{3}$ 5. B 6. A 7. B 过 C 作 $CF \perp AD$ 交 AD 延长线于 F

8. C 9. $AO = \frac{1}{2}AD, OC = \frac{1}{2}BC$

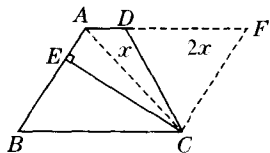
10. $PE + PF$ 的值为定值, 过 B 作 $BQ \perp CD$ 于 Q , 可以证明 $PE + PF = BQ$.

11. 本题解题思路广阔, 下面解法仅供参考.

(1) 60° ;

(2) 如图, 把梯形 $ABCD$ 补成平行四边形 $ABCF$, 连结 AC , 设 $S_{\triangle BCE} = 3S$,

$S_{\text{四边形}AECD} = 2S$, 则 $DF = 2AD$, 又设 $S_{\triangle ACD} = x$, 则 $S_{\triangle ACE} = 2S - x$, $S_{\triangle CDF} = 2x$, 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACF}$, 得 $3S$



$$+2S-x=x+2x, \text{ 则 } x=\frac{5}{4}S. \therefore S_{\triangle ACE}=2S-x=\frac{3}{4}S, \text{ 故 } \frac{BE}{AE}=\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{3S}{\frac{3}{4}S}=4$$

12. $AB=h$ 13. $66+6\sqrt{3}$ 14. 5 连 BE , 则 $BE \perp CG$

15. 6 平移对角线, 两条对角线互相垂直 16. D 当 14, 7 为两底时能构成梯形

17. A $EF=\frac{1}{2}(BC+AD), MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$

18. C AD 的中点 M , 对 BC 张成 90° 角, 又设 N 在 AD 上, 且 $AN:ND=998:1001$, 由 $\triangle ABN$ 和 $\triangle DCN$ 都为等腰三角形推知, N 对 BC 张成 90° 角

19. A

20. (1) 连 AC, BD 交于 O , 可证明 $\triangle DON \cong \triangle BOM, \triangle AON \cong \triangle COM$.

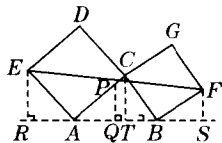
(2) $MN \perp AC$, 这是 MN 应满足的条件.

(3) 重叠部分是 $\triangle AMN$, 不重叠部分是 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AD'N$, 由题意得 $\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{1}{4}$, 即 $\frac{\frac{1}{2}AB \cdot BM}{\frac{1}{2}AB \cdot AN} = \frac{1}{4}$, 而 MC

$$= AN, \text{ 故 } \frac{BM}{MC} = \frac{1}{4}.$$

21. 分别过 E, F, C, P 作 AB 的垂线, 垂足依次为 R, S, T, Q , 则 $PQ = \frac{1}{2}(ER + FS)$.

易证 $\text{Rt}\triangle AER \cong \text{Rt}\triangle CAT, \text{Rt}\triangle BFS \cong \text{Rt}\triangle CBT$, 得 $ER = AT, FS = BT$. 又 $AT + BT = AB = ER + FS$. 故 $PQ = \frac{1}{2}AB$.



22. $S_1 = \frac{1}{2}x^2; S_2 = 2 - \frac{1}{2}x^2; S_3 = x - \frac{1}{2}x; S_4 = \frac{5}{2} - x; S_5 = 2 - \frac{1}{2}(3-x)^2; S_6 = \frac{1}{2}(3-x)^2; S_7 = \frac{1}{2}; S_8 = \frac{3}{2}.$

18 由中点想到什么

【例题求解】

例 1 5 或 2 分 A, B 在 l 同侧或在 l 异侧两种情况讨论 例 2 选 B 连结 BD , 取其中点 P , 连结 PM, PN

例 3 取 AC 中点 F , 连 BF , 证明 $BF = CE$, 本例有多种证法

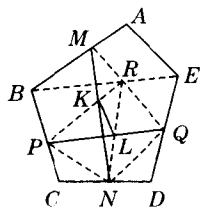
例 4 连 AC , 取其中点 G , 连结 $EG, FG, EG \parallel \frac{1}{2}CD, FG \parallel \frac{1}{2}AB, \angle M = \angle EFG, \angle N = \angle FEG, EG = FG$, 故 $\angle M = \angle EFG = \angle FEG = \angle N$.

例 5 连结 BE , 取其中点 R , 连结 MR , 则 $MR \parallel \frac{1}{2}AE$, 连结 RN, P, N, Q, R 分别为四边形 $BCDE$ 各边中点, 则四边形 $PNQR$ 为平行四边形, RN, PQ 互相平分.

$\therefore L$ 是 PQ 的中点, $\therefore L$ 为 RN 的中点.

在 $\triangle MNR$ 中, K, L 分别为 MN, RN 的中点

$$\therefore KL \parallel \frac{1}{2}MR, \text{ 故 } KL \parallel \frac{1}{4}AE.$$



【学力训练】

1. $AB = CD$ 或 $\angle B = \angle C, AC = BD$ 2. $\frac{2^n - 1}{2^n}a$ 3. 6 延长 BP 交 AC 于 Q , 则 P 为 BQ 中点

4. 2.5 延长 DB 至 F , 使 $BF = DB$, 连 AD, EF , 则四边形 $ADFE$ 为平行四边形

5. C 6. C $EF = \frac{1}{2}(BC - AD)$ 7. B 8. B
9. 过点 E 作 $EH \perp AF$ 于 H , 连结 EF , 则 $AH = AB = BC$, $FH = FC$
10. 过 A 作 $AQ \perp BE$ 于 G 并延长交 BC 于 Q , 则 Q 为 BC 中点, 可证明 $\triangle ABG \cong \triangle BCE$, 则 $BG = CE = \frac{1}{2}CD$, 故 E 为 CD 中点
11. (1) 连 AE 交 DC 于 O , 则 $AO = EO$, $\therefore DC \parallel AB$, $\therefore EF = BF$
 (2) 连 $AB = 2BC$ 时, $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形}ABCD}$
12. 作 $DG \parallel BC$ 交 EF 于 G , $DE = DF = 2\sqrt{3}$ 13. 10 取 AD 中点 E , 连结 ME, NE , 则 $ME = NE$
14. < 连结 AC , 取 AC 中点 P , 连 EP, FP 15. D $\triangle ABC$ 为直角三角形
16. B $AP = BC + CP$ 17. C 过 D, A, E 分别作 BC 垂线
18. 60° 分别取 AB, AC 中点 F, G , 连结 FP, GP, FM, GN
19. $AB + CD > AD + BC$ 取 AB 中点 M , CD 中点 N , 连结 MN , 则 $OM = \frac{1}{2}AB$, $ON = \frac{1}{2}CD$, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, $OM + ON > MN$, $\frac{1}{2}(AB + CD) > \frac{1}{2}(AD + BC)$, 故 $AB + CD > AD + BC$
20. (1) 延长 BM 交 CE 于 N , 由 $\triangle DBM \cong \triangle NEM$, 得 $BM = CM = MN$
 (2) $MB = MC$ 仍能成立. 取 AD 中点 P , AE 中点 Q , 连结 PB, MP, CQ, MQ , $MP = \frac{1}{2}AE = CQ$, $MQ = \frac{1}{2}AD = BP$, $\angle BPM = \angle MQC$, 由 $\triangle PBM \cong \triangle QMC$ 得 $MB = MC$.
21. (1) 连结 AC, BD , 设它们交于点 O , 过 O 作 $OO_1 \perp MN$ 于 O_1 , 因为 $AA_1 \perp MN$, $CC_1 \perp MN$, 所以 $AA_1 \parallel CC_1$, 从而 $AA_1 + CC_1 = 2OO_1$, 同理 $BB_1 + DD_1 = 2OO_1$, 所以, $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.
 (2) 连结 AC, BD 交于 O 点, 过 O 作 $OG \perp MN$, 垂足为 G , 延长 OG 交 AC_1 的连线于 H , 可证明 $CC_1 - AA_1 = BB_1 + DD_1$.
 (3) 连结 AC, BD 交于 O , 连结 DB_1, AC_1 , 过 O 作 $OG \perp MN$, G 为垂线交 DB_1 于点 K , 交 AC_1 于 H 点, 可证明 $CC_1 - AA_1 = DD_1 - BB_1$.

19 平行截割

【例题求解】

例1 由 $DC \parallel AB$, 得 $\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, $AP = \frac{1}{4}AC$, 同理 $AQ = \frac{2}{5}AC$, $PQ = \frac{2}{5}AC - \frac{1}{4}AC = \frac{3}{20}AC$, $QC = \frac{3}{5}AC$, 故 $AP: PQ: QC = \frac{1}{4} : \frac{3}{20} : \frac{3}{5} = 5:3:12$

例2 选 C 过 D 作 $DC \parallel AB$ 交 AB 于 G , 则 $\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EG} \cdot \frac{GE}{BE} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$, $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{1}{3} = \frac{AE}{BE}$
 $\therefore \frac{AF}{FD} = 1$, 同理 $\frac{EF}{FC} = \frac{1}{2}$, 故 $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

例3 过 B 作 $BK \parallel PC$ 交 AE 于 K , 则 $\frac{AE}{AK} = \frac{AP}{AB}$, 又 $BD = DC$, 则 $DK = DE$
 $\therefore AD = 2DE$, $\therefore AE: AK = 3$, 故 $AP: AB = 3$, 即 $AP = 3AB$

例4 (1) $PE + PF = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD = AB$. (2) 结论仍成立 $\frac{PF}{CD} = \frac{BP}{BC}$, $\frac{PE}{AB} = \frac{CP}{BC}$, 两式相加.

例5 $\because BD \parallel l \therefore \frac{PN}{OD} = \frac{CP}{CO} = \frac{PR}{OB}$, 得 $\frac{PN}{PR} = \frac{OD}{OB}$ ①
 $\because BD \parallel l \therefore \frac{PM}{OB} = \frac{AP}{AO} = \frac{PS}{OD}$, 得 $\frac{PS}{PM} = \frac{OD}{OB}$ ②

由①、②得 $\frac{PN}{PR} = \frac{PS}{PM}$, 即 $PM \cdot PN = PR \cdot PS$

【学力训练】

1. 2 2. 1:6, 1:2n 3. 6 4. $y = \frac{4}{x}$ 5. B 6. B 7. C

8. D 作 D 作 $DG \parallel AC$ 交 BC 于 G , $DG = BD$ 9. $BM = 4$, $CG = 15$

10. (1) $\frac{OE}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{OD}{BD} = \frac{OF}{BC}$, 故 $OE = OF$; (2) 1; (3) $\frac{OE}{AD} + \frac{OF}{BC} = 1$, $EF = 2OE$.

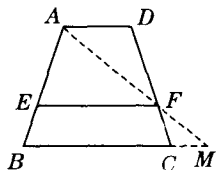
11. (1) 略

(2) $EF \parallel BC$, 连 AF 并延长交 BC 的延长线于 M , $\frac{AF}{FM} = \frac{AD}{CM} = \frac{DF}{FC}$, 又 $\frac{AE}{BE} = \frac{DF}{FC} =$

$$\frac{m}{n}, \frac{AF}{FM} = \frac{AE}{BE} \therefore \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BM} = \frac{m}{m+n},$$

$$\text{得 } EF = \frac{m}{m+n} \cdot BM = \frac{m}{m+n} (BC + CM) \text{ 而 } \frac{AD}{CM} = \frac{DF}{FC} = \frac{m}{n},$$

$$\therefore CM = \frac{nAD}{m} = \frac{na}{m} \text{ 故 } EF = \frac{m}{m+n} \left(b + \frac{na}{m} \right) = \frac{mb + na}{m+n}$$



12. $\frac{3}{2}$ 延长 BF 与 CD 延长线交于 P 13. $\frac{bc}{a+2c}$

14. $\frac{ab}{a+b}$ 由 $\frac{AP}{PF} = \frac{DQ}{QF} = \frac{a}{b}$, 推得 $PQ \parallel AD$ 15. $\frac{12}{5} \frac{PQ}{AB} + \frac{PQ}{CD} = 1$

16. A 设 $\frac{p}{x^2 - yz} = \frac{q}{y^2 - xz} = \frac{r}{z^2 - xy} = k$, 则 $p = k(x^2 - yz)$, $q = k(y^2 - xz)$, $r = k(z^2 - xy)$, $px + qy + rz = k(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = k(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

17. B 18. D 19. C

20. $\because AB \parallel EF \parallel CD \therefore \frac{CE}{CF} = \frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BC}$ ①, $\frac{DE}{CF} = \frac{BE}{BF} = \frac{BD}{BC}$ ②

$$\text{①} + \text{②}, \text{得 } \frac{CE + DE}{CF} = \frac{AE + BE}{BF} = \frac{AC + BD}{BC}, \frac{192}{CF} = \frac{240}{100}, CF = 80.$$

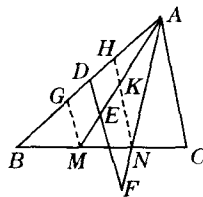
21. 延长 FE 交 CB 的延长线于 H , 易证 $\triangle AEF \cong \triangle BEH$, $\frac{AG}{GC} = \frac{AF}{HC} = \frac{1}{4}$.

22. 过 N 、 M 分别作 AC 的平行线交 AB 于 H 、 G 两点, NH 交 AM 于 K 点, $\because BM = MN$

$$= NC, \therefore BG = GH = HA, \text{可知 } HK = \frac{1}{2} GM, GM = \frac{1}{2} HN \therefore HK = \frac{1}{4} HN, \text{即}$$

$$\frac{HK}{KN} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又 } DF \parallel HN, \therefore \frac{DE}{EF} = \frac{HK}{KN} = \frac{1}{3}, \text{即 } EF = 3DE.$$

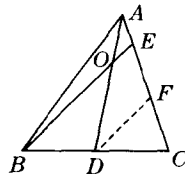


23. 依照题意可以猜想: 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{1+n}$ 时, 有 $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{2+n}$ 成立, 证明如下:

过 D 点作 $DF \parallel BE$ 交 AC 于点 F

$$\because D、F \text{ 分别是 } BC、EC \text{ 的中点, 由 } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{1+n} \text{ 可知 } \frac{AE}{EC} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{2}{n}, \text{得 } \frac{AE}{AF} = \frac{2}{2+n}, \text{故 } \frac{AO}{AD} = \frac{AE}{AF} = \frac{2}{2+n}.$$



20 飞跃——从全等到相似

【例题求解】

例1 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 135^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{10}$ (设单位为1), 作图略

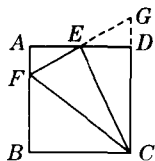
例2 选B 由条件得 $b^2 = a(a+c)$, 即 $\frac{b}{a} = \frac{a+c}{b}$, 延长 CB 至 D , 使 $BD = AB$, 于是 $CD = a+c$, 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DAC$ 中, $\angle C$ 为公共角, 且 $\frac{AD}{BC} = \frac{DC}{AC}$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC$, $\angle BAC = \angle D$, $\angle BAD = \angle D$, $\angle ABC = \angle D + \angle BAD = 2\angle BAC$.

例3 连结 PC , 则 $BP = CP$, 只需证明 $CP^2 = PE \cdot PF$

例4 (1) 是相似, 延长 FE 与 CD 的延长线交于点 G , 可证明 $\triangle AFE \sim \triangle DGE$, $CE \perp FG$, $FC = GC$, $\angle CFE = \angle G = \angle EFC$, 故 $\text{Rt}\triangle AEF \sim \text{Rt}\triangle EFC$.

(2) 存在. ① 如果 $\angle BCF = \angle AEF$, 即 $k = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $\triangle AEF \sim \triangle BCF$, 理由如下:

当 $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $\frac{DC}{DE} = \sqrt{3}$, 得 $\angle ECG = 30^\circ$, $\angle ECG = \angle ECF = \angle AEF = 30^\circ$, $\angle BCF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, 故 $\text{Rt}\triangle AEF \sim \text{Rt}\triangle BCF$, ② 因 $EF \not\parallel BC$, 故 $\angle BCF \neq \angle AFE$, 即不存在第二种相似情况.



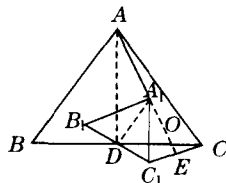
例5 连结 AD , A_1D , 延长 AA_1 交 DC 于 O , 交 C_1C 于 E

$\therefore \angle ADA_1 = 90^\circ - \angle A_1DC = \angle CDC_1$, $\frac{AD}{DC} = \frac{DA_1}{DC_1} = \sqrt{3}$,

$\therefore \triangle AA_1D \sim \triangle CC_1D$, $\angle A_1AD = \angle C_1CD$

又 $\angle AOD = \angle COE$,

$\therefore \angle ADO = \angle CEO = 90^\circ$, 即 $AA_1 \perp CC_1$

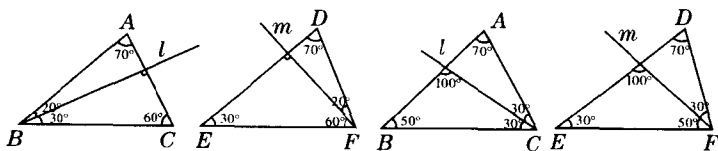


【学力训练】

1. ①② 2. 48 $AC = ED$ 3. 10 或 $\frac{32}{5}$ 4. 8 5. C

6. A $\text{Rt}\triangle BAD \sim \text{Rt}\triangle CBA$, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AC}$, $AB^2 = AD \cdot BC$, 设 $AD = 3K$, $BC = 4K$, 则 $AB = 2\sqrt{3}K$.

7. C 8. C 9. 以下两种分法供参考



10. (1) $\angle ACP = \angle PDB = 120^\circ$, 当 $\frac{AC}{PD} = \frac{PC}{BD}$ 时, $\triangle ACP \sim \triangle PDB$, 即当 $CD^2 = AC \cdot BD$ 时, $\triangle ACP \sim \triangle PDB$.

(2) 当 $\triangle ACP \sim \triangle PDB$ 时, $\angle APC = \angle PBD$, $\therefore \angle APB = \angle APC + \angle CPD + \angle DPB = \angle PBD + 60^\circ + \angle DPB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

11. 连结 PM, PN , $\triangle AMN \sim \triangle PMN$, 再证明 $\triangle MPB \sim \triangle PNC$ 12. 10.5 $\frac{BE}{EG} = \frac{AE}{EC} = \frac{EF}{BE}$

13. $\frac{8}{3}$ 或 6 分 $\triangle APD \sim \triangle BCP$ 或 $\triangle APD \sim \triangle BPC$ 两种情况讨论

14. 2 $EA = \frac{1}{4}DJ$, $EB = \frac{2}{3}DJ$, $EA = \frac{3}{2}CJ$ 15. D $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{AD}$, 确定对应边

16. B 作 $\angle APD$ 平分线交 AD 于 E , 则 $\frac{AE}{DE} = \frac{PA}{PD} = \frac{4}{3}$, 又 $\triangle PDE \sim \triangle CDB$, 得 $\frac{PD}{CD} = \frac{DE}{DB}$.

17. D 对于 A , 作 $BE \perp AC$ 于 E , 作 $DF \perp AB$ 于 F , 由 $AD \cdot BC = AB \cdot BD$, 得 $DF \cdot BC = BE \cdot BD$, 所以 $\text{Rt}\triangle BDF \sim \text{Rt}\triangle CBE$, 从而 $\angle ABD = \angle ACB$, 可得 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$.

18. 延长 MN, BC 交于 E , 连结 MC , $\triangle ABM \sim \triangle DCM$, $\triangle BMC \sim \triangle BEM$, 设正方形边长为 $2a$, 则 $BE = \frac{5}{2}a$, CE

$$= \frac{a}{2}, \frac{DN}{CN} = \frac{MD}{CE} = a : \frac{a}{2} = 2.$$

19. 延长 AD 、 BC 使它们交于一点 P , 则 $\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$, 又 $\frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PK}$, 得 $\frac{PM}{PK} = \frac{PD}{PC}$, 再证明 $\triangle PKC \sim \triangle PMD$.

20. 延长 AC 至 D , 使 $CD = BC$, 连结 BD , 可证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, 得 $AB^2 = AC \cdot AD = AC(AC + CD) = AC^2 + AC \cdot CD$.

21. (1) 连结 PC , 折痕 MN 垂直 PC , $AC = BC$, $AP = BP$, $\therefore MN \parallel AB$.

$$\therefore \frac{CM}{CN} = \frac{AC}{BC} = 1 = \frac{PA}{PB}.$$

(2) 当点 P 不是边 AB 的中点时, $\frac{PA}{PB} = \frac{CM}{CN}$ 仍然成立. 如图, 连结 PC , 则

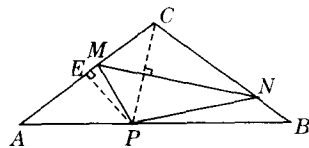
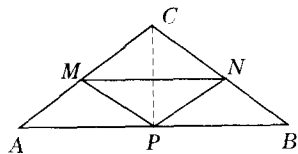
$MN \perp PC$, 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E , 则 $PE \parallel BC$, $\frac{PA}{PB} = \frac{AE}{AC}$.

$$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ, \angle APE = \angle B = 45^\circ, \therefore AE = PE.$$

$$\therefore \angle MCN = 90^\circ, CP \perp MN, \therefore \angle ECP = \angle MNC.$$

$$\therefore \triangle MCN \sim \triangle PEC, \text{得} \frac{CM}{PE} = \frac{CN}{EC}$$

故 $\frac{CM}{CN} = \frac{PE}{EC} = \frac{AE}{EC}$, 从而 $\frac{PA}{PB} = \frac{CM}{CN}$.



21 相似三角形的性质

【例题求解】

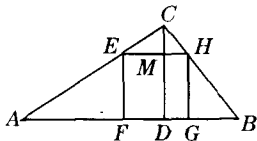
例 1 设 $S_{\triangle OAB} = 6k$, $S_{\text{梯形}ABCD} = 25k$, 则 $S_{\triangle DOC} = 6k$, 由 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{OD}{OB} = \frac{S_{\triangle DOC}}{S_{\triangle BOC}}$ 得 $S_{\triangle AOD} \cdot S_{\triangle BOC} = 36k^2$, 又 $S_{\triangle AOD}$

$$+ S_{\triangle BOC} = 25k - 2 \times 6k = 13k, \text{ 得 } S_{\triangle AOD} = 4k, S_{\triangle BOC} = 9k, \text{ 故两三角形周长之比为 } \frac{AD}{BC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}} = \frac{2}{3}.$$

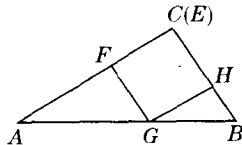
例 2 选 A $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EBF}=DF:FB, S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABF}=DE^2:AB^2=DF^2:FB^2$.

例 3 如图甲, 设正方形 $EFGH$ 边长为 x , 则 $AC = 4$, 而 $CD \times AB = AC \times BC = 2S_{\triangle ABC}$, 得 $CD = \frac{12}{5}$, 又 $\triangle CEH \sim$

$\triangle CAB$, 得 $\frac{CM}{CD} = \frac{EH}{AB}$, 于是 $\frac{\frac{12}{5} - x}{\frac{12}{5}} = \frac{x}{5}$, 解得 $x = \frac{60}{37}$.



图甲



图乙

如图, 设正方形 $CFGH$ 的边长为 y cm, 由 $GH \parallel AC$, 得 $\frac{GH}{AC} = \frac{BH}{BC}$. 即 $\frac{y}{4} = \frac{3-y}{3}$, 解得 $y = \frac{12}{7}$.

$$\therefore x = \frac{60}{37}, y = \frac{12}{7} = \frac{60}{35}, \quad \therefore y > x.$$

即应如图乙那样裁剪,这时正方形面积达最大,它的边长为 $\frac{12}{7}$ cm.

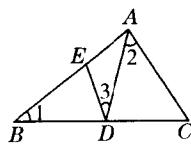
例 4 144 $\sqrt{\frac{t_1}{S_{\triangle ABC}}} + \sqrt{\frac{t_2}{S_{\triangle ABC}}} + \sqrt{\frac{t_3}{S_{\triangle ABC}}} = 1$

例 5 设 $BC = a$, $AC = b$, 由 $\triangle ABC \sim \triangle EBD \sim \triangle DAC$, 得 $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$, 即 $DC = \frac{b^2}{a}$, $BD - DC$

$$= a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$\text{因而 } \frac{m_1}{m} = \frac{BD}{DC} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \frac{m_2}{m} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a},$$

$$\text{所以 } \frac{m_1 + m_2}{m} = \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{b}{a} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} = -\left(\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$



【学力训练】

1. 3:1 2. $\frac{2}{9}S$ 3. $\frac{12}{7}$ 或 $\frac{60}{37}$ 4. (1) A; (2) 相似比; 相似比的平方; 相似比的立方

5. C 6. D 7. B 8. C 9. 由 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$, 得 $\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BC}{AD}$

10. (1) 略

(2) 过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M, 由 $\triangle ABC \sim \triangle FCD$, 得 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}} = \left(\frac{BC}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2CD}{CD}\right)^2 = 4$, $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle FCD} = 20$, 又

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM, BC = 10, \text{得 } MA = 4$$

$$\therefore DE \parallel AM, \therefore \frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM}, DM = \frac{1}{2} DC = \frac{5}{2}, BM = BD + DM, BD = \frac{1}{2} BC = 5$$

$$\therefore \frac{DE}{4} = \frac{5}{5 + \frac{5}{2}}, \text{得 } DE = \frac{8}{3}.$$

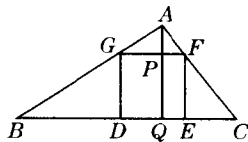
11. (1) 易证明四边形 EFGD 为矩形, 由 $\frac{E'F'}{EF} = \frac{BF'}{BF} = \frac{F'G'}{FG}$, 而 $E'F' = G'F'$, 得 $EF = GF$, 故四边形 EFGD 为正方形.

(2) 过 A 作 $AQ \perp BC$ 于 Q 交 GF 于 P, 且 $AQ = BQ$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle QAC = 30^\circ$,

$$QC = \frac{\sqrt{3}}{3} QA, \text{又 } BC = 6 + \sqrt{3},$$

$$\text{即 } AQ + \frac{\sqrt{3}}{3} AQ = 6 + \sqrt{3}, \text{解得 } AQ = \frac{15 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{由 } \frac{GF}{BC} = \frac{AP}{AQ}, \text{得 } GF = \frac{BC \cdot AQ}{BC + AQ} = \frac{81 - 3\sqrt{3}}{27 - \sqrt{3}}.$$



12. 400 从内接一个矩形入手, 探求内接 $\triangle ABC$ 中任一矩形的长与宽的关系.

$$13. 405 \text{ cm}^2 \quad \frac{DE}{BC} + \frac{FG}{BC} + \frac{IC}{BC} = 1$$

14. $\frac{16^2}{17}$ 设 $BC = a$, 则 $CE = \sqrt{16 - a^2}$, 由 $\triangle BCE \sim \triangle EDF$, 得 $DE = \frac{3}{4}a$, 又 $DE + EC = DC$, 即 $\frac{3}{4}a + \sqrt{16 - a^2} = a$

15. C

16. C 延长 DA、CB 相交于 G, $\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GDC}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{1}{9}$, 设 $S_{\triangle GAB} = S$, 则 $S_{\triangle GDC} = 9S$, $S_{\text{梯形}ABCD} = 8S$, $GA^2 : GE^2 :$

$$GD^2 = S_{\triangle GAB} : S_{\triangle GEF} : S_{\triangle GDC} = 1 : 5 : 9, \text{即 } GA : GE : GD = 1 : \sqrt{5} : 3, \frac{AE}{ED} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \quad 17. C$$

18. 设 a, b, c 三边上的高分别为 h_a, h_b, h_c , $\triangle ABC$ 的面积为 S , 落在 a, b, c 三边上的正方形边长分别为 x_a, x_b, x_c , 则 $x_a = \frac{2S}{a + h_a}, x_b = \frac{2S}{b + h_b}, x_c = \frac{2S}{c + h_c}$, 作差比较可得 $x_a < x_b < x_c$, 即当正方形的 2 个顶点放在最短边上可使正方形零件面积最大.

19. 易证 $\triangle AP'B \sim \triangle CQB \sim \triangle CQ'D \sim \triangle ERD \sim \triangle ER'F \sim \triangle APF$, 它们的面积之比为对应边的平方比, 设比例系数为 k , 则 $S_{\triangle AP'B} = AB^2 k = a_1^2 \cdot k, S_{\triangle CQB} = CB^2 \cdot k = b_1^2 \cdot k$

$$S_{\triangle CQ'D} = CD^2 \cdot k = a_2^2 \cdot k, S_{\triangle ERD} = ED^2 \cdot k = b_2^2 \cdot k \quad S_{\triangle ER'F} = EF^2 \cdot k = a_3^2 \cdot k, S_{\triangle APF} = FA^2 \cdot k = b_3^2 \cdot k$$

由于两正三角形未重叠部分应有相等面积

故 $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot k = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)k$ 即 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

20. (1) $\triangle DCE$ 与 $\triangle ADE$ 一定相似, $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 不一定相似, 分别延长 BA 、 CD

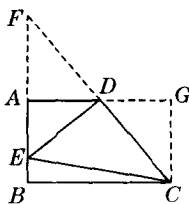
交于 F 点, 由 $\triangle FAD \sim \triangle FBC$, 得 $\frac{FD}{FC} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, 于是 $FD = DC$, 从而可证 $\triangle FED \cong \triangle CED$, 得 $\angle AED = \angle DEC$, 所以 $\triangle DEC \sim \triangle AED$.

(2) 作 $CG \perp AD$ 交 AD 延长线于 G , $CD = \sqrt{a^2 + b^2}$, 由 $\triangle AED \sim \triangle GDC$, 有 $\frac{AE}{GD} =$

$\frac{AD}{GC}$, 得 $AE = \frac{b^2}{a}$, $DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$, $BE = AB$

$- AE = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $\frac{BE}{DE} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{b \sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{BC}{DC} = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 要使 $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 相

似, 那么 $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{DC}$ 一定成立, 即 $\frac{a^2 - b^2}{b} = 2b$, 得 $a^2 = 3b^2$, 也就是当 $a = \sqrt{3}b$ 时, $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 一定相似.



22 直角三角形的再发现

【例题求解】

例1 当点 P 运动到 PA 与腰 AC 垂直时, $BP = \frac{7}{4}$, 所需时间为 7 秒; 当点 P 运动到 PA 与腰 AB 垂直时, $BP = \frac{25}{4}$, 所需时间为 25 秒.

例2 选 A 由 $\triangle ABE \sim \triangle DBA$, 得 $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle DBA} = AB^2 : DB^2 = 1 : 5$, 则 $AD : DB = 1 : \sqrt{5}$, 设 $AB = k$, 则 $DB = \sqrt{5}k$, $AD = \sqrt{(\sqrt{5}k)^2 - k^2} = 2k$, $S_{\text{矩形}} = 40$, 即 $k \times 2k = 40$, 得 $k = 2\sqrt{5}$, 从而 $BD = \sqrt{5}k = 10$, $AD = 4\sqrt{5}$.

例3 过 C 作 AC 的垂线, 交 AD 延长线于 G , 则 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CG}$, 可证明 $\triangle ABF \cong \triangle CAG$, 从而 $CG = AF$, 故 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AF} = \frac{2AF}{AF} = 2$, 即 $BD = 2CD$

例4 由 $\text{Rt}\triangle PBH \sim \text{Rt}\triangle BCH$ 及 $BP = BQ$, 得 $\frac{BQ}{BC} = \frac{BH}{HC}$, 及 $\frac{HC}{DC} = \frac{BH}{BQ}$, 又 $\angle HBQ + \angle BCH = \angle BCH + \angle DCH = 90^\circ$, 得 $\angle HBQ = \angle DCH$, 从而 $\triangle BHQ \sim \triangle CHD$, 得 $\angle BHQ = \angle DHC$.

例5 (1) 若垂足 H 在线段 AB 上, 如图甲, 由 $AH^2 + CH^2 = AC^2$, $BH^2 + CH^2 = BC^2$, 得

$$BH^2 - AH^2 = BC^2 - AC^2, \text{ 即 } (BH + AH)(BH - AH) = BC^2 - AC^2$$

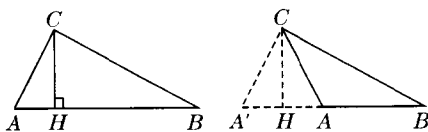
$$AB = \frac{BC^2 - AC^2}{BH - AH} \quad ①$$

$$\text{又由 } \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AH}{BH}, \text{ 得 } \frac{BC^2 - AC^2}{BC^2} = \frac{BH - AH}{BH}$$

$$\text{即 } \frac{BC^2 - AC^2}{BH - AH} = \frac{BC^2}{BH} \quad ②$$

由①、②得 $AB = \frac{BC^2}{BH}$, 即 $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BH}$. 又 $\angle B$ 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CBH$ 的公共角, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle CHB$, $\angle ACB = \angle CHB = 90^\circ$, $\angle A + \angle B = 90^\circ$

(2) 若垂足 H 在 BA 的延长线上, 如图乙, 作边 CA 关于 CH 的对称线段 CA' , 由(1)的结论知 $\angle A' + \angle B = 90^\circ$, 而 $\angle A' = 180^\circ - \angle A$, 代入上式得 $\angle A - \angle B = 90^\circ$



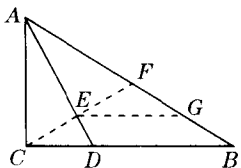
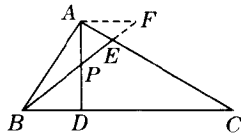
图甲

图乙

综合上述(1)、(2), 我们有 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 或 $\angle A - \angle B = 90^\circ$.

【学力训练】

- 当 $BQ = 0$ 时, $\text{Rt}\triangle ADP \sim \text{Rt}\triangle QCP$; 当 $BQ = \frac{3}{4}$ 时, $\text{Rt}\triangle ADP \sim \text{Rt}\triangle PCQ$ 2. $\frac{4}{3}\sqrt{15}$
- $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 由 $AC^2 = BC^2 + AB^2$, 得 $\angle ABC = 90^\circ$, $\text{Rt}\triangle COF \sim \text{Rt}\triangle OEA$ 4. C 5. D 分类讨论 6. D
- $BF^2 = AF \cdot FC$, 只需证明 $AG = BF$
- $BC^2 = BF \cdot BE = BD \cdot AB$, 即 $\frac{BF}{AB} = \frac{BD}{BE}$, 又 $\angle ABE$ 公共, 故 $\triangle BFD \sim \triangle BAE$. 9. $AE = 20$, $BE = 25$
- \sqrt{k} 由 $\text{Rt}\triangle ABC \sim \text{Rt}\triangle DAB$ 得 $\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{AB}$ ① $\frac{AC}{BD} = \frac{AB}{AD}$ ②, ① \times ② 得 $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{BC}{AD}$.
- $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 过 B 作 $BE \parallel AD$, 交 CA 的延长线于 E
- 6 延长 FE 、 BA 交于 G , $\frac{AP}{GE} = \frac{BP}{BE} = \frac{PD}{EF}$, $GE = EF$, $\triangle AGE \sim \triangle FCE$. 13. $5:1$
- B 只有结论(4)是错误的 15. C 分 $\triangle PAD \sim \triangle PBC$ 、 $\triangle PAD \sim \triangle CBP$ 两种情况讨论
- 当 P 为 AB 中点时, 以点 C 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似的共有 2 个. (1) 当 Q 为 BC 中点时, $PQ \perp BC$, $CP = PB$, $\angle PCQ = \angle B$, $\text{Rt}\triangle CPQ \sim \text{Rt}\triangle BAC$, 此时 $CQ = \frac{1}{2}a$; (2) 过 P 作 $PQ \perp CP$ 交 BC 于 Q , $\angle PCQ = \angle B$, $\text{Rt}\triangle CPQ \sim \text{Rt}\triangle BCA$, 此时 $CQ = \frac{a^2 + b^2}{2a}$.
- 如图, 延长 BE 到 F , 使 $AF \parallel BC$, 有 $\triangle AEF \sim \triangle CEB$, 得 $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BC}$, 又由 $\text{Rt}\triangle AFP \cong \text{Rt}\triangle DBP$, 得 $AF = BD$, 由 $\text{Rt}\triangle ADC \sim \text{Rt}\triangle BDA \sim \text{Rt}\triangle BAC$, 得 $\frac{DC}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = k$, 令 $BD = a$, 则 $AD = ka \cdot DC = k^2 a$, 从而得 $\frac{DC}{BD} = k^2$, $\frac{BC}{BD} = 1 + k^2$, 故 $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{1 + k^2}$.
- 过 C 作 $CE \perp AD$ 于 E , CE 的延长线交 AB 于 F , 则 $AC^2 = AE \cdot AD$, 由 $\angle CAD = \angle FAE$, $AE \perp CF$, 得 $CE = EF$, 过 E 作 $EG \parallel BC$ 交 AB 于 G , 则 $BC = 2EG$.
故 $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AE \cdot AD}{AD^2} = \frac{AE}{AD} = \frac{EG}{BD} = \frac{BC}{2BD}$.
- $\because \text{Rt}\triangle SAP$ 与 $\text{Rt}\triangle QCR$ 关于点 O 对称
 $\therefore QS$ 与 PR 被 O 点平分, 得到 $\square PQRS$, 若 $\square PQRS$ 变成矩形, 不妨设 $\angle QPS = 90^\circ$
则 $\angle BPQ + \angle APS = 90^\circ$ 又 $\angle APS + \angle ASP = 90^\circ$
 $\therefore \angle BPQ = \angle ASP$, 从而 $\triangle BPQ \sim \triangle ASP$ $\therefore \frac{BP}{AS} = \frac{BQ}{AP}$, 即 $\frac{a-x}{y} = \frac{a-y}{x}$
整理得 $(x-y)(x+y-a) = 0$, $\therefore x = y$ 或 $x + y = a$
故当 $x = y$ 或 $x + y = a$ 时, 可证得 $\triangle BPQ \sim \triangle ASP$, $\angle QPS = 90^\circ$, 从而得到 $\square PQRS$ 是矩形.



23 代数证明

【例题求解】

例1 因为 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)^2 - \left[4 + \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(ab + \frac{1}{ab}\right)\right]$
 $= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + 2 - 4 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left[\left(ab + \frac{1}{ab}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)\right]$
 $= a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left(-\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) = a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} - b^2 - \frac{1}{a^2} - a^2 - \frac{1}{b^2} = 0$

例2 设 $\begin{cases} x + y = a + b & \text{①} \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 & \text{②} \end{cases}$, 则由①² - ②, 得 $2xy = 2ab$ ③
 ② - ③, 得 $(x - y)^2 = (a - b)^2$, 即 $|x - y| = |a - b|$, 故 $x - y = a - b$ 或 $x - y = b - a$, 分别与 $x + y = a + b$ 联立解得 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$, 无论哪一种情形都有 $x^{2001} + y^{2001} = a^{2001} + b^{2001}$ 成立.

例3 左边 $= \frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{ab}{a(bcd + bc + b + 1)} + \frac{abc}{ab(cda + cd + c + 1)} + \frac{abcd}{abc(dab + da + d + 1)}$
 $= \frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{ab}{abcd + abc + ab + a} + \frac{abc}{a^2bcd + abcd + abc + ab} + \frac{abcd}{a^2b^2cd + a^2bcd + abcd + abc}$
 $= \frac{abc + ab + a + 1}{abc + ab + a + 1} = 1$

例4 设 $ax^3 = by^3 = cz^3 = t^3$, 则 $a = \frac{t^3}{x^3}, b = \frac{t^3}{y^3}, c = \frac{t^3}{z^3}$
 因 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = t\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = t$
 又 $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{ax^3 \cdot \frac{1}{x} + by^3 \cdot \frac{1}{y} + cz^3 \cdot \frac{1}{z}} = \sqrt[3]{t^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = t$ 从而得证.

例5 因 a, b, c 是互不相等的实数

故左端 $= \frac{-a^4(b-c) - b^4(c-a) - c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2] > 0$

所以原不等式成立.

【学力训练】

1. 将 p, q, r 分别代入左右两边

2. 设 $\frac{x}{a} = m, \frac{y}{b} = n, \frac{z}{c} = p$, 则 $m + n + p = 1, \frac{mn + mp + np}{mnp} = 0$, 即 $mn + mp + np = 0$, 从而 $m^2 + n^2 + p^2 = (m + n + p)^2 - 2(mn + mp + np) = 1$. 即 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3. 设 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{b+c}{2(b-c)} = \frac{c+a}{3(c-a)} = k$, 则 $a+b = k(a-b), b+c = 2k(b-c), c+a = 3k(c-a)$
 于是 $6(a+b) = 6k(a-b), 3(b+c) = 6k(b-c), 2(c+a) = 6k(c-a)$
 上面三式相加, 得 $8a + 9b + 5c = 0$.

4. $\sqrt{39} - \sqrt{432} = 6 - \sqrt{3}, 4 < 6 - \sqrt{3} < 5, b = 2 - \sqrt{3}$.

5. 将条件展开, 得 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$, 即 $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$, 得 $x = y = z$.

6. 将原等式展开, 经配方得 $(2a-b)^2 + (3a-c)^2 + (3b-2c)^2 = 0$, 得 $2a-b=0, 3a-c=0, 3b-2c=0$, 从而 $b=2a, c=3a$.

7. 由条件得 $z = 1 - x - y$, 代入另一个等式得 $(x+y) - (x+y)^2 + xy = xy - xy(x+y)$, 即 $(x+y)(1-x)(1-y) = 0$.

$y) = 0$, 则 $x = -y$ 或 $x = 1$ 或 $y = 1$, 又得 $z = 1 - (x + y) = 1$

8. 设 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = k$, 则 $x = yk, a = bk$. 左边 $= \frac{(yk)^2 + (bk)^2}{yk + bk} + \frac{y^2 + b^2}{y + b} = \frac{(k+1)(y^2 + b^2)}{(y+b)}$

右边 $= \frac{(yk + y)^2 + (bk + b)^2}{yk + y + bk + b} = \frac{(k+1)(y^2 + b^2)}{y + b}$

9. $\left(\frac{1}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c-a}\right)^2$
 $= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left[\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(a-b)(c-a)}\right]$
 $= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2$

10. 设甲、乙、丙三人单独完成此项工作分别用 a 天、 b 天、 c 天, 则

$$\begin{cases} a = \frac{bc}{b+c} \cdot p \\ b = \frac{ac}{a+c} \cdot q \\ c = \frac{ab}{a+b} \cdot x \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} p = \frac{a(b+c)}{bc} \\ q = \frac{b(a+c)}{ac} \\ x = \frac{c(a+b)}{ab} \end{cases} \quad \frac{p+q+2}{pq-1} = \frac{\frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + 2}{\frac{a(b+c)}{bc} \cdot \frac{b(a+c)}{ac} - 1} = \frac{(a+b) \cdot c}{ab} = x$$

11. $\because a+b+c=1, \therefore$ 原式 $= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} = 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$

$\because a, b, c$ 均为正数, $\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2$, 代入上式, 得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

12. 由条件得 $2x + 2y + 2z - 4(xy + yz + zx) + 8xyz - 1 = 0$,

即 $(2x-1)(2y-1)(2z-1) = 0$, 得 $2x-1=0$ 或 $2y-1=0$ 或 $2z-1=0$

所以 $x = \frac{1}{2}$ 或 $y = \frac{1}{2}$ 或 $z = \frac{1}{2}$.

13. 令 $b=4, c=5$, 可以验证命题①不正确; 令 $b=1, c=\frac{1}{2}$, 可以验证命题③不正确. 命题②正确, 证明如下:

由 $c > 1$, 且 $0 < b < 2$, 得 $0 < \frac{b}{2} < 1 < c$, 则 $c > \frac{b}{2} > \left(\frac{b}{2}\right)^2, c > \frac{b^2}{4}$, 即 $c - \frac{b^2}{4} > 0$

故 $a^2 + ab + c = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) > 0$

24 配方法的解题功能

【例题求解】

例1 $\frac{4}{3} = [(x+1)^2 + 2] \left[3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \right] \geq 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, 要使该式成立, 只有 $x = -1, y = -\frac{1}{3}$, 故 $x + y = -\frac{4}{3}$.

例2 选 C 原式 $= \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$, 或设 $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}} = x$

例3 由整数性质得: $a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c$, 配方变形得:

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c-1)^2 \leq 0, \text{ 又 } \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

故 $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c-1)^2 = 0$, 得 $a=1, b=2, c=1$.

例4 由已知得 $(m-n)^2 = 217 - 13n^2 \geq 0$, 解得 $n^2 \leq \frac{217}{13} < 17$, 故 $n=1, 2, 3, 4$ $(m, n) = (13, 3), (1, 4), (7, 4)$

例5 原式 $= 5x^2 + 6xy + 3y^2 - 30x - 20y + 46 = 5x^2 + (6y-30)x + 3y^2 - 20y + 46$

$$= 5\left(x + \frac{3}{5}y - 3\right)^2 - 5\left(\frac{3}{5}y - 3\right)^2 + 3y^2 - 20y + 46 = 5\left(x + \frac{3}{5}y - 3\right)^2 + \frac{6}{5}y^2 - 2y + 1$$

$$= 5\left(x + \frac{3}{5}y - 3\right)^2 + \frac{6}{5}\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}$$

当 $\begin{cases} x + \frac{3}{5}y - 3 = 0 \\ y - \frac{5}{6} = 0 \end{cases}$ 时, 上式取得最小值, 此时 $x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{6}$, 最小值为 $\frac{1}{6}$.

【学力训练】

1. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ 2. 原式 $= \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] = 5$ 3. 34 4. 8

5. B 6. A 7. C 原方程化为 $\sqrt{|x-1|^2 - 2|x-1| + 1} = 3$, 即 $||x-1| - 1| = 3$

8. $a^2 + b^2 + c^2 + 43 \leq ab + 9b + 8c$, 即 $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}(b-6)^2 + (c-4)^2 \leq 0$

故 $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}(b-6)^2 + (c-4)^2 = 0$, 得 $a = 3, b = 6, c = 4$

9. 原方程可整理为: $x + y + z - 2\sqrt{x-2} - 2\sqrt{y-1} - 2\sqrt{z-2} = 0$

配方得 $(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{y-1}-1)^2 + (\sqrt{z-2}-1)^2 = 0$, 解得 $x = 1, y = 2, z = 3$

故 $(x-yz)^3 = (1-2 \times 3)^3 = -125$

10. 把 $x = 6 - 3y$ 代入另一等式得 $6(y-1)^2 + 2z^2 = 0$, 得 $y = 1, z = 0, x = 3$, 原式 $= 9$

11. -1 12. 变形得 $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 2\right)^2 \leq 0$, 故 $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 2\right)^2 = 0$, 得 $x = 2, y = 4$

13. -3, -2, 5 14. B 15. D $(a+b)^2 = 5ab, (a-b)^2 = ab, a > b > 0$, 则 $a+b = \sqrt{5ab}, a-b = \sqrt{ab}$

16. D 由 $abcd = 1$, 得 $cd = \frac{1}{ab}$, 则 $ab + cd = ab + \frac{1}{ab} \geq 2$, 同理 $ac + bd \geq 2, ad + bc \geq 2$, 又 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab$

$+ 2cd = 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) \geq 4$, 故 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$.

17. $3(x^2 + y^2 + z^2) - 1 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x+y+z)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$
 $= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$

18. 设 $a = kb$ (k 为正整数), 则 $k(b+1)^2 = 243 = 27 \times 3^2 = 3 \times 9^2$

$\begin{cases} k = 27 \\ b+1 = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = 3 \\ b+1 = 9 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a = 54 \\ b = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 24 \\ b = 8 \end{cases}$

19. 解得 $\begin{cases} x = 15 - z \\ y = 3 + z \end{cases}$, 原式 $= \frac{186}{(15-z)^2 + (3+z)^2 + z^2} = \frac{186}{3z^2 - 24z + 234} = \frac{186}{3(z-4)^2 + 186} \leq \frac{186}{186} = 1$, 此时 $z = 4, x = 11, y = 7$.

20. 易知, 这 32 个人恰好是第 2 至第 33 层各住 1 人, 对于每个乘电梯上、下楼的人, 他所住的层数一定不小于直接上楼的人所住的层数, 事实上, 设住 S 层的人乘电梯, 而住 t 层的人直接上楼, $S < t$, 交换两人的上楼方式, 其余的人不变, 则不满意总分减少.

设电梯停在第 x 层, 在第一层有 y 人没有乘电梯而直接上楼, 那么不满意总分为:

$$S = 3[1+2+\cdots+(33-x)] + 3(1+2+\cdots+y) + [1+2+\cdots+(x-y-2)]$$

$$= \frac{3 \times (33-x)(34-x)}{2} + \frac{3y(y+1)}{2} + \frac{(x-y-2)(x-y-1)}{2} = 2x^2 - (y+102)x + 2y^2 + 3y + 1684$$

$$= 2\left(x - \frac{y+102}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}(15y^2 - 180y + 3068) = 2\left(x - \frac{y+102}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}(y-6)^2 + 316 \geq 316$$

又当 $x = 27, y = 6$ 时, $S = 316$ 故当电梯停在第 27 层时, 不满意总分最小, 最小值为 316 分.

25 整体方法

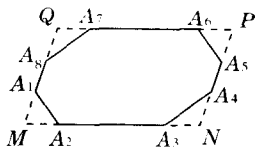
【例题求解】

例 1 -3999 由题设条件得 $\begin{cases} 2(x+3y) + (x+y+z) = 1 \\ 3(x+3y) + (x+y+z) = 2001 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x+3y = 2000 \\ x+y+z = -3999 \end{cases}$

例 2 选 D 三式相加得 $a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = 0$, 配方得 $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0$, 得 $a = b = c$.

例 3 因为 $x = \frac{1 + \sqrt{1994}}{2}$, 所以 $(2x - 1)^2 = 1994$, 即 $4x^2 - 4x - 1993 = 0$, 于是原式 $= [(4x^2 - 4x - 1993)x + (4x^2 - 4x - 1993) - 1]^{2002} = (-1)^{2002} = 1$

例 4 延长 A_8A_1, A_3A_2 相交于 M , 延长 A_2A_3, A_5A_4 相交于 N , 延长 A_4A_5, A_7A_6 相交于 P , 延长 A_6A_7, A_1A_8 相交于 Q , 由 $\angle A_1 = \angle A_5, \angle A_2 = \angle A_6$, 得 $\angle MA_1A_2 = \angle PA_5A_6, \angle MA_2A_1 = \angle PA_6A_5$, 有 $\angle M = \angle P$, 同理可证: $\angle N = \angle Q$.
 $\therefore MNPQ$ 为平行四边形, 即 $A_1A_8 \parallel A_4A_5, A_2A_3 \parallel A_7A_6$. 同理可证: $A_1A_2 \parallel A_6A_5, A_3A_4 \parallel A_8A_7$. \therefore 凸八边形内任意一点到边 A_2A_3 和 A_6A_7 的距离的和为平行线 A_2A_3 和 A_6A_7 间的距离, 是一个定值.



可以推得, 凸八边形内任意一点到 8 条边距离的和是一个定值.

例 5 因为每行、每列都是 4 个数, 当每一次变换, 只改变表中一行(或一列)中 4 个数的符号, 并不改变这一行(列)中 4 个数乘积的符号, 从而也不会改变表中 16 个数乘积的符号, 但表中共有 9 个负数, 所以表中 16 个数乘积的符号为负, 于是无论作多少次操作变换, 表中 16 个数的乘积总是负的, 不会变为表中各数都为正数, 从而使乘积为正的状态.

【学力训练】

1. -1 把 $x^2 + 2x = 2$ 代入 2. $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 由题设条件得 $\frac{2}{x^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

3. $-\frac{1}{6}$ 取倒数迭加 4. $3\sqrt{3}$ 向外补形得平行四边形 5. C 6. C

7. 由 $2x - 3 = \sqrt{7}$, 得 $4x^2 - 12x + 9 = 7$, 即 $4x^2 - 12x + 2 = 0$

原式 $= (4x^4 - 12x^3 + 2x^2) + (2x^3 - 6x^2 + x) - (8x^2 - 24x - 14) + 2x = 2x = 3 + \sqrt{7}$

8. 设 $\triangle ABC$ 被割分成 x 个小三角形, 则 $180^\circ \cdot x = 360^\circ \times 1000 + 180^\circ$, 解得 $x = 2001$, 即可割分成 2001 个小三角形.

9. 5 原式 $= \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]$ 10. 40

11. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{11\sqrt{6}}{6}$, 把等式迭乘得: $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 6$ 12. $\sqrt{2}$ 配方得 $a + b = \sqrt{8ab}, a - b = \sqrt{4ab}$

13. B $\begin{cases} xy + (x + y) = 9 \\ xy(x + y) = 20 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$

14. B 延长 CB , 过 A 作 $AE \perp CB$ 于 E , 过 D 作 $DF \perp AE$ 于 F , 则 $EFDC$ 为矩形.

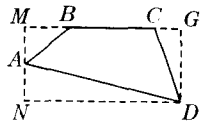
15. 作 $DG \perp BC$ 交 BC 延长线于 G , $AM \perp CB$, 交 CB 延长线于 M , $DN \perp MA$ 于 N , 则 $MNDG$ 为矩形, $MA = MB = \sqrt{3}, CG = 3, GD = 3\sqrt{3}$,

$MG = MB + BC + CG = 8, AN = MN - MA = GD - MA = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

故 $AD = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{19}$.

16. 设满足已知条件填好的数依次为 a_1, a_2, \dots, a_{10} .

则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq M$



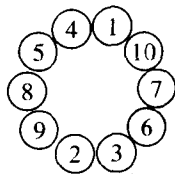
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq M$$

.....

$$a_{10} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq M$$

得 $5(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) \leq 10M$ 即 $\frac{5 \times 10 \times 11}{2} \leq 10M$, 解得 $M \geq 27.5$

而 M 为整数, 故 M 的最小值为 28, 将 1, 2, ..., 10 分成如下的两组 10, 7, 6, 3, 2; 9, 8, 5, 4, 1 依次填入图中.



17. 将 3 个方程相加, 得 $(a+b+c)x^2 + (a+b+c)x + (a+b+c) = 0$

$$\text{即 } (a+b+c)(x^2 + x + 1) = 0$$

因为 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$, 所以 $a+b+c=0$, $x=1$ 为方程组的解.

故当 $a+b+c=0$ 时, 方程组有实数解, 其解为 $x=1$.

26 面积问题评说

【例题求解】

例 1 $\sqrt{30}$ 平移对角线, 可推得 $AC \perp BD$. 例 2 选 C $S_{\text{四边形}BEDC} = BD \cdot CE$, $S_{\text{四边形}BECD} = \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle ABC}$

例 3 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} QE \cdot AD + \frac{1}{2} QE \cdot CP = \frac{1}{2} QE(AD + CP) = \frac{1}{2} QE \cdot BP = QD \cdot BP$, $S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot AD$, 由 $\triangle QAD \sim \triangle APB$, 得 $\frac{AB}{QD} = \frac{BP}{AD}$, 即 $AB \cdot AD = QD \cdot BP$, 命题得证.

例 4 (1) 若 $AB \parallel CD$, ①式仍成立, 分别过 A, M, B 作 CD 的垂线 AE, MN, BF , 垂足分别为 E, N, F , $MN = \frac{1}{2}(AE + BF)$.

(2) 对于图丙, $S_{\triangle DMC} = \frac{S_{\triangle DBC} - S_{\triangle DAC}}{2}$ 证明如下.

由 M 是 AB 的中点得 $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle BDM}$, $S_{\triangle ACM} = S_{\triangle BCM}$,

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle BDM} + S_{\triangle BCM} + S_{\triangle DMC} \quad ①$$

$$S_{\triangle DAC} = S_{\triangle ADM} + S_{\triangle ACM} - S_{\triangle DMC} \quad ②$$

$$① - ②, \text{得 } S_{\triangle DBC} - S_{\triangle DAC} = 2S_{\triangle DMC}, \text{即 } S_{\triangle DMC} = \frac{S_{\triangle DBC} - S_{\triangle DAC}}{2}.$$

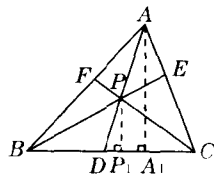
例 5 (1) 分别过 P, A 作 BC 的垂线, 垂足为 P_1, A_1 .

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot PP_1}{\frac{1}{2} BC \cdot AA_1} = \frac{PP_1}{AA_1} = \frac{PD}{AD}.$$

$$\text{同理 } \frac{PE}{BE} = \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}, \frac{PF}{CF} = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$\text{故 } \frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = \frac{S_{\triangle BPC} + S_{\triangle PCA} + S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}} = 1$$

$$(2) \frac{PA}{AD} + \frac{PB}{BE} + \frac{PC}{CF} = 3 - \left(\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} \right) = 2.$$



【学力训练】

1. $AB \parallel CD$ 2. 54 3. 3:1 $\triangle DAC \sim \triangle ABC$, $AC^2 = CD \cdot BC$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. C 6. B 7. D

8. C $\triangle ABF \cong \triangle DAE$, $BF = AE$, 设 $AE = 2x$, $EB = x$, 则 $AB = 3x$, $BF = 2x$, $AF = \sqrt{13}x$, $\triangle AGE \sim \triangle ABF$,

$$S_{\triangle AGE} : S_{\triangle ABF} = AE^2 : AF^2 = (2x)^2 : (\sqrt{13}x)^2 = 4 : 13$$

9. 下列方案供参考:



10. 取 AB 中点 M , 连结 MC 、 MD , 则 $S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形}ABCD}$, 设 $\triangle ECD$ 、 $\triangle MCD$ 、 $\triangle FCD$ 的公共边上的高为 h_E , h_M , h_F , 因 M 为 AB 的中点, 故

$$h_M = \frac{1}{2} (h_E + h_F), S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} (S_{\triangle ECD} + S_{\triangle FCD}).$$

$$\text{即 } S_{\triangle ECD} + S_{\triangle FCD} = 2S_{\triangle MCD} = S_{\text{梯形}ABCD}$$

$$\text{故 } S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ECD} + S_{\triangle FCD} - 2S_{\triangle OCD} = 34 - 2 \times 11 = 12 (\text{cm}^2)$$

11. 分 P 点在底边 BC 、 P 点在 AB 或 AC 上两种情况讨论, 借助面积法证明.

12. 23.4 连 CF , 设 $S_{\triangle CEF} = x$, $S_{\triangle CDF} = y$, 则 $\frac{x}{y+9} = \frac{EF}{BF} = \frac{6}{12}$, $\frac{y}{x+6} = \frac{DF}{AF} = \frac{9}{12}$

13. 19 连 AB' , BC' , CA' 14. $18\sqrt{3}$ 15. $6\sqrt{3}$ 作 $AM \perp BC$ 于 M , 则 $PD + PE + PF = AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$

16. D 17. A 可证得 $AF = BG = CH$, $AF = AG$, $GC = DH$

18. C $\triangle ABC$ 为直角三角形 19. C 用面积法解

20. 过 E 作 $EM \perp BC$ 于 M , 则 $EM = MC = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $BE = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $BM = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, 又 $EM^2 = BM \cdot MF$, 得 $MF = \frac{\sqrt{2}}{12}$, $CF = CM -$

$$MF = \frac{\sqrt{2}}{6}, S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot EM = \frac{1}{24}.$$

21. 过 A 、 K 、 B 分别作 CD 的垂线

22. 由例 5 的结论, 得 $\frac{6}{6+x} + \frac{6}{6+y} + \frac{6}{6+z} = 2$

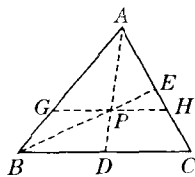
将上式去分母, 并化简整理得 $xyz = 108 - 3(xy + yz + zx) = 108 - 3 \times 28 = 24$

23. 假设满足条件的 P 点存在, 连 AP 并延长交 BC 于 D , 连 BP 并延长交 AC 于 E , 则 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$, 故 $BD = CD$, 同理 $AE = CE$, 则 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过 P 作 $GH \parallel BC$ 分别交 AB 、 AC 于 G 、 H .

则 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$, 由假设可知 $S_{\triangle AGH} = S_{\text{四边形}GBCH}$

$$\therefore \left(\frac{AG}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AP}{AD}\right)^2 = \frac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}, \text{故 } \frac{AP}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

这与三角形重心的性质定理 $\frac{AP}{AD} = \frac{2}{3}$ 矛盾, 因此, 不存在这样的 P 点.



24. 分别延长 DA 、 CB 交于 O , 可证得 $\triangle CDE \cong \triangle COE$, 设 $\triangle OAB$ 的面积为 x , (1) 如果四边形 $AECB$ 面积为 1, 那么 $\triangle COE$ 面积为 $(1+x)$, $\triangle ODC$ 面积为 $2(1+x)$, $OE = DE = 2AE$, $OA : OD = 1 : 4$, 所以 $\frac{x}{2(1+x)} = \frac{1}{16}$, 解得 $x = \frac{1}{7}$, 所以 $S_{\text{梯形}ABCD} = 2 + x = \frac{15}{7}$; (2) 如果 $\triangle CED$ 面积为 1, 那么四边形 $AECB$ 面积为 $1-x$, $\triangle COD$ 面积为 2, $\frac{x}{2} = \frac{1}{16}$, 解得 $x = \frac{1}{8}$, 所以 $S_{\text{梯形}ABCD} = 2 - x = \frac{15}{8}$.

27 折与剪的启示

【例题求解】

例1 $\frac{75}{16}$ 设 $AF = x$, 则 $FD = 4 - x$, $AD' = DC = 3$, $D'F = FD = 4 - x$, $AF^2 = AD'^2 + D'F^2$, 即 $x^2 = 3^2 + (4 - x)^2$,

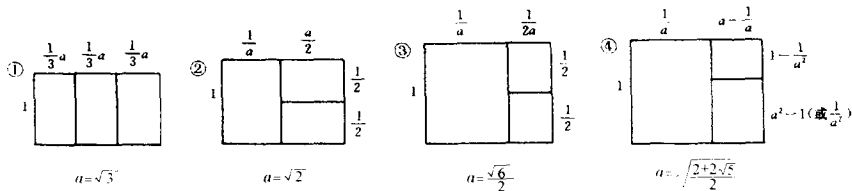
$$\text{解得 } x = \frac{25}{8}, S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AB = \frac{1}{2} \times \frac{25}{8} \times 3 = \frac{75}{16}$$

例2 选D $\angle CBE = \angle EBA = \angle A$

例3 $\frac{5}{6}$ $\triangle AFN \sim \triangle ABE$, 有 $\frac{AF}{AB} = \frac{AN}{AE}$, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{10}$, $AF = \frac{1}{2} AE = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 得 $AN = \frac{AF \cdot AE}{AB} = \frac{5}{3}$, 故

$$S_{\triangle ANE} = \frac{1}{2} AN \cdot BE = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 1 = \frac{5}{6}.$$

例4 示意图



例5 (1) 10个正方形的面积和是

$$3^2 + 5^2 + 6^2 + 11^2 + 17^2 + 19^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 = 3055$$

$$= 5 \times 13 \times 47$$

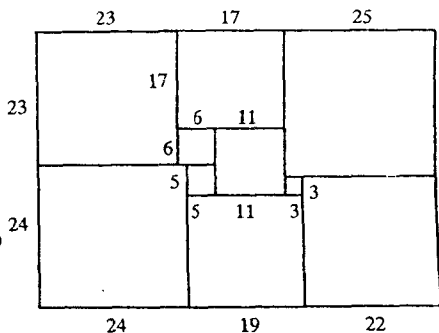
因而所拼成的长方形面积是 3055

长方形的宽显然 ≥ 25 , 所以它的宽应当是 47, 长应当是

$$5 \times 13 = 65.$$

(2) 注意: $23 + 24 = 47$, $25 + 22 = 47$, $23 + 17 + 25 = 65$, $24 + 19$

$+ 22 = 65$, 便可得如图所示的拼图



【学力训练】

1. $\angle DEF = \angle EFG = 55^\circ$, $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 110^\circ$

2. $\frac{15}{2}$ 连 BD 交 EF 于 O , $\triangle DOE \sim \triangle DAB$ 3. $4\sqrt{2}$

4. $\frac{65}{24}$ $AE = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $AM = \frac{1}{2} AE = \frac{13}{2}$, 由 $\text{Rt}\triangle AMP \sim \text{Rt}\triangle ADE$, 有 $\frac{PM}{DE} = \frac{AM}{AD}$, 故 $PM = \frac{AM \cdot DE}{AD} = \frac{\frac{13}{2} \times 5}{12} = \frac{65}{24}$.

5. C 6. D

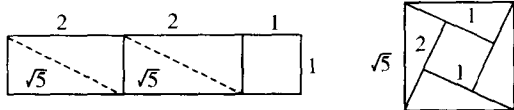
7. 过 G 作 $GH \perp AD$ 于 H , 因 $AE \perp GF$, 故 $\triangle ADE \cong \triangle GHF$, $AE = DF = 13$, $DE = \sqrt{AF^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, 故 $CE = CD - DE = 7$

8. 设 $BE = 5x$, $EA = 3x$, 则 $AB = 8x$, 由 $\text{Rt}\triangle BEC \cong \text{Rt}\triangle FEC$, 得 $EF = 5x$, $AF = 4x$, 由 $\text{Rt}\triangle AEF \sim \text{Rt}\triangle DFC$, 得

$$\frac{AF}{CD} = \frac{EF}{FC}, \text{即 } FC = \frac{CD \cdot EF}{AF} = 10x, \text{在 } \text{Rt}\triangle FCE \text{ 中, 有 } EC^2 = EF^2 + FC^2, \text{即 } (15\sqrt{5})^2 = (5x)^2 + (10x)^2, \text{解得 } x =$$

$$3, AB = 24, BC = 30.$$

9.



10. $\frac{7}{12}$ 延长 BA 、 DC_1 交于 F , $EN \parallel \frac{1}{2} BF$, 设 $ME = x$, 则 $AF = 2x$, $BF = 2x + 3$, $DF = BF = 2x + 3$. 在 $\text{Rt} \triangle ADF$ 中, $(2x)^2 + 4^2 = (2x + 3)^2$, 解得 $x = \frac{7}{12}$.

11. 略 12. B 13. C

14. 可以证明 $EFGH$ 为矩形, E 、 G 分别为 AB 、 DC 中点, $EG \parallel AD$, $HF = AD = 5$, 在 $\text{Rt} \triangle EFH$ 中, $S_{\triangle EFH} = \frac{1}{2} \cdot EM \cdot HF = \frac{1}{2} EH \cdot EF$, 得 $EM = \frac{EH \cdot EF}{HF} = \frac{12}{5}$, 又 $AB = AE = 2EM = \frac{24}{5}$, 故 $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{\frac{24}{5}} = \frac{25}{24}$.

15. 要考虑的不同剪纸方案, 可归纳为如下 4 类:

- (1) 如图 1, 其周长和 $= 2 \times \left(2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{3} \right) = 5 \frac{1}{3}$.
 (2) 如图 2, 其周长和 $= 2(x + 3x) + 2[(1-x) + 3(1-x)] = 8$.
 (3) 如图 3, 其周长和 $= 8$.
 (4) 如图 4, 其周长和 $= 2(3x + x) + 2\left[(3-x) + \frac{3-x}{3}\right] = \frac{16x}{3} + 8$ 因 $0 \leq 3x \leq 1$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, 故当 $x = \frac{1}{3}$, 周长和有最大值 $9 \frac{7}{9}$.

综上所述, 剪得的两个小长方形周长之和的最大值为 $9 \frac{7}{9}$.

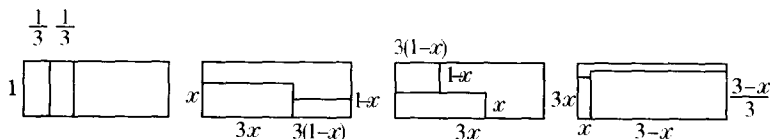


图 1

图 2

图 3

图 4

16. (1) 当 F 是 BC 的中点时, $\triangle AFE \cong \triangle ADE$, 则 $AF = AD = BC = 2BF$, 有 $\angle BAF = 30^\circ$; 当 $AB = \sqrt{3} BF$; 当 $\triangle ADE \sim \triangle FCE$.
 (2) 若 $\angle DAE = 30^\circ$, 则 F 是 BC 中点; 若 $FB = \frac{1}{2} AF$, 则 F 是 BC 中点.

28 奇妙的对称

【例题求解】

- 例 1 $10\sqrt{2}$ 分别作 P 关于 OA 、 OB 的对称点 M 、 N , 连结 MN 交 OA 、 OB 于 Q 、 R , 则 $\triangle PQR$ 即为符合条件的三角形. $OP = OM = ON = 10$, 而 $\angle MON = 2\angle AOB = 90^\circ$, $\triangle PQR$ 的周长 $= MN = 10\sqrt{2}$.
 例 2 选 B A 、 C 关于 BD 对称, 连 AE 交 BD 于一点, 这一点就是使 $PE + PC$ 的值最小的一点, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
 例 3 已知 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$ ①
 设 $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2} = m$ ②

① × ②, 得 $a^2 - b^2 = m$,

① + ②, 得 $2a\sqrt{1-b^2} = 1+m = a^2 - b^2 + 1$

故 $a^2 - 2a\sqrt{1-b^2} + (1-b^2) = 0$, 即 $(a - \sqrt{1-b^2})^2 = 0$

$\therefore a - \sqrt{1-b^2} = 0$, 由此得 $a^2 + b^2 = 1$.

例 4 如图, 以 AC 为对称轴, 将 $\triangle ADO$ 翻折, D 点必落在 BO 上, 设为 D' , 则 $AD' = AD$, $OD' = OD$; 同理, 将 $\triangle BCO$ 翻折, C 点必落在 AO 上, 设为 C' , 则 $BC' = BC$, $OC' = OC$, 连结 $C'D'$, BC' , AD' , 交于 E , 则 $C'D' = CD$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle C'D'E$ 中, 有

$$\begin{cases} C'E + D'E > C'D' & \text{①} \\ BE + AE > AB & \text{②} \end{cases}$$

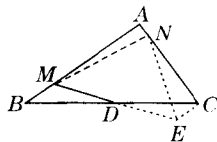
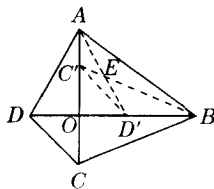
① + ②, 得 $BC' + AD' > AB + C'D'$ 即 $AD + BC > AB + CD$

例 5 将 $\triangle BMD$ 绕 D 点旋转 180° , 得 $\triangle CED$, 则 $BM = CE$, $AB \parallel CE$, 连 MN , NE , 则 $MN = NE$

$$\therefore BM^2 + CN^2 = CE^2 + CN^2 = DM^2 + DN^2 = NE^2,$$

$$\therefore \angle NCE = 90^\circ, \text{由此得 } \angle BAC = 90^\circ$$

故 $AB^2 + AC^2 = BC^2 = (2AD)^2 = 4AD^2$, 即 $AD^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2)$



【学力训练】

1. 10 2. $2\sqrt{5}$ 3. 10 4. B

5. C 分别作 B, A 点关于河岸的对称点 E, F , 连 EA 交河岸于 P , 则 $PB + PA = PB + PF = BF$ 最短, 连 EF , 则 $BE = BD + AC = 1200$, $BF = \sqrt{BE^2 + AF^2} = \sqrt{500^2 + 1200^2} = 1300(m)$

6. D A, C 关于 BD 对称, 连 AE 交 BD 于 P , 且 $AE \perp BC$. $\angle BAE = 30^\circ$, $PE + PC = AE = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2\sqrt{3}a$ 为最小.

7. (1) 分别过 M, N 作 AB 的垂线, 垂足 P, Q 即为所求的点.

(2) 当汽车从 A 向 B 行驶时, 在 AP 这段路上, 离两个村庄越来越近; 在 PQ 这段路上, 离村庄 M 越来越远, 离村庄 N 越来越近.

(3) 点 H 存在, 连结 MN , 作线段 MN 的中垂线, 该中垂线与 AB 的交点即为所求的点 H .

8. 连结 AF , 则 $DF = AF$, 需证 $AF^2 = BF \cdot FC$, 证明 $\triangle ACF \sim \triangle BFA$ 即可

9. 连 FE 并延长与 CB 延长线交于一点 P , 可证明 EC 为 BF 中垂线.

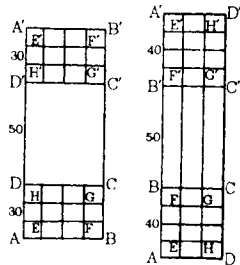
10. 14 11. 40°

12. 蚂蚁爬行的最短路线只经过长方体的 3 个表面, 且当将有关的 3 个表面展开在同一平面时, 其最短路线为直线段, 由长方体的对称性, 仅需考虑两种展开方法(如图)

$$\text{由(1)有 } EG' = \sqrt{20^2 + 80^2} = 20\sqrt{17}$$

$$\text{由(2)有 } EG' = \sqrt{10^2 + 90^2} = 10\sqrt{82}$$

$$\text{由 } 10\sqrt{82} > 20\sqrt{17}, \text{故最短时间为 } \frac{1}{2} \times 20\sqrt{17} = 10\sqrt{17}.$$



13. $(1+\sqrt{2})^4 = [(1+\sqrt{2})^2]^2 = (3+2\sqrt{2})^2$, 又 $(3+2\sqrt{2})^2 + (3-2\sqrt{2})^2 = 34$, 且 $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1, 0 < (3-2\sqrt{2})^2 < 1$, 故 $(1+\sqrt{2})^4$ 的整数部分为 33.

(1)

(2)

14. $d + e = 220^\circ, x = 20^\circ$

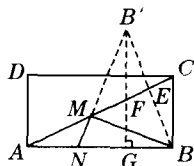
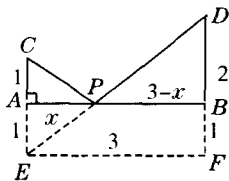
15. 以 AD 为对称轴, 将 $\triangle ABD$ 翻折, B 落在 CD 上, 设为 B' , 连 PB' , 设 AB' 与 PC 交于 E

16. 如图, 设 $AB = 3, AC \perp AB, BD \perp AB$, 且 $AC = 1, BD = 2$, 设 $PA = x$, 则 $PB = 3 - x, PC = \sqrt{x^2 + 1}, PD =$

$\sqrt{(3-x)^2+2^2}$, 原代数式最小值问题转化为一个几何问题, 即在直线 AB 上找一点, 使得 $PC+PD$ 达到最小, 易求得最小值为 $PC+PD=PE+PD=DE=\sqrt{EF^2+DF^2}=3\sqrt{2}$.

17. 如图, 作点 B 关于直线 AC 的对称点 B' , 交 AC 于 E , 连结 $B'M$, 过 B' 作 $B'G \perp AB$ 于 G 交 AC 于点 F , 由对称性知: $B'M+MN=BM+MN \geq B'G$, 当且仅当 M 与 F 、点 N 与 G 重合时, 等号成立.

$AC=10\sqrt{5}$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC \cdot BE=\frac{1}{2}AB \cdot BC$, 得 $BE=4\sqrt{5}$, $BB'=2BE=8\sqrt{5}$, 因 $\angle B'BG+\angle CBE=\angle ACB+\angle CBE=90^\circ$, 则 $\angle B'BG=\angle ACB$, 又 $\angle B'GB=\angle ABC=90^\circ$, 得 $\triangle B'GB \sim \triangle ABC$, $\frac{B'G}{AB}=\frac{BB'}{AC}$, $B'G=\frac{8\sqrt{5} \times 20}{10\sqrt{5}}=16$. 故 $BM+MN$ 的最小值是 16 cm.



29 几何动态

【例题求解】

- 例 1 $2\sqrt{2}-2$ $\triangle AB'E \cong \triangle ABE$, $B'C=BB'-BC=2\sqrt{2}-2$, $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2=1$, 由 $\triangle B'FC \sim \triangle B'AB$, 有

$$\frac{S_{\triangle B'FC}}{S_{\triangle ABE}}=\left(\frac{B'C}{AB}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}, S_{\triangle B'FC}=3-2\sqrt{2}.$$

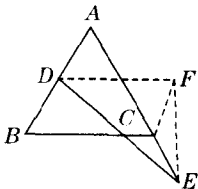
- 例 2 选 C 将 $\triangle BPC$ 绕 B 点逆时针旋转 60° 得 $\triangle BAP'$, 连 PP' , 则 $\triangle BPP'$ 为等边三角形, $PC=P'A=5$, $PP'=BP=4$, $P'A^2=PP'^2+PA^2$, 得 $\angle APP'=90^\circ$

- 例 3 如图, 过 D 作 $DF \parallel BC$, 连结 FE , FC , 则四边形 $DBCF$ 为平行四边形, $\angle B=\angle DFC$, $CF=BD$, 由 $CE=BD$ 得 $CE=CF$, 有 $\angle CFE=\angle CEF$ ①

由 $AB=AC$ 得 $\angle ACB=\angle B>\angle AED \therefore \angle DFC>\angle DEF$ ②

由①、②得 $\angle DFE>\angle DEF$, 有 $DE>DF$, 即 $DE>BC$.

- 例 4 当正方形 $ABCD$ 与正方形 $A'B'C'D'$ 的对应边平行时, 两者重合部分面积为正方形面积的 $\frac{1}{4}$, 转动后, 两者重合面积仍为定值.



- 例 5 (1) 过 P 作 $PE \perp QR$ 于 E , $PQ=PR$, $QE=PE=\frac{1}{2}QR=4$, $PE=3$, 当 $t=3$ 时, $QC=3$.

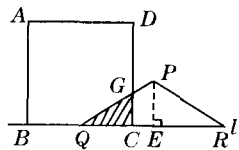
由 $PE \parallel DC$ 得 $\triangle QCG \sim \triangle QEP$

$$\text{有 } \frac{S}{S_{\triangle QEP}}=\left(\frac{CG}{PE}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\therefore S=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle QEP}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3=\frac{27}{8}(\text{cm}^2)$$

- (2) 当 $t=5$ 时, $CR=3$, 由 $\triangle RCG \sim \triangle REP$, 得 $S_{\triangle RCG}=\frac{27}{8}$,

$$\therefore S=S_{\triangle PQR}-S_{\triangle RCG}=12-\frac{27}{8}=\frac{69}{8}(\text{cm}^2)$$



【学力训练】

1. (1) 略; (3) ① $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 到 $\triangle ADF$ 的位置; ② $BE=DF$, 且 $BE \perp DF$.
2. 135° 将 $\triangle PBC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° 到 $\triangle BP'A$ 的位置, 连 PP' , $\angle BPP'=45^\circ$, $\angle P'AP=90^\circ$
3. A 4. B 5. 由 $\triangle PBQ \sim \triangle BCD$ 可得 $t=12$ (秒)

6. 连 AC , 由于 $AB = AE$, $\angle ABC + \angle AED = 180^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转到 $\triangle AEF$ 位置, B 点与 E 点重合, D, E, F 在一条直线上, $AF = AC$, $EF = BC$, $DF = DE + EF = BC + DE = CD$, 可证 $\triangle ACD \cong \triangle AFD$.

7. 过 E 作 $ER \parallel CD$, 过 C 作 $CP \parallel AB$, 过 A 作 $AQ \parallel EF$, 则 $\triangle PQR$ 为等边三角形.

8. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

9. $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ 将 $\triangle APC$ 绕 C 点逆时针旋转 60° 得 $\triangle BDC$, 可得 $\angle BPC = 150^\circ$, 过 B 作 $BE \perp CP$ 于 E , $\angle BPE = 30^\circ$, $BE = \frac{1}{2}BP = 2$, $EP = 2\sqrt{3}$, $EC = 3 + 2\sqrt{3}$.

10. 过 A 作 $AH \perp BC$, 延长 CO 交 AH 于 P , 连 BP , 则 $\angle BAH = 40^\circ$, $\angle BAC = 80^\circ$, $\angle ABC = \angle ACB = 50^\circ$, $\angle OCB = 31^\circ$, $\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$, $\angle PBO = 20^\circ$

由 $\angle BAP = \angle BOP = 40^\circ$, $BP = BP$, $\angle ABP = \angle OBP = 20^\circ$, 可证明 $\triangle ABP \cong \triangle OBP$, 得 $AB = OB$, $\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle ABO}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

11. 过 E 作 $EG \parallel BC$, 连 FG , 则四边形 $EBCG$ 为平行四边形, $AB = AC$, $AE = CF$, $\angle EAF = \angle FCG$, $AF = BE = CG$, $\triangle AEF \cong \triangle CFG$, $EF = FG$, 又 $EF + FG \geq EG$, 即 $2EF \geq BC$, 故 $EF \geq \frac{1}{2}BC$.

12. $\angle HBD = \angle HAE$, $Rt\triangle BDH \sim \triangle ADC$, 得 $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{HD}$, 又 $BD = DC = \frac{1}{2}BC$, 则 $AH \cdot HD = BD \cdot DC = \frac{1}{4}BC^2$, 于是

$$S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC} = \left(\frac{1}{2}AD \cdot BC \right) \left(\frac{1}{2}HD \cdot BC \right) = \frac{1}{16}BC^4.$$

由于 BC 是不变的, 所以当点 A 至 BC 的距离变小时, 乘积 $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle HBC}$ 保持不变.

13. (1) 当 $3 < x \leq 6$ 时, 梯形位于直线 m 左侧的图形为梯形 $BPEA$, $PC = ED = 6 - x$,

$$AE = 3 - (6 - x) = x - 3, y = \frac{1}{2}[(x - 3) + x] \cdot 2 = 2x - 3.$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 梯形位于直线 m 左侧的图形为 $\triangle BPE$, 过 A 作 $AF \parallel DC$, 设

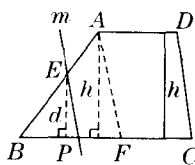
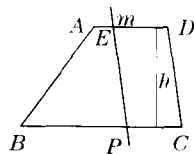
$\triangle BPE$ 中 BP 边上的高为 d , 由 $\triangle BPE \sim \triangle BFA$, 得 $\frac{BP}{BF} = \frac{d}{h}$, 有 $d = \frac{2}{3}x$, $y =$

$$\frac{1}{2}BP \cdot d = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x^2$$

(3) 由已知可得 $S = \frac{1}{2}(3 + 6) \cdot 2 = 9$, $\frac{S}{2} = \frac{9}{2}$, 当 $x = 3$ 时, 由(2)得 $y = \frac{1}{3}x^2 = 3$

$< \frac{S}{2}$. \therefore 当 $y = \frac{S}{2}$ 时, y 与 x 之间的关系满足 $y = 2x - 3$, 由 $2x - 3 = \frac{9}{2}$, 得 x

$$= \frac{15}{4}.$$



30 数形互助

【例题求解】

例 1 $5\sqrt{6}$ $GE = AE = 3k$, $GB = \sqrt{5}k$, 由 $Rt\triangle FHC \sim Rt\triangle GBE$, 得 $FG = 3\sqrt{5}k$, $FG^2 + GE^2 = EF^2$, 即 $(3\sqrt{5}k)^2 + (3k)^2 = 18^2$, 得 $k = \sqrt{6}$.

例 2 选 C 设 $AD = a$, 则 $DC = 2a$, $CE = a$, $EF = BF = \sqrt{2}a$, $AF = 2\sqrt{2}a$, $\frac{CE}{DC} = \frac{EF}{AF} = \frac{1}{2}$, 又 $\angle C = \angle EFA = 90^\circ$, 得 $Rt\triangle CDE \sim Rt\triangle AEF$, 故 $\angle 1 = \angle 2$.

例 3 (1) $BE = 3$, $\therefore CF \parallel AG \therefore \frac{CF}{BG} = \frac{CE}{BE}$, $BG = 4$,

由 $HM \parallel BE$ 得 $\frac{MG}{BG} = \frac{HM}{BE}$, $MG = \frac{4}{3}x$,

$$\therefore y = x \left(4 + 4 - \frac{4}{3}x \right) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x.$$

$$(2) y = -\frac{4}{3}x^2 + 8x = -\frac{4}{3}(x-3)^2 + 12$$

当 $x=3$ 时, y 有最大值, 最大面积是 12.

例 4 如图, 作边长为 k 的正方形, 由 $a+x=b+y=c+z=k$, 把正方形四边分割, 这时

$$S_{\text{阴影}} = ay + bz + cx; S_{\text{正方形}} = k^2$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} < S_{\text{正方形}}$$

$$\therefore ay + bz + cx < k^2$$

例 5 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = a+b$, $BC = AD = c+d$, $AE = a$, $AF = d$, 则 $BE = D$

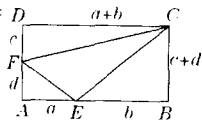
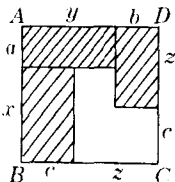
$$b, DF = c, EF = \sqrt{a^2 + d^2}, EC = \sqrt{b^2 + (c+d)^2}, FC = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

即 $\triangle EFC$ 为满足条件的三角形, 故存在性得证:

$$S_{\triangle EFC} = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle EBC} - S_{\triangle CDF}$$

$$= (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}b(c+d) - \frac{1}{2}c(a+b)$$

$$= \frac{1}{2}(ac + ad + bd)$$



【学力训练】

1. 143 2. 35 cm, 20 cm, 3. B

4. C 可以证明 $PE + CF = AC$

5. (1) $AM = AF = \sqrt{5} - 1$, $MD = AD - AM = 3 - \sqrt{5}$;

$$(2) AM^2 = AD \cdot DM = 6 - 2\sqrt{5}.$$

6. (1) 由 $PN \parallel BC$, 得 $\frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD}$, $QM = PN = y$, $MN = x = ED$, $AE = 80 - x$

$$\therefore \frac{y}{120} = \frac{80-x}{80}, y = 120 - \frac{3}{2}x$$

(2) 设矩形 $PQMN$ 面积为 S , 则 $S = xy = x \left(120 - \frac{3}{2}x \right) = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = -\frac{3}{2}(x-40)^2 + 2400$

当 $x=40$ 时, $S_{\max} = 2400$, $y=60$

$$7. \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

8. 设 $AB = h$, $AD = a$, $BC = b$, 延长 BE 与 AD , 交于 F 点, 则 $\triangle BCE \cong \triangle FDE$, $DF = BC = b$, 由勾股定理及面积

$$\text{公式得} \begin{cases} h^2 + (a+b)^2 = 26^2 & \text{①} \\ \frac{1}{2}h(a+b) = 120 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \times 4, \text{得 } [h + (a+b)]^2 = 1156,$$

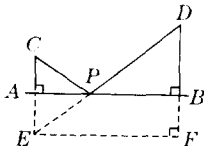
即 $h + a + b = 34$, 故 $AB + BC + DA = 34$.

9. 第一个是丙、第三个是甲、第五个是丁, 列表分析

10. 原式 $= \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(12-x)^2 + 3^2}$, 构造图形, $AB = 12$, $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, $AC =$

2 , $BD = 3$, $PA = x$, $PB = 12 - x$, $PC = \sqrt{x^2 + 2^2}$, $PD = \sqrt{(12-x)^2 + 3^2}$, 由对称分析

知 $PC + PD$ 的最小值为 $PE + PD = DE = \sqrt{EF^2 + DF^2} = \sqrt{12^2 + (3+2)^2} = 13$.



11. 略

12. 构造一个边长为 $a+b+c$ 的正方形 $ABCD$, 使 $AM = DH = a$, $MN = AG = b$, $NB = GH = c$, 过 M, N, G, H 分别作边的平行线, 选取这些平行线的两个交点 E, F , 则有 $AE = \sqrt{a^2 + b^2}$, $EF = \sqrt{b^2 + c^2}$, $FC = \sqrt{a^2 + c^2}$, 而 $AC = \sqrt{2}(a+b+c)$.

根据两点间连线以线段为最短的公理有 $AE + EF + FC > AC$, 即 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} > \sqrt{2}(a + b + c)$.

13. (1) 可证明 $HC = HG$, $FH = HC$, 故 $FH = HG$

(2) 设 $AD = a$, 由 $AD \parallel BG$, 得 $\frac{AD}{BG} = \frac{DE}{BE} = x$,

$$\therefore BG = \frac{a}{x}, CG = \frac{a(1-x)}{x},$$

$\therefore FC \parallel AB$,

$$\therefore FC = a(1-x), FG = \frac{a(1-x)}{x} \sqrt{1+x^2}.$$

过点 E 作 $EM \perp CD$ 于 M , 则 $\frac{EM}{BC} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{DE+EB} = \frac{x}{1+x}$,

$$\therefore EM = \frac{ax}{1+x}, \text{ 又 } \frac{DM}{MC} = \frac{DE}{EB} = x, \therefore MC = \frac{a}{1+x}.$$

在 $\text{Rt}\triangle EMC$ 中, $CE = \frac{a}{1+x} \sqrt{1+x^2}$, 又 CH 是 $\text{Rt}\triangle GCF$ 的斜边上的中线, 得

$$CH = \frac{a(1-x)}{2x} \sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ECH}}{S_{\triangle GCF}} = \frac{EC \cdot CH}{CF \cdot CG} = \frac{1+x^2}{2(1-x^2)}, \text{ 即 } y = \frac{1+x^2}{2(1-x^2)}.$$

14. (1) O 为 $\triangle ABC$ 重心, 设 $OE = x$, $OF = y$, 则 $BO = 2x$, $CO = 2y$, 在 $\text{Rt}\triangle COE$ 、 $\text{Rt}\triangle BOF$ 、 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, 有:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = \frac{1}{4}b^2 & \text{①} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①}, \text{得 } 3x^2 = BC^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = \frac{1}{4}c^2 & \text{②} \end{cases}$$

$$4 \times \text{②} - \text{③}, \text{得 } 12x^2 = c^2 - BC$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = BC^2 & \text{③} \end{cases}$$

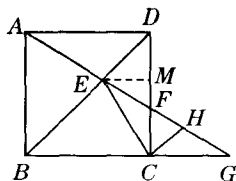
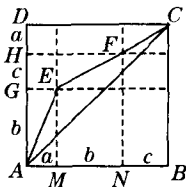
$$\therefore BC = \frac{1}{5} \sqrt{5(c^2 + b^2)}$$

(2) 若 $\triangle ABC$ 存在, 则 $c + b > BC$ 和 $c - b < BC$, 得

$$\begin{cases} (c+b)^2 > \frac{1}{5}(c^2 + b^2) & \text{④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c-b)^2 < \frac{1}{5}(c^2 + b^2) & \text{⑤} \end{cases}$$

不等式④恒成立, 不等式⑤为 $2b^2 - 5bc + 2c^2 < 0$, 解得 $\frac{1}{2} < \frac{b}{c} < 2$, 故当 $\frac{1}{2} < \frac{b}{c} < 2$ 时这样的三角形存在.



云中漫步

——迷人的数学

认识黄东坡老师是参加湖北省教育厅组织的一次选派优秀教师赴西藏参加“西藏山南地区教学研讨日”活动。

时隔几年,当时参加示范讲课的6位老师(湖北4名、西藏2名),课堂上热烈动人的场景仍历历在目,他们几位老师堪称优秀。我离开课堂十多年也为中国教育发展到今天感到吃惊,整个的新教育方法从他们的身上就体现出来,不再是填鸭式的灌输和死记硬背公式。比如黄老师当时讲课运用日本 PLUS 公司的数码投影机来播放他制作的全等三角形课件,当讲到完全重合时,投影屏幕上同时出现了两个运动着并重合到一起的一模一样的可爱的小狗,三百多人的大课堂爆发一阵开心的大笑,大家当时的想法恐怕也与我一样,数学竟也如此有趣!然后黄老师又引导学生举出尽可能多的全等形,课堂气氛十分活跃。

好了,不说课堂了,还是来说说我们的黄老师吧。

从西藏回来后,我与湖北同去的几位老师都成了好朋友,大家经常一起坐坐,聊聊天。于是我们知道黄老师居然堪称“著作等身”(一家长言),写了十几本书,其中的《初中数学一题多解》一书,获得1998年湖北省“优秀畅销书奖”,《数学培优竞赛新帮手》被评为“2001年湖北最有影响的10本书”,更有一位儒雅的书商说:“书上只要署上黄老师的名,我卖起来就没有问题”,他的话令我们对黄老师不得不刮目相看了。许多书商、出版社都慕名来找他,恨不得出钱让他同意在自己组稿的书上署上他的名,他拒绝得很干脆:“我要对读者负责,我署名的就一定是精品,才对得起这么多关心我的读者。著书,是我对数学、数学教育的一点感悟的激情表达,对教学的总结,对学生学习过程的优化设计。”书是一座桥,联系着作者与教师、学生、家长,有时候读到许多读者给他写的信,我们都为读者们感到快乐,有这样一位勤勉和智慧的数学教育工作者在为你们笔耕不辍,伴随你们的学习和成长,堪称幸事啊。

作为朋友,我对他的评价:敬业勤奋的黄老师,一个数学的狂人,一个不谙世事的人,一个博爱善良心计无多的人。希望有更多的朋友理解和支持他,一起为更多更好的新书可以交到读者的手中而帮助他。

我想,如果让我来为这本充满人文气息的初中数学新著取名的话,我会用“云中漫步”这样的字眼,一个遨游在数学世界的人,沉醉在数学推理、逻辑演绎的状态,是不是很像在云中漫步,那般洒脱、那般轻灵。他说,只有在他热爱的数学中他才会找到灵感,数学教育是“把火热的思考化为冰冷的美丽”,数学这个学科亦是如此迷人啊!

魏 红

2002年6月于武昌

[General Information]

书名=数学培优竞赛新方法 初二年级

作者=黄东坡著

页数=215

SS号=10855879

出版日期=2002年07月第1版

封面页

书名页

版权页

前言页

目录页

代数篇

- 1 分解方法的延拓——换元法与主元法
- 2 分解方法的延拓——配方法与待定系数法
- 3 因式分解的应用
- 4 分式的概念、性质及运算
- 5 有条件的分式的化简与求值
- 6 实数的概念及性质
- 7 二次根式的运算
- 8 二次根式的化简求值

几何篇

- 9 三角形的边与角
- 10 全等三角形
- 11 等腰三角形的性质
- 12 等腰三角形的判定
- 13 从勾股定理谈起
- 14 多边形的边角与对角线
- 15 平行四边形
- 16 完美的正方形
- 17 梯形
- 18 由中点想到什么
- 19 平行截割
- 20 飞跃——从全等到相似
- 21 相似三角形的性质
- 22 直角三角形的再发现

综合篇

- 23 代数证明
- 24 配方法的解题功能
- 25 整体方法
- 26 面积问题评说
- 27 折与剪的启示
- 28 奇妙的对称
- 29 几何动态
- 30 数形互助

参考答案

附录页