



普通高等教育“九五”国家级重点教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

SIGNALS & SYSTEMS

# 信号与系统

第三版  
上册

郑君里 应启珩 杨为理



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

# SIGNALS & SYSTEMS

## 信号与系统课程系列教材

主教材	信号与系统 (第三版) 上、下册 (第一版1981, 第二版2000)	郑君里 应启珩 杨为理
简明版教材	信号与系统引论	郑君里 应启珩 杨为理
学习指导书	教与写的记忆——信号与系统评注	郑君里
实验教材	信号与系统——MATLAB综合实验	谷源涛 应启珩 郑君里
习题解析	信号与系统 (第三版) 习题解析	谷源涛

ISBN 978-7-04-031519-6



9 787040 315196 >

定价 40.90元



普通高等教育“九五”国家级重点教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

# 信号与系统

Xinhao yu Xitong

第三版

上册

郑君里 应启珩 杨为理

## 内容提要

本书第一、二版分别于1981年和2000年与读者见面。第三版与前两版之研究范围、结构层次大体相同,仍然是讨论确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法,从时域到变换域,从连续到离散,从输入输出描述到状态空间描述,以通信和控制工程作为主要应用背景,注重实例分析。

第三版保持了前两版之特色:注重结合基本理论融入各类工程应用实例。新版对这些例子进行了修订和更新,使全书具有强烈的时代感;保留了第六章信号矢量空间分析的内容,并有适当修订与补充,从而突显本书与国内、外同类教材的重要区别;全书结构有较大灵活性,可适用于通信电子类和非通信电子类的多种理工科专业的本科生教学。

全书共十二章,分两册装订,上、下册各六章,各章目与第二版基本一致。

## 图书在版编目(CIP)数据

信号与系统.上册/郑君里,应启珩,杨为理编著.—3版.  
—北京:高等教育出版社,2011.3  
ISBN 978-7-04-031519-6

I. ①信… II. ①郑… ②应… ③杨… III. ①信号  
分析—高等学校—教材 ②信号系统—系统分析—高等  
学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第262015号

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 北京凌奇印刷有限责任公司

开 本 787×960 1/16  
印 张 28.25  
字 数 520 000

购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 1981年10月第1版  
2011年3月第3版  
印 次 2011年3月第1次印刷  
定 价 40.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 31519-00



## 第三版前言

1978年撰写《信号与系统》第一版初稿至今已历经32年(见本书下册后附参考书目[1])。在此期间,曾改写第二版<sup>[2]</sup>,于2000年与读者见面,此后又出版了风格独特的教学辅导参考书<sup>[4]</sup>,MATLAB实验配套教材<sup>[5]</sup>以及第二版的简明版《信号与系统引论》<sup>[3]</sup>。这些教材相互支撑,为读者提供了方便。当然,大家最为关心第三版何时写好。为了准备这项工作,多年来我们努力研究本课程的历史、现状与前景,发表了多篇研究报告,其中2008年撰写的文章<sup>[41]</sup>具有代表性,该文中的观点阐明了修订信号与系统教材的环境背景和指导思想,建议读者参阅。结合该文要点以及多年来授课的感受,特别是考虑到与众多兄弟院校老师长期、密切交流得到的启发和帮助,作者认识到以下诸方面的议题很值得认真分析与反复研究:

(1) 由于确定性信号经线性时不变系统传输与处理的研究方法已相当成熟,本课程的教学要求和基本内容相对稳定。虽然在某些方面受到最新技术发展的冲击,然而,尚未构成大幅度更新和重组课程体系的新局面,因而,本课程的发展前景可表述为:在相对稳定中逐步追求变革。

从第二版到第三版,本教材的教学目标和研究范围没有改变。第三版的章目结构与第二版完全相同,仍为十二章,分上、下册各六章。全书构成一个整体,不可分割。请不要认为上册只讲连续、下册只讲离散,实际上,许多章节对这两大类问题都在交叉展开讨论。特别需要指出,5.10节关于PCM通信系统的介绍是本书的突出特色之一。我们讲授离散部分的切入点正是PCM通信,在初步认识这一实际工程系统之后再讲差分方程会取得更好的教学效果。目前,国内外同类教材对于连续和离散两部分的选材与引出顺序有不同的理解,在参考书目[4]第2.5节和参考书目[41]中有深入分析,敬请各位老师关注。本书1.8节的图1-47对全书各章的联系有详细说明,请查阅。框架结构虽无明显改变,而具体的内容论述有许多更新之处,变革修订的原则将在下文陆续给出。

(2) 要处理好稳定与变革的关系,必须在讲授传统内容的过程中充分体现时代气息,注重经典理论的讲述与引入最新技术的相互融合。以当代信息科学的观点理解、审视、组织和阐述传统内容。所谓课程更新往往体现在应用领域的演变,而已经成熟的经典理论却仍然适用。第二版教材特别注重结合基本概念

介绍各类应用实例(如 PCM 通信、CDMA 通信、码速与带宽、匹配滤波器、小波变换以及人口增长估测、宏观经济模型、住房贷款偿还计算等)。这些讨论有助于激发学生的学习志趣和热情,推动他们灵活、深入地掌握基本概念,给读者留下深刻印象,这是本书最重要的特色。

改写第三版的首要任务就是要使原书应用实例丰富、与理论分析密切融合之特色更加突显。因此补充或更新了大量应用实例,如新增加之通信系统多径失真的消除(第二、四、五、七章)、雷达测距原理(第三章)、对电信网络的初步认识(第五章)、OFDM 通信系统原理(第九章)等。许多生动活泼的实例分析渗透于全书各章,读者随手翻看可以激发起强烈的阅读乐趣。

(3) 第二版曾增写信号的矢量空间分析一章(第六章),取得了很好的教学效果。这里涉及的基本概念在许多后续课程中需要引用,而按照以往的习惯,尚未见到国内外哪种教材或哪门课程对此进行系统的入门介绍。本章的撰写成功地改变了这种状况。第三版全文保留了第二版第六章的内容,并对例题和习题进行了适当的修订和补充。

教学改革必须注重结合国情。我们的学生从高中到大学历经系统深入的数学课程学习,承受了严格而艰苦的训练,他们对数学基础知识及其实际应用问题的兴趣要明显超过国外的同龄学生。而本课程的核心任务正是要构建一座从数学到物理和工程技术的桥梁,引导学生从理论学习过渡到专业工程训练。本书的重要特征在于适应国情,使学生一方面对信号处理的学习步入更深层次,为学好后续理论课程打好基础,另一方面也认识到数学并不神秘,许多数学工具非常有用,它就在我们身边。

必须注意,加强数学与物理和工程的结合决非盲目依赖数学推导和分析。在修订过程中对于第二版一些比较繁琐的数学推证进行了压缩或删简。力求帮助读者在自学过程中抓住要领。例如原第二章  $\delta$  函数匹配系数的代数求解,又如原第十二章状态方程时域求解方法之介绍等都做了较大修改或删除。

(4) 信号与系统课程的实验教学可以结合 MATLAB 软件应用安排编程练习。目前,这种做法已取得国内外众多授课教师的共识。在具体实现方法上有两种形式,一是在理论教材的每一章后附加相应练习,另一种是单独编写 MATLAB 编程练习教材,适当增加综合性训练题目,这需要稍多一些课时。经过几年来的实践试点,我校电子系采取了后一种做法,并且出版了相应的教材(见参考书目[5])。

(5) 第二版教材结构具有很大灵活性,第三版教材继续保持这一特色。本书可适用于本科通信电子类与非通信电子类的多种专业,全书篇幅较大。任课教师可以根据各校实际情况进行不同章节的选取与组合,构成深度和学时有区别的课程。

目前,我国最常见的两种信号与系统组课方案示意如图1。简要地说,就是三个变换加(或不加)状态变量。大多在一个学期内讲完,学时数为64~72[另加实验学时,各校授课方案有较大区别,如上文(4)所述。]

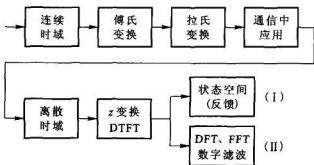


图1 两种信号与系统组课方案

图1中的第Ⅰ方案主要用于通信、电子信息工程、生物医学工程等专业。在此课之后都还设置了必修课数字信号处理,而控制理论课程不一定必修。第Ⅱ方案主要用于后设控制理论为必修,而数字信号处理不一定必修之专业,如自动化、电气工程及其自动化、计算机等,此外,电子科学技术(物理、光电子、微电子等)专业大多也按此方案设课。有些采用第Ⅱ方案设课的院校将课程名称改为“信号分析与处理”以示与前者之区别。

第Ⅰ方案的授课内容与本书第一、二、三、四、五、七、八、十一、十二等章相对应,而第Ⅱ方案则覆盖第一、二、三、四、五、七、八、九、十等章。如果课时允许,建议在第五章之后讲授第六章。教学辅导参考书<sup>[4]</sup>第3.6节提供了这一章的授课讲稿,建议任课老师参阅。

1995年,国家教委工科电工课程教学指导委员会按上述第Ⅰ方案制定了教学基本要求。2004年,教育部高等学校电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会又按Ⅰ、Ⅱ两方案分别制定了两种基本要求。

本书的内容完全可以满足上述两种基本要求的需要,同时有较多的扩充。在授课过程中可以灵活选取所需素材。

当选用第Ⅰ方案时,对于第十一章(反馈系统)的处理有较大的灵活性。可以根据需要选讲某些节的有关内容,如果学时受限,也可只讲11.6节(信号流图)为第十二章做好准备即可。此次修订对该节的例题进行了较多调整,力求密切联系实际、由浅入深、循序渐进。

实践表明,若按第Ⅱ方案授课,在学习第十章(滤波器)时往往会遇到一些困难。这是由于该章内容涉及面太宽,讲述层次错综复杂,数学推证也比较繁琐,

不容易抓住重点。针对这一情况,第三版该章前4节的内容做了较大调整(后面各节也有一些修改)。原第二版是先讲模拟滤波器电路实现、后讲逼近,而第三版将逼近提前,可以跳过模拟电路实现直接进入数字滤波器。对于许多数学推证也做了重新整理和简化。预期这样修改将有助于更有效地利用课时,给读者带来方便。此外,还可参阅教学辅导参考书<sup>[4]</sup>第3.10节对该章学习要点的解读,这将有助于自学或备课。

在我国,由于专业划分过细,许多教材缺乏灵活性,不能适用于多种专业。这种情况不利于扩大学生的知识面,掌握宽厚的理论与实践基础。与此密切相关的现象是课堂上照本宣科,讲授内容与教材几乎完全一样,很难培养学生的自学能力。本书第二版在这方面进行的改革尝试基本上取得了成功。我们期盼第三版在灵活性方面能够取得更好的效果。

写入教材而课堂上没有讲授的内容在许多方面可以发挥非常重要的作用:首先,有利于扩展视野、培养自学能力;其次,与后续课程的适当重复有利于学生从多角度观察和理解同一问题,例如,本书第九章9.2节关于傅里叶分析四种形式的比较,无论在本课程中是否讲授,以及在学习数字信号处理课程之前或之后阅读,都会在综合掌握基本理论核心问题方面受到启发;再次,有些素材为参加科学研究工作提供了宝贵的参考资料,如第十章各种滤波器的原理与性能以及各类滤波器之比较;最后,全面、综合性扩展知识面将十分有利于报考研究生的综合复习。任课老师的职责之一是引导学生在课堂之外加强自学、相互讨论,充分发挥教材的上述各项功能。这些都是构成培养高素质人才不可或缺的教学环节。

本书撰写执笔工作全部由郑君里完成,应启珩、杨为理共同研讨结构和内容,并校阅了部分书稿。

在清华大学,目前共有9个专业设置信号与系统为本科必修课程。教学任务分散在6个系各自完成,授课讲员已达数十人,曾参与辅导工作的青年教师和助教博士在百人以上。多年来作者与各位同事和众多博士生的切磋、研讨以及授课过程中和学生的密切交流,对本书写作有很多重要的启发和帮助。

高等教育出版社各位编辑与作者的通力协作为本书的出版创造了十分有利的条件。多年来各兄弟院校的老师 and 学生们以多种方式与作者坦诚交换意见,并对本书写作给予很多关心和支持,在此一并深致谢意。

限于水平,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者批评指正。

作 者

2010年6月于清华园

## 第二版前言

1978年撰写本书初稿至今已历经20年,注意到原书的大部分内容仍在有效使用,也由于工作繁忙,因而迟迟未作修订。

20年来,这一学科领域的理论与实践研究迅速发展,分析方法不断更新,技术应用范围日益扩展。然而,对国内、外许多院校的调查或相互交流表明,就本科生“信号与系统”课程而言,它的教学要求和基本内容却相对稳定。虽然在某些方面受到最新技术发展的冲击,但是尚未构成大幅度更新和重组课程体系的局面。与此相应,十多年来,本书第一版按需求统计而确定的重印册数逐年上升,实际用量供不应求。面对这一现实,我们结合教学实践,在广泛听取并研究教师与学生意见的基础上,逐步明确了编写本书第二版的追求目标,这就是在相对稳定中力求变革,在讲授传统内容的过程中充分体现时代气息,处理好经典理论的论述与最新技术引入的相互融合。以当代信息科学的观点理解、审视、组织和阐述传统内容。

本书(也即本课程)的教学目的、要求和体系层次与第一版大体相同,仍然是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法,从时间域到变换域,从连续到离散,从输入输出描述到状态空间描述,以通信和控制工程作为主要应用背景,注重实例分析。

在本课程中,连续时间信号与系统和离散时间信号与系统讲授顺序的争执已持续多年。实践表明,很难说某种顺序显示突出的先进性而代表改革方向,从国内、外大量教材情况来看,多种形式并存的局面将长期持轩。本书第二版以实际应用为主要依据,兼顾离散与连续的选材,前面较多章、节按照先连续后离散的次序讲授,稍后几章则是连续与离散交叉并行研究。

当前,在国际流行的科技应用软件中,MATLAB具有广泛影响。在信号处理技术领域中,这一软件的应用也占据重要地位。本课程的计算机练习应帮助学生尽早认识或熟悉MATLAB的应用。与本书相配合,我们将这方面的内容编入了另一本教材之中<sup>①</sup>,建议将本课程与数字信号处理课程统一考虑,从这本教材中选取适当的题目,安排学生的计算机练习。

另一方面,由于计算机辅助设计的广泛应用,还需要认真考虑从传统的教学

---

<sup>①</sup> 谷源涛、应启昕、郑君里著《信号与系统——MATLAB综合实验》,高等教育出版社,2008年。

内容中削弱或删除陈旧的部分。例如, SPICE 程序的普及促使我们不必要求学生掌握某些复杂电路(或复杂波形)求响应的解析方法, 因而允许大力压缩拉氏变换的有关内容。

本课程的基本概念和方法并不十分复杂, 教学效果成败的关键不在于学生认识和记忆了多少定义、定理的条文, 而应注重正确引导学生运用数学工具分析典型的物理问题。所谓课程更新往往体现在应用领域的演变, 而已经成熟的经典理论却仍然适用。第二版特别注重密切结合基本概念介绍通信、控制、信号处理方面的最新应用实例(在正文、例题、习题中都会出现), 这些实例讨论有助于激发学生的学习志趣和热情, 推动学生灵活、深入地掌握基本概念。

第二版全书共 12 章, 上、下册各 6 章。前 3 章包括绪论、连续系统的时域分析、傅里叶变换。各章的主题仍同第一版。第一章增加了信号波形的运算与系统模型的方框图。第二章对分配函数的性质和应用作了较详尽的补充。第三章着重讨论傅里叶变换的基本概念, 而将一些较深入的问题移后到第五、六章。第四章是拉普拉斯变换及其应用, 经重新组织, 它涵盖了第一版第四、五两章的主要内容, 从而使这部分的篇幅有较大压缩。第五章傅里叶变换的应用是第三章的继续, 结合滤波、调制和抽样三方面的概念增补了较多的应用讨论和实例分析。第六章是重新编写的, 主题是信号的矢量空间分析。这里涉及的基本概念在许多后续课程中需要引用, 而按照以往的习惯, 很少见到哪种教材或哪门课程对此作系统的入门介绍。为改变这一状况, 我们将正交、相关、帕塞瓦尔定理、柯西-施瓦茨不等式等概念和一些应用实例组织在一起, 以统一的数学与物理方法讲授, 使学生对信号理论的学习步入更深的层次, 为学好后续课程打下基础。第七至九章的内容也与第一版大致相同, 包括离散时间信号的时域分析、 $z$  变换、离散傅里叶变换及其快速算法。在第七章增补了反卷积(解卷积)的基本概念。第八章适当扩充了序列傅里叶变换性质的讨论, 以便于和第九章的内容衔接。第九章增加了离散余弦变换和沃尔什变换的有关内容。第十章模拟与数字滤波器和第十一章线性反馈系统都是重新编写的。前者初步介绍模拟与数字滤波器的基本原理和设计方法; 后者使本书在控制工程的应用背景方面适当加强, 此外, 将信号流程图也移入此章。第十二章与第一版最后一章的内容一致, 讨论状态空间分析, 在此, 注重拓宽应用实例的引入, 给出了一些非电领域应用状态空间方法的例子。

全书篇幅较大, 有利于授课教师灵活选材, 也为学生自学开创了较好的条件。可以按照不同章节的选取与组合, 构成深度和学时有区别的课程。从目前国内多数院校的需要来看, 推荐以下两种组课方案供参考(下列数字为章号):

$$1-2-3-4-5-7-8 \begin{cases} 12 \\ 9-10 \end{cases}$$

第一种方案适用于在本课程之后继续学习数字信号处理而不设控制理论课程的

情况;第二种方案则适合于在本课程之后专门开设控制理论而不再学习数字信号处理的有关专业。即使按某些章目组织教学,对于每章内各节仍有较大的灵活选取余地,如第二章微分方程的经典分析、 $\delta$ 函数的深入讨论,第四章用拉氏变换解电路的各种练习以及第七章差分方程的时域求解等都可适当删减。在第二种方案中,对于第十章建议只选讲数字滤波器的有关内容(包括逼近函数),删除模拟滤波器等部分。另一方面,有些章目虽未在上述方案中列入,也应介绍其中的要点或个别小节。在第一方案中,讲授状态变量分析之前需补充信号流图的概念,还可考虑简要介绍反馈的基本知识(都需要从第十一章选材)。此外,两种方案都可适当选择第六章的要点为学生初步建立信号矢量空间的概念。近年来,我校教学实践表明,以上两种方案都能在一学期内完成,讲课学时不超过64。当然,授课教师可根据学生的能力以及培养计划的总体要求设计其他多种选材组课方案。一般讲,无论何种方案都不宜照本宣科授课,书中相当多的内容应当留给学生自学或组织讨论。我们相信,选用本书作为教材将有助于推动讲课、自学与课堂讨论的密切结合。第一版的实践表明,读者在学完信号与系统课程之后相当长的时间内仍然需要反复翻阅本书。

本书除用作高校教材之外,我们期望它对于科研和工程技术人员的在职自学与知识更新能产生一定的积极作用。

本书第二版由郑君里主编,第二章由应启珩执笔,第十章由应启珩、郑君里执笔,其余各章由郑君里执笔。杨为理与执笔者共同研讨并校阅了第三、五、七、八各章,张宇博士协助完成并校核了若干重要公式的推证。山秀明、刘序明、王文渊、叶大田、乐正友、郑方等分别校阅了各部分初稿或结合授课对修订工作提出建议。必须指出,多年来作者与各位同事和众多博士生的经常研讨,以及授课过程中与学生的密切交流,对本书写作有很多重要的启发和帮助。

全书承清华大学电子工程系陆大绘教授审阅,提出许多指导性修改意见,保证了书稿质量的进一步提高,作者表示衷心感谢。

本书于1997年经国家教育委员会组织专家评审,确定为普通高等教育“九五”国家级重点教材立项选题。书稿经教育部“电路、信号系统和电磁场课程教学指导小组”审阅,同意作为国家级重点教材出版。

高等教育出版社各位编辑与作者的愉快合作为本书出版创造了十分有利的条件。从1981年至今,各兄弟院校的老师 and 同学们以多种方式与作者坦诚交换意见,并对本书修订工作给予很多关心与支持,在此一并深致谢意。

限于水平,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者指正。

作 者

1999年12月

于清华大学电子工程系

# 第一版前言

近年来,作者为无线电电子学系开设“信号与系统”课程,同时编写了这方面的参考教材。现将该教材整理、扩充,编成本书。

本课程的任务在于研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法。初步认识如何建立信号与系统的数学模型,经适当的数学分析求解,对所得结果给以物理解释、赋予物理意义。由于本学科内容的迅速更新与发展,它所涉及的概念和方法将十分广泛,而且还在不断扩充。本书试图在规定的要求与范围之内,使选材适当充实、丰富。在用作教材时,可以灵活选取所需内容。

本书的范围限于确定性信号(非随机信号)经线性、时不变系统传输与处理的基本理论。从时间域到变换域,从连续到离散,从输入—输出描述到状态描述,力求以统一的观点阐明基本概念和方法。

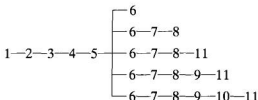
为学习本课程,读者应有一定的数学基础和电路分析基础。书中涉及的数学内容主要包括微分方程、差分方程、级数、复变函数、线性代数等。除对差分方程作适当讲解之外,其他方面将直接引用有关结论。在运用这些数学工具时,注重解决工程问题,加强物理概念的解释。本课程与先修课“电路分析基础”联系密切,虽有某些重复,但分析问题的着眼点有所不同。在那里,从电路分析的角度研究问题,而本书则以系统的观点进行分析。

通过本课程的学习希望激发起学生对信号与系统学科方面的学习志趣和热情,使他们有信心也有能力逐步适应这一领域日新月异发展的需要。首先要适应几门重点后续课程的需要,这些课程是:电子线路(也可并行学习)、网络理论、通信系统、控制理论、数字信号处理,等等。

全书共包括十一章。第一至六章讨论连续时间信号与系统,第七至十章讨论离散时间信号与系统(第七章时域分析、第八章 $z$ 变换与 $z$ 域分析、第九章离散傅里叶变换及其快速算法、第十章沃尔什变换),第十一章集中研究系统的状态变量分析(包括连续与离散,时域与变换域)。

本书篇幅稍大,涉及的问题比较广泛,直接用全书材料组成一门一学期的课程是不适当的。可以根据先修与后续课程的不同情况按以下几种方式(序号表示章号)选择所需部分,组成深度和学时有区别的课程:





在每章内还安排有一些加宽加深的内容,标有“\*”号,舍去这些小节,不影响后续部分的学习。除内容选择方面有机动性之外,在讲授顺序上也可以作灵活调整。例如,绪论中的1.5、1.6节可移至第三章开始时讲授;又如,讨论傅氏变换与拉氏变换原理和应用的第三至六章,可改按3-6-4-5或4-5-3-6的顺序使用(这时要对第6.1、6.3、6.8或4.2、4.13等节作调整)。

配合基本理论与分析方法的学习,书中备有一定数量的例题和习题,可酌情选用,部分难度稍大或比较繁复的习题标有“\*”号,不应作为对学生的一般要求。书末附有习题答案,仅供参考。在应用计算机方面,考虑到目前的实际情况,没有给出计算程序,但在某些基本原理的讲授中,已经注意到为这方面作一些准备(如卷积数值计算、拉普拉斯逆变换、快速傅里叶变换等)。

本书由郑君里同志主编。第三、八章由杨为理同志执笔,第十一章由应启珩同志执笔、其余各章由郑君里同志执笔。乐正友同志整理习题答案,张尊桥同志绘制插图。

常迺教授指导本书编写工作。冯重熙副教授对本书编写大纲的拟定提出宝贵意见。系负责同志以及通信、线路等教研组的有关同志对本书编写工作给予许多支持和帮助。

书稿承高等学校理科及工科基础课程教材编审委员会电路理论及信号分析小组委托南京工学院管致中教授、合肥工业大学芮坤生教授、北京工业学院李瀚荪副教授负责审阅,提出许多宝贵意见。作者在此表示衷心的感谢。

限于水平,书中难免有错误与不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者

一九八一年元月

于清华大学无线电电子学系

# 目 录

第一章 绪论 .....	1
1.1 信号与系统 .....	1
1.2 信号的描述、分类和典型示例 .....	4
1.3 信号的运算 .....	11
1.4 阶跃信号与冲激信号 .....	15
1.5 信号的分解 .....	25
1.6 系统模型及其分类 .....	30
1.7 线性时不变系统 .....	35
1.8 LTI 系统分析方法、本书概貌 .....	37
习题 .....	40
第二章 连续时间系统的时域分析 .....	45
2.1 引言 .....	45
2.2 系统数学模型(微分方程)的建立 .....	47
2.3 用时域经典法求解微分方程 .....	50
2.4 起始点的跳变——从 $0_-$ 到 $0_+$ 状态的转换 .....	56
2.5 零输入响应与零状态响应 .....	60
2.6 冲激响应与阶跃响应 .....	64
2.7 卷积 .....	68
2.8 卷积的性质 .....	74
2.9 利用卷积分析通信系统多径失真的消除方法 .....	79
2.10 用算子符号表示微分方程 .....	82
习题 .....	86
第三章 傅里叶变换 .....	93
3.1 引言 .....	93
3.2 周期信号的傅里叶级数分析 .....	94
3.3 典型周期信号的傅里叶级数 .....	106
3.4 傅里叶变换 .....	114
3.5 典型非周期信号的傅里叶变换 .....	118
3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换 .....	124
3.7 傅里叶变换的基本性质 .....	127
3.8 卷积特性(卷积定理) .....	143

3.9 周期信号的傅里叶变换 .....	148
3.10 抽样信号的傅里叶变换 .....	155
3.11 抽样定理 .....	162
3.12 雷达测距原理、雷达信号的频谱 .....	165
习题 .....	170
<b>第四章 拉普拉斯变换、连续时间系统的 <math>s</math> 域分析</b> .....	184
4.1 引言 .....	184
4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域 .....	185
4.3 拉普拉斯变换的基本性质 .....	192
4.4 拉普拉斯逆变换 .....	201
4.5 用拉普拉斯变换法分析电路、 $s$ 域元件模型 .....	207
4.6 系统函数(网络函数) $H(s)$ .....	214
4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性 .....	219
4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性 .....	228
4.9 二阶谐振系统的 $s$ 平面分析 .....	235
4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布 .....	243
4.11 线性系统的稳定性 .....	248
4.12 双边拉普拉斯变换 .....	253
4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系 .....	257
习题 .....	261
<b>第五章 傅里叶变换应用于通信系统——滤波、调制与抽样</b> .....	277
5.1 引言 .....	277
5.2 利用系统函数 $H(j\omega)$ 求响应 .....	278
5.3 无失真传输 .....	282
5.4 理想低通滤波器 .....	286
5.5 系统的物理可实现性、佩利-维纳准则 .....	292
5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性 .....	295
5.7 调制与解调 .....	297
5.8 带通滤波系统的运用 .....	301
5.9 从抽样信号恢复连续时间信号 .....	306
5.10 脉冲编码调制(PCM) .....	312
5.11 频分复用、时分复用、码速与带宽 .....	315
5.12 对当代电信网络的初步认识 .....	320
习题 .....	325
<b>第六章 信号的矢量空间分析</b> .....	332
6.1 引言 .....	332
6.2 信号矢量空间的基本概念 .....	333
6.3 信号的正交函数分解 .....	340

---

6.4 完备正交函数集、帕塞瓦尔定理 .....	346
6.5 沃尔什函数 .....	349
6.6 相关 .....	358
6.7 能量谱和功率谱 .....	366
6.8 信号通过线性系统的自相关函数、能量谱和功率谱分析 .....	370
6.9 匹配滤波器 .....	375
6.10 测不准(不定度)原理及其证明 .....	380
6.11 码分复用、码分多址(CDMA)通信 .....	383
习题 .....	387
附录一 卷积表 .....	391
附录二 常用周期信号的傅里叶级数表 .....	392
附录三 常用信号的傅里叶变换表 .....	396
习题答案 .....	406
索引 .....	423

# 第一章 绪 论

## 1.1 信号与系统

人们相互问讯、发布新闻、广播图像或传递数据,其目的都是要把某些消息借一定形式的信号传送出去。信号是消息的表现形式,消息则是信号的具体内容。

很久以来,人们曾寻求各种方法,以实现信号的传输。我国古代利用烽火传送边疆警报。此后希腊人也以火炬的位置表示字母符号。这种光信号的传输构成最原始的光通信系统。利用击鼓鸣金可以报送时刻或传达命令,这是声信号的传输。以后又出现了信鸽、旗语、驿站等传送消息的方法。然而,这些方法无论在距离、速度或可靠性与有效性方面仍然没有得到明显的改善。19世纪初,人们开始研究如何利用电信号传送消息。1837年莫尔斯(F.B.Morse)发明了电报,他用点、划、空适当组合的代码表示字母和数字,这种代码称为莫尔斯电码。1876年贝尔(A.G.Bell)发明了电话,直接将声信号(语音)转变为电信号沿导线传送。19世纪末,人们又致力于研究用电磁波传送无线电信号。为实现这一理想,赫兹(H.Hertz)、波波夫(A.C.Попов)、马可尼(G.Marconi)等人分别作出贡献。开始时,传输距离仅数百米,1901年马可尼成功地实现了横渡大西洋的无线电通信。从此,传输电信号的通信方式得到广泛应用和迅速发展。如今,无线电信号的传输不仅能够飞越高山海洋,而且可以遍及全球并通向宇宙。例如,以卫星通信技术为基础构成的“全球定位系统”(Global Positioning System,缩写为GPS)可以利用无线电信号的传输,测定地球表面和周围空间任意目标的位置,其精度可达数十米之内。而个人通信技术的发展前景指出:无论任何人在任何时候和任何地方都能够和世界上其他人进行通信。人们利用手持通信机,以个人相应的电话号码呼叫或被呼叫,进行语音、图像、数据等各种信号的传输。

必须指出,现代通信系统的通信方式往往不是任意两点之间信号的直接传输,而是要利用某些集中转接设施组成复杂的信息网络,经所谓“交换”的功能以实现任意两点之间的信号传输。

信息网络技术的发展前景是实现所谓“全球通信网”,它意味着世界上所有通信网将形成智能化的统一整体,即全球一网。这将克服信号传输距离、时

间、语言等方面的各种障碍,与个人通信技术相结合构成无所不在的全球个人通信网。

目前,迅速发展的因特网(Internet)、电信业务领域的各种有线网或无线网以及广播电视网都已成为我们日常生活中不可或缺的重要组成部分。在我国以上三网融合的工程实现已经提到议事日程。建立“全球通信网”的目标指日可待。当今时代的重要特征是社会信息化,而信息化与网络化密不可分。我们将在本书第五章对电信网络、三网融合以及全球通信网等概念做初步介绍。

随着信号传输、信号交换理论与应用的发展,同时出现了所谓“信号处理”的新课题。什么是信号处理?这可以理解为对信号进行某种加工或变换。加工或变换的目的是:削弱信号中的多余内容;滤除混杂的噪声和干扰;或者是将信号变换成容易分析与识别的形式,便于估计和选择它的特征参量。20世纪80年代以来,由于高速数字计算机的运用,大大促进了信号处理研究的发展。而信号处理的应用已遍及许多科学技术领域。例如,从月球探测器发来的各种测试数据或月面图形信号可能被淹没在噪声之中,但是,利用信号处理技术就可予以修复或增强,从而在地球上得到可靠的数据或清晰的图像。2010年10月,我国探月工程“嫦娥2号”采用清华大学宇航技术研究中心研制的遥测信道编码技术传送探测信号,取得圆满成功。此外,石油勘探、地震测量以及核试验监测中所得数据的分析都依赖于信号处理技术的应用。在心电图、脑电图分析、语音识别与合成、图像数据压缩、工业生产自动控制(如化学过程控制)以及经济形势预测(如股票市场分析)等各种科学技术领域中都广泛采用信号处理技术。

信号传输、信号交换和信号处理相互密切联系(也可认为交换是属于传输的组成部分),又各自形成了相对独立的学科体系。它们共同的理论基础之一是研究信号的基本性能(进行信号分析),包括信号的描述、分解、变换、检测、特征提取以及为适应指定要求而进行信号设计。本书各章节的分析与讨论正是为学习这些知识打好基础,特别注重数学分析与工程应用的密切联系。

“系统”是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。

在信息科学与技术领域中,常常利用通信系统、控制系统和计算机系统进行信号的传输、交换与处理。实际上,往往需要将多种系统共同组成一个综合性的复杂整体,例如宇宙航行系统。

通常,组成通信、控制和计算机系统的主要部件中包括大量的、多种类型的电路。电路也称电网络或网络。

信号、电路(网络)与系统之间有着十分密切的联系。离开了信号,电路与系统将失去意义。信号作为待传输消息的表现形式,可以看作运载消息的工具,而电路或系统则是为传送信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。研究系

统所关心的是,对于给定信号形式与传输、处理的要求,系统能否与其相匹配,它应具有怎样的功能和特性;而研究电路问题的着眼点则在于,为实现系统功能与特性应具有怎样的结构和参数。有时认为系统是比电路更复杂、规模更大的组合体,然而,更确切地说,系统与电路二词的主要差异应体现在观察事物的着眼点或处理问题的角度方面。系统问题注意全局,而电路问题则关心局部。例如,仅由一个电阻和一个电容组成的简单电路,在电路分析中,注意研究其各支路、回路的电流或电压;而从系统的观点来看,可以研究它如何构成具有微分或积分功能的运算器。

近年来,由于大规模集成化技术的发展以及各种复杂系统部件的直接采用,使系统、网络、电路以及器件这些名词的划分发生了困难,它们当中的许多问题互相渗透,需要统一分析、研究和处理。通常无须严格区分各名词的差异。

目前,由于信息网络(包括通信网和计算机网)的广泛应用,在信息科学与技术领域中“网络”一词也泛指通信网或计算机网。

在本书中,系统、网络与电路等名词通用。一般情况下,网络指电路,仅在个别小节内涉及信息网络(通信网)。

在电路中传送的电信号一般指随时间变化的电压或电流,也可以是电容的电荷、线圈的磁通以及空间的电磁波等。电信号与非电信号容易相互转换。在许多实际系统中常利用各种传感器将其他物理量(如声波动、光强度、机械运动的位移或速度等)转变为电信号,以利传输与处理。根据需要可将转换后的电信号还原为原有的物理量。

广义讲,系统的概念不仅限于电路、通信和控制方面,它涉及的范围十分广泛,应当包括各种物理系统和非物理系统、人工系统以及自然系统。

通信系统、电力系统、机械系统等可称为物理系统;政治结构、经济组织、生产管理等则属于非物理系统。计算机网、交通运输网、水利灌溉网以及交响乐队等是人工系统;而自然系统的例子小至原子核,大如太阳系,可以是无生命的,也可以是有生命的(如动物的神经网络)。

随着科学技术的发展,人工系统之规模日益庞大,内部结构也越来越复杂。人们致力于研究将系统理论用于系统工程设计,以期使较复杂的系统最佳地满足预定的要求。以此为背景,出现了一门边缘技术科学,这就是系统工程学。

在系统或网络理论研究中,包括系统分析与系统综合(网络分析与网络综合)两个方面。在给定系统的条件下,研究系统对于输入激励信号所产生的输出响应,这是系统分析问题。系统综合则是按某种需要先提出对于给定激励的响应,而后根据此要求设计(综合)系统。分析与综合二者关系密切,但又有各自的体系和研究方法,一般讲,学习分析是学习综合的基础。

本书的讨论范围着重系统分析,不涉及系统工程学方面的问题。我们以通

信系统和控制系统的基本问题为主要背景,研究信号经系统传输或处理的一般规律,着重基本概念和基本分析方法。

## 1.2 信号的描述、分类和典型示例

描述信号的基本方法是写出它的数学表达式,此表达式是时间的函数,绘出函数的图像称为信号的波形。为便于讨论,在本书中常常把信号与函数两名词通用。除了表达式与波形这两种直观的描述方法之外,随着问题的深入,需要用频谱分析、各种正交变换以及其他方式来描述和研究信号。

信号可从不同角度进行分类。

确定性信号与随机信号 若信号被表示为一确定的时间函数,对于指定的某一时刻,可确定一相应的函数值,这种信号称为确定性信号或规则信号。例如我们熟知的正弦信号。但是,实际传输的信号往往具有无可预知的不确定性,这种信号称为随机信号或不确定的信号。如果通信系统中传输的信号都是确定的时间函数,接收者就不可能由它得知任何新的消息,这样也就失去了通信的意义。此外,在信号传输过程中,不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响,这些干扰和噪声都具有随机特性。对于随机信号,不能给出确切的时间函数,只可能知道它的统计特性,如在某时刻取某一数值的概率。确定性信号与随机信号有着密切的联系,在一定条件下,随机信号也会表现出某种确定性。例如乐音表现为某种周期性变化的波形,电码可描述为具有某种规律的脉冲波形等。作为理论上的抽象,应该首先研究确定性信号,在此基础之上才能根据随机信号的统计规律进一步研究随机信号的特性。

周期信号与非周期信号 在规则信号之中又可分为周期信号与非周期信号。所谓周期信号就是依一定时间间隔周而复始,而且是无始无终的信号,它们的表示式可以写作

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (\text{任意整数})$$

满足此关系式的最小  $T$  值称为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程,便可确知它在任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期  $T$  趋于无限大,则成为非周期信号。

具有相对较长周期的确定性信号可以构成所谓“伪随机信号”,从某一时段来看,这种信号似无规律,而经一定周期之后,波形严格重复。利用这一特点产生的伪随机码在通信系统中得到广泛应用。

近年来,随着混沌(chaos)理论研究的深入,人们对混沌信号产生了巨大兴趣。这里,不容易给出混沌信号的确切定义,通俗讲,可以认为它是一种貌似随机而遵循严格规律产生的信号,描述方法比较复杂,这种信号的特性体现了无序



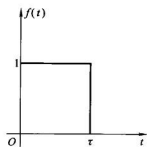
中蕴含着有序的哲学思想。

本书着重讨论确定性信号分析(包括各种周期性和非周期性信号),仅在第六章初步介绍一些随机信号的知识,第五章举例说明伪随机码的应用,书中不涉及混沌信号。

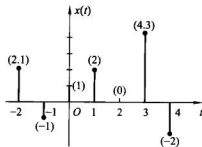
连续时间信号与离散时间信号 按照时间函数取值的连续性与离散性可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。如果在所讨论的时间间隔内,除若干不连续点之外,对于任意时间值都可给出确定的函数值,此信号就称为连续信号。例如正弦波或图 1-1(a)所示矩形脉冲都是连续信号。连续信号的幅值可以是连续的,也可以是离散的(只取某些规定值)。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。在实际应用中,模拟信号与连续信号两名词往往不予区分。与连续信号相对应的是离散信号。离散信号在时间上是离散的,只在某些不连续的规定瞬时给出函数值,在其他时间没有定义,如图 1-1(b)所示。此图对应的函数  $x(t)$  只在  $t = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  离散时刻给出函数值  $2.1, -1, 1, 2, 0, 4.3, -2, \dots$ 。给出函数值的离散时刻的间隔可以是均匀的[如图 1-1(b)所示],也可以是不均匀的。一般情况都采用均匀间隔。这时,自变量  $t$  简化为用整数序号  $n$  表示,函数符号写作  $x(n)$ ,仅当  $n$  为整数时  $x(n)$  才有定义。离散时间信号也可认为是一组序列值的集合,以  $\{x(n)\}$  表示。图 1-1(b)所示信号写作序列

$$x(n) = \begin{cases} 2.1 & (n = -2) \\ -1 & (n = -1) \\ 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 2) \\ 4.3 & (n = 3) \\ -2 & (n = 4) \end{cases}$$

为简化表达方式,此信号也可写作



(a) 连续时间信号示例



(b) 离散时间信号(抽样信号)示例

图 1-1 连续时间与离散时间信号示例

$$x(n) = [2.1 \quad -1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 4.3 \quad -2] \quad (1-1)$$

数字 1 下面的箭头表示与  $n=0$  相对应,左右两边依次给出  $n$  取负和正整数时相应的  $x(n)$  值。

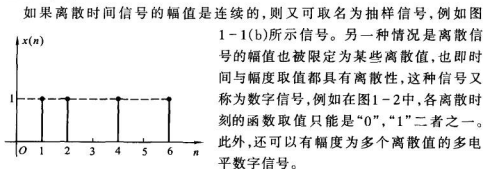


图 1-2 离散时间信号(数字信号)示例

自然界的实际信号可能是连续的,也可能是离散的时间信号。例如,声道产生的语音[参看图 1-3(a),这是汉语男声“信号与系统很有趣”的波形],乐器发出的乐音、连续测量的温度曲线都是连续时间信号,而银行发布利率、按固定时间间隔给出的股票市场指数、按年度或月份统计的人口数量或国民生产总值[参看图 1-3(b),这是我国国内生产总值也即 GDP 每年统计数据]都是离散时间信号。数字计算机处理的是离散时间信号,当处理对象为连续信号时需要经抽样(采样)将它转换为离散时间信号。

本书前六章着重研究连续时间信号,在第一、三、五、六章结合连续时间信号适当引入一些离散时间信号的初步概念,第七至第八章集中研究离散时间信号,以后几章将并行讨论这两类信号的分析和应用。

一维信号与多维信号 从数学表达式来看,信号可以表示为一个或多个变量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数,这是一维信号。而一张黑白图像每个点(像素)具有不同的光强度,任一点又是二维平面坐标中两个变量的函数,这是二维信号(参看图 1-4 示例),在本书下册第九章 9.9 节将初步介绍二维信号进行压缩处理的概念。实际上,还可能出现更多维数变量的信号。例如电磁波在三维空间传播,同时考虑时间变量而构成四维信号。在以后的讨论中,一般情况下只研究一维信号,且自变量为时间。个别情况下,自变量可能不是时间,例如,在气象观测中,温度、气压或风速将随高度而变化,此时自变量为高度。

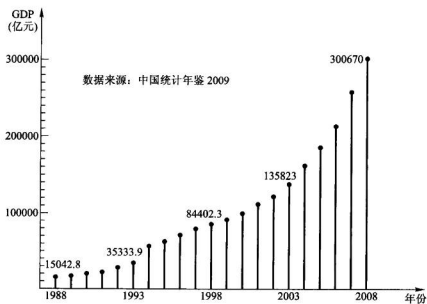
除以上划分方式之外,还可将信号分为能量受限信号与功率受限信号(见 6.6 节),以及调制信号、载波信号和已调信号(见 5.7 节),等等。在本书中将根据各章的需要陆续介绍。

下面给出一些典型的连续时间信号表达式和波形,今后经常遇到这些信号。



信 号 与 系 统 很 有 趣

(a) 实际连续时间信号示例：语音波形



(b) 实际离散时间信号示例：我国 GDP 每年统计数据 (1988—2008)

图 1-3 实际的连续与离散时间信号示例



图 1-4 二维信号信源示例:校景黑白图片

### (一) 指数信号

指数信号的表示式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (1-2)$$

式中  $a$  是实数。若  $a > 0$ , 信号将随时间增长, 若  $a < 0$ , 信号则随时间衰减, 在  $a = 0$  的特殊情况下, 信号不随时间变化, 成为直流信号。常数  $K$  表示指数信号在  $t = 0$  点的初始值。指数信号的波形如图 1-5(a) 所示。

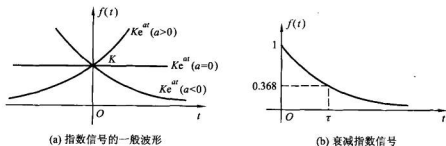


图 1-5 指数信号波形

指数  $a$  的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率,  $|a|$  越大, 增长或衰减

的速率越快。通常,把 $|a|$ 的倒数称为指数信号的时间常数,记作 $\tau$ ,即 $\tau = \frac{1}{|a|}$ , $\tau$ 越大,指数信号增长或衰减的速率越慢。

实际上,较多遇到的是衰减指数信号,例如图 1-5(b)所示的波形,其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & (t \geq 0) \end{cases}$$

在 $t=0$ 点, $f(0)=1$ ,在 $t=\tau$ 处, $f(\tau)=\frac{1}{e}=0.368$ 。也即,经时间 $\tau$ ,信号衰减到原初始值的 36.8%。

指数信号的一个重要特性是它对时间的微分和积分仍然是指数形式。

## (二) 正弦信号

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$ ,经常统称为正弦信号,一般写作

$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta) \quad (1-3)$$

式中 $K$ 为振幅, $\omega$ 是角频率, $\theta$ 称为初相位。其波形如图 1-6 所示。

正弦信号是周期信号,其周期 $T$ 与角频率 $\omega$ 和频率 $f$ 满足下列关系式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

在信号与系统分析中,有时要遇到衰减的正弦信号,波形如图 1-7 所示,此正弦振荡的幅度按指数规律衰减,其表示式为

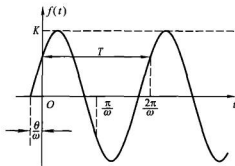


图 1-6 正弦信号

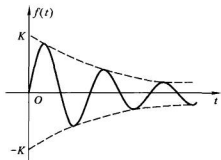


图 1-7 指数衰减的正弦信号

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ K e^{-\sigma t} \sin(\omega t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad (1-4)$$

正弦信号和余弦信号常借助复指数信号来表示。由欧拉公式可知

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

所以有

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (1-5)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (1-6)$$

这是今后经常要用到的两对关系式。

与指数信号的性质类似,正弦信号对时间的微分与积分仍为同频率的正弦信号。

### (三) 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数,则称之为复指数信号,其表示式为

$$f(t) = Ke^{st} \quad (1-7)$$

其中

$$s = \sigma + j\omega$$

$\sigma$  为复数  $s$  的实部,  $\omega$  是其虚部。借助欧拉公式将式(1-7)展开,可得

$$Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (1-8)$$

此结果表明,一个复指数信号可分解为实、虚两部分。其中,实部包含余弦信号,虚部则为正弦信号。指数因子实部  $\sigma$  表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况。若  $\sigma > 0$ , 正弦、余弦信号是增幅振荡,若  $\sigma < 0$ , 正弦及余弦信号是衰减振荡。指数因子的虚部  $\omega$  则表示正弦与余弦信号的角频率。两个特殊情况是:当  $\sigma = 0$ , 即  $s$  为虚数,则正弦、余弦信号是等幅振荡;而当  $\omega = 0$ , 即  $s$  为实数,则复指数信号成为一般的指数信号;最后,若  $\sigma = 0$  且  $\omega = 0$ , 即  $s$  等于零,则复指数信号的实部和虚部都与时间无关,成为直流信号。

虽然实际上不能产生复指数信号,但是它概括了多种情况,可以利用复指数信号来描述各种基本信号,如直流信号、指数信号、正弦或余弦信号以及增长或衰减的正弦与余弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。在信号分析理论中,复指数信号是一种非常重要的基本信号。

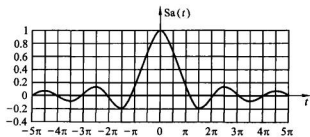
### (四) $Sa(t)$ 信号(抽样信号)

$Sa(t)$  函数即  $Sa(t)$  信号是指  $\sin t$  与  $t$  之比构成的函数,它的定义如下

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-9)$$

抽样函数的波形示于图 1-8。我们注意到,它是一个偶函数,在  $t$  的正、负两方向振幅都逐渐衰减,当  $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$  时,函数值等于零。

$Sa(t)$  函数还具有以下性质

图 1-8  $\text{Sa}(t)$  函数

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1-10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (1-11)$$

与  $\text{Sa}(t)$  函数类似的是  $\text{sinc}(t)$  函数, 它的表示式为

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (1-12)$$

有些书中将两种符号通用, 即  $\text{Sa}(t)$  也可用  $\text{sinc}(t)$  表示。

### (五) 钟形信号(高斯函数)

钟形信号(或称高斯函数)的定义是

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-13)$$

波形见图 1-9。令  $t = \frac{\tau}{2}$  代入函数式求得

$$f\left(\frac{\tau}{2}\right) = E e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.78E$$

这表明, 函数式中的参数  $\tau$  是当  $f(t)$  由最大值  $E$  下降为  $0.78E$  时, 所占据的时间宽度。

钟形信号在随机信号分析中占有重要地位, 在本书中也将涉及。

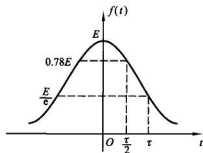


图 1-9 钟形信号

## 1.3 信号的运算

在信号的传输与处理过程中往往需要进行信号的运算, 它包括信号的移位(时移或延时)、反褶、尺度倍乘(压缩与扩展)、微分、积分以及两信号的相加或相乘。某些物理器件可直接实现这些运算功能。我们需要熟悉在运算过程中表达式对应的波形变化, 并初步了解这些运算的物理背景。

### (一) 移位、反褶与尺度

若  $f(t)$  表达式的自变量  $t$  更换为  $(t + t_0)$  ( $t_0$  为正或负实数), 则  $f(t + t_0)$

相当于  $f(t)$  波形在  $t$  轴上的整体移动, 当  $t_0 > 0$  时 ( $t_0 = t_2$ ) 波形左移, 当  $t_0 < 0$  ( $t_0 = -t_1$ ) 时波形右移, 如图 1-10 所示。

在雷达、声呐以及地震信号检测等问题中容易找到信号移位现象的实例。如果发射信号经同种介质传送到不同距离的接收机时, 各接收信号相当于发射信号的移位, 并具有不同的  $t_0$  值 (同时有衰减)。在通信系统中, 长距离传输电话信号时, 可能听到回波, 这是幅度衰减的话音延时信号。

信号反褶表示将  $f(t)$  的自变量  $t$  更换为  $-t$ , 此时  $f(-t)$  的波形相当于将  $f(t)$  以  $t=0$  为轴反褶过来, 如图 1-11 所示。此运算也称为时间轴反转。

如果将信号  $f(t)$  的自变量  $t$  乘以正实系数  $a$ , 则信号波形  $f(at)$  将是  $f(t)$  波形的压缩 ( $a > 1$ ) 或扩展 ( $a < 1$ )。这种运算称为时间轴的尺度倍乘或尺度变换, 也可简称为尺度, 波形示例见图 1-12。

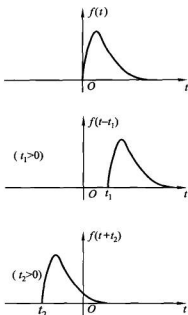


图 1-10 信号的移位

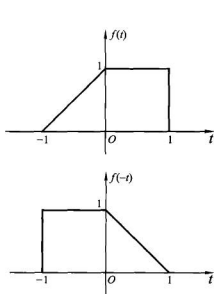


图 1-11 信号的反褶

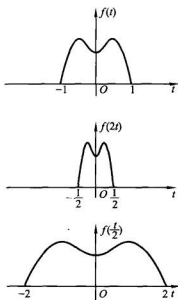


图 1-12 信号的尺度变换



若  $f(t)$  是已录制声音的磁带, 则  $f(-t)$  表示将此磁带倒转播放产生的信号, 而  $f(2t)$  是此磁带以二倍速度加快播放的结果,  $f\left(\frac{t}{2}\right)$  则表示原磁带放音速度降至一半产生的信号。

综合以上三种情况, 若  $f(t)$  的自变量  $t$  更换为  $(at + t_0)$  (其中  $a, t_0$  是给定的实数), 此时,  $f(at + t_0)$  相对于  $f(t)$  可以是扩展 ( $|a| < 1$ ) 或压缩 ( $|a| > 1$ ), 也可能出现时间上的反褶 ( $a < 0$ ) 或移位 ( $t_0 \neq 0$ ), 而波形整体仍保持与  $f(t)$  相似的形状, 下面给出例题。

**例 1-1** 已知信号  $f(t)$  的波形如图 1-13 (a) 所示, 试画出  $f(-3t-2)$  的波形。

**解** (1) 首先考虑移位的作用, 求得  $f(t-2)$  波形如图 1-13 (b) 所示。

(2) 将  $f(t-2)$  作尺度倍乘, 求得  $f(3t-2)$  如图 1-13 (c) 所示波形。

(3) 将  $f(3t-2)$  反褶, 给出  $f(-3t-2)$  波形如图 1-13 (d) 所示。

如果改变上述运算的顺序, 例如先求  $f(3t)$  或先求  $f(-t)$  最终也会得到相同的结果 (见习题 1-4)。

## (二) 微分和积分

信号  $f(t)$  的微分运算是指  $f(t)$  对  $t$  取导数, 即

$$f'(t) = \frac{d}{dt}f(t) \quad (1-14)$$

信号  $f(t)$  的积分运算指  $f(\tau)$  在  $(-\infty, t)$  区间内的定积分, 其表达式为

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (1-15)$$

图 1-14 和图 1-15 分别示出微分与积分运算的例子。由图 1-14 可见, 信号经微分后突出显示了它的变化部分。若  $f(t)$  是一幅黑白图像信号, 那么, 经微分运算后将使其图形的边缘轮廓突出。在图 1-15 中

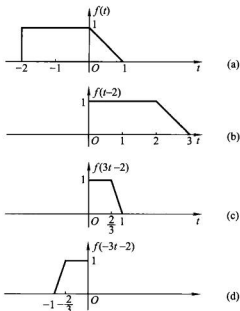


图 1-13 例 1-1 的波形

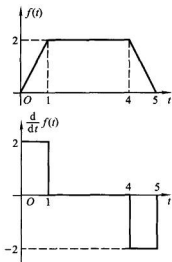


图 1-14 微分运算

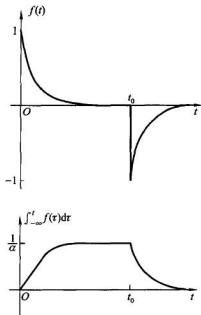


图 1-15 积分运算

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & (\text{当 } 0 < t < t_0) \\ e^{-at} - e^{-a(t-t_0)} & (\text{当 } t_0 \leq t < \infty) \end{cases} \quad (1-16)$$

式中  $t_0 \gg \frac{1}{a}$ 。

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) & (\text{当 } 0 < t < t_0) \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) - \frac{1}{a}[1 - e^{-a(t-t_0)}] & (\text{当 } t_0 \leq t < \infty) \end{cases} \quad (1-17)$$

由波形可见,信号经积分运算后其效果与微分相反,信号的突变部分可变得平滑,利用这一作用可削弱信号中混入的毛刺(噪声)的影响。

### (三) 两信号相加或相乘

下面给出这两种运算的例子。若  $f_1(t) = \sin(\Omega t)$ ,  $f_2(t) = \sin(8\Omega t)$ , 两信号相加和相乘的表达式分别为

$$f_1(t) + f_2(t) = \sin(\Omega t) + \sin(8\Omega t) \quad (1-18)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \sin(\Omega t) \cdot \sin(8\Omega t) \quad (1-19)$$

波形分别如图 1-16 和图 1-17 所示。必须指出,在通信系统的调制、解调等过程中将经常遇到两信号相乘运算(见习题 1-6,详待第五章讨论)。

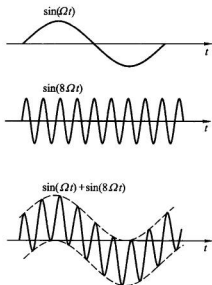


图 1-16 两信号相加

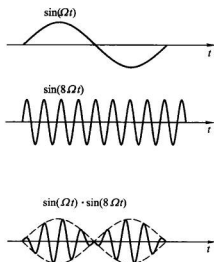


图 1-17 两信号相乘

## 1.4 阶跃信号与冲激信号

在信号与系统分析中,经常要遇到函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的情况,这类函数统称为奇异函数或奇异信号。

通常,我们研究的典型信号都是一些抽象的数学模型,这些信号与实际信号可能有差距。然而,只要把实际信号按某种条件理想化,即可运用理想模型进行分析。本节将要介绍的奇异信号包括斜变、阶跃、冲激和冲激偶四种信号,其中,阶跃信号与冲激信号是两种最重要的理想信号模型。

### (一) 单位斜变信号

斜变信号也称斜坡信号或斜升信号。这是指从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。如果增长的变化率是 1,就称为单位斜变信号,其波形如图 1-18 所示,表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases} \quad (1-20)$$

如果将起始点移至  $t_0$ ,则应写作

$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ t - t_0 & (t \geq t_0) \end{cases} \quad (1-21)$$

其波形如图 1-19 所示。

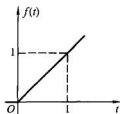


图 1-18 单位斜变信号

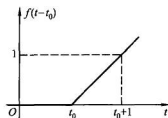


图 1-19 延迟的斜变信号

在实际应用中常遇到“截平的”斜变信号,在时间  $\tau$  以后斜变波形被切平,如图 1-20 所示,其表示式为

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} f(t) & (t < \tau) \\ K & (t \geq \tau) \end{cases} \quad (1-22)$$

图 1-21 所示三角形脉冲也可用斜变信号表示,写作

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} f(t) & (t \leq \tau) \\ 0 & (t > \tau) \end{cases} \quad (1-23)$$

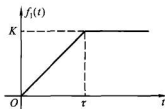


图 1-20 截平的斜变信号

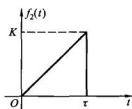


图 1-21 三角形脉冲信号

## (二) 单位阶跃信号

单位阶跃信号的波形如图 1-22(a)所示,通常以符号  $u(t)$  表示

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad (1-24)$$

在跳变点  $t=0$  处,函数值未定义,或在  $t=0$  处规定函数值  $u(0) = \frac{1}{2}$ 。

单位阶跃函数的物理背景是,在  $t=0$  时刻对某一电路接入单位电源(可以是直流电压源或直流电流源),并且无限持续下去。图 1-22(b)示出接入 1 V 直流电压源的情况,在接入端口处电压为阶跃信号  $u(t)$ 。

容易证明,单位斜变函数的导数等于单位阶跃函数。

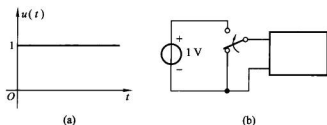


图 1-22 单位阶跃函数

$$\frac{df(t)}{dt} = u(t)$$

如果接入电源的时间推迟到  $t = t_0$  时刻 ( $t_0 > 0$ ), 那么, 可用一个“延时的单位阶跃函数”表示

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ 1 & (t > t_0) \end{cases} \quad (1-25)$$

波形如图 1-23 所示。

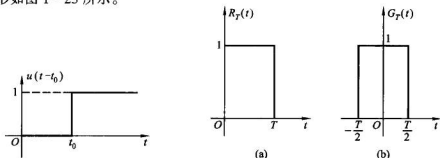


图 1-23 延时的单位阶跃函数

图 1-24 矩形脉冲

为书写方便, 常利用阶跃及其延时信号之差来表示矩形脉冲, 其波形如图 1-24(a) 或 (b) 所示, 对于图 (a) 信号以  $R_T(t)$  表示

$$R_T(t) = u(t) - u(t - T)$$

下标  $T$  表示矩形脉冲出现在 0 到  $T$  时刻之间。如果矩形脉冲对于纵坐标左右对称, 则以符号  $G_T(t)$  表示 [图 1-24(b)]

$$G_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (1-26)$$

下标  $T$  表示其宽度。

阶跃信号鲜明地表现出信号的单边特性。即信号在某接入时刻  $t_0$  以前的幅度为零。利用阶跃信号的这一特性, 可以较方便地以数学表示式描述各种信

号的接入特性,例如,图 1-25 所示的波形可写作

$$f_1(t) = (\sin t)u(t) \quad (1-27)$$

而图 1-26 则表示为

$$f_2(t) = e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)] \quad (1-28)$$

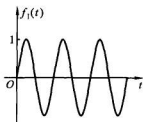


图 1-25  $(\sin t)u(t)$  波形

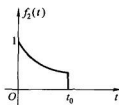


图 1-26  $e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$  波形

仿此,作为练习,读者可将前节描述图 1-15 所示波形的表达式改用阶跃信号表示(见习题 1-8)。

利用阶跃信号还可以表示“符号函数”。符号函数(signum)简写作  $\text{sgn}(t)$ , 其定义如下

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases} \quad (1-29)$$

波形见图 1-27。与阶跃函数类似,对于符号函数在跳变点也可不予定义,或规定  $\text{sgn}(0) = 0$ 。显然,可以利用阶跃信号来表示符号函数

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (1-30)$$

### (三) 单位冲激信号

某些物理现象需要用一个时间极短,但取值极大的函数模型来描述,例如力学中瞬间作用的冲击力,电学中的雷击闪电,数字通信中的抽样脉冲等。“冲激函数”的概念就是以这类实际问题为背景而引出的。

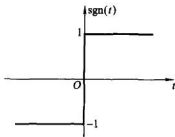


图 1-27  $\text{sgn}(t)$  信号波形

冲激函数可由不同的方式来定义。首先分析矩形脉冲如何演变为冲激函数。图 1-28 示出宽为  $\tau$ 、高为  $\frac{1}{\tau}$  的矩形脉冲,当保持矩形脉冲面积  $\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$  不变,而使脉宽  $\tau$  趋近于零时,脉冲幅度  $\frac{1}{\tau}$  必趋于无穷大,此极限情况即为单位冲激函数,常记作  $\delta(t)$ ,又称为“ $\delta$  函数”。

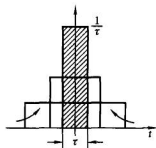
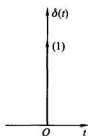


图 1-28 矩形脉冲演变为冲激函数

图 1-29 冲激函数  $\delta(t)$ 

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1-31)$$

冲激函数用箭头表示,如图 1-29 所示。它示意表明, $\delta(t)$  只在  $t=0$  点有一“冲激”,在  $t=0$  点以外各处,函数值都是零。

如果矩形脉冲的面积不是固定为 1,而是  $E$ ,则表示一个冲激强度为  $E$  倍单位值的  $\delta$  函数,即  $E\delta(t)$  (在用图形表示时,可将此强度  $E$  注于箭头旁)。

以上利用矩形脉冲系列的极限来定义冲激函数(这种极限不同于一般的极限概念,可称为广义极限)。为引出冲激函数,规则函数系列的选取不限于矩形,也可换用其他形式。例如,一组底宽为  $2\tau$ 、高为  $\frac{1}{\tau}$  的三角形脉冲系列[如图 1-30(a)所示],若保持其面积等于 1,取  $\tau \rightarrow 0$  的极限,同样可定义为冲激函数。此外,还可利用指数函数、钟形函数、抽样函数等,这些函数系列分别如图 1-30(b)、(c)、(d)所示。它们的表示式如下:

(1) 三角形脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \right\} \quad (1-32)$$

(2) 双边指数脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}} \right) \quad (1-33)$$

(3) 钟形脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\tau} e^{-\pi \left( \frac{t}{\tau} \right)^2} \right] \quad (1-34)$$

(4)  $\text{Sa}(t)$  信号(抽样信号)

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) \right] \quad (1-35)$$

在式(1-35)中, $k$  越大,函数的振幅越大,且离开原点时函数振荡越快,衰

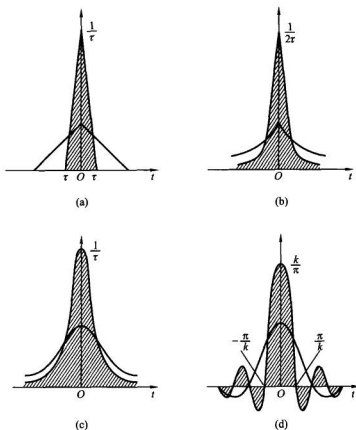


图 1-30 三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲以及  
抽样函数演变为冲激函数

减越迅速。由式(1-11)可知,曲线下的净面积保持 1。当  $k \rightarrow \infty$  时,得到冲激函数。

狄拉克(Dirac)给出  $\delta$  函数的另一种定义方式

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (\text{当 } t \neq 0) \end{cases} \quad (1-36)$$

此定义与式(1-31)的定义相符合。有时,也称  $\delta$  函数为狄拉克函数。

仿此,为描述在任一点  $t = t_0$  处出现的冲激,可有如下的  $\delta(t - t_0)$  函数之定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \\ \delta(t - t_0) = 0 \quad (\text{当 } t \neq t_0) \end{cases} \quad (1-37)$$



此函数图形如图 1-31 所示。

如果单位冲激信号  $\delta(t)$  与一个在  $t=0$  点连续(且处处有界)的信号  $f(t)$  相乘, 则其乘积仅在  $t=0$  处得到  $f(0)\delta(t)$ , 其余各点之乘积均为零, 于是对于冲激函数有如下的性质

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(0) dt \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0)\end{aligned}$$

类似地, 对于延迟  $t_0$  的单位冲激信号有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt = f(t_0) \quad (1-39)$$

以上两式表明了冲激信号的抽样特性(或称“筛选”特性)。连续时间信号  $f(t)$  与单位冲激信号  $\delta(t)$  相乘并在  $-\infty$  到  $\infty$  时间内取积分, 可以得到  $f(t)$  在  $t=0$  点(抽样时刻)的函数值  $f(0)$ , 也即“筛选”出  $f(0)$ 。若将单位冲激移到  $t_0$  时刻, 则抽样值取  $f(t_0)$ 。

除利用规则函数系列取极限或狄拉克的方法定义冲激函数之外, 也可利用式(1-38)来定义冲激函数, 这种定义方式以分配函数理论为基础(详见参考书目[2]2.9节)。另外,  $\delta$  函数尺度运算为  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$  (习题 1-24)。

冲激函数还具有以下的性质

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1-40)$$

也即,  $\delta$  函数是偶函数, 可利用下式证明

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(-\tau) d(-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(0) d\tau = f(0)\end{aligned}$$

这里, 用到变量置换  $\tau = -t$ 。将所得结果与式(1-38)对照, 即可得出  $\delta(t)$  与  $\delta(-t)$  相等的结论。

冲激函数的积分等于阶跃函数, 因为由式(1-36)可知

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1 & (\text{当 } t > 0) \\ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 0 & (\text{当 } t < 0) \end{cases}$$

将这对等式与  $u(t)$  的定义式(1-24)比较, 就可给出

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1-41)$$

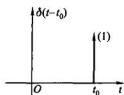
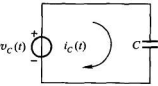


图 1-31  $t_0$  时刻出现的冲激  $\delta(t - t_0)$

反过来, 阶跃函数的微分应等于冲激函数

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \quad (1-42)$$


此结论也可作如下的解释: 阶跃函数在除  $t=0$  以外的各点都取固定值, 其变化率都等于零。而在  $t=0$  有不连续点, 此跳变的微分对应应在零点的冲激。

图 1-32 电压源接向电容元件

我们来考察一个电路问题, 试从物理方面理解  $\delta$  函数的意义。在图 1-32 中, 电压源  $v_C(t)$  接向电容元件  $C$ , 假定  $v_C(t)$  是斜变信号

$$v_C(t) = \begin{cases} 0 & \left( \text{当 } t < -\frac{\tau}{2} \right) \\ \frac{1}{\tau} \left( t + \frac{\tau}{2} \right) & \left( \text{当 } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 1 & \left( \text{当 } t > \frac{\tau}{2} \right) \end{cases} \quad (1-43)$$

波形如图 1-33(a) 所示。电流  $i_C(t)$  的表示式为

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{C}{\tau} \left[ u \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - u \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (1-44)$$

此电流为矩形脉冲, 波形如图 1-33(b) 所示。

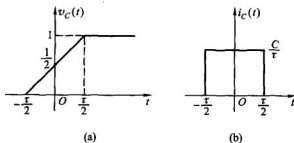


图 1-33  $v_C(t)$  与  $i_C(t)$  波形

当我们逐渐减小  $\tau$ , 则  $i_C(t)$  的脉冲宽度也随之减小, 而其高度  $\frac{C}{\tau}$  则相应加大, 电流脉冲的面积  $\tau \cdot \frac{C}{\tau} = C$  应保持不变。如果取  $\tau \rightarrow 0$  的极限情况, 则  $v_C(t)$  成为阶跃信号, 它的微分——电流  $i_C(t)$  是冲激函数, 写出表示式为

$$i_C(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ C \frac{d}{dt} [v_C(t)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{C}{\tau} \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \right\} \\
 &= C\delta(t)
 \end{aligned} \tag{1-45}$$

此变化过程的波形示意于图 1-34。

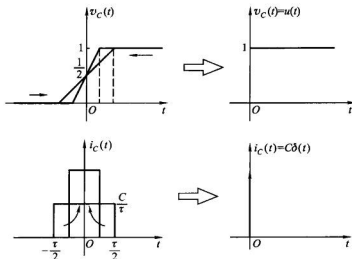


图 1-34  $\tau \rightarrow 0$  时  $v_C(t)$  与  $i_C(t)$  的波形

式(1-45)的结果表明,若要使电容两端在无限短时间内建立一定的电压,那么,在此无限短时间内必须提供足够的电荷,这就需要一个冲激电流。或者说,由于冲激电流的出现,允许电容两端电压跳变。

根据网络对偶理论,上述概念也可用于理想电感模型。设电感  $L$  的端电压为  $v_L(t)$ ,电流为  $i_L(t)$ ,因为有  $v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$ ,所以当  $i_L(t)$  是阶跃函数时,  $v_L(t)$  为冲激电压函数。若要使电感在无限短时间内建立一定的电流,那么,在此无限短时间内必须提供足够的磁链,这就需要一个冲激电压。或者说,由于冲激电压的出现,允许电感电流跳变。

#### (四) 冲激偶信号

冲激函数的微分(阶跃函数的二阶导数)将呈现正、负极性的一对冲激,称为冲激偶信号,以  $\delta'(t)$  表示。可以利用规则函数系列取极限的概念引出  $\delta'(t)$ ,在此借助三角形脉冲系列,波形见图 1-35。三角形脉冲  $s(t)$  其底宽为  $2\tau$ ,高度为  $\frac{1}{\tau}$ ,当  $\tau \rightarrow 0$  时,  $s(t)$  成为单位冲激函数  $\delta(t)$ 。在图 1-35 左下端画出  $\frac{ds(t)}{dt}$  波形,它是正、负极性的两个矩形脉冲,称为脉冲偶对。其宽度都为  $\tau$ ,高度分别

为  $\pm \frac{1}{\tau^2}$ , 面积都是  $\frac{1}{\tau}$ 。随着  $\tau$  减小, 脉冲偶对宽度变窄, 幅度增高, 面积为  $\frac{1}{\tau}$ 。

当  $\tau \rightarrow 0$  时  $\frac{ds(t)}{dt}$  是正、负极性的两个冲激函数, 其强度均为无限大, 示于图 1-35 右下端, 这就是冲激偶  $\delta'(t)$ 。

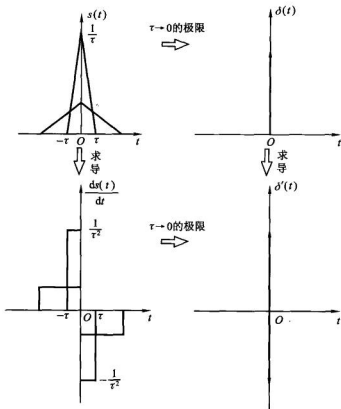


图 1-35 冲激偶的形成

冲激偶的一个重要性质是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0) \quad (1-46)$$

这里,  $f'(t)$  在 0 点连续,  $f'(0)$  为  $f(t)$  导数在零点的取值。此关系式可由分部积分展开而得到证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt &= f(t) \delta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \delta(t) dt \\ &= -f'(0) \end{aligned}$$

对于延迟  $t_0$  的冲激偶  $\delta'(t - t_0)$ , 同样有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0) \quad (1-47)$$

冲激偶信号的另一个性质是,它所包含的面积等于零,这是因为正、负两个冲激的面积相互抵消了。于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1-48)$$

至此介绍了斜变函数、阶跃函数、冲激函数以及冲激偶函数,可由依次求导的方法将它们引出。关于冲激函数的深入研究参见参考书目[1]2.9节。

## 1.5 信号的分解

为便于研究信号传输与信号处理的问题,往往将一些信号分解为比较简单的(基本的)信号分量之和,犹如在力学问题中将任一方向的力分解为几个分力一样。

信号可以从不同角度分解。

### (一) 直流分量与交流分量

信号平均值即信号的直流分量。从原信号中去掉直流分量即得信号的交流分量。设原信号为  $f(t)$ , 分解为直流分量  $f_D$  与交流分量  $f_A(t)$ , 表示为

$$f(t) = f_D + f_A(t) \quad (1-49)$$

若此时间函数为电流信号,则在时间间隔  $T$  内流过单位电阻所产生的平均功率应等于

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f_D + f_A(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f_D^2 + 2f_D f_A(t) + f_A^2(t)] dt \\ &= f_D^2 + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_A^2(t) dt \end{aligned} \quad (1-50)$$

在推导过程中用到  $f_D f_A(t)$  的积分等于零。由此式可见,一个信号的平均功率等于直流功率与交流功率之和。

### (二) 偶分量与奇分量

偶分量的定义为

$$f_e(t) = f_e(-t) \quad (1-51)$$

奇分量的定义为

$$f_o(t) = -f_o(-t) \quad (1-52)$$

任何信号都可分解为偶分量与奇分量两部分之和。因为任何信号总可写成

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}[f(t) + f(t) + f(-t) - f(-t)] \\ &= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \end{aligned} \quad (1-53)$$

显然,上式中第一部分是偶分量,第二部分是奇分量,也即

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (1-54)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \quad (1-55)$$

图 1-36 示出信号分解为偶分量与奇分量的两个实例。

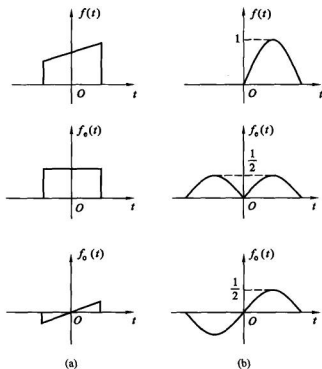


图 1-36 信号的偶分量与奇分量

用类似的方法可以证明:信号的平均功率等于它的偶分量功率与奇分量功率之和。

### (三) 脉冲分量

一个信号可近似分解为许多脉冲分量之和。这里,又分为两种情况:一是分解为矩形窄脉冲分量,如图 1-37(a)所示,窄脉冲组合的极限情况就是冲激信号的叠加;另一种情况是分解为阶跃信号分量之叠加,见图 1-37(b)。

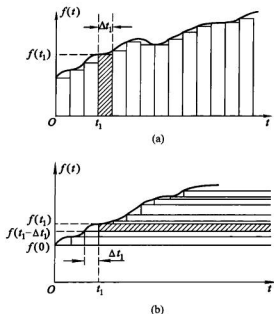


图 1-37 信号分解为脉冲分量之叠加

按图 1-37(a)的分解方式,将函数  $f(t)$  近似写作窄脉冲信号的叠加,设在  $t_1$  时刻被分解之矩形脉冲高度为  $f(t_1)$ ,宽度为  $\Delta t_1$  [见图 1-37(a)],于是此窄脉冲的表示式就为

$$f(t_1)[u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t_1)] \quad (1-56)$$

从  $t_1 = -\infty$  到  $\infty$  将许多这样的矩形脉冲单元叠加,即得  $f(t)$  的近似表示式

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1)[u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t_1)] \\ &= \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) \frac{[u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t_1)]}{\Delta t_1} \cdot \Delta t_1 \quad (1-57) \end{aligned}$$

取  $\Delta t_1 \rightarrow 0$  的极限,可以得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) \frac{[u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t_1)]}{\Delta t_1} \cdot \Delta t_1 \\ &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) \delta(t - t_1) \Delta t_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \delta(t - t_1) dt_1 \quad (1-58) \end{aligned}$$

若将此积分式中的变量  $t_1$  改以  $t$  表示,而将所观察时刻  $t$  以  $t_0$  表示,则式

(1-58)改写为

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt \quad (1-59)$$

注意到冲激函数是偶函数,  $\delta(\tau) = \delta(-\tau)$ , 将  $\delta(t_0 - t)$  用  $\delta(t - t_0)$  代换, 于是有

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt \quad (1-60)$$

此结果与前节式(1-39)完全一致。

与这种分解方式相对应, 还可按图 1-37(b) 将函数  $f(t)$  近似写作阶跃信号的叠加。不失一般, 为使以下推导简捷, 假定当  $t < 0$  时  $f(t) = 0$ 。由图可见, 当  $t = 0$  时出现的第一个阶跃信号为  $f(0)u(t)$ , 此后, 在任一时刻  $t_1$  所产生的分解阶跃信号为

$$[f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)]u(t - t_1) \quad (1-61)$$

于是,  $f(t)$  可近似写作

$$\begin{aligned} f(t) &\approx f(0)u(t) + \sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty} [f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)]u(t - t_1) \\ &= f(0)u(t) + \sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty} \frac{[f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)]}{\Delta t_1} u(t - t_1) \Delta t_1 \end{aligned} \quad (1-62)$$

取  $\Delta t_1 \rightarrow 0$  之极限, 可导出它的积分形式

$$f(t) = f(0)u(t) + \int_0^{\infty} \frac{df(t_1)}{dt_1} u(t - t_1) dt_1 \quad (1-63)$$

目前, 将信号分解为冲激信号叠加的方法应用很广, 在第二章将由此引出卷积积分的概念, 并进一步研究它的应用。将信号分解为阶跃信号叠加的方法已很少采用。

#### (四) 实部分量与虚部分量

对于瞬时值为复数的信号  $f(t)$  可分解为实、虚两个部分之和

$$f(t) = f_r(t) + j f_i(t) \quad (1-64)$$

它的共轭复函数是

$$f^*(t) = f_r(t) - j f_i(t) \quad (1-65)$$

于是有实部和虚部的表示式

$$f_r(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f^*(t)] \quad (1-66)$$

$$j f_i(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f^*(t)] \quad (1-67)$$

还可利用  $f(t)$  与  $f^*(t)$  来求  $|f(t)|^2$ , 即



$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= f(t)f^*(t) \\ &= f_1^2(t) + f_2^2(t) \end{aligned} \quad (1-68)$$

虽然实际产生的信号都为实信号,但在信号分析理论中,常借助复信号来研究某些实信号的问题,它可以建立某些有益的概念或简化运算。例如,复指数常用于表示正弦、余弦信号。近年来,在通信系统、网络理论、数字信号处理等方面,复信号的应用日益广泛。

### (五) 正交函数分量

如果用正交函数集来表示一个信号,那么,组成信号的各分量就是相互正交的。例如,用各次谐波的正弦与余弦信号叠加表示一个矩形脉冲,各正弦、余弦信号就是此矩形脉冲信号的正交函数分量。

把信号分解为正交函数分量的研究方法在信号与系统理论中占有重要地位,这将是本书讨论的主要课题。第三章开始介绍傅里叶级数、傅里叶变换的理论和应用,第六章将集中研究正交函数分解的一般理论,并举出一些应用实例,还有许多章节将讨论离散时间信号的正交函数分解及其应用。

### (六) 利用分形理论描述信号

分形(Fractal)几何理论简称分形理论或分数维理论。这一理论的创始人 B.B.Mandelbrot 在 20 世纪 80 年代中期明确指出:分形是“其部分与整体有相似性的体系”,是一类“组成部分与整体相似的形态”。图 1-38 示出 Sierpinski 三角形集合的几何图形,读者容易看出图中依次演变的规律,每幅图形中的局部与整体具有明显的相似性。

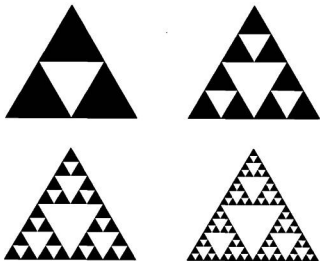


图 1-38 Sierpinski 三角形集合

分形是简单空间中出现的复杂几何体,它具有任意小尺度下的细节,或者说

有精细的结构,它不能用传统的几何语言描述,不是满足某些约束下点集的轨迹,也不是某些简单方程的解集。分形集可以具有形态、功能、信息等方面的自相似性,这种自相似性可以是严格确定的,也可以是统计意义上的。对于人们感兴趣的许多分形问题大多可由不复杂的方法定义,通过迭代、变换产生。

自然界中的许多事物都表现出局部与整体具有自相似性的分形特征,如云彩的边界、山地的轮廓、海岸线的分布、流体的湍流、粒子的布朗运动轨道以及生物的形态等。正是由于这一原因,分形几何被称为更接近大自然的数学。自然界的这种分形特征为我们利用分形理论进行科学与技术研究提供了客观依据。近年来,分形理论已广泛应用于生物学、化学、物理学、天文学、地球物理学、材料科学、经济学以及语言和情报学等领域。目前,在信号传输与信号处理领域应用分形技术的实例表现在以下几方面:图像数据压缩、语音合成、地震信号或石油探井信号分析、声呐或雷达信号检测、通信网业务流量描述等。这些信号的共同特点都是有一定的自相似性,借助分形理论可提取信号特征,并利用一定的数学迭代方法大大简化信号的描述,或自动生成某些具有自相似特征的信号。

分形理论及其应用的研究方兴未艾,而人们已经注意到它显示的独特风格和进一步应用的潜力,因此,目前有关这一领域的研究内容相当丰富。读者可在以后的专门课程或研究工作中进一步学习它的原理,本书仅作此简介,不再讨论。

## 1.6 系统模型及其分类

科学的每一分支都有自己的一套“模型”理论,在模型的基础上可以运用数学工具进行研究。为便于对系统进行分析,同样需要建立系统的模型。所谓模型,是系统物理特性的数学抽象,以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特性。

例如,由电阻器、电容器和线圈组合而成的串联回路,可抽象表示为图1-39那样的模型。一般情况下,可以认为  $R$  代表电阻器的阻值,  $C$  代表电容器的容量,  $L$  代表线圈的电感量。若激励信号是电压源  $e(t)$ , 欲求解电流  $i(t)$ , 由元件的理想特性与 KVL 可以建立如下的微分方程式

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de}{dt} \quad (1-69)$$

这就是电阻器、电容器与线圈串联组合系统的数学模型。在电子技术中经常用到的理想特性元件模型还有互感器、回转器、各种受控源、运算放大器等,它们的数学表示和符号图形在电路分析基础课程中都已述及,此处不再重复。

系统模型的建立是有一定条件的,对于同一物理系统,在不同条件之下,可

以得到不同形式的数学模型。严格讲,只能得到近似的模型。例如,刚刚建立的图 1-39 与式(1-69)只是在工作频率较低,而且线圈、电容器损耗相对很小情况下的近似。如果考虑电路中的寄生参量,如分布电容、引线电感和损耗,而且工作频率较高,则系统模型要变得十分复杂,图 1-39 与式(1-69)就不能应用。工作频率更高时,无法再用集总参数模型来表示此系统,需采用分布参数模型。

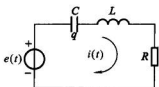


图 1-39 RLC 串联回路

从另一方面讲,对于不同的物理系统,经过抽象和近似,有可能得到形式上完全相同的数学模型。即使对于理想元件组成的系统,在不同电路结构情况下,其数学模型也有可能一致。例如,根据网络对偶理论可知,一个  $G$ (电导)、 $C$ (电容)、 $L$ (电感)组成的并联回路,在电流源激励下求其端电压的微分方程将与式(1-69)形式相同。此外,还能够找到对应的机械系统,其数学模型与这里的电路方程也完全相同(见第二章 2.2 节)。这表明,同一数学模型可以描述物理外貌截然不同的系统。

对于较复杂的系统,其数学模型可能是一个高阶微分方程,规定此微分方程的阶次就是系统的阶数,例如,图 1-39 的系统是二阶系统。也可以把这种高阶微分方程改以一阶联立方程组的形式给出,这是同一个系统模型的两种不同表现形式,前者称为输入-输出方程,后者称为状态方程,它们之间可以相互转换。

建立数学模型只是进行系统分析工作的第一步,为求得给定激励条件下系统的响应,还应当知道激励接入瞬时系统内部的能量储存情况。储能的来源可能是先前激励(或扰动)作用的后果,没有必要追究详细的历史演变过程,只需知道激励接入瞬时系统的状态。系统的起始状态由若干独立条件给出,独立条件的数目与系统的阶次相同,例如图 1-39 所示的电路,其数学模型是二阶微分方程,通常以起始时刻电容端电压与电感电流作为两个独立条件表征它的起始状态(详见第二章与第十一、十二章)。

如果系统数学模型、起始状态以及输入激励信号都已确定,即可运用数学方法求解其响应。一般情况下可以对所得结果作出物理解释、赋予物理意义。综上所述,系统分析的过程,是从实际物理问题抽象为数学模型,经数学解析后再回到物理实际的过程。

除利用数学表达式描述系统模型之外,也可借助方框图(block diagram)表示系统模型。每个方框图反映某种数学运算功能,给出该方框图输出与输入信号的约束条件,若干个方框图组成一个完整的系统。对于线性微分方程描述的系统,它的基本运算单元是相加、倍乘(标量乘法运算)和积分(或微分)。图

1-40(a)、(b)、(c)分别示出这三种基本单元的方框图及其运算功能。

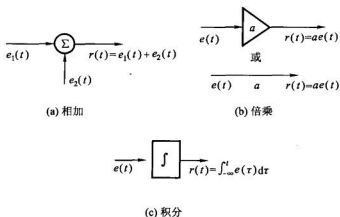


图 1-40 三种基本单元方框图

虽然也可不采用积分单元而用微分运算构成基本单元,但是在实际应用中考虑到抑制突发干扰(噪声)信号的影响,往往选用积分单元。

如果一阶微分方程的表达式分别为

$$\frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_0 e(t) \quad (1-70)$$

$$\frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_1 \frac{d}{dt}e(t) \quad (1-71)$$

容易导出相应的方框图分别如图 1-41 和图 1-42 所示。两图中,输出端的相乘因子  $b_0$  或  $b_1$  也可写在输入端[即  $e(t)$  乘因子后再相加],其效果不变。

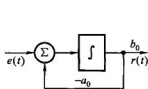


图 1-41 与式(1-70)对应的方框图

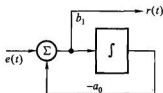


图 1-42 与式(1-71)对应的方框图

对于图 1-39 所示的电路,按照它的数学表达式(1-69)可以建立二阶系统的方框图模型,如图 1-43 所示,注意到图中有两个积分器。对于高阶系统,方框图中将包含更多的积分器。

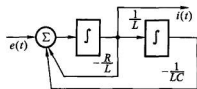


图 1-43 与式(1-69)对应的方框图

如前文所述,不同的系统可以具有相同

的数学模型,因而,它们也可具有相同的方框图。例如,图 1-43 所示的二阶系统方框图也可表征某种机械系统或其他物理系统以及非物理系统。

利用线性微分方程基本运算单元给出系统方框图的方法也称为系统仿真(或模拟, simulation),在第十二章将继续研究这种方法。

对应不同的数学运算可以构成各种类型的方框图,并由若干方框图组成系统,今后将看到多种多样的方框图表达及其组合。

系统的分类错综复杂,主要考虑其数学模型的差异来划分不同的类型。

**连续时间系统与离散时间系统** 若系统的输入和输出都是连续时间信号,且其内部也未转换为离散时间信号,则称此系统为连续时间系统。若系统的输入和输出都是离散时间信号,则称此系统为离散时间系统。RLC 电路都是连续时间系统的例子;而数字计算机就是一个典型的离散时间系统。实际上,离散时间系统经常与连续时间系统组合运用,这种情况称为混合系统。

连续时间系统的数学模型是微分方程,而离散时间系统则用差分方程描述。

**即时系统与动态系统** 如果系统的输出信号只决定于同时刻的激励信号,与它过去的工作状态(历史)无关,则称此系统为即时系统(或无记忆系统)。例如,只由电阻元件组成的系统就是即时系统。如果系统的输出信号不仅取决于同时刻的激励信号,而且与它过去的工作状态有关,这种系统称为动态系统(或记忆系统)。凡是包含有记忆作用的元件(如电容、电感、磁芯等)或记忆电路(如寄存器的系统)都属此类。

即时系统可用代数方程描述,动态系统的数学模型则是微分方程或差分方程。在分析动态系统时,变量的选择又有两种方式,一种是选择输出变量与输入变量(响应与激励),另一种是选择状态变量(如电容电压、电感电流等)。

**集总参数系统与分布参数系统** 只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统;含有分布参数元件的系统是分布参数系统(如传输线、波导等)。集总参数系统用常微分方程作为它的数学模型。而分布参数系统的数学模型是偏微分方程,这时描述系统的独立变量不仅是时间变量,还要考虑到空间位置。

**线性系统与非线性系统** 具有叠加性与均匀性(也称齐次性, homogeneity)的系统称为线性系统。所谓叠加性是指当几个激励信号同时作用于系统时,总的输出响应等于每个激励单独作用所产生的响应之和;而均匀性的含义是,当输入信号乘以某常数时,响应也倍乘相同的常数。不满足叠加性或均匀性的系统是非线性系统。

**时变系统与时不变系统** 如果系统的参数不随时间而变化,则称此系统为时不变系统(或非时变系统、定常系统);如果系统的参量随时间改变,则称其为时变系统(或参变系统)。

综合以上两方面的情况,我们可能遇到线性时不变、线性时变、非线性时不

变、非线性时变等系统。现以图 1-39 为例来说明这几种不同系统数学模型的差异。

若  $L, C, R$  都是线性、时不变元件,就可组成一个线性时不变系统,其数学模型如式(1-69),是一个常系数线性微分方程。

若电容  $C$  受某种外加控制作用而改变其容量,也即  $C(t)$  也是时间的函数,则方程式为变参线性微分方程,这是一个线性时变系统。若响应以电荷  $q(t)$  表示,则微分方程写作

$$LC(t)\frac{d^2q}{dt^2} + RC(t)\frac{dq}{dt} + q = C(t)e(t) \quad (1-72)$$

如果  $R$  是非线性电阻,设其电压、电流之间关系为  $v = Ri^2$ ,而  $L, C$  仍保持线性、时不变,于是建立一非线性常系数微分方程

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + 2RCi\frac{di}{dt} + i = C\frac{de}{dt} \quad (1-73)$$

这是一个非线性时不变系统。

与此对应,也可以出现线性或非线性、常系数或变参差分方程,作为描述离散时间系统的数学模型(见第七章 7.3 节)。

可逆系统与不可逆系统 若系统在不同的激励信号作用下产生不同的响应,则称此系统为可逆系统。对于每个可逆系统都存在一个“逆系统”,当原系统与此逆系统级联组合后,输出信号与输入信号相同。

例如,输出  $r_1(t)$  与输入  $e_1(t)$  具有如下约束的系统是可逆的

$$r_1(t) = 5e_1(t) \quad (1-74)$$

此可逆系统的逆系统输出  $r_2(t)$  与输入  $e_1(t)$  满足如下关系

$$r_2(t) = \frac{1}{5}e_1(t) \quad (1-75)$$

不可逆系统的一个实例为

$$r_3(t) = e_3^2(t) \quad (1-76)$$

显然无法根据给定的输出  $r_3(t)$  来决定输入  $e_3(t)$  的正、负号,也即,不同的激励信号产生了相同的响应,因而它是不可逆的。

可逆系统的概念在信号传输与处理技术领域中得到广泛的应用。例如在通信系统中,为满足某些要求可将待传输信号进行特定的加工(如编码),在接收信号之后仍要恢复原信号,此编码器应当是可逆的。这种特定加工的一个实例如在发送端为信号加密,在接收端需要正确解密。

除以上几种划分方式之外,还可按照系统的性质将它们划分为因果系统与非因果系统(下节),以及稳定系统与非稳定系统(参见第四章 4.11 节)等,以后将根据各章节内容的需要陆续介绍。

## 1.7 线性时不变系统

本书着重讨论确定性输入信号作用下的集总参数线性时不变系统(线性时不变, Linear Time - Invariant, 缩写为 LTI), 在以后的文字叙述中, 一般简称 LTI 系统, 包括连续时间系统与离散时间系统。

为便于全书讨论, 这里将线性时不变系统的一些基本特性作如下说明。

### (一) 叠加性与均匀性

前节已给出文字定义, 现用数学符号和方框图来说明。如果对于给定的系统,  $e_1(t)$ 、 $r_1(t)$  和  $e_2(t)$ 、 $r_2(t)$  分别代表两对激励与响应, 则当激励是  $C_1e_1(t) + C_2e_2(t)$  ( $C_1$ 、 $C_2$  分别为常数) 时, 系统的响应为  $C_1r_1(t) + C_2r_2(t)$ 。此特性示意于图 1-44。

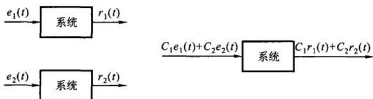


图 1-44 线性系统的叠加性与均匀性

由常数线性微分方程描述的系统, 如果起始状态为零, 则系统满足叠加性与均匀性(齐次性)。若起始状态非零, 必须将外加激励信号与起始状态的作用分别处理才能满足叠加性与均匀性, 否则可能引起混淆, 2.5 节将专门研究此问题。

### (二) 时不变特性

对于时不变系统, 由于系统参数本身不随时间改变, 因此, 在同样起始状态之下, 系统响应与激励施加于系统的时刻无关。写成数学表达式, 若激励为  $e(t)$ , 产生响应  $r(t)$ , 则当激励为  $e(t - t_0)$  时, 响应为  $r(t - t_0)$ 。此特性示于图 1-45, 它表明当激励延迟一段时间  $t_0$  时, 其输出响应也同样延迟  $t_0$  时间, 波形形状不变。

### (三) 微分特性

对于 LTI 系统满足如下的微分特性: 若系统在激励  $e(t)$  作用下产生响应  $r(t)$ , 则当激励为  $\frac{de(t)}{dt}$  时, 响应为  $\frac{dr(t)}{dt}$ 。

根据线性与时不变性容易证明此结论。首先由时不变特性可知, 激励  $e(t)$  对应输出  $r(t)$ , 则激励  $e(t - \Delta t)$  产生响应  $r(t - \Delta t)$ 。再由叠加性与均匀性可

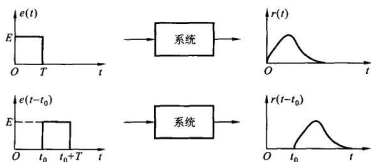


图 1-45 时不变特性

知,若激励为  $\frac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t}$  则响应等于  $\frac{r(t) - r(t - \Delta t)}{\Delta t}$ , 取  $t \rightarrow 0$  的极限, 得到导数关系。若激励为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} e(t) \quad (1-77)$$

则响应为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} r(t) \quad (1-78)$$

这表明, 当系统的输入由原激励信号改为其导数时, 输出也由原响应函数变成其导数。显然, 此结论可扩展至高阶导数与积分。图 1-46 示意表明这一结果。

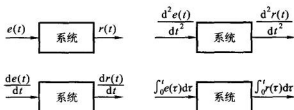


图 1-46 微分特性

#### (四) 因果性

因果系统是指系统在  $t_0$  时刻的响应只与  $t = t_0$  和  $t < t_0$  时刻的输入有关, 否则, 即为非因果系统。也就是说, 激励是产生响应的原因, 响应是激励引起的后果, 这种特性称为因果性(causality)。

例如, 系统模型若为

$$r_1(t) = e_1(t - 1) \quad (1-79)$$

则此系统是因果系统, 如果

$$r_2(t) = e_2(t + 1) \quad (1-80)$$

则为非因果系统。



通常由电阻器、电感线圈、电容器构成的实际物理系统都是因果系统。而在信号处理技术领域中,待处理的时间信号已被记录并保存下来,可以利用后一时刻的输入来决定前一时刻的输出(例如信号的压缩、扩展、求统计平均值等),那么,将构成非因果系统。在语音信号处理、地球物理学、气象学、股票市场分析及人口统计学等领域都可能遇到此类非因果系统。

如果信号的自变量不是时间(例如在图像处理的一些问题中),研究系统的因果性显得不很重要。

由常系数线性微分方程描述的系统若在  $t < t_0$  时不存在任何激励,在  $t_0$  时刻起始状态为零,则系统具有因果性。

某些非因果系统的模型虽然不能直接由物理系统实现,然而它们的性能分析对于因果系统的研究具有重要的指导意义,第五章 5.4 节将讨论这方面的问题。

借“因果”这一名词,常把  $t=0$  接入系统的信号(在  $t < 0$  时函数值为零)称为因果信号(或有始信号)。对于因果系统,在因果信号的激励下,响应也为因果信号。

## 1.8 LTI 系统分析方法、本书概貌

在系统分析中,LTI 系统的分析具有重要意义。这不仅是因为在实际应用中经常遇到 LTI 系统,而且,还有一些非线性系统或时变系统在限定范围与指定条件下,遵从线性时不变特性的规律;另一方面,LTI 系统的分析方法已经形成了完整的、严密的体系,日趋完善和成熟。

为便于读者了解本书概貌,下面就系统分析方法作一概述,着重说明线性时不变系统的分析方法。

在建立系统模型方面,系统的数学描述方法可分为两大类型,一是输入-输出描述法,另一是状态变量描述法。

输入-输出描述法着眼于系统激励与响应之间的关系,并不关心系统内部变量的情况。对于在通信系统中大量遇到的单输入-单输出系统,应用这种方法较方便。

状态变量描述法不仅可以给出系统的响应,还可提供系统内部各变量的情况,也便于多输入-多输出系统的分析。在近代控制系统的理论研究中,广泛采用状态变量方法。

从系统数学模型的求解方法来讲,大体上可分为时间域方法与变换域方法两大类型。

时间域方法直接分析时间变量的函数,研究系统的时间响应特性,或称时域

特性。这种方法的主要优点是物理概念清楚。对于输入-输出描述的数学模型,可以利用经典法解常系数线性微分方程或差分方程,辅以算子符号方法可使分析过程适当简化;对于状态变量描述的数学模型,则需求解矩阵方程。在线性系统时域分析方法中,卷积方法最受重视,它的优点表现在许多方面,本书中将给出较多篇幅研究这种方法。借助计算机,利用数值方法求解微分方程也比较方便,此外,还有一些辅助性的分析工具如求解非线性微分方程的相平面法等,本书不涉及以上两方面的内容,读者将在其他课程中学习。在信号与系统研究的发展过程中,曾一度认为时域方法运算繁琐、不够方便,随着计算技术与各种算法工具的出现,时域分析又重新受到重视。

变换域方法将信号与系统模型的时间变量函数变换成相应变换域的某种变量函数。例如,傅里叶变换(FT)以频率为独立变量,以频域特性为主要研究对象;而拉普拉斯变换(LT)与 $z$ 变换(ZT)则注重研究极点与零点分析,利用 $s$ 域或 $z$ 域的特性解释现象和说明问题。目前,在离散系统分析中,正交变换的内容日益丰富,如离散傅里叶变换(DFT)、离散沃尔什变换(DWT)等。为提高计算速度,人们对于快速算法产生了巨大兴趣,又出现了如快速傅里叶变换(FFT)等计算方法。变换域方法可以将时域分析中的微分、积分运算转化为代数运算,或将卷积积分变换为乘法。在解决实际问题时又有许多方便之处,如根据信号占有频带与系统通带间的适应关系来分析信号传输问题往往比时域法简便和直观。在信号处理问题中,经正交变换,将时间函数用一组变换系数(谱线)来表示,在允许一定误差的情况下,变换系数的数目可以很少,有利于判别信号中带有特征性的分量,也便于传输。

LTI 系统的研究,以叠加性、均匀性和时不变特性作为分析一切问题的基础。按照这一观点去考察问题,时间域方法与变换域方法并没有本质区别。这两种方法都是把激励信号分解为某种基本单元,在这些单元信号分别作用的条件下求得系统的响应,然后叠加。例如,在时域卷积方法中这种单元是冲激函数,在傅里叶变换中是正弦函数或指数函数,在拉普拉斯变换中则是复指数信号。因此,变换域方法不仅可以视为求解数学模型的有力工具,而且能够赋予明确的物理意义,基于这种物理解释,时间域方法与变换域方法得到了统一。

本书按照先输入-输出描述后状态变量描述,先连续后离散,先时间域后变换域的顺序,研究线性时不变系统的基本分析方法,结合通信系统与控制系统的一般问题,初步介绍这些方法在信号传输与处理方面的简单应用。

图 1-47 示出本书主体结构框架,包括各章要点和相互联系。图中,各方框中的序号代表章号。A 代表连续(模拟)时间信号与系统,D 代表离散(数字)时间信号与系统。在 A、D 字母之后附注的文字是指涉及 A 与 D 密切结合的内容。正如前言中所述,全书内容覆盖满足教育部高等学校电子信息科学与电气

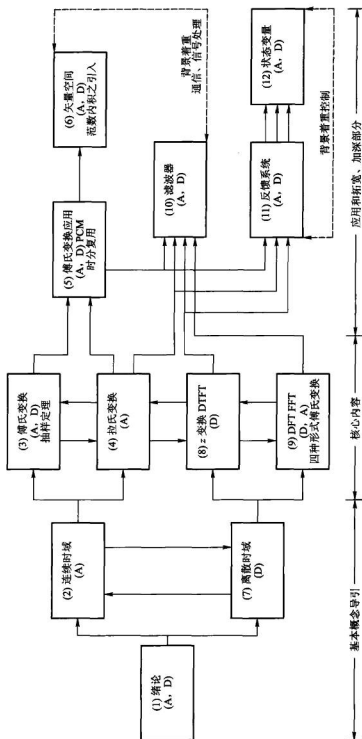


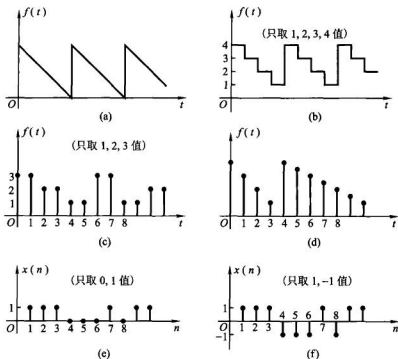
图 1-47 本书主体结构框架 (各章要点和相互联系)

信息类基础课程教学指导分委员会制定的两类专业本课程之基本要求(通信电子类和非通信电子类,2004年)。图中,将全书内容划分为三个层次,从左向右依次为基本概念导引、核心内容以及应用和拓宽加深部分。在前两部分中,第(1)、(2)、(3)、(4)、(7)、(8)各章对于许多专业都属于最重要的基本内容。而第(9)章虽然同样重要,但各专业可有不同组课方案,实际上 DFT 和 FFT 可在本课程讲授,也可移至后续数字信号处理课程中解决。对于应用和拓宽加深部分则具有相当大的灵活性。从应用领域来看本书能够适应通信信号处理与控制两类专业的不同需求;而从理论深度来看无论从(5)到(6)或是从(11)到(12)都体现了逐步深入引导提高的教学意图。可以根据不同专业、学时多少以及学生的学习能力灵活选取所需素材组课。

长期以来,人们对于非线性系统与变时变系统的研究付出了足够的代价,虽然取得了不少进展,而目前仍有较多困难,还不能总结出系统、完整、具有普遍意义的分析方法。近年来,在信号传输与处理研究领域,人们利用人工神经网络、模糊集理论、遗传算法、混沌理论以及它们的相互结合解决线性时不变系统模型难以描述的许多实际问题,取得了令人满意的结果,这些方法显示了强大的生命力,它们的构成原理和处理问题的方法与本课程的基本内容有着本质的区别。随着本课程与后续课程的深入学习,读者将逐步认识到本书方法的局限性。科学发展日新月异,信号与系统领域的新理论、新技术层出不穷,对于这一学科领域的学习将永无止境。

## 习 题

- 1-1 分别判断题图1-1所示各波形是连续时间信号还是离散时间信号,若是离散时间信号是否为数字信号?
- 1-2 分别判断下列各函数式属于何种信号。(重复习题1-1所问。)
- (1)  $e^{-\sigma t} \sin(\omega t)$  (2)  $e^{-nT}$
- (3)  $\cos(n\pi)$  (4)  $\sin(n\omega_0)$  ( $\omega_0$ 为任意值)
- (5)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 以上各式中  $n$  为正整数。
- 1-3 分别求下列各周期信号的周期  $T$ 。
- (1)  $\cos(10t) - \cos(30t)$
- (2)  $e^{j10t}$
- (3)  $[5\sin(8t)]^2$
- (4)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n [u(t-nT) - u(t-nT-T)]$  ( $n$  为正整数)
- 1-4 对于例1-1所示信号,由  $f(t)$  求  $f(-3t-2)$ ,但改变运算顺序,先求  $f(3t)$  或先求



题图 1-1

$f(-t)$ , 讨论所得结果是否与原例之结果一致。

1-5 已知  $f(t)$ , 为求  $f(t_0 - at)$  应按下列哪种运算求得正确结果(式中  $t_0, a$  都为正值)?

(1)  $f(-at)$  左移  $t_0$

(2)  $f(at)$  右移  $t_0$

(3)  $f(at)$  左移  $\frac{t_0}{a}$

(4)  $f(-at)$  右移  $\frac{t_0}{a}$

1-6 绘出下列各信号的波形。

(1)  $\left[1 + \frac{1}{2} \sin(\Omega t)\right] \sin(8\Omega t)$

(2)  $[1 + \sin(\Omega t)] \sin(8\Omega t)$

1-7 绘出下列各信号的波形。

(1)  $[u(t) - u(t - T)] \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$

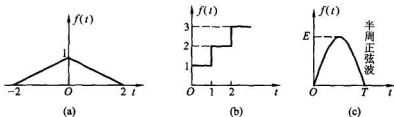
(2)  $[u(t) - 2u(t - T) + u(t - 2T)] \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$

1-8 试将描述图 1-15 所示波形的式(1-16)和式(1-17)改用阶跃信号表示。

1-9 粗略绘出下列各函数式的波形图。

- (1)  $f(t) = (2 - e^{-t})u(t)$   
 (2)  $f(t) = (3e^{-t} + 6e^{-2t})u(t)$   
 (3)  $f(t) = (5e^{-t} - 5e^{-3t})u(t)$   
 (4)  $f(t) = e^{-t}\cos(10\pi t)[u(t-1) - u(t-2)]$

1-10 写出题图1-10(a)、(b)、(c)所示各波形的函数式。



题图 1-10

1-11 绘出下列各时间函数的波形图。

- (1)  $te^{-t}u(t)$   
 (2)  $e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-2)]$   
 (3)  $[1 + \cos(\pi t)][u(t) - u(t-2)]$   
 (4)  $u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$   
 (5)  $\frac{\sin[a(t-t_0)]}{a(t-t_0)}$   
 (6)  $\frac{d}{dt}[e^{-t}(\sin t)u(t)]$

1-12 绘出下列各时间函数的波形图,注意它们的区别。

- (1)  $t[u(t) - u(t-1)]$   
 (2)  $t \cdot u(t-1)$   
 (3)  $t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1)$   
 (4)  $(t-1)u(t-1)$   
 (5)  $-(t-1)[u(t) - u(t-1)]$   
 (6)  $t[u(t-2) - u(t-3)]$   
 (7)  $(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$

1-13 绘出下列各时间函数的波形图,注意它们的区别。

- (1)  $f_1(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t)$   
 (2)  $f_2(t) = \sin[\omega(t-t_0)] \cdot u(t)$   
 (3)  $f_3(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t-t_0)$   
 (4)  $f_4(t) = \sin[\omega(t-t_0)] \cdot u(t-t_0)$

1-14 应用冲激信号的抽样特性,求下列表示式的函数值。

- (1)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0 - t) \delta(t) dt$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) u\left(t - \frac{t_0}{2}\right) dt$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) u(t - 2t_0) dt$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t} + t) \delta(t + 2) dt$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} (t + \sin t) \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$$

$$(7) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} [\delta(t) - \delta(t - t_0)] dt$$

1-15 电容  $C_1$  与  $C_2$  串联, 以阶跃电压源  $v(t) = Eu(t)$  串联接入, 试分别写出回路中的电流  $i(t)$ 、每个电容两端电压  $v_{C1}(t)$ 、 $v_{C2}(t)$  的表示式。

1-16 电感  $L_1$  与  $L_2$  并联, 以阶跃电流源  $i(t) = Iu(t)$  并联接入, 试分别写出电感两端电压  $v(t)$ 、每个电感支路电流  $i_{L1}(t)$ 、 $i_{L2}(t)$  的表示式。

1-17 分别指出下列各波形的直流分量等于多少。

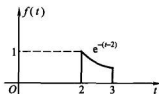
(1) 全波整流  $f(t) = |\sin(\omega t)|$

(2)  $f(t) = \sin^2(\omega t)$

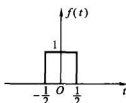
(3)  $f(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$

(4) 升余弦  $f(t) = K[1 + \cos(\omega t)]$

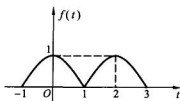
1-18 粗略绘出题图1-18所示各波形的偶分量和奇分量。



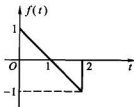
(a)



(b)



(c)



(d)

题图 1-18

1-19 绘出下列系统的仿真框图。

$$(1) \frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{d}{dt}e(t)$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + a_1 \frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{d}{dt}e(t)$$

1-20 判断下列系统是否为线性的、时不变的、因果的。

$$(1) r(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

$$(2) r(t) = e(t)u(t)$$

$$(3) r(t) = \sin[e(t)]u(t)$$

$$(4) r(t) = e(1-t)$$

$$(5) r(t) = e(2t)$$

$$(6) r(t) = e^2(t)$$

$$(7) r(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau$$

$$(8) r(t) = \int_{-\infty}^{5t} e(\tau) d\tau$$

1-21 判断下列系统是否是可逆的。若可逆,给出它的逆系统;若不可逆,指出使该系统产生相同输出的两个输入信号。

$$(1) r(t) = e(t-5)$$

$$(2) r(t) = \frac{d}{dt}e(t)$$

$$(3) r(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau$$

$$(4) r(t) = e(2t)$$

1-22 若输入信号为  $\cos(\omega_0 t)$ ,为使输出信号中分别包含以下频率成分:

$$(1) \cos(2\omega_0 t)$$

$$(2) \cos(3\omega_0 t)$$

(3) 直流

请你分别设计相应的系统(尽可能简单)满足此要求,给出系统输出与输入的约束关系式。讨论这三种要求有何共同性,相应的系统有何共同性。

1-23 有一线性时不变系统,当激励  $e_1(t) = u(t)$  时,响应  $r_1(t) = e^{-at}u(t)$ ,试求当激励  $e_2(t) = \delta(t)$  时,响应  $r_2(t)$  的表示式。(假定起始时刻系统无储能。)

1-24 证明  $\delta$  函数的尺度运算特性满足  $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ 。(提示:利用图 1-28,当以  $t$  为自变量时脉冲底宽为  $\tau$ ,而改以  $at$  为自变量时底宽变成  $\frac{\tau}{a}$ ,借此关系以及偶函数特性即可求出以上结果。)



## 第二章 连续时间系统的时域分析

### 2.1 引言

LTI 系统分析方法包括时间域和变换域两方面的问题(简称时域或变域)。时域分析方法不涉及任何变换,直接求解系统的微分、积分方程式,对于系统的分析与计算全部都在时间变量领域内进行。这种方法比较直观、物理概念清楚,是学习各种变换域方法的基础。

20 世纪 50 年代以前,时域分析方法着重研究微分方程的经典法求解。对于高阶系统或激励信号较复杂的情况,计算过程相当繁复,求解过程很不方便。正是由于这一原因,在相当长的一段时间内,人们的兴趣集中于变换域分析,例如借助拉普拉斯变换求解微分方程。而 20 世纪 60 年代以后,由于计算机的广泛应用和各种软件工具的开发,从时域求解微分方程的技术显得比较方便;另一方面,在 LTI 系统中借助卷积方法求解响应日益受到重视,因而,时域分析的研与应用又进一步得到发展。

系统数学模型的时域表示有两种形式:端口(输入-输出)描述与状态方程描述。前者写作一元  $n$  阶微分方程;而后者以  $n$  元联立一阶微分方程的形式给出。本章仅限于研究输入-输出方程的分析与求解,待到第十二章专门研究状态方程的有关问题,包括时间域与变换域、连续与离散。

本章的主要内容包括以下两个方面:从 2.2 节到 2.6 节着重讨论 LTI 系统微分方程的建立与求解以及响应分解特性的研究;而 2.7 节至 2.9 节讲授卷积积分的概念、运算、图解分析及其应用。前面几节,在复习数学和电路课已讲授之经典法求解微分方程的基础上,引入系统响应起始值可能发生跳变的概念(从 0<sup>-</sup>到 0<sup>+</sup>状态的转换),并研究零输入响应与零状态响应分解特性。在给出系统的冲激响应之后,将冲激响应与激励信号进行卷积积分,从而可以求得系统的零状态响应。卷积积分方法有清楚的物理概念,一般情况下计算过程比较方便,并且能够适应计算机编程求解。此外,卷积原理在变换域方法中同样得到广泛应用,它是连接时间域与变换域两类方法的一条纽带。在 LTI 系统理论中,卷积概念占有十分重要的地位。我们将要看到,在本书许多章节里都要用到本章讲述的卷积概念和计算方法,读者对此必须熟练掌握。

## 关于此电子书的说明

本人由于一些便利条件，可以为您提供各种中文图书的PDF电子版，保证质量清晰。只要图书不是太新，文学、法律、计算机、经济、医学、工业、学术等方面的图书，都可以帮您制作，如果您有这方面的需求，可以通过QQ联系我，我的QQ号是 [3330972307](#)。