

# 目 录

第一章 绪 论 .....	( 1 )
第二章 线性规划 .....	( 3 )
§ 2.1 数学模型 .....	( 3 )
§ 2.2 图解法 .....	( 9 )
§ 2.3 标准格式的转换 .....	( 13 )
§ 2.4 单纯形法 .....	( 17 )
第三章 修正单纯形法 .....	( 36 )
§ 3.1 修正单纯形法 .....	( 36 )
§ 3.2 修正单纯形算法 .....	( 37 )
第四章 对偶规划 .....	( 50 )
§ 4.1 对偶规划的经济意义 .....	( 50 )
§ 4.2 对偶规划理论 .....	( 52 )
§ 4.3 对偶单纯形法 .....	( 62 )
§ 4.4 灵敏度分析 .....	( 67 )
第五章 线性规划的特殊类型及目标规划 .....	( 77 )
§ 5.1 表上作业法 .....	( 77 )
§ 5.2 分派问题 .....	( 85 )
§ 5.3 目标规划 .....	( 92 )
第六章 整数规划 .....	( 97 )
§ 6.1 图解法 .....	( 97 )
§ 6.2 分枝定界法 .....	( 98 )
§ 6.3 割平面法 .....	( 102 )
第七章 动态规划 .....	( 104 )
§ 7.1 基本概念 .....	( 104 )
§ 7.2 例子 .....	( 105 )
第八章 非线性规划 .....	( 110 )
§ 8.1 非线性规划问题及数学模型 .....	( 110 )
§ 8.2 非线性规划的图示 .....	( 112 )
§ 8.3 一维搜索 .....	( 113 )
第九章 库存论 .....	( 121 )
§ 9.1 库存问题的提出 .....	( 121 )
§ 9.2 库存模型的有关概念 .....	( 122 )
§ 9.3 不允许缺货的库存模型 .....	( 122 )
第十章 排队论 .....	( 128 )

§ 10. 1	排队论的基本概念及其共性.....	(129)
§ 10. 2	排队过程的数量指标及其通用记号.....	(132)
§ 10. 3	几个简单的排队系统模型.....	(134)
§ 10. 4	关统的费用优化.....	(138)
第十一章	计算机分析程序.....	(139)
§ 11. 1	带优化后分析的单纯形法计算.....	(139)
§ 11. 2	整数规划—分枝定界法的计算.....	(146)
§ 11. 3	单目标规划的计算.....	(153)
§ 11. 4	多目标规划的计算.....	(157)
练习题	.....	(163)
练习题答案	.....	(174)

# 第一章 绪 论

运筹学是管理决策中定量分析的科学方法。对于一个特定的管理问题，通过运筹学方法进行定量分析，求出特定问题的解，这对于解决复杂的管理问题起着积极的作用。

运筹学的一些朴素思想，在历史上可以追溯到公元前四百年前，中国著名军事学家孙武著的《孙子兵法》一书中已有关于运筹学思想的描述，而正式形成是在1939年始于英国，当时在英国已有《运筹学小组》的核心存在，而以布莱克特（P. M. S. Blackett）领导的布莱克特小组为著名。该小组由三个哲学家、一个测量学家、一个天文学家、一个军官、一个普通物理学家、两个数学家和两个数理学家组成。这些运筹学小组为政府解决许多复杂的军事问题，诸如如何组织城市防卫和有效进攻敌人问题，如何布置雷达站问题，如何选定轰炸潜水艇的飞机有效高度问题，为完成某项任务，轰炸机和战斗机如何组合问题等等，都取得了显著的成效。第二次世界大战结束后，运筹学方法广泛地应用于民用企业，大学亦开设了这门课程，1948年美国麻省工学院首先开设了运筹学的非军事应用学科，随后，美国开设这方面的学科的高等院校共有三十多所。从五十年代开始，出现了一批运筹学用于管理方面的书籍，如韦斯特·丘奇曼（C. West Churchman）等三人合著《运筹学入门》，爱德华·鲍曼（Edward H. Bowman）等二人合著《生产管理分析》，塞缪尔·里奇蒙（Samuel B. Richmond）著的《用于管理决策的运筹学》等等。这些都是从战争经验中获得一定数据来建立模型，描述一个特定的行动，把特定问题的解求出，从而告诉决策者应该怎样去做。1948年英国成立了运筹学俱乐部（现在称为联合王国运筹学会），每三年召开一次国际性会议，首次是在1953年于英国伦敦举行，有21个国家派出代表参加。

中国大规模开展运筹学活动是在1958年。在1956年中国科学院成立了运筹学研究小组，向全国推广运筹学，他们配合产业部门的生产需要，从经营、组织、管理方面来挖掘生产潜力，开始了广泛宣传和推广，在这个时期，我国运筹学应用取得了一些成果。如在邮电方面，用来调整和组织城乡邮路网；划分投递道段，确定投递路线，合理组织邮政营业，安排包裹分拣生产过程；布置生产场地以及调运邮政空袋等。在市内电话方面，运筹学用来科学地组织装拆工作，组织话机查修机线和网路设计。在长途电话方面，用来搭配长途接续台的电路，安排班次，组织分发台的话单分发，传递以及记录台和查询台的工作。在电报通讯方面，用以组织来报投递，搭配电路，公电报底存放以及报房生产场地设计等。在农村电话方面用来组织电话网的调整规划，……。在争取以较少的资源消耗，提高通信质量等方面取得了有效的经济效果。

此外，纺织工业中的配棉，纱机的看台，经轴储备量，拆布长度和棉纱支数的控制等也应用了运筹学方法而取得可喜成效。运筹学应用面很广，几乎遍及所有门类。生物、水文、医药、冶炼、建筑、交通运输、商业等部门在不同程度上推行了运筹学，取得一定的经济效益。不少人员从事这方面的工作，其中以华罗庚教授为代表，在大庆油田、黑龙江省林业战

线、山西省大同市口泉车站、太原铁路局、太钢等地推行了统筹法，取得成功。实践说明，运用运筹学的理论、方法去组织生产，管理企业，是能够发展生产力，提高经济效益的。随着企业现代化的发展，运筹学必将相应地得到更广泛的应用和发展，将会为社会主义企业发挥其积极的作用。

运筹学是分析和解决管理问题的一种有效方法，它以不同的数学模型，解决不同的管理问题，它的主要分支有：

- 一、线性规划
- 二、整数规划
- 三、非线性规划
- 四、动态规划
- 五、库存论
- 六、排队论
- 七、博弈论等等

综上所述，运筹学的产生是由于科学地研究管理问题的需要，是为了解决军事问题的需要而产生的。从它的诞生和发展过程，可以知道运筹学是：利用计划方法和多学科专家组成的综合的队伍把复杂的生产活动问题表示成数学模型，以期通过定量的分析为决策者提供数量方面的依据，从而提高决策者作出正确决策的能力。

## 第二章 线性规划

许多现行的决策是充分利用企业的一切资源，最大限度地完成各项生产计划，以获得最好的经济效益。线性规划就是达到这一目标的一种有效工具。它所研究的问题主要有两类：一类是在给定数量的人力、物力等资源下，如何运用这些资源去完成最大的任务；另一类是在给定任务的情况下，如何统筹安排，使用最小量的资源去完成这项任务。这两类问题，在不同部门可能有不同的特点，但是，它们也存在许多共性的东西。一般地说，线性规划在管理方面的应用有：

**生产计划的安排** 为生产管理者确定最有利的生产方案，使适应企业所具有的生产能力，并使设备利用效率最高。

**原材料的分配** 以最优方式提供一个使原材料或产品运输费用最小的运输方案。

**各种原料的配合** 帮助生产管理者找出各种原料配合的比例，以满足特定混合物的质量要求。

**开料规划** 以最佳方法开料，使边角料最少，以达到提高原料的使用率。

**人力管理计划** 使人事管理部门能根据人员的特长来使用人员。

**位置设置** 工厂、仓库、设备放置的位置选择。

什么是线性规划呢？“线性”就是说用来描述两个或多个变量之间的关系是成正比例的。例如：我们说  $x=f(y)$ ，这里  $f$  是一个线性函数。 $y$  的任何变化都会引起  $x$  按一定比例的变化。如果用图表示这个关系，那是一条直线，因而称为线性。“规划”的意思是使用一定的数学方法，利用企业的有限资源得出一个最好的解。也就是说，它表示从数学形式表达的一定条件下的一组方程式（或一组不等式）中求某些未知量。综合上述两个概念，可以给线性规划作如下的定义：作出企业有限资源的最优分配的数学方法。诚然，这个定义并不是唯一的，对于一个企业家来说，他认为线性规划是：实现企业目标的管理工具之一；而对于一个经济学家来说，他认为线性规划是满足企业产品的供求规律而进行分配有限资源的方法；数学家则认为：线性规划是解决在一定约束条件下，求目标函数的最大值（或最小值）的方法。可见不同阶层的人士对线性规划作不同的定义的，但其实质是属于优化方法问题。

### § 2.1 数学模型

模型是描述现实世界的一个抽象，从而有助于解决这个被抽象的实际问题，而且能起着指导解决其他具有这些共性的实际问题的作用。

当我们用线性规划来求解一个实际问题的时候，须要把这个实际问题用适当的数学形式表达出来，这个表达的过程，就是建立数学模型的过程。

在建立数学模型过程中，首先要明确哪些是变量，哪些是已给出的常数，以后将用字母

来表示变量，数字及其他符号表示已给常数。然后将实际问题中的一些规律或关系，用数学表达式来加以描述。

在能用线性规划求解的实际问题中，这些数学表达式就是线性等式和线性不等式，而目标函数也是一个线性函数。

下面将结合一些实际问题来描述和讨论数学模型的建立。

### 一、产品品种问题

某车间生产甲、乙两种产品，每件甲产品的利润是2元，乙产品是3元。制造每件甲种产品需要劳动力3个，而乙种产品需要6个。车间现有的劳动力总数是24个。制造每件甲产品需要原材料2斤，而乙产品需要1斤，车间总共只有10斤原材料可供使用。问应该安排生产甲产品多少件，乙产品多少件才能获得最大的利润（假设甲、乙产品均为畅销商品）。

解：假设以 $x_1, x_2$ 分别表示甲、乙两种产品的计划产量， $Z$ 为计划总利润值。

如果安排生产的甲、乙产品全部都能销售掉，要求达到的目标是使

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大} \quad (2-1-1)$$

上式表示本例要达到的目标是最大的利润，它是 $x_1, x_2$ 的函数，故叫做目标函数。

生产甲、乙产品所用的材料和劳动力都不能超出现在可供使用的资源量，故有：

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24 \quad \text{劳动力} \quad (2-1-2)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad \text{原材料} \quad (2-1-3)$$

生产的安排，必须满足式（2-1-2）、式（2-1-3）的条件，这是带有约束性的，因此叫做约束条件。

为了便于建立数学模型，把实际问题简化列出一表。

单位产品的资源消耗		产 品		现有资源量
		甲	乙	
资 源	劳动力（个）	3	6	24 （个）
	原材料（斤）	2	1	10 （斤）
单位产品利润（元）		2	3	

数学模型：

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大} \quad \text{满足约束}$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{安排产品数不可能是负数})$$

这类型问题也称为资源最优利用问题，资源最优利用的一般数学模型如下：

假设某企业有 $m$ 种资源，已知每种资源的数量为 $b_i$ （ $i=1, 2, \dots, m$ ）。

该企业可以生产 $n$ 种产品，已知生产每一种产品所消耗的各种资源的数量，以 $a_{ij}$ 表示第 $j$ 种产品对第 $i$ 种资源的单耗量。

各种产品的单位利润也已知，用 $C_j$ 表示第 $j$ 种产品的单位利润值。

问题是如何在企业现有的资源条件下(劳动力、原材料、设备等),创造出最大的利润。这一类问题的数学模型为:

$$\begin{aligned} Z &= C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n && \text{达到最大} \\ \text{满足约束} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i && (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 && (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

也可以表示为:

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{j=1}^n C_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i && (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 && (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

## 二、合理配料问题的数学模型

某人健康的需要,每日需要服食A、B两种维生素,其中A维生素最少服9个单位,B维生素最少服19个单位,现有六种营养物每克含A、B维生素量如下表所列。

单位食物含量		食 物 种 类						最少需要量
		一	二	三	四	五	六	
维 生 素	A	1	0	2	2	1	2	9
	B	0	1	3	1	3	3	19
单位价格(角)		3.5	3.0	6.0	5.0	2.7	2.2	

求一使花费最小的食物选择方案。

设六种食物分别各服用 $x_1$ 克、 $x_2$ 克、 $x_3$ 克、 $x_4$ 克、 $x_5$ 克、 $x_6$ 克,总费用为Z,则可得数学模型:

$$\begin{aligned} Z &= 3.5x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 5.0x_4 + 2.7x_5 + 2.2x_6 \\ &\text{达到最小} \\ \text{满足约束} \quad x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 &\geq 9 && (\text{维生素A}) \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 &\geq 19 && (\text{维生素B}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

### 配料问题的一般数学模型:

假设已知各种单位营养物(食物)所含有的各种营养成分诸如蛋白质、淀粉、纤维素、维生素、钙质等等的数量。(或化工厂某混合物产品的原料成分)。

根据营养学的要求,为保证人的健康成长,在每日的服用方案中所包含的各种营养物成份的数量不能少于规定的数量(或化工厂生产混合物产品所规定的含量要求)。

各种营养物(食物)的单价(或化工厂原料单价)。

问题是如何制定一个满足最低营养要求,而总费用最少的配料方案。

以 $m$ 表示营养成分的种类,

以 $n$ 表示现有可选的食物种类,

以 $b_i$ 表示第 $i$ 种营养成分的最低需要量,

以 $C_j$ 表示第 $j$ 种食物的单价,

以 $a_{ij}$ 表示单位 $j$ 种食物含第 $i$ 种营养成分的数量,

以 $x_j$ 表示在配料方案中所含有 $j$ 种食物的数量。

目标是使总的费用最小

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \quad \text{达到最小}$$

约束条件是各种营养成分达到最低要求

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

选用的食物量不可能是一个负数

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

即:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0$$

### 三、开料问题的数学模型

合理开料问题是许多工业企业部门经常遇到的问题。在一般情况下材料不可能完全地被利用,会有一部分余料,这势必加大产品的单耗和成本。因此,如何最大限度地减少边角余料,提高材料利用率,从而降低产品成本,这是开料问题要研究的内容。

某车间有一批长为180厘米的坯料,现因产品需要,要将它截成三种不同长度的条料,三种条料规格分别为70厘米,52厘米,35厘米。生产任务规定,该三种条料需要量为:100条,150条,900条。问应如何开料,使总的耗坯料数量为最少?(也可以使边角余料最少)

为了完成规定的开料任务,最简单的办法就是单一开料法,就是在每一条坯料只开一种规格的条料。单一开料方法简单方便。但往往会产生比较大的边角余料,导致材料利用率不太高。为了减少边角余料,可采用套裁方法。

对于用同一坯料开出不同规格的条材,开料方式可以有多种的。为了使总的边角余料数最小,把各种不同的开料方法一一列出,然后再建立开料的数学模型。

假设切口宽度为零,或者切口宽度可以忽略不计,在这情况下,如果从一条坯材上开出若干个零件来,这些零件的总长度一定不超过坯材的长度。有了这个简单的判断准则,可以列出全部开料的方式来。

设在180厘米长的坯材上能开出规格为70厘米的 $u$ 条,规格为52厘米的 $v$ 条,规格为35厘米的 $w$ 条。

那么符合式子:



$$70u + 52v + 35w \leq 180$$

即坯料的总长度小于或等于原坯料的长度。

要把全部开料方式列出，使可以做到既不遗漏又不重复。从最大尺寸的规格开始，即先计算一下规格为70厘米的最多能开到多少条？

$$u = \frac{180}{70} \approx 2 \text{ 条}$$

可以开2条，1条，0条。

$$\text{当 } u=2 \text{ 时, } 180 - 2 \times 70 = 40$$

$$52v + 35w \leq 40$$

要满足  $52v + 35w \leq 40$ ，只有  $v=0$ ， $w=1$

于是得：规格为70厘米的	开2条	$u=2$
规格为52厘米的	开0条	$v=0$
规格为35厘米的	开1条	$w=1$

余料 = 5 厘米

$$\text{当 } u=1 \text{ 时, } 180 - 1 \times 70 = 110$$

$$52v + 35w \leq 110$$

若取  $v=2$ ，

$$110 - 52 \times 2 = 6$$

于是得：规格为70厘米的	开1条	$u=1$
规格为52厘米的	开2条	$v=2$
规格为35厘米的	开0条	$w=0$

余料 = 6 厘米

$$\text{当 } u=1 \text{ 时, } 180 - 1 \times 70 = 110$$

$$52v + 35w \leq 110$$

若取  $v=1$ ， $110 - 52 \times 1 = 58$

$$w=1 \quad 58 - 35 \times 1 = 23$$

于是得：规格为70厘米的	开1条	$u=1$
规格为52厘米的	开1条	$v=1$
规格为35厘米的	开1条	$w=1$

余料 = 23 厘米

$$\text{当 } u=1 \text{ 时, } 180 - 1 \times 70 = 110$$

$$52v + 35w \leq 110$$

若取  $v=0$ ， $w=3$ ， $110 - 35 \times 3 = 5$

于是得：规格为70厘米的	开1条	$u=1$
规格为52厘米的	开0条	$v=0$
规格为35厘米的	开3条	$w=3$

余料 = 5 厘米

...

依此类推，共有  $1 + 3 + 4 = 8$  种开料方式，现列出如下表：

各种规格 的条数		开料方式								需要量 (条)
		一	二	三	四	五	六	七	八	
规格	70厘米	2	1	1	1	0	0	0	0	100
	52厘米	0	2	1	0	3	2	1	0	150
	32厘米	1	0	1	3	0	2	3	5	100
余料(厘米)		5	6	23	5	24	6	23	5	

现在的问题是，在这八种下料方式中找出用料最省的开料方案，也就是说，在保证零件需要量的前提下，使总的边角余料最少。

从表中可看出一、四、八种方式开料其余料最小，但如果采用这三种方式开料，52厘米的零件是没有的，不能满足配套的需要，为此必须同时采用多种开料方式，才能满足配套的需要量，又使余料最少。

假设以第一种方式开料的坯材条数为 $x_1$ 条

以第二种方式开料的坯材条数为 $x_2$ 条

.....

以第八种方式开料的坯材条数为 $x_8$ 条

目标是使总的余料为最少

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8 \quad \text{达到最小}$$

满足约束

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 150$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geq 100$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, 8)$$

合理开料问题的一般数学模型：

设开料方式有 $n$ 种；

需开零件规格有 $m$ 种；第 $i$ 种规格零件需要量为 $b_i$ ；

每条原材料用第 $j$ 种方式开料，开出第 $i$ 种规格的零件数为 $a_{ij}$ ；

每条原材料用第 $j$ 种方式开料所剩的边角余料长度为 $C_j$ ；

则可得到如下数学模型

$$\min Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

从前面例举的数学模型可以看出，要使用线性规划这方法去解决实际问题，都需具备五个基本条件，就是：

1. 具有确定的线性目标函数；
2. 具有多个方案可供选择；
3. 线性目标函数和线性约束条件能用数学式子表达；
4. 变量间必须具有相互的联系；
5. 资源的供应量是有限的。

## § 2.2 图解法

线性规划问题求解的方法有多种，对于在数学模型中仅有两个变量的线性规划问题，用图解法去求它的解具有直观，易理解的优点，对于在数学模型中具有多于两个变量的线性规划求解，图解法那就不能胜任了。下面通过一个具体的例子对图解法加以说明。

例：某车间生产甲、乙两种产品，每件所消耗劳动力、原料及可供使用资源量列出如下表

单位产品消耗资源量	产 品		现有资源量
	甲	乙	
劳动力	3	6	24
原料	2	1	10
单位产品利润(元)	2	3	

问：如何安排生产，使总利润达到最大？

解：设安排生产甲产品 $x_1$ 件，乙产品 $x_2$ 件，总利润为 $Z$ ，有

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大} \quad (2-2-1)$$

$$\text{满足 } 3x_1 + 6x_2 \leq 24 \quad (2-2-2)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad (2-2-3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2-2-4)$$

求解步骤为，

第一步：

用图形来表示约束条件不等式。用 $x_1$ 轴表示产品甲的数量，用 $x_2$ 轴表示产品乙的数量，那么上述每一个不等式都可以在图上表示出来。

满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  所有点在第一象限及 $x_1$ 轴， $x_2$ 轴正向上。

对不等式(2-2-3)  $2x_1 + x_2 \leq 10$

取等号成为方程式  $2x_1 + x_2 = 10$

当 $x_1 = 0$ ， 有  $x_2 = 10$  得点(0, 10)

当 $x_2 = 0$ ， 有  $x_1 = 5$  得点(5, 0)

过点(0, 10)和点(5, 0)作直线，这样得到 $2x_1 + x_2 \leq 10$ 的解域，见图(2-1)阴影部分。在阴影部分，包括其三条围线，任何一点，都满足不等式(2-2-3)。

对不等式 (2-2-2)  $3x_1 + 6x_2 \leq 24$

取等号成为方程式  $3x_1 + 6x_2 = 24$

当  $x_1 = 0$ , 有  $x_2 = 4$  得点  $(0, 4)$

当  $x_2 = 0$ , 有  $x_1 = 8$  得点  $(8, 0)$

过点  $(0, 4)$  和点  $(8, 0)$  作直线, 得到  $3x_1 + 6x_2 \leq 24$  的解域, 见图 (2-2) 阴影部分。在阴影部分及三条围线上任何一点都满足不等式 (2-2-2)。

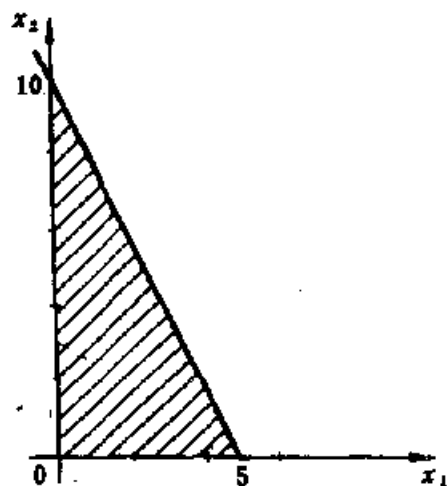


图 2-1

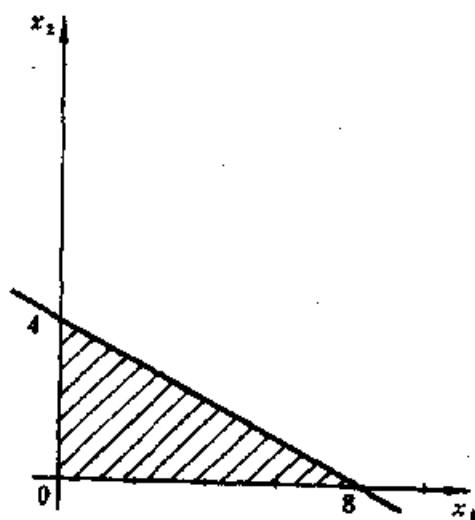


图 2-2

对不等式组的解域, 是两个解域的公共部分, 如图 (2-3) 所示的阴影部分, 则  $OABC$  凸多边形为满足约束方程的解域。

第二步:

现在来考虑目标函数, 式 (2-2-1)

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

画目标函数图。用给定的  $Z = 2x_1 + 3x_2$  画目标函数图。可以这样来作, 先令目标函数值为零, (当产品未销售出去时, 是没有利润的)

$$2x_1 + 3x_2 = 0 \quad \text{得点 } (0, 0)$$

$$\text{及 } x_2 = -\frac{2}{3}x_1$$

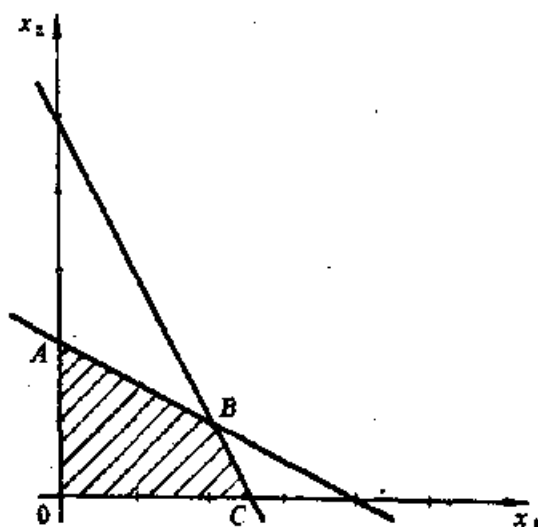


图 2-3

这时，目标函数图形是过坐标原点，斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的直线 $L$ ，见图(2-4)

因为目标函数 $Z$ 是求极大值，使利润达到最大，要求在解域 $OABC$ 上寻找一点 $(x_1^*, x_2^*)$ ，使得 $Z = 2x_1^* + 3x_2^*$ 取得最大值。

在解域 $OABC$ 里任一点 $(x_1, x_2)$ ，都有一确定的目标函数 $Z$ 与之相对应。例如在 $OABC$ 里取一点 $x_1 = 2, x_2 = 3$ ，这时 $Z = 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$ 。

若以 $h$ 表示在解域 $OABC$ 上取任一点时所对应的目标函数值，即 $2x_1 + 3x_2 = h$

现在目标是使 $h$ 达到最大值，当 $h$ 达到最大值时直线 $2x_1 + 3x_2 = h$ 应该在哪一个位置呢？首先，为了要满足约束条件，直线 $2x_1 + 3x_2 = h$ 一定在解域 $OABC$ 里。其次，以图形的原点

$(0, 0)$ 作为一个基点，考察直线 $2x_1 + 3x_2 = h$ 与 $(0, 0)$ 点距离。回顾一下，直线方程表达式为： $Ax + By + C = 0$ ，从直线外一已知点 $(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d$ 公式为：

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

现在从原点 $(0, 0)$ 到直线 $2x_1 + 3x_2 - h = 0$ 的距离 $d$ 为：

$$d = \frac{|2 \times 0 + 3 \times 0 - h|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|h|}{\sqrt{13}}$$

$$d = \frac{|h|}{\sqrt{13}}$$

可见 $d$ 与 $|h|$ 成正比关系， $\sqrt{13}$ 为一常数。

当 $h$ 增大时，则 $d$ 也增大，亦即， $d$ 越增大，则 $h$ 也越增大。因此要使 $h$ 达到最大值，应该使直线 $2x_1 + 3x_2 = h$ 与原点距离最远，但至少与解域 $OABC$ 有一个交点。

现在回到求 $Z = 2x_1 + 3x_2$ 达到最大问题来，刚才已作出直线 $L: 2x_1 + 3x_2 = 0$ ，为了求最大值，把直线 $L$ 沿着右上方作平行移动，经过解域 $OABC$ ，与解域 $OABC$ 最后交于 $B$ 点，则 $B$ 点为所求得的使目标函数达到最大的解。见图(2-5)读出 $B(4, 2)$ ，得 $x_1 = 4, x_2 = 2, Z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$

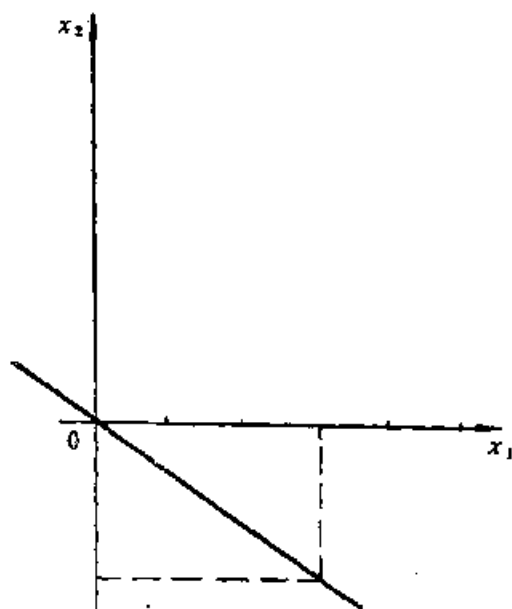


图2-4

对于遇到在图形中不易读出精确的解时，可通过解联立方程获得最优解。

通过图解法可以较好地理解两个概念：

1. 可行解——满足约束条件的解。

2. 最优解——满足目标函数的可行解。

用图解法求线性规划问题的解，当遇到解域是一个无界，目标函数线与可行解域没有最后相交点，这时，这个问题无最优解，

如：求  $x_1, x_2$  使

$$Z = x_1 + 2x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

见图 2-6

可行解域为空集，原问题约束方程存在矛盾方程组，这时线性规划问题无解。

又如：求  $x_1, x_2$  使

$$Z = x_1 + 2x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 36$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{见图 2-7}$$

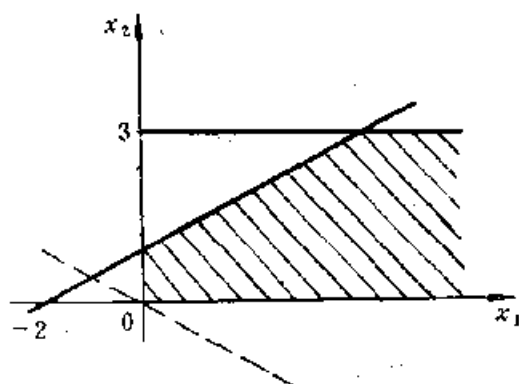


图 2-6

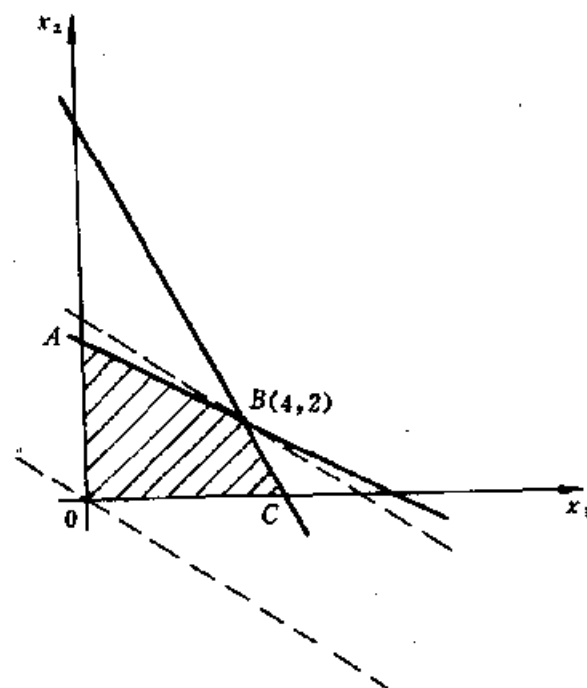


图 2-5

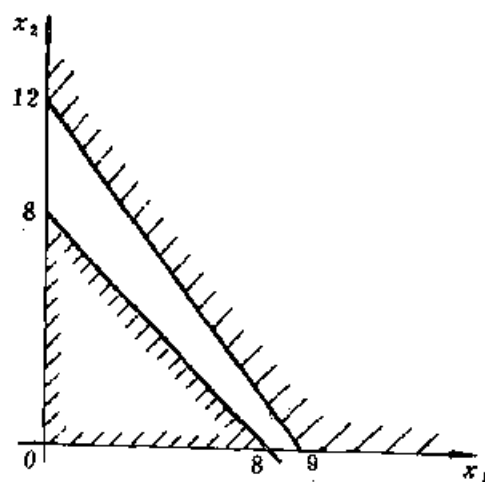


图 2-7

若目标函数线平行移动到最后与一约束线重合, 这时线上每一点都是最优解, 亦即有无限多组解, 如:

$$\begin{aligned} & \text{求 } x_1, x_2 && \text{使} \\ & Z = 2x_1 + 3x_2 && \text{达到最大} \\ \text{满足} & x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

见图 2-8

若目标函数为求极小值时, 作可行域方法与上述相同。作目标函数线也与上述作法相同, 不同的是目标函数线的移动, 用图解法求最小值, 将目标函数线向右上方平行移动, 与可行域刚相遇时交点为最优解。

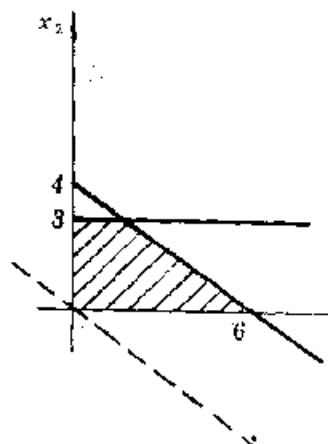


图 2-8

图解法小结

第一步: 建立数学模型。

第二步: 绘制约束条件不等式图, 作出可行解域。

第三步: 画目标函数图。令目标函数为零, 可得到斜率, 有了斜率就可以作一过原点的直线, 若给出问题是求最大值, 把目标函数线平行移动到与解域最后相交的点, 这点为问题的最优解; 若给出问题是求最小值, 把目标函数线平行移动与解域刚相交的点, 这点为问题的最优解。

第四步: 解联立方程组。由两根直线所确定的最后 (或最前) 交点, 为了获得精确的数值, 解由此两根直线相应方程所组成的方程组, 可以得到问题的精确最优解。

## § 2.3 标准格式的转换

为了方便线性规划问题求解, 有必要用一种统一的标准形式表示出来。

线性规划问题的标准形式是:

求  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \quad \text{达到最小 (或最大)}$$

$$\text{满足} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

在实际生产中, 一开始就以标准格式出现的情况是很少遇到的。因此常常需要把非标准

格式转变为标准格式，以方便使用单纯形法的运算。

线性规划问题的一般形式有，

求：  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足下列条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

使得  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  达到极大

或

求：  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足下列条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \geq b_n$$

$$x_j \geq 0$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

使得  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  达到最小

有时为了书写方便，线性规划问题的数学模型用矩阵、向量表示，下面予以介绍。

$$\text{求向量 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

使  $CX$  达到最大

$$\text{满足约束 } \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$   $n$  维行向量

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad m \text{ 维列向量}$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \text{ 行 } n \text{ 列矩阵}$$

从线性规划问题的标准形式可以看到，约束条件方程组是一组等式约束方程组。如果给出的线性规划问题是非标准形式，则需要把它化成标准形式，然后再用解线性规划问题的通用方法——单纯形法求解。

下面介绍转换方法。

第一种情况：约束条件里含有 $\leq$ 号的不等式组，要把问题化为标准形式，在每一个不等式的左端增添一个非负的松弛变量 $x_{n+i}$ ，从而将不等式变换为等式。

例： $3x_1 + 6x_2 \leq 24$  (劳动力约束)

为了使它转变为等式的标准格式，引入一个新的变量 $x_3$ ， $x_3$ 称为松弛变量，表示未被使用的那部分资源。如前面例所表示未被使用的劳动力，原材料等，而松弛变量的取值范围为 $[0 \sim b_i]$ ，于是不等式变为等式。

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 24$$

又有  $2x_1 + x_2 \leq 10$  (原材料约束)

引入表示未加使用的原材料量 $x_4$ ，使之变为标准形式。

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

未加使用的资源没有盈利的可能。因此在目标函数里，松弛变量的系数为零。即

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \quad \text{达到最大}$$

原来问题：求  $x_1, x_2$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大}$$

化为标准形式为：

求  $x_1, x_2$ ，满足

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 + 0x_4 = 24$$

$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \quad \text{达到最大}$$

一般表达式为：

求  $X$  满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0, x_{n+i} \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n), (i=1, 2, \dots, m)$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j + 0 x_{n+i} \quad \text{达到最大}$$

第二种情况：约束条件是含有 $\geq$ 号的不等式组，要把问题化为标准形式，在每一个不等式的左端减去一个非负的剩余变量 $x_{n+i}$ ，从而将不等式变换为等式。

例：求  $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{aligned} 7x_2 + 3x_3 &\geq 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\geq 1 \\ 10x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geq 1 \\ 3x_1 + 2x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

引进非负的剩余变量 $x_4, x_5, x_6, x_7$ 把原问题化为标准形式。

$$\begin{aligned} 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 0x_4 - x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 1 \\ 10x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - x_6 + 0x_7 &= 1 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - x_7 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

一般表达式为：

求  $X$  满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_j \geq 0, x_{n+i} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m), (j=1, 2, \dots, n)$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j + 0 x_{n+i} \quad \text{达到最小}$$

第三种情况：若给出的目标函数 $(+CX)$ 是求最大值的，可以化为 $(-CX)$ 求 $(-CX)$ 的极小值。

例： $Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$  达到最大

转化为： $Z' = -(2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4)$  达到最小

第四种情况：在约束条件中，一些变量 $x_k$ 没有非负的要求，即不满足 $x_k \geq 0$ 这一约束条件。则必须变换，将其化为 $x_k \geq 0$ 以满足标准形式 $x_k \geq 0$ 要求。可取两非负变量 $u_k \geq 0, v_k \geq 0$ ，令 $x_k = v_k - u_k$ 。把这式代回到原问题中去。

例：原问题，求 $x_1, x_2, x_3$  满足

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 &\geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \text{达到最小}$$

把问题作标准形式的变换。

令:  $x_1 = v_1 - u_1$ ,  $v_1 \geq 0$ ,  $u_1 \geq 0$  代入

$$(v_1 - u_1) + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$2(v_1 - u_1) + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$v_1, u_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$f(x) = v_1 - u_1 + 3x_2 + 4x_3 \text{ 达到最小}$$

## § 2.4 单纯形法

### 一、单纯形法的原理

线性规划问题的求解,就是要找出一线性方程组的解,使给定的线性目标函数为极大或极小。线性方程组的解,可以用高斯——约当消去法求解。下面用一个例子简短地复习一下这个方法。

$$(S_1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2 & (2-4-1) \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 4 & (2-4-2) \end{cases}$$

上式具有五个未知数,两个方程的联立方程组,未知数的个数大于方程个数,所以方程组的解多于1个。正是由于有多个解,才使得有最优解的选择,线性规划问题的求解才具有意义。方程组所有解的总体称为解集合。

与方程的同解性质相类似,定义两个方程组,如果两个方程组具有相同的解集合,则称这两个方程组为等价的。也就是说,如果一个方程组的解是另一组的解,反之亦然,则此两方程组称为等价。

对方程组求解的方法是要获得一个易于求解的等价方程组。解出这个简单方程组,就同时得到了原方程的解。

有两种类型的初等行变换,可用以求得等价方程组。

1. 方程组中的任一方程乘上一个不为零的数。

2. 方程组中的任一方程两边同乘一个常数,分别加到另一方程的两边。

例如将式(2-4-1)乘以-1,加到式(2-4-2)可求得方程组 $S_1$ 的一个等价方程组( $S_2$ )

$$(S_2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2 & (2-4-3) \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 & (2-4-4) \end{cases}$$

把式(2-4-4)乘以2,加到式(2-4-3),可求得方程组 $S_2$ 的一个等价方程组( $S_3$ )

$$(S_3) \begin{cases} x_1 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 6 & (2-4-5) \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 & (2-4-6) \end{cases}$$

由于方程组 $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ 是等价的,因此方程组 $S_3$ 与 $S_2$ ,  $S_1$ 的解是相同的,而 $S_3$ 的解是很容易地得到,可令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ 可得

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 2$$

即 $S_3$ 的一组解为:

$$x_1=6, x_2=2, x_3=0, x_4=0, x_5=0$$

如果任意选择 $x_3, x_4, x_5$ 的值, 并从式(2-4-5), (2-4-6)得到 $x_1$ 和 $x_2$ 的相应值, 也可得到方程组 $S_3$ 的另一组解。选择 $x_3, x_4, x_5$ 不同的值, 相应地有不同的 $x_1, x_2$ 的值, 因此方程组有多组解, 这些解全都是原方程组的解。其中变量 $x_1, x_2$ 称为方程组 $S_3$ 的基本变量。

**基本变量**——如果变量 $x_i$ 的系数在某一方程为1, 而在其他所有方程为零, 则称 $x_i$ 为该方程组中的基本变量。

凡不是基本变量的变量都叫做非基本变量。如前例中的 $x_3, x_4, x_5$ 为非基本变量。

**旋转运算**——运用初等行变换, 可使一给定变量化为基本变量, 这一运算, 叫做旋转运算。

如方程组 $S_1$ 中,  $x_1, x_2$ 都不是基本变量, 经过行的变换, 使方程组 $S_1$ 转化为它的等价方程组 $S_3$ , 在 $S_3$ 里,  $x_1, x_2$ 为基本变量。从方程组 $S_1$ 的转换为 $S_3$ 中可以看到: 在一方程组里, 基本变量的个数, 是与方程的个数相同的。

**基本解**——设非基本变量为零, 求得相应的基本变量的值, 得一组解, 这组解称为基本解。

**基本可行解**——基变量的值为非负时的基本解称为基本可行解。

单纯形法求线性规划问题的解的思路: 先不考虑目标函数, 从满足约束条件开始, 寻得一初始基本可行解; 然后求具有较佳目标函数值的另一个基本可行解, 以改进初始解; 对目标函数作有限次的改善。当某一个基本可行解不能再得到改善时, 即求得线性规划问题的最优解, 单纯形法至此结束。

## 二、单纯形算法

例:  $\max Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \quad (2-4-7)$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 7 \quad (2-4-8)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$$

在以上线性规划问题中, 具有:

- (1) 全部变量为非负;
- (2) 全部约束条件都是等式;
- (3) 右端常数都是正的。

因而本问题是一线性规划问题的标准形式。再者, 变量 $x_4$ 仅在式(2-4-7)中出现, 其系数为1, 变量 $x_5$ 仅在式(2-4-8)中出现, 其系数为1, 可见, 变量 $x_4, x_5$ 为基本变量, 相应的基本解即可求得。

$$x_1=x_2=x_3=0, x_4=8, x_5=7。$$

由于全部变量都具非负值, 所以这个解又是基本可行解, 其相应目标函数值为:

$$Z = 5(0) + 2(0) + 3(0) - 1(8) + 1(7) = -1$$

注意: 若问题的给出形式不具备标准形式, 就得先化为标准形式, 较后才采用单纯形法

计算。

基本可行解的改进

已知初始基本可行解为：

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 7, \text{ 这时, } Z = -1.$$

为了使目标函数有较大的改进, 使一个基本变量变成非基本变量, 而令另一非基本变量取而代之成为基本变量。

在任一基本可行解中, 基本变量能取正值, 而非基本变量取值则始终为零。对基本可行解的改进, 就是使一非基本变量成为基本变量, 也就是说, 将某一非基本变量的值从零增加为一正数值。选哪一个非基本变量为基变量呢? 毫无疑问, 当然选择一个能够改进 $Z$ 值的非基本变量为基本变量。

再用以上的例子加以说明。现在考察非基本变量 $x_1$ , 假设将 $x_1$ 的值从零增大为1, 并研究因此而对目标函数产生的影响。而其余两个非基本变量 $x_2, x_3$ 不作考虑, 即 $x_2, x_3$ 的值仍为0, 式(2-4-7), 式(2-4-8)可写为:

$$x_1 + x_4 = 8 \quad (2-4-9)$$

$$3x_1 + x_5 = 7 \quad (2-4-10)$$

当 $x_1$ 从0增大到1时,  $x_4$ 的值由8减少至7; 见式(2-4-9), 仿此, 对于式(2-4-10), 当 $x_1$ 从0增大至1时,  $x_5$ 的值由7减少至4。新可行解为:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 7, x_5 = 4$$

目标函数的新值为:

$$Z = 5(1) + 2(0) + 3(0) - 1(7) + 1(4) = 2$$

所以,  $x_1$ 每增加一个单位,  $Z$ 值的净变化 $\Delta Z$ 为:

$$\begin{aligned} \Delta Z &= Z_{\text{新值}} - Z_{\text{旧值}} \\ &= 2 - (-1) = 3 \end{aligned}$$

这个值叫做非基本变量 $x_1$ 的相对利润值, 与 $x_1$ 在目标函数中5单位的实际利润是不一样的。

由于 $x_1$ 的相对利润是正的, 可以继续增大 $x_1$ 的值, 使目标函数增大。可见, 初始的基本可行解往往并不是最优解。相对利润系数的意思是: 非基本变量 $x_1$ 每增加1个单位,  $Z$ 将增加3个单位。我们自然想尽可能增大 $x_1$ , 使目标函数得到最大的增加。但要注意,  $x_1$ 的增大不能无限制地增大, 要考虑约束条件是否得到满足。如本例, 当 $x_1$ 增大时, 基本变量 $x_4$ 和 $x_5$ 两者都减少, 而它们的值必须保持非负, 才能满足约束条件。从式(2-4-9)可以看到, 如果 $x_1$ 增大到超过8, 那么 $x_4$ 将变为负值, 这就意味着约束条件得不到满足, 在单纯形法中是不允许的。仿此, 从式(2-4-10), 如果 $x_1$ 增大超过 $7/3$ ,  $x_5$ 就变成负值。所以,  $x_1$ 的最大增大值由约束条件右端常数限额中的最小者所决定。

$$x_1 \text{ 的最大增加值} = \min\left(\frac{8}{1}, \frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

$x_1$ 增大1个单位使 $Z$ 增加3个单位。由于 $x_1$ 最大能增至 $\frac{7}{3}$ , 目标函数的净增加 $= 3\left(\frac{7}{3}\right) = 7$ 。而且, 当 $x_1$ 增至 $7/3$ 时, 基本变量 $x_5$ 变为零而成为非基本变量, 相应地, 非基本变量 $x_1$ 变为基变量。这样得一新的基本可行解, 新的基本可行解为:

$$x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{17}{3}, x_5 = 0, Z = 6.$$

这个改进后的基本可行解相应的新标准方程组，是由对变量 $x_1$ 实施旋转运算而取得的。  
小结一下，旋转运算的步骤是：

1. 将式(2-4-8)除以3，使 $x_1$ 的系数化为1。
2. 将式(2-4-8)乘 $(-\frac{1}{3})$ ，再添加到式(2-4-7)，以消去 $x_1$ 。

得到的新的标准方程组为：

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + x_4 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{17}{3}$$

$$x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{7}{3}$$

对所有的非基本变量，计算其相对利润，如果算出相对利润中有一个正值，说明目标函数有增大的可能，那末与前面一样，施行旋转变换，可以得到一个新的基本可行解，其 $Z$ 值有所改进。重复进行这个过程，直到所有的非基本变量的相对利润为负或零为止。这就是说，最后得到的基本可行解已不能再进一步加以改善，因而成为线性规划问题的一个最优解。

最优化的条件（对于求最大值）

在极大化问题中，如果非基本变量的相对利润全部为负或零，则与之相应的基本可行解为最优。

单纯形法的小结：

第一步：从标准形式求出初始基本可行解。

第二步：检验目前的基本可行解是否最优。计算这个解中的所有非基本变量的相对利润值。这些数值指出每一非基本变量增加一个单位时，对目标函数值引起的净改变。若这些系数是负数或零，目前的解就是最优的。否则，进入第三步。

第三步：选取一非基本变量，作为解中的新基本变量。一般的规则是，选取具有最大相对利润的非基本变量，这样就能使 $Z$ 值有较大的增加。

第四步：确定被取代的基本变量。并从约束条件算出新基本变量的增加值。第三步选出新的基本变量，它在约束条件中所有正系数与所在的约束条件右端常数相除，即右端常数除以该方程中新基本变量正系数，对于每一个具有新基本变量正系数的方程，都有一个比值（商数），在所有比值中选取最小的数，在最小比值所在的约束方程中，原来基本变量（旧基本变量），被新基本变量所取代，旧基本变量的值由一个正数减到为零，成为非基本变量；新基本变量的值由零增加到约束条件所允许的增加值，由非基变量成为基本变量，完成了基本变量的取代过程，而最小的比值就是新基本变量的增加值。因为基本变量的取代由最小比值所决定的，因而这一规则一般称为极小比值规则。

第五步：用旋转运算求出新的标准形式方程组，并求出一组基本可行解，再回到第二步。

### 三、单纯形表

在上节，通过一个较简单的例子说明求解线性规划问题的单纯形法的基本思路，步骤。单纯形法的各道步骤，可以用表格形式，把约束条件，目标函数表示出来，并且能较紧凑地、方便地进行运算。此外，再导出一些简单的公式，使得各项计算变得规格化。表格形式的应用使单纯形法更有效和便于电算，使线性规划问题得到更广泛的应用。

表格表示法就是把问题写成系数矩阵的形式，然后进行旋转运算，从而找出问题的最优解。下面举例说明。

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{约束条件: } x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

用矩阵形式表示为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{约束条件系数}$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{约束条件常数}$$

$$C_j = (5 \quad 2 \quad 3 \quad -1 \quad 1) \quad \text{目标函数系数}$$

$$C_B = (-1, 1) \quad \text{基本变量目标函数系数}$$

列出表格，把上述系数矩阵放进表格里

一般单纯形表格形式

其中：

$C_j$ ——目标函数系数；

$x$ ——所有变量；

$b$ ——约束方程右端常数；

$A$ ——约束方程变量系数；

$x_B$ ——基本变量；

$C_B$ ——基本变量目标函数系数。

		$C_j$				
		$x$				
$C_B$	$x_B$	$A$				$b$

表 2-4-1

	$C_j$	5	2	3	-1	1	常 数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
-1	$x_4$	1	2	2	1	0	8
1	$x_5$	3	4	1	0	1	7

表中“基”指目前的基本可行解中的基本变量。基本变量的值在“常数”栏中读出，即  $x_4 = 8$ ,  $x_5 = 7$ ；而非基本变量  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ，目标函数值由  $C_B$  和常数项两个向量的内积求得，即：

$$Z = C_B b = (-1, 1) \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = -8 + 7 = -1$$

为了检验上述基本可行解是否达到最优，必须算出所有非基本变量的相对利润。它的计算是通过矩阵运算来完成的。如变量  $x_i$  的相对利润系数用  $\bar{C}_i$  表示，则：

$$\bar{C}_i = C_i - C_B P_i \quad P_i \text{ 为对应 } x_i \text{ 的列向量}$$

例：

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= C_1 - (C_4, C_5) P_1 \\ &= 5 - (-1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= 5 - (-1 + 3) = 3$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - (C_4, C_5) P_2$$

$$= 2 - (-1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2 - (-2 + 4) = 0$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - (C_4, C_5) P_3$$

$$= 3 - (-1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - (-2 + 1) = 4$$

如果对  $x_4$  和  $x_5$  的相对利润值也进行上面那样的计算，它们的  $\bar{C}_i$  值将是零，因为它们是基本变量。前面提及过，相对利润能表明对目标函数增加的情况， $\bar{C}_1 = 3$ ,  $\bar{C}_2 = 0$ ,  $\bar{C}_3 = 4$ ，在当前可行解 ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ,  $x_4 = 8$ ,  $x_5 = 7$ ) 情况下， $x_1$  每增加 1 个单位，能使目标函数增加 3 个单位； $x_2$  的相对利润为零， $x_2$  无论增加多少都不能使总利润  $Z$  有任何增加； $x_3$  每增加 1 个单位使总利润  $Z$  增加 4 个单位。显然， $x_3$  与  $x_2$ 、 $x_1$  相比， $x_3$  能为  $Z$  值提供较大的单位增益。这就说明了仅仅用目标函数系数  $C_i$  来量度非基本变量的价值是不准确的。相对利润系数  $\bar{C}_i$  反映了  $Z$  从现行值真正能有多大的变化，这是因为考虑了有关活动的资源成本。

一般地，把相对利润系数  $\bar{C}_i$  称为检验数，并把它列在单纯形表里，见表(2-4-2)，这样，构成了初始单纯形表。

表 2-4-2 初始单纯形

$C_j$		5	2	3	-1	1	常 数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
-1	$x_4$	1	2	2	1	0	8
1	$x_5$	3	4	1	0	1	7
$\bar{C}$ 行		3	0	4	0	0	$Z = -1$

$x_3$  的上限  
 $\leftarrow 8/2 = 4$  (极小)  
 $7/1 = 7$



在初始单纯形表中(2-4-2)  $\bar{C}$  行中有若干正数, 表明目前的可行解并非最优解。非基本变量  $x_3$  能使  $Z$  有最大的单位增益, 因此选为新的基本变量, 即新基变量为  $x_3$  及旧基变量中其中的一个组成新的一组基本变量。而  $x_3$  所在列称为主元列。

$x_3$  将取代哪一个旧基本变量呢? 用极小比值法则, 计算每一约束条件的限度, 见表 2-4-2 右侧。

在第一行中得到极小值  $8/2=4$ , 这行称为主元行(见小箭头), 当旧非基本变量  $x_3$  增加至极大值 4 单位时, 主元行中的旧基本变量  $x_4$  即减少为零, 并变为新非基本变量。而新的基本变量为第一方程的  $x_3$ , 第二方程的  $x_5$ , 置于表中基列。经过旋转运算, 得到一个新的标准方程组, 过程是:

1. 主元行除以 2, 使  $x_3$  的系数为 1;
2. 主元行乘以  $-1/2$ , 再添加到第 2 行, 以消去方程组中除主元行外的所有  $x_3$ 。

表 2-4-3

$C_j$		5	2	3	-1	1	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
3	$x_3$	1/2	1	1	1/2	0	4
1	$x_5$	5/2	3	0	-1/2	1	3
$\bar{C}$ 行		1	-4	0	-2	0	$Z=15$

$$\frac{4}{1/2} = 8$$
  

$$\frac{3}{5/2} = \frac{6}{5}$$

从表 2-4-3 中可以得到一组可行解。

$x_1=x_2=0$ ,  $x_3=4$ ,  $x_5=3$ ,  $x_4=0$ ,  $Z=15$ 。为了检验本解是否已达到最优, 须算出新的相对利润系数。可以如上述用矩阵相乘的方法计算出来, 也可以通过行变换把  $\bar{C}$  行的系数算出来。因为  $x_3$  是新的基本变量,  $x_3$  在表 2-4-3 中的相对利润系数应该为零。要做到这一点, 可以把表 2-4-2 中的主元行乘以  $(-2)$  加到旧  $\bar{C}$  行中去, 从而得到新  $\bar{C}$  行各数, 见表 2-4-3 中  $\bar{C}$  行。

在表 2-4-3 中,  $\bar{C}_1$  为正数, 表明到目前仍未取得最优解。需要进行旋转运算。由于在表 2-4-3  $\bar{C}$  行中, 相对利润最大值为  $x_1$ , 选  $x_1$  为新基变量, 新基变量所在的列, 定为主元列。接着考虑哪一旧基变量调出“基”列, 通过最小比值法则:

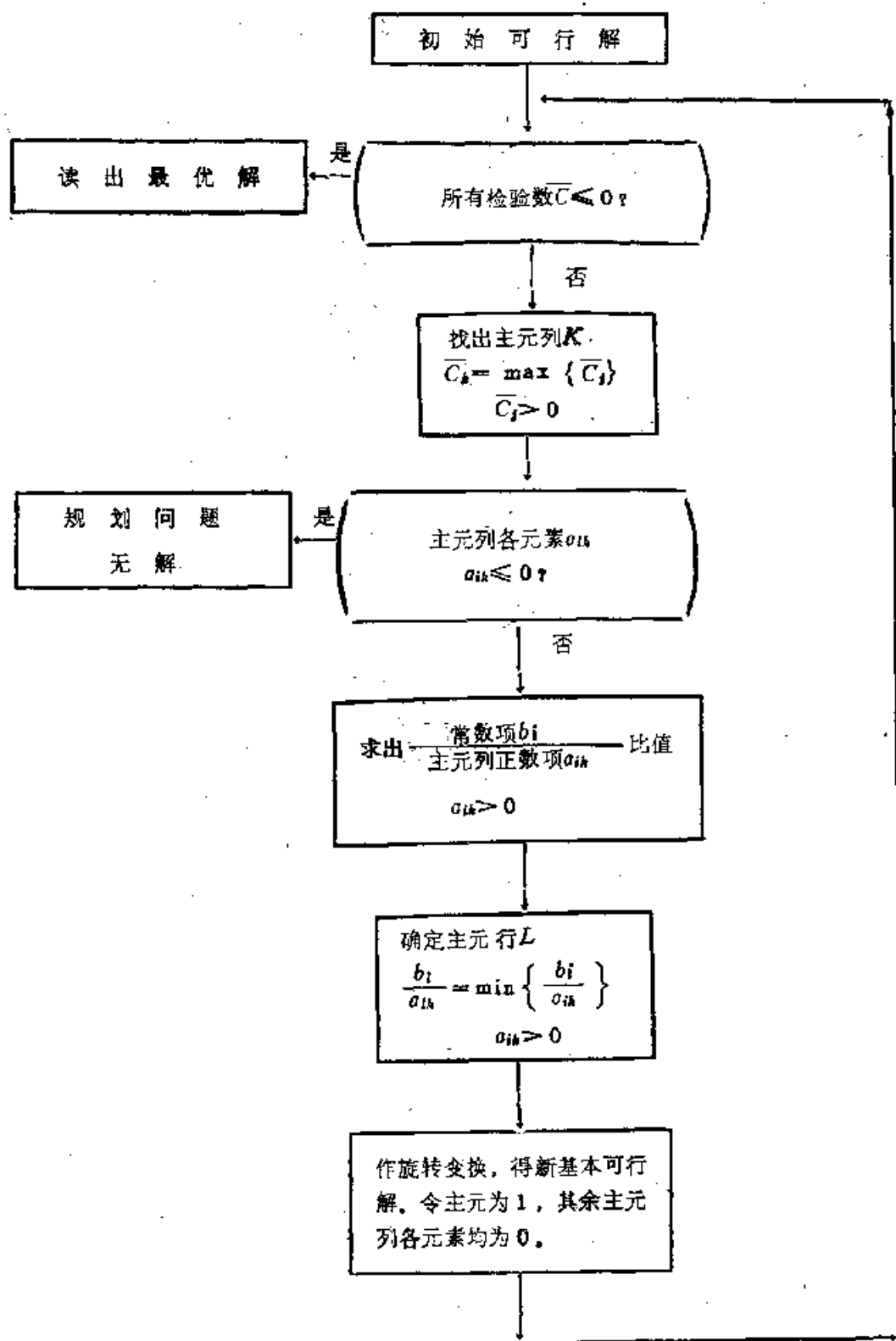
$$\min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{3}{5/2} \right\} = \frac{6}{5}$$

找出主元行, 该行旧基变量  $x_5$  调出基列, 以新基变量  $x_1$  取而代之, 完成了新旧基变量的取代过程。

然后, 通过旋转运算, 得到新的基本可行解, 见表 2-4-4。

表 2-4-4  $\bar{C}$  行的全部系数都是非正的。这意味着, 目标函数不可能进一步加以改善。因此, 目前的基本可行解  $x_1=6/5$ ,  $x_2=0$ ,  $x_3=17/5$ ,  $x_4=0$ ,  $x_5=0$  是线性规划的最优解, 而  $Z=81/5$  是它的最大值。

求解最大值的线性规划问题的框图



上面以框图形式，小结单纯形法求解的流程。

表 2-4-4

$C_j$		5	2	3	-1	1	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
3	$x_3$	0	$2/5$	1	$3/5$	$-1/5$	$17/5$
5	$x_1$	1	$6/5$	0	$-1/5$	$2/5$	$6/5$
$\bar{C}$ 行		0	$-26/5$	0	$-9/5$	$-2/5$	$Z=81/5$

注意：当检验数 $\bar{C}_k > 0$ ，而 $a_{ik} \leq 0$ 时，问题无解，下面稍加说明。

对于任一标准规划问题有形式：

$$\text{求 } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j + \sum_{i=1}^m C_{n+i} x_{n+i} \quad \text{达到最大}$$

$$\begin{aligned} \text{满足} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n+m) \\ & x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

设一新的可行解为：

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$$

$$\begin{aligned} \text{其中令} \quad & x_k = \theta > 0 \\ & x_j = 0 \quad (i=1, \dots, n, j \neq k) \end{aligned}$$

$$\text{则有:} \quad x_{n+i} = b_i - a_{ik} \theta \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\text{因为} \quad b_i \geq 0, \theta > 0, a_{ik} < 0$$

$$\text{所以} \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^n C_j x_j + \sum_{i=1}^m C_{n+i} x_{n+i} \\ &= \bar{C}_k \theta + Z_0 \end{aligned}$$

当 $\theta \rightarrow \infty$ ， $\bar{C}_k > 0$ ，有 $Z \rightarrow \infty$

即目标函数 $Z$ 在可行解集合中无上界，因此线性规划问题无解。

例：用单纯形法解下题：

求  $X$  使

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{达到最大}$$

满足:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

解: 加入松弛变量, 化为标准形式。

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad \text{达到极大}$$

满足:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 3$$

$$x_j \geq 0, (j=1, 2, 3, 4, 5)$$

以 $x_3, x_4, x_5$ 为基本变量, 得到标准形式的基本可行解。初始可行解如表2-4-5所列

表 2-4-5

$C_j$		3	2	0	0	0	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	-1	2	1	0	0	4
0	$x_4$	3	2	0	1	0	14
0	$x_5$	1*	-1	0	0	1	3
$\bar{C}$ 行		3↑	2	0	0	0	$Z=0$

—  
14/3  
3/1 (极少)

非基本变量 $x_1$ 在 $\bar{C}_1$ 行中有最大的相对利润。选为主元列, 即:

$$\max \{ 3, 2 \} = 3, x_1 \text{ 进入基中。}$$

主元列上各元素 $a_{ij}$ 不满足 $a_{ij} \leq 0$ , 因此此规划问题有解。找主元行, 主元行按最小比值法则给出, 比值为 $(-, 14/3, 3/1)$ , 即

$$\min \{ -, 14/3, 3/1 \} = 3, x_5 \text{ 调出基。}$$

以 $x_1$ 取代了基列中的 $x_5$ , 施行旋转运算, 把主元列其余各元素化为0, 得一新可行解,  $x_3=7, x_4=5, x_1=3, x_2=0, x_5=0, Z=9$ , 见表2-4-6示。

表 2-4-6

$C_j$		3	2	0	0	0	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	0	1	1	0	1	7
0	$x_4$	0	5*	0	1	-3	5
3	$x_1$	1	-1	0	0	1	3
$\bar{C}$ 行		0	5↑	0	0	-3	$Z=9$

7/1=7  
5/5=1  
—

在表 2-4-6  $\bar{C}$  行中还有一个正数，表明非基本变量  $x_2$  能进一步改善目标函数。选出主元列，

$$\max \{ 5 \} = 5, \quad x_2 \text{ 进入基中。}$$

主元列上各元素  $a_{i2}$  不满足  $a_{i2} \leq 0$ ，因此可找主元行，

$$\min \{ 7/1, 5/5, - \} = 1, \quad x_1 \text{ 调出基}$$

以  $x_2$  取代基中  $x_1$ ，施行旋转运算，得一新可行解，见表 2-4-7。

表 2-4-7

$C_j$		3	2	0	0	0	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	0	0	1	-1/5	8/5	6
2	$x_2$	0	1	0	1/5	-3/5	1
3	$x_1$	1	0	0	1/5	2/5	4
$\bar{C}$ 行		0	0	0	-1	0	$Z=14$

在表 2-4-7 中， $\bar{C}$  行没有正数，满足

$$\bar{C} \leq 0$$

表明已获得最优解，最优解为

$$x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = 0, x_5 = 0, \text{ 而目标函数 } Z = 14 \text{ 达到最大。}$$

#### 极小化问题

前面已介绍了极大化问题解法，对于极小化问题，即目标函数要求达到最小的问题，现在来考察它的处理方法。上面介绍了检验数—— $\bar{C}$  行中的各数， $\bar{C}$  行中的正系数表示非基本变量每增加一单位时， $Z$  值的净变化量。 $\bar{C}$  行中负数自然是表示相应的非基本变量增加时，将使目标函数的值减少。因此在极小化问题中，为了使目标函数有改善，仅当具有负  $\bar{C}_j$  值的非基本变量才具有进入基中的资格。当  $\bar{C}$  行中的系数全部是非负时，表明获得最优解。因此，对极小化问题，当检验数

$$\bar{C} \geq 0 \quad \text{达到时为最优}$$

注意：在单纯形计算过程中，会遇到下面两种情况：

1. 在极大化（或极小化）问题中，选作主元列的可能有多个。即在  $\bar{C}$  行中有一个以上的变量相对利润系数的数值相同，这时候选取非基本变量有多种可能，一般，可任选取其中的某一个作为调入的变量。

$$\text{如 } \max \{ \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3 \}, \text{ 其中 } \bar{C}_1 = \bar{C}_2$$

$$\text{可取 } \max \{ \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3 \} = \bar{C}_1 \quad x_1 \text{ 入基,}$$

$$\text{或 } \max \{ \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3 \} = \bar{C}_2 \quad x_2 \text{ 入基.}$$

2. 选作主元行的可能有多。在最小比值法则中, 比值极小的多于一个, 这时也可以任选取其中的一个基本变量作为调出基变量。

$$\text{如 } \min_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{b_1}{a_{1k}}, \frac{b_2}{a_{2k}}, \frac{b_3}{a_{3k}}, \frac{b_4}{a_{4k}} \right\}$$

$$\text{其中 } \frac{b_2}{a_{2k}} = \frac{b_3}{a_{3k}}$$

$$\text{可取 } \min \left\{ \frac{b_1}{a_{1k}}, \frac{b_2}{a_{2k}}, \frac{b_3}{a_{3k}}, \frac{b_4}{a_{4k}} \right\} = \frac{b_2}{a_{2k}} \text{ 选取位于基列第二行的变量调出基}$$

$$\text{或 } \min \left\{ \frac{b_1}{a_{1k}}, \frac{b_2}{a_{2k}}, \frac{b_3}{a_{3k}}, \frac{b_4}{a_{4k}} \right\} = \frac{b_3}{a_{3k}}$$

选取位于基列第三行的变量调出基

但可能有一个基本变量 $x_k$  (或 $x_l$ ) 取零值。一个或多个基本变量为零的基本可行解, 称为退化基本可行解。反之, 若基本变量完全为正的基本可行解, 称为非退化基本可行解。

#### 四、求初始基本可行解

单纯形法有一个重要的要求, 就是要求有一个初始基本可行解。否则, 就不能构成初始的单纯形表。前面所讨论的例题中, 都是很容易地就得到了具有基本可行解的方程组, 但在许多实际问题里, 基本可行解并不是那样轻易地获得的, 为此有必要对求初始可行基作进一步的讨论。

通常把线性规划问题转化为标准形式: 使所有的变量转为非负; 使约束条件成为等式; 并使全部的右端常数为非负。这时需要考察一下, 对于每个约束等式, 是否都存在着一个基本变量, 如果都备有基本变量, 可以得到一个初始的基本可行解。如果每一个等式不是都具有基本变量, 就加入一个新的变量, 作为约束等式中的基本变量, 从而使所有约束等式都有基本变量, 藉此构成初始的单纯形表。这些外加变量称为人工变量, 这样就可以保障有初始可行解。

例: 求 $X$  使

$$Z = -3x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{达到最小}$$

$$\begin{aligned} \text{满足: } & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_3 = -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解: 化为标准形式

$$Z = -3x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{达到最小}$$

$$\begin{aligned} \text{满足: } & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 & (2-4-1) \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 & (2-4-2) \\ & -2x_1 + x_3 = 1 & (2-4-3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

在2-4-1中, 松弛变量 $x_4$ 为基本变量, 但在其它等式中没有基本变量, 因此分别在式2-4-2和式2-4-3中引入人工变量 $x_6$ 和 $x_7$ 。为保持原问题标准形式,  $x_6$ 和 $x_7$ 全部限制

为非负的，因此可得一“人工方程组”，如下：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 &= 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, 7) \end{aligned}$$

人工方程组标准形式的基本可行解，就是

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0, \quad x_4 = 11, \quad x_6 = 3, \quad x_7 = 1。$$

由于人工变量 $x_4, x_6, x_7$ 的值为正值，不是零值，上面这个解并不是原问题的可行解。只有当 $x_4 = x_6 = x_7 = 0$ 时，它的相应解才是原问题的可行解。因此，需要把人工变量的值减少到零值。要达到使人工变量的值为零值的目的，可通过两条途径：一为大 $M$ 法，另一为二阶段法，下面分别予以介绍。

#### 1. 大 $M$ 单纯形法

对于极小化问题来说，把目标函数中的人工变量系数给以一个很大的值，可以理解为目标函数是使产品总成本最小，人工变量系数很大，就是说人工变量相应的成本很大，从而在单纯形法运算过程中，位于基列中的人工变量，迅速地被具有较小成本的非人工变量所取代，而成为非基本变量，这样，它的值也就为零了。对手算来说，一个极小化问题的目标函数中人工变量系数，给予一个很大的正数值，这个很大的正数值定义为 $M$ ，在求目标函数是使总成本达到最小问题中， $M$ 可以理解为一个很大的成本。在求目标函数是使总利润达到最大问题中， $-M$ 可以理解为一个很大的负的利润。

下面通过例子说明，如何利用大 $M$ 法去求得一个含有人工变量方程组的一组原问题的基本可行解，以及原问题的最优解。

例：求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使

$$Z = -3x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{达到最小}$$

满足：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ 2x_1 - x_3 &= -1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解：化为标准形式

$$Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + Mx_4 + Mx_7 \quad \text{达到最小}$$

$M$ 为一很大正数。

满足

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 &= 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, 7) \end{aligned}$$

考察标准方程组，可以确定在初始单纯形表中，基本变量应为 $x_4, x_6, x_7$ ，据此，建立初始单纯形表，见表2-4-8。

表 2-4-8

$C_j$		-3	1	1	0	0	$M$	$M$	常数	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$		
0	$x_4$	1	-2	1	1	0	0	0	11	11/1
$M$	$x_6$	-4	1	2	0	-1	1	0	3	3/2
$M$	$x_7$	-2	0	1	0	0	0	1	1	1/1
$\bar{C}$ 行		$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	$M$	0	0	$Z=4M$	

$\bar{C}$ 行的系数由矩阵相乘而得到, 根据式:

$$\bar{C}_j = C_j - (C_B P_j), P_j \text{ 为对应于 } x_j \text{ 的列向量。}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &= -3 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= -3 + 6M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_2 &= 1 - (0, M, M) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 - M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_3 &= 1 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 - 3M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_4 &= 0 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_5 &= 0 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_6 &= M - (0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_7 &= M - (0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$



$$Z = (0, M, M) \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = 4M$$

本例为求最小值，因此选主元列应按：

$$\max \{ |\bar{C}_j| \}, \bar{C}_j < 0 \text{ 式选取，即}$$

$$\max \{ |1-M|, |1-3M| \} = |1-3M|, \quad x_3 \text{ 入基}$$

非基本变量  $x_3$  进入基后能进一步减少  $Z$ 。

主元行为  $x_7$  所在行。

$$\min \{ 11/1, 3/2, 1/1 \} = 1, \quad x_7 \text{ 调出基}$$

通过叠代，可得一新单纯形表，见表2-4-9。

表 2-4-9

$C_j$		-3	1	1	0	0	M	M	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	3	-2	0	1	0	0	-1	10
M	$x_6$	0	1*	0	0	-1	1	-2	1
1	$x_3$	-2	0	1	0	0	0	1	1
$\bar{C}$ 行		-1	1-M†	0	0	M	0	3M-1	$Z = M+1$

在表2-4-9中基本变量是  $x_4, x_6, x_3$ ，而  $x_6$  为人工变量，说明还未觅得原问题的基本可行解，于是继续施行单纯形法计算，由  $x_2$  进基取代  $x_6$ ，得另一新表，见表2-4-10。

表 2-4-10

$C_j$		-3	1	1	0	0	M	M	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	3*	0	0	1	-2	2	-5	12
1	$x_2$	0	1	0	0	-1	1	-2	1
1	$x_3$	-2	0	1	0	0	0	1	1
$\bar{C}$ 行		-1†	0	0	0	1	M-1	M+1	$Z = 2$

在表2-4-10里，人工变量  $x_6, x_7$  已被非人工变量挤出基列，成为非基本变量，其值均为零，表明已觅到一组原问题的基本可行解，即  $x_1=0, x_2=1, x_3=1, x_4=12, x_5=0$  为原问题的基本可行解，但是，在表2-4-10  $\bar{C}$  行中表明，检验数不满足非负要求，即  $\bar{C} \geq 0$  仍未达到的，说明仍未取得原问题的最优解，于是继续进行单纯形法计算，用  $x_1$  取代  $x_4$ ，使目标函数得到进一步减少。

然而，人工变量 $x_6, x_7$ 已完成了它帮助找原问题基本可行解的使命，可以从单纯形式中退出，见表2-4-11。

表 2-4-11

$C_j$		-3	1	1	0	0	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
-3	$x_1$	1	0	0	1/3	-2/3	4
1	$x_2$	0	1	0	0	-1	1
1	$x_3$	0	0	1	2/3	-4/3	9
$\bar{C}$ 行		0	0	0	1/3	1/3	$Z = -2$

表 2-4 11为最优解，唯一最优解为

$x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 9, x_4 = 0, x_5 = 0$ ，极小值 $Z = -2$ 。

注意：当大M法单纯形表在最终表列中仍有人工变量时，这说明原方程组不可能有基本可行解，原问题是不可行的，可以理解为约束条件无法得到满足，这样应该检查数学模型的建立是否合理了。

## 2. 二阶段单纯形法

由于原问题约束方程组每一个等式并不都含有基本变量，不能直接得到一个初始基本可行解，因而引进人工变量，构造了“人工方程组”若使“人工方程组”里的所有人工变量均为零，便可以得到原问题的初始可行解，然后再施行单纯形法对原问题求最优解。

一阶段 求原问题的初始可行解。对所有人工变量求和，建立一个人工目标函数，记作 $W$ 。通过单纯形法的计算，使人工目标函数极小化，如果人工目标函数的极小值为零，那么所有的人工变量也都缩小至零，这时原问题的初始基本可行解也就获得了，至此，可以进入二阶段。如果经过多次迭代计算，“人工方程组”的极小值仍为正值，毫无疑问，人工变量中至少有一个为正值，也就是说不含有人工变量的原问题是不可行的，原问题无解。简单地一阶段过程可归结为：

若 $\min W \neq 0$ ，则原问题无最优解；若 $\min W = 0$ ，则从第一阶段问题的最优解中去掉人工变量，就得到原问题的一组初始基本可行解。

二阶段 对原问题的初始基本可行解进行单纯形法叠代，求出最优解。

例：求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使  
 $Z = -3x_1 + x_2 + x_3$  达到最小

满足：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ 2x_1 - x_3 &= -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解：化为标准形式  
 $Z = -3x_1 + x_2 + x_3$  达到最小

满足

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, 7) \end{aligned}$$

用二阶段单纯法求解。首先建立一个一阶段的线性规划，以 $W$ 表示人工目标函数。

$$W = x_6 + x_7 \quad \text{达到最小}$$

约束：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, 7) \end{aligned}$$

原来的目标函数， $Z = -3x_1 + x_2 + x_3$  在一阶段中暂不予考虑，建立一阶段的单纯形表，见表2-4-12。

表 2-4-12

一阶段

$C_j$		0	0	0	0	0	1	1	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	$x_6$	-4	1	2	0	-1	1	0	3
1	$x_7$	-2	0	1*	0	0	0	1	1
$\bar{C}$ 行		6	-1	-3↑	0	1	0	0	$W=4$

以 $x_3$ 取代 $x_7$ ，减少目标函数值，得另一新表，表2-4-13。

表2-4-13

一阶段

$C_j$		0	0	0	0	0	1	1	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	3	-2	0	1	0	0	-1	10
1	$x_6$	0	1*	0	0	-1	1	-2	1
0	$x_3$	-2	0	1	0	0	0	1	1
$\bar{C}$ 行		0	-1↑	0	0	1	0	3	$W=1$

目标函数 $W = 1 > 0$ ，人工变量 $x_6$ 未退出基列，继续进行单纯形法，以 $x_2$ 取代 $x_6$ ，又得一新表，表2-4-14，

表2-4-14

一阶段

$C_j$		0	0	0	0	0	1	1	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_4$	3	0	0	1	-2	2	-5	12
0	$x_2$	0	1	0	0	-1	1	-2	1
0	$x_3$	-2	0	1	0	0	0	1	1
$\overline{C}$ 行		0	0	0	0	0	1	1	$W=0$

现在 $\min W=0$ ，已获得一阶段线性规划的最优解，就是

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=1, \quad x_4=12, \quad x_5=0, \quad x_6=0, \quad x_7=0.$$

由于人工变量 $x_6$ 和 $x_7$ 均为零，说明至此已取得原问题的基本可行解，可以进入二阶段，求原问题的最优解。

删去人工变量相应的列，补上原来的目标函数， $Z=-3x_1+x_2+x_3$ ，建立二阶段的初始单纯形表，表2-4-15。

表2-4-15

二阶段

$C_j$		-3	1	1	0	0	常数
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_4$	3*	0	0	1	-2	12
1	$x_2$	0	1	0	0	-1	1
1	$x_3$	-2	0	1	0	0	1
$\overline{C}$ 行		-1↑	0	0	0	1	$Z=2$

表2-4-15中 $\overline{C}$ 行，仍然是由矩阵运算得到， $\overline{C}$ 行中各数见下面式子

$$\overline{C}_1 = -3 - (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\overline{C}_2 = 1 - (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_3 = 1 - (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_4 = 0 - (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_5 = 0 - (0, 1, 1) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

因为目标是要使 $Z$ 极小化，在表2-4-15  $\overline{C}_1 = -1 < 0$ ，说明仍未取得最优解，继续施



## 第三章 修正单纯形法

在单纯形法计算过程中，我们的目的是要求出问题的最优解，一般地，是从一个初始基本可行解开始，经过有限次的迭代，对于求最大值来说，当检验数 $\bar{C}$ 行中的所有值都满足非正，即 $\bar{C} \leq 0$ ，则说明已达到最大值，而迭代就终止了。由于目的只是要求最大值的解，因而在迭代过程中，单纯形表中某些列与求最优解关系并不密切的数据，我们是不感兴趣的。尤其是在利用计算机计算，这些不起什么作用的数据，占用内存，造成效率低，费用大。因而对单纯形法进行修正，以方便计算机的计算。

### § 3.1 修正单纯形法

在介绍修正单纯形法之前，为了便于理解，不妨回顾一下单纯形算法的过程。

为了求得问题的最优解，首先找出这个问题的初始解，然后考察其检验数 $\bar{C}_j$ ，当 $\bar{C}$ 行各数值全为非正，则表明已达到最大值。若 $\bar{C}$ 行仍有正数值，表明问题的目标函数仍有改善的可能，于是，进行迭代运算，以求得一个新的、对目标函数有所改善的可行解。在迭代运算中，首先找出主元列 $k$ 列，其中 $\bar{C}_k = \max \{ \bar{C}_j \}$ ， $\bar{C}_j > 0$ 。然后考察 $k$ 列各数 $a_{ik}$ ，若 $a_{ik} \leq 0$ ，则原问题无解。否则就找主元行 $i$ 行，其中 $\frac{b_i}{a_{ik}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}$ ， $a_{ik} > 0$ ，最后通过变换，取得另一新的可行解。从上面过程回顾中可以看到，每叠代一次，非基本变量与基本变量就进行一次取代，基变量的取代，与 $\bar{C}$ 行及右端 $b_i$ 列有密切关系，此外就是主元列 $k$ 列。因此，在单纯形表中，没有必要把其余各行，各列，整个表格都全部罗列出来。也就是说，每次迭代，只计算出 $\bar{C}$ 行， $k$ 列， $b$ 列就可以了，其余各数据不再列出来，这就是修正单纯形法的基本思想。显然，修正单纯形法所用的基本原则与正规的单纯形法完全相同，只不过在每次迭代时，并不是把整个单纯形表全部算出，而把一个基本可行解变换为另一个基本可行解的演算中，所必需的有关数据直接地由原来方程通过矩阵运算而产生出来。为了叙述方便，引进基矩阵的概念，什么是基矩阵呢？基本变量所对应的方程系数所组成的矩阵，叫做基矩阵，记作 $B$ 。例如，设列向量 $P_1, P_2, \dots, P_m$ 为 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 所对应的原始方程系数，设基变量为 $x_3, x_4$ ，那么

$$B = (P_3, P_4)$$

修正单纯形法的优点在于：

(1) 能够从问题的原来参数 ( $A, b, C$ )，计算出单纯形表中所有的数字，只要导出  $B^{-1}$  就能计算出所有的数字。

(2) 单纯形表中的任一个数字 (除  $Z = C_B B^{-1} b$  外)，只需要作部分的矩阵乘法就可以获得。因此，无需作不必要的计算工作去求所有的数字，仅仅按需要的数字进行矩阵乘法。

修正单纯形法要点是：

寻求初始可行解，方法与正规单纯形法同。其迭代过程如下：

(1) 确定进入基变量列的变量，这方法与正规单纯形法相同。

(2) 确定从基变量列调出的变量，这方法与正规单纯形法相同。

(3) 确定新的基本可行解：方法是首先导出  $B^{-1}$ ，然后计算  $X_B = B^{-1}b$

迭代终止的原则：

判别此解是否已达到最优，判别方法与正规单纯形法相同。

在此，补充说明一下迭代过程中的第3步。每次迭代，都得导出一个新的基矩阵的逆矩阵  $B^{-1}$ ，这个过程，可以直接地通过使用标准的计算机软件来导出  $B^{-1}$ 。但为了节省计算时间， $B^{-1}$  的导出是由前一次迭代的  $B^{-1}$  (记作  $B^{-1}_{旧}$ ) 导出新的  $B^{-1}$  (记作  $B^{-1}_{新}$ )。显然，对于初始的基矩阵为  $B$ ，并有： $B = I = B^{-1}$   $I$  为单位矩阵

如何由  $B^{-1}_{旧}$  导出  $B^{-1}_{新}$  呢？为了叙述方便，不妨设  $x_k$  为进入基本变量列的变量，则其相应的方程系数为  $a'_{ik}$

$x_l$  为调出基本变量列的变量，其相应的方程系数为  $a'_{lk}$

$$(B^{-1}_{新})_{ij} = \begin{cases} (B^{-1}_{旧})_{ij} - \frac{a'_{ik}}{a'_{lk}} (B^{-1}_{旧})_{il} & i \neq l \\ \frac{(B^{-1}_{旧})_{il}}{a'_{lk}} & i = l \end{cases}$$

这个式子的来由，是由于新的方程组，可从前一方程组得到，方法是由前方程 ( $i$ )，( $i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m$ )，减去方程 ( $l$ ) 的  $\frac{a'_{ik}}{a'_{lk}}$  倍，然后，以  $a'_{lk}$  除方程 ( $l$ )，因而  $B^{-1}_{新}$  的各元素可由上式导出。

### § 3.2 修正单纯形算法

下面通过例子说明修正单纯形算法。

例：求  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$  使

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解：修正单纯形法的基本可行解有关数据，直接从原方程通过矩阵演算而产生。设列向量  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  表示  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  所在的原始列，列向量  $b$  表示右端常数。正规单纯形表也列于下，以方便对照参阅。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

表 3-1

	$C_j$		5	2	3	-1	1	$b$
	$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
1	-1	$x_4$	1	2	2*	1	0	8 ←
	1	$x_5$	3	4	1	0	1	7
	$\bar{C}$ 行		3	0	4 ↑	0	0	$Z = -1$
2	3	$x_3$	1/2	1	1	1/2	0	4 ←
	1	$x_5$	5/2*	3	0	-1/2	1	3
	$\bar{C}$ 行		1 ↑	-4	0	-2	0	$Z = 15$
3	3	$x_3$	0	2/5	1	3/5	-1/5	17/5
	5	$x_1$	1	6/5	0	-1/5	2/5	6/5
	$\bar{C}$ 行		0	-26/5	0	-9/5	-2/5	$Z = \frac{81}{5}$

在单纯形表 3-1 中，初始基本可行解的基本变量是  $x_4, x_5$ ，相应的基矩阵为  $B$ ，

$$B_{4,5} = (P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在表 3-1 之 2 表中，基本可行解的基本变量是  $x_3, x_5$ ，相应的基矩阵  $B$ ，

$$B_{3,5} = (P_3, P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

根据矩阵理论，单纯形表中各列可以用基矩阵的逆左乘原始列而取得，即

$$\bar{P}_i = B^{-1}P_i \quad \bar{b} = B^{-1}b$$

如单纯形表 3-1 之 2 表中各列可通过矩阵运算得到：

$$\bar{P}_1 = B^{-1}P_1 \quad B_{3,5} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{3,5}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$



$$\bar{P}_1 = B_{3,5}^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_2 = B_{3,5}^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_3 = B_{3,5}^{-1} P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_4 = B_{3,5}^{-1} P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_5 = B_{3,5}^{-1} P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B_{3,5}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

在表 3-1 中第 3 表, 各列通过矩阵计算可得, 计算过程如下列:

第 3 表基本变量为  $x_3, x_1$ , 相应基矩阵为:

$$B_{3,1} = (P_3, P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B_{3,1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_1 = B_{3,1}^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_2 = B_{3,1}^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_3 = B_{3,1}^{-1} P_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_4 = B_{3,1}^{-1} P_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_5 = B_{3,1}^{-1} P_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B_{3,1}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

上面的矩阵运算，只是为了复习一下矩阵相乘的方法，在修正单纯形法里，不需要把各列 $\bar{P}_j$ 都算出来，为了选取调进基本变量列的变量 $x_k$ ，算出相对利润系数( $\bar{C}_j$ )的值。 $\bar{C}_j$ 值的计算方法是：

$$\bar{C}_j = C_j - C_B \bar{P}_j \quad \bar{P}_j \text{ 为新的列向量}$$

$$\bar{P}_j = B^{-1} P_j$$

$$\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1} P_j \quad C_B \text{ 为基变量的相应目标函数系数。}$$

令向量 $\pi$ 表示为 $C_B B^{-1}$

称向量 $\pi$ 为单纯形乘子，代入有，

$$\bar{C}_j = C_j - \pi P_j$$

$C_j$ 为原始目标函数系数， $P_j$ 为变量 $x_j$ 的原始列系数。

如在表3-1第2表中，

$$\pi = (\pi_1, \pi_2) = C_B B^{-1} = (3, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = (1, 1)$$

回忆一下，基变量的检验数总是为零，在这里只需计算非基变量的检验数 $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_4$ 就可以了。

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi P_1$$

$$= 5 - (1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2$$

$$= 2 - (1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -4$$

$$\bar{C}_4 = C_4 - \pi P_4$$

$$= -1 - (1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

由于  $\bar{C}_1 = 1 > 0$ ，选择  $x_1$  为进入基变量列，成为新的基变量。这里与正规单纯形不同之处，就是  $\bar{C}_i$  值直接从原方程里得到，并且先导出  $B^{-1}$ ，然后计算非基变量列的各个相对利润值，减少了基变量列相对利润值的计算。

现在已决定  $x_1$  为进入基变量列，跟着检查一下  $a'_{i1}$ ，如果  $a'_{i1} \leq 0$ ，则原问题无解，如果  $a'_{i1}$  不满足式  $a'_{i1} \leq 0$ ，用最小比值法则，选取调出变量，为此得先算新的解，

$$\bar{b}_i = B^{-1} b_i \text{ 及 } \bar{P}_1$$

$$\bar{b}_i = B_{3,5}^{-1} b_i$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_1 = B_{3,5}^{-1} P_1$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

应用极小比值规则：

$$\min \left( \frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{3}{\frac{5}{2}} \right) = \frac{6}{5}$$

可见，最小比值是在第二行中，因此，基变量  $x_5$  要被  $x_1$  所取代。这样，现在新的基变量是  $x_3, x_1$ 。

$$B_{3,1} = (P_3, P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_{3,1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

新的基本可行解为：

$$B_{3,1}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

这样进行了一次迭代过程。再检验一下是否所有  $\bar{C}$  都满足非正, 即  $\bar{C} \leq 0$

现在非基本变量是  $(x_2, x_4, x_5)$  因而只要算  $\bar{C}_2, \bar{C}_4, \bar{C}_5$ , 就可以了, 基变量的检验数  $\bar{C}_1, \bar{C}_3$  为 0, 不必计算。

$$\begin{aligned}\pi &= C_B B^{-1} = (C_3, C_1) B_{3,1}^{-1} \\ &= (3, 5) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = (\frac{4}{5}, \frac{7}{5})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_2 &= C_2 - \pi P_2 \\ &= 2 - (\frac{4}{5}, \frac{7}{5}) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{26}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_4 &= C_4 - \pi P_4 \\ &= -1 - (\frac{4}{5}, \frac{7}{5}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{9}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_5 &= C_5 - \pi P_5 \\ &= 1 - (\frac{4}{5}, \frac{7}{5}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z &= C_B \bar{b} \\ &= (3, 5) \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{81}{5}\end{aligned}$$

可见,  $\bar{C}_i \leq 0$ , 满足非正要求, 已取得最优解, 最优解为  $X = (\frac{6}{5}, 0, \frac{17}{5}, 0, 0)^T$

$$\max Z = 16\frac{1}{5}$$

修正单纯形法的一般步骤:

1. 把问题化成标准形式, 并用矩阵形式表示出来:

求  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 使

$$\min Z = CX$$

满足  $AX = b \quad X \geq 0$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

设：矩阵  $A$  中的各列依次为  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  为基变量，线性规划有基本可行解，那么基矩阵  $B$  为：

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

令

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix}$$

若将向量  $X$  分为两部分， $X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$ ,

$X_B$  为相应于基变量， $X_N$  为相应于非基变量。有：

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad X_N = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{pmatrix}$$

当前的基本可行解  $X_B$  可由下式给出：

$$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \dots \\ \bar{b}_1 \\ \dots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}, \quad \text{和 } X_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

当前的目标函数值由下式给出：

$$Z = CX = C_B X_B$$

检验当前的基本可行解是否最优解，检验数  $\bar{C}_j$  由下式给出：

$$\begin{aligned} \bar{C}_j &= C_j - C_B B^{-1} P_j \quad (j = m+1, m+2, \dots, n) \\ &= C_j - \pi P_j \end{aligned}$$

若  $\bar{C}_j \geq 0$ ，则已达到最小值，读出最优解，否则进行迭代。

## 2. 迭代

选取进入基变量  $x_k$ ,  $x_k$  由下式给出：

$$\min(\bar{C}_i) = \bar{C}_K \quad \bar{C}_i < 0$$

计算  $\bar{P}_K$ ,  $\bar{P}_K$  由下式给出:

$$\bar{P}_K = B^{-1} P_K = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1K} \\ \bar{a}_{2K} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mK} \end{pmatrix}$$

选取调出基变量  $x_l$ ,  $x_l$  由下式给出:

$$\min_i \left( \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iK}} \right) = \frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lK}} \quad \bar{a}_{iK} > 0$$

以  $x_K$  取代  $x_l$ , 把  $\bar{a}_{lK}$  作为主元, 进行迭代运算, 现行新基为  $B = (P_1, P_2, \dots, P_K, \dots, P_m)$ , 导出新的  $B^{-1}$ 。

3. 求新的基本可行解, 由下式给出:

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

新的基本可行解为:  $X_B = \bar{b}^*$ ,  $X_N = 0$

应用新的基逆阵, 再求出检验数  $\bar{C}_i$ , 若  $\bar{C}_i$  满足非负要求, 则已取得最优解, 否则重复迭代过程, 直到求得最优解 (或无解) 为止。

现在再举一例子, 阐明修正单纯形法。

例: 求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 使

$$Z = -3x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{达到最小}$$

满足

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$2x_1 - x_3 = -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

解: 化为标准形式, 并引进人工变量  $x_6, x_7$ 。

$$\text{求 } X = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{使}$$

$$Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + Mx_6 + Mx_7 \quad \text{达到最小}$$

满足

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3$$

$$-2x_1 + x_3 + x_7 = 1$$

$$x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, 7)$$

令  $P_1, \dots, P_7$  和  $b$  表示与  $x_1, \dots, x_7$  相应的列和右端常数项。  $A = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

显然，初始基变量为： $x_4, x_6, x_7$ 。

初始基矩阵为  $B = (P_4, P_6, P_7) = I$

基矩阵的逆阵为  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = (x_4, x_6, x_7)^T \\ = (11, 3, 1)^T$$

求检验数  $\bar{C}_j$

$$\pi = C_B B^{-1} = (0, M, M) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, M, M)$$

$$\bar{C}_j = C_j - \pi P_j \quad (j=1, 2, 3, 5)$$

$$\bar{C}_1 = -3 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 6M - 3$$

$$\bar{C}_2 = 1 - (0, M, M) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - M$$

$$\bar{C}_3 = 1 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 3M$$

$$\bar{C}_5 = 0 - (0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

$\bar{C}_2, \bar{C}_3$  为负数，需要进行迭代。

选取进入基变量  $x_3$ ， 因为

$$\min_j (\bar{C}_j) = \min (\bar{C}_2, \bar{C}_3) = \bar{C}_3 \quad \bar{C}_3 < 0$$

计算  $\bar{P}_3$ ，

$$\bar{P}_3 = B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

选取调出基变量  $x_7$

$$\min \left( \frac{11}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1} \right) = 1 \quad \text{对应于 } x_7$$

以  $x_3$  取代  $x_7$  现行新基为  $B = (P_4, P_6, P_3)$  把  $\bar{a}_{13}$  作为主元，( $\bar{a}_{13} = 1$ ) 进行叠代运算，得一新  $B^{-1}$ 。根据下式计算：

$$\text{新}B^{-1} = \begin{cases} \text{旧}B_{ij}^{-1} - \frac{a'_{ik}}{a'_{lk}} \text{旧}B_{li}^{-1} & i \neq l \\ \frac{\text{旧}B_{ij}^{-1}}{a'_{lk}} & i = l \end{cases}$$

$$\text{新}B^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{11} = 1 - \frac{1}{1} (0) = 1$$

$$\beta_{12} = 0 - \frac{1}{1} (0) = 0$$

$$\beta_{13} = 0 - \frac{1}{1} (1) = -1$$

$$\beta_{21} = 0 - \frac{2}{1} (0) = 0$$

$$\beta_{22} = 1 - \frac{2}{1} (0) = 1$$

$$\beta_{23} = 0 - \frac{2}{1} (1) = -2$$

$$\beta_{31} = \frac{0}{1} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{0}{1} = 0, \quad \beta_{33} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{新}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求新的基本可行解:

$$\text{新}\bar{b} = B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求检验数 $\bar{C}_j$  ( $j=1, 2, 5$ )

$$\pi = C_B B^{-1} = (0, M, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0, M, -2M+1)$$

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = -3 - (0, M, -2M+1) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\bar{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = 1 - (0, M, -2M+1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1-M$$

$$\bar{C}_5 = C_5 - \pi P_5 = 0 - (0, M, -2M+1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$



迭代, 选取进入基变量

$$\min(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = 1 - M, \quad x_2 \text{ 为选入, 计算新 } \bar{P}_2$$

$$\text{新 } \bar{P}_2 = B^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

选取调出基变量

$$\min_{a_{i2} > 0} \left( \frac{\bar{b}_i}{a_{i2}} \right) = \frac{1}{1} \quad i=6, x_6 \text{ 调出}$$

以  $x_2$  取代人工变量  $x_6$ 。

现行新基为:  $B = (P_4, P_2, P_3)$  主元  $a_{22} = 1$ , 据此, 导出新的  $B^{-1}$ 。

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{11} = 1 - \frac{(-2)}{1} (0) = 1$$

$$\beta_{12} = 0 - \frac{(-2)}{1} (1) = 2$$

$$\beta_{13} = -1 - \frac{(-2)}{1} (-2) = -5$$

$$\beta_{21} = \frac{0}{1} = 0, \quad \beta_{22} = \frac{1}{1} = 1, \quad \beta_{23} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\beta_{31} = 0 - \frac{0}{1} (0) = 0$$

$$\beta_{32} = 0 - \frac{0}{1} (1) = 0$$

$$\beta_{33} = 1 - \frac{0}{1} (-2) = 1$$

$$\text{即新 } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{新解 } \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求出检验数  $\bar{C}_j$ , ( $j=1, 5$ )

$$\pi = C_B B^{-1} = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, -1)$$

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = -3 - (0, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - \pi P_3 = 0 - (0, 1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

选  $x_1$  进入基变量列。

计算主元列  $\bar{P}_1$

$$\bar{P}_1 = B^{-1}P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

选调出变量。比率是  $(\frac{12}{3}, \infty, -)$ ,  $x_4$  调出, 以  $x_1$  取代  $x_4$ , 主元为 3。

现行基矩阵  $B = (P_1, P_2, P_3)$

导出新  $B^{-1}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{12} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{13} = -\frac{5}{3},$$

现行的  $\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}$  仍为旧的  $\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}$ , 即新的  $\beta_{2i}$  仍为  $(0, 1, -2)$ , 因为在主元列  $\bar{P}_1$  里, 第二个元素为 0,  $\beta_{21} = 0$

$$\beta_{31} = 0 - \frac{(-2)}{3} (1) = \frac{2}{3}$$

$$\beta_{32} = 0 - \frac{(-2)}{3} (2) = \frac{4}{3}$$

$$\beta_{33} = 1 - \frac{(-2)}{3} (-5) = -\frac{7}{3}$$

$$\text{即 } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

求检验数  $\bar{C}_j (j=4, 5)$

$$\pi = C_B B^{-1} = (-3, 1, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{C}_5 = 0 - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$\overline{C}_i \geq 0$ , 满足非负要求已达最优解, 即

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, x_3)^T \\ &= (4, 1, 9)^T \end{aligned}$$

$$Z = B_B \overline{b} = (-3, 1, 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = -2 \text{ 达到最小。}$$

修正单纯形法作为使用计算机求问题的最优解, 无疑是一种有效的方法, 至于用手算求解, 那它不比正规单纯形法方便。

## 第四章 对偶规划

在线性规划问题中，不论从理论方面，还是从实际问题方面，都存在一个有趣的问题：就是对于任何一个求最大值的线性规划问题，必有一个求最小值的规划问题与它匹配，反之亦然。而且两者包含有相同的数据，如果称前者为原问题，那么后者便称之为对偶问题。若称前者为对偶问题，则后者称为原问题。两者互为对偶线性规划问题。

### § 4.1 对偶规划的经济意义

现在举两个例子来说明它的意义。

例：某车间生产甲、乙两种产品，每件甲产品的利润为2元，乙产品利润为3元。制造每件甲种产品需要劳动力3个，而乙种产品需要6个。车间现有的劳动力总数只有24个。制造甲产品需要原材料2斤，而乙产品需要1斤。车间总共只有10斤原材料可供使用。应该安排生产甲产品多少件，乙产品多少件才能获得最大的利润。

解：设安排甲产品生产 $x_1$ 件，乙产品生产 $x_2$ 件。如果全部产品都能销售掉，要求达到的目标是：

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大。}$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

通过单纯形求解，得最优解，最优解为：

$$x_1 = 4, x_2 = 2, \quad \text{最大利润为14元。}$$

计算过程见表4-1-1

表 4-1-1

$C_j$		2	3	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	$x_3$	3	6*	1	0	24
0	$x_4$	2	1	0	1	10
$\bar{C}$		2	3	0	0	$Z=0$
3	$x_2$	1/2	1	1/6	0	4
0	$x_4$	3/2*	0	-1/6	1	6
$\bar{C}$		1/2	0	-1/2	0	$Z=12$
3	$x_2$	0	1	2/9	-1/3	2
2	$x_1$	1	0	-1/9	2/3	4
$\bar{C}$		0	0	-4/9	-1/3	$Z=14$

这是一个求最大值的问题。从资源拥有者，即甲方这个角度来考虑，总是想这些资源发挥最大的经济效益。假设现在有另一方，叫做乙方，也想利用甲方这些资源，于是乙方就得付给甲方一定的费用，这些费用必须大于或等于原来甲方能够获得的利润，甲方才会同意转让这些资源。于是以甲方看来，利用这些资源能够取得的利润，以乙方看来，就变为利用这些资源必须付出的成本，因而乙方希望这项费用尽可能小。

设  $y_1$  表示每个劳动力能创造的利润， $y_2$  表示每斤原材料所能获得的利润， $W$  表示乙方必须付出的总成本。

甲方以 3 个劳动力 + 2 斤原材料 生产一件甲产品获利 2 元

6 个劳动力 + 1 斤原材料 生产一件乙产品获利 3 元

乙方为了能从甲方得到这些资源的转让，乙方付给甲方的转让费不能少于 ( $\geq$ ) 原来甲方利用这些资源所取得的利润，因而乙方建立的数学模型为：

$$3y_1 + 2y_2 \geq 2$$

$$6y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$W = 24y_1 + 10y_2 \quad \text{达到最小。}$$

通过计算，得最优解，最优解为：

$$y_1 = 4/9, y_2 = 1/3, W = 14.$$

计算过程见表 4-1-2。

表 4-1-2

$C_j$		24	10	0	0	$M$	$M$	$b$
$C_B$	基	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
$M$	$y_5$	3	2	-1	0	1	0	2
$M$	$y_6$	6*	1	0	-1	0	1	3
$\bar{C}$		$24 - 9M$	$10 - 3M$	$M$	$M$	0	0	$W = 5M$
$M$	$y_5$	0	$3/2^*$	-1	$1/2$	1	$-1/2$	$1/2$
24	$y_1$	1	$1/6$	0	$-1/6$	0	$1/6$	$1/2$
$\bar{C}$		0	$6 - \frac{3}{2}M$	$M$	$4 - \frac{M}{2}$	0	$\frac{3}{2}M - 4$	$W = \frac{1}{2}M + 12$
10	$y_2$	0	1	$-2/3$	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	$1/3$
24	$y_1$	1	0	$1/6$	$-2/9$	$-1/6$	$2/9$	$4/9$
$\bar{C}$		0	0	4	2	$M - 4$	$M - 2$	$W = 14$

现在就这两个问题作一次比较，两者的最优值都是  $W = Z = 14$ 。变量的解在两个单纯形表中互相包含着， $y_1 = 4/9$ ， $y_2 = 1/3$  在表 4-1-1 最终表  $\bar{C}$  行 相应于松弛变量  $x_3$ ， $x_4$ ，

即  $\bar{C}_3 = -\frac{4}{9}$ ， $\bar{C}_4 = -\frac{1}{3}$ ，在第二章阐述过， $x_3$ ， $x_4$  表示未加使用的劳动量，材料量。

而 $y_1$ 正表示每个劳动力所创造的利润, $y_2$ 表示每个原材料的获利润值。显然, $x_3, x_4$ 与 $y_1, y_2$ 是有其内在联系,并且

$$y_1 = -\bar{C}_3 = -(-\frac{4}{9}) = \frac{4}{9}$$

$$y_2 = -\bar{C}_4 = -(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

而在表4-1-2最终表里, $\bar{C}_3 = 4, \bar{C}_4 = 2$ ,与表4-1-1联系起来看, $x_1 = 4, x_2 = 2$ ,也就是说表4-1-1里的 $x_1, x_2$ 与表4-1-2里的 $\bar{C}_3, \bar{C}_4$ 有如下关系:

$$x_1 = \bar{C}_3 = 4$$

$$x_2 = \bar{C}_4 = 2$$

原问题与对偶规划问题在某种意义上来说,实质上是一样的,因为第二个问题仅仅在第一个问题的另一种表达方式而已。如果比较一下原规划问题与对偶规划问题的异同,就会更容易地了解它们俩之间的关系。

原始规划关系	等价对偶关系
最大化	最小化
目标函数中的系数	约束条件的右边常数
约束条件的右边常数	目标函数中的系数
第j个变量系数	第j个约束条件系数
第i个的约束条件常数	第i个变量的目标函数系数
第j个变量 $\geq 0$	第j个约束条件为不等式
第j个变量在符号上没有限制	第j个约束条件是一个等式
第i个约束条件是等式	第i个变量符号上无限制
第i个约束条件为不等式	第i个变量 $\geq 0$

## § 4.2 对偶规划理论

为了说明方便,下面引进一个新概念,就是对称对偶线性规划。

如果原始问题和对偶问题两者都具有:

1. 变量都是非负的;
2. 约束条件都是同向不等式。

那么这类问题,叫做对称对偶线性规划。

用矩阵表示,对称对偶线性规划为:

原始问题

$$\begin{aligned} \text{极大化:} & \quad Z = CX \\ \text{约束:} & \quad AX \leq b \\ & \quad X \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned} \text{极小化:} & \quad W = Yb \\ \text{约束:} & \quad YA \geq C \\ & \quad Y \geq 0 \end{aligned}$$

式中,  $A$  为  $(m \times n)$  矩阵,  $b$  是  $(m \times 1)$  列向量,  $C$  是  $(1 \times n)$  行向量,  $X$  是  $(n \times 1)$  列向量,  $Y$  是  $(1 \times m)$  行向量。

定理一 弱对偶定理

考虑对称对偶线性规划:

$$\text{极大化:} \quad Z = CX, \quad AX \leq b, \quad X \geq 0 \quad \text{和}$$

$$\text{极小化:} \quad W = Yb, \quad YA \geq C, \quad Y \geq 0$$

都具有可行解  $x^0$  和  $y^0$ , 则有  $y^0 b \geq Cx^0$

对偶问题 (即这里的极小化问题) 的任一个可行解, 所对应的目标函数值, 总是大于, 或等于原问题的任意一个可行解所对应的目标函数值。

证明:

设  $x^0$  为原始问题的可行解向量。

$y^0$  为对偶问题的可行解向量。现在求证

$$y^0 b \geq Cx^0$$

因为  $x^0$  对于原始问题是可行的, 即满足其约束条件, 故有

$$Ax^0 \leq b, \quad x^0 \geq 0$$

同理, 因为  $y^0$  对于对偶问题是可行的, 也有:

$$y^0 A \geq C, \quad y^0 \geq 0$$

对原问题约束左乘  $y^0$ , 得

$$y^0 Ax^0 \leq y^0 b$$

对对偶问题的约束右乘  $x^0$

$$y^0 Ax^0 \geq Cx^0$$

因而得证:

$$y^0 b \geq y^0 Ax^0 \geq Cx^0$$

从弱对偶定理, 可推得下述重要结果:

推论 1. 极大化问题 (原始问题) 的任意一个可行解所对应的目标函数值是对偶问题最优目标函数值的一个下界。

推论 2. 极小化问题 (对偶问题) 的任一可行解所对应的目标函数值是原始问题最优目标函数值的一个上界。

推论 3. 如果原始问题可行, 但其目标函数无界 (即  $\max Z \rightarrow +\infty$ ), 则对偶问题不可能有可行解。

推论 4. 如果对偶问题可行, 但无界 (即  $\min W \rightarrow -\infty$ ), 则原始问题不可行。

下面举例说明弱对偶定理。

例：原始问题

$$\begin{aligned} & \text{极大} & Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ & \text{约束条件} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 20 \\ & & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\ & & x_i &\geq 0, \quad (i=1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned} & \text{极小化:} & W &= 20y_1 + 20y_2 \\ & \text{约束条件:} & y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ & & 2y_1 + y_2 &\geq 2 \\ & & 2y_1 + 3y_2 &\geq 3 \\ & & 3y_1 + 2y_2 &\geq 4 \\ & & y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

设原始问题的一组可行解为：

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = 1 \quad \text{有} \quad Z = Cx^0 = 10$$

设对偶问题的一组可行解为：

$$y_1^0 = y_2^0 = 1 \quad \text{有} \quad W = y^0 b = 40$$

$$Cx^0 = 10 < 40 = y^0 b$$

$$Cx^0 < y^0 b \quad \text{满足弱对偶定理。}$$

由推论 1，可知对偶目标函数  $W$  的极小值不能小于 10。

由推论 2，可知原始问题的  $Z$  的极大值不能超过 40。

推论 3 和 4 的逆也成立。

推论 5，若原始问题可行，而对偶问题不可行，则原始问题无界。

推论 6，若对偶问题可行，而原始问题不可行，则对偶问题无界。

下面再多举一例对上述推论加以说明。

例：原始问题

$$\begin{aligned} & \text{极大化:} & Z &= x_1 + x_2 \\ & \text{约束条件:} & -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ & & -2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 \\ & & x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned} & \text{极小化:} & W &= 2y_1 + y_2 \\ & \text{约束条件:} & -y_1 - 2y_2 &\geq 1 \\ & & y_1 + y_2 &\geq 1 \\ & & y_1 - y_2 &\geq 0 \\ & & y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$x_1 = x_2 = x_3 = 0$  是原始问题的可行解, 原始问题具有可行解。但对偶问题的约束条件

$-y_1 - 2y_2 \geq 1$  是矛盾的, 因而对偶问题是不可行的。因此, 按推论 5, 原始问题是无界, 使极大值  $Z$  趋于无穷。用单纯形法求解原始问题, 很容易得到验证。

### 定理二 最优性准则定理

对称对偶线性规划如有可行解  $x^0$  和  $y^0$ , 而且原始问题和对偶问题两者目标函数值相等, 那么, 这时候的可行解实际上分别为对应规划问题的最优解。

证明:

设  $x$  为原始问题的任一可行解。由定理一有:

$$Cx \leq y^0 b$$

而

$$Cx^0 = y^0 b, \quad (\text{已知})$$

所以对于原始问题的所有可行解, 都有

$Cx \leq Cx^0$ , 根据最优解的定义, 而原问题是求最大值, 可见,  $x^0$  是原问题的最优解。类似地, 可以证明  $y^0$  是对偶问题的最优解。

例: 原始问题

极大化:  $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

约束条件:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

对偶问题

极小化:

$$W = 20y_1 + 20y_2$$

约束条件:

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

若设  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = 4$ ,  $x_4^0 = 4$ , 显然, 这是原始问题的一个可行解。并  $Z = 28$ 。

又设  $y_1^0 = 1.2$ ,  $y_2^0 = 0.2$  代入对偶问题的约束条件, 可知这也是对偶问题的可行解。并且  $W = 28$ 。

$Z = 28 = W$ , 根据定理 2, 可见, 这两个可行解, 分别是原始问题和对偶问题的最优解。

### 定理三 主对偶性定理

如果原始问题和对偶问题两者均可行, 则两者都有最优解, 并且此时目标函数的最优值相等。

证明:

当原始问题和对偶问题是可行时, 则根据定理一的推论 1 和 2, 对  $W$  的最小值有一个下

界，而对 $Z$ 的最大值有一上界。也就是说，不管是原始问题，还是对偶问题，都不可能有无界解。所以两者必定都有最优解。

至于证明在最优时，两者的目标函数值相等，其证明较繁，为此从略。

#### 定理四：互补松弛定理

为了方便，用矩阵形式研究对称对偶问题，

原始问题：

$$\text{极大化： } Z = CX$$

$$\text{约束条件： } AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

对偶问题：

$$\text{极小化： } W = Yb$$

$$\text{约束条件： } YA \geq C$$

$$Y \geq 0$$

式中 $A$ 为 $(m \times n)$ 矩阵， $b$ 和 $X$ 是 $(m \times 1)$ ， $(n \times 1)$ 的列向量， $C$ 和 $Y$ 是 $(1 \times n)$ ， $(1 \times m)$ 的行向量。

设 $x^0$ 是原始问题的可行解，

$y^0$ 是对偶问题的可行解。

当且仅当

$$(y^0 A - C)x^0 + y^0(b - Ax^0) = 0 \text{ 时，}$$

$x^0$ ， $y^0$ 分别是相应的问题的最优解。

证明：

设列向量  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  代表原始规划的松弛变量；

行向量  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  代表对偶规划的松弛向量。

因为 $x^0$ 和 $y^0$ 是可行的，因而有

$$Ax^0 + u^0 = b \quad x^0 \geq 0, u^0 \geq 0$$

$$y^0 A - v^0 = C \quad y^0 \geq 0, v^0 \geq 0$$

( $u^0$ 和 $v^0$ 表示对应于可行解 $x^0$ ， $y^0$ 的松弛变量值。)

对上述两方程，分别用 $y^0$ 左乘， $x^0$ 右乘得

$$y^0 Ax^0 + y^0 u^0 = y^0 b$$

$$y^0 Ax^0 - v^0 x^0 = Cx^0$$

把上面两式进行相减，得式：

$$y^0 u^0 + v^0 x^0 = y^0 b - Cx^0$$

因为对式

$$(y^0 A - C)x^0 + y^0(b - Ax^0) = 0 \text{ 展开}$$

有：

$$y^0 Ax^0 - Cx^0 + y^0 b - y^0 Ax^0 = 0$$

如果能证明

$y^0 u^0 + v^0 x^0 = 0$  时,  $x^0$  和  $y^0$  分别是原始问题和对偶问题的最优解, 那么定理四就得证。因此下面又再分两步证明。

首先证明必要条件。

设  $x^0$  和  $y^0$  是问题的最优解, 根据定理 3, 它们各自目标函数的最优值是相等的, 即

$$\begin{aligned} Cx^0 &= y^0 b && \text{因而有} \\ y^0 u^0 + v^0 x^0 &= y^0 b - Cx^0 = 0 \\ y^0 u^0 + v^0 x^0 &= 0 \end{aligned}$$

其次证明充分条件。

假设  $y^0 u^0 + v^0 x^0 = 0$  成立,

证明  $x^0$ ,  $y^0$  分别是原问题和对偶问题的最优解。

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad y^0 u^0 + v^0 x^0 &= 0 \quad \text{是正确的, 所以} \\ y^0 u^0 + v^0 x^0 &= y^0 b - Cx^0 = 0 \\ y^0 b - Cx^0 &= 0 \\ y^0 b &= Cx^0 \end{aligned}$$

根据定理二, 由于目标函数值相等, 所以,  $x^0$  和  $y^0$  分别是原始问题和对偶问题的最优解。证毕。

互补松弛条件

$$v_j^0 x_j^0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i^0 u_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

互补松弛条件由定理四方程

$y^0 u^0 + v^0 x^0 = 0$  简化而得到, 其理由如下:

- (1)  $x^0, u^0, v^0, y^0 \geq 0$ , 因而  $v^0 x^0 \geq 0, y^0 u^0 \geq 0$ 。
- (2) 如果各项均为非负, 而其和为零, 只能每项都是零。

互补松弛条件如果用文字叙述, 有如下四点。

(1) 如果原来问题的变量  $x_j$  是正的, 则对偶方程在最优值时 (也就是  $v_j = 0$ ) 满足相应的对偶约束条件。

(2) 如果原来问题的约束条件在最优值时是严格的不等式 (也就是  $u_i > 0$ ), 则相应的对偶变量  $y_i$  在最优解中一定是零。

(3) 如果一个对偶变量  $y_i$  是正的, 则原来方程在最优值时 (也就是  $u_i = 0$ ), 满足相应的原来问题的约束条件。

(4) 如果一对偶约束条件在最优值时是严格的不等式 (也就是  $v_j > 0$ ), 则相应原来变量  $x_j$  在最优解中一定是零。

例: 添加松弛变量后, 原始、对偶问题可列出如下:

原始问题

$$\text{极大化: } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned}\text{约束条件: } & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + u_1 = 20 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + u_2 = 20 \\ & x_j \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4)\end{aligned}$$

对偶问题

$$\text{极小化: } W = 20y_1 + 20y_2$$

$$\begin{aligned}\text{约束条件: } & y_1 + 2y_2 - v_1 = 1 \\ & 2y_1 + y_2 - v_2 = 2 \\ & 2y_1 + 3y_2 - v_3 = 3 \\ & 3y_1 + 2y_2 - v_4 = 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_i \geq 0, \quad (i=1, 2, 3, 4)\end{aligned}$$

互补松弛条件意思就是在最优情况下, 有

$$u_1^0 y_1^0 = 0, \quad u_2^0 y_2^0 = 0;$$

$$x_1^0 v_1^0 = 0, \quad x_2^0 v_2^0 = 0, \quad x_3^0 v_3^0 = 0, \quad x_4^0 v_4^0 = 0。$$

从这些条件可以由对偶最优解确定原始最优解, 反之亦然。

例如本例对偶问题在不引入松弛变量时, 只有两个变量。因此, 可用图解法来求解。通过图解法, 求得最优解, 最优解为:

$$y_1^0 = 1.2, \quad y_2^0 = 0.2, \quad \min W = 28。$$

应用互补松弛条件, 可以确定原始问题最优解时有如下情况:

$$(1) \quad y_1^0 = 1.2 > 0, \quad \text{根据 } u_1^0 y_1^0 = 0, \text{ 得 } u_1^0 = 0$$

$$(2) \quad y_2^0 = 0.2 > 0, \quad \text{根据 } u_2^0 y_2^0 = 0, \text{ 得 } u_2^0 = 0$$

(3) 对偶第一个约束在最优值时,

$$y_1^0 + 2y_2^0 = 1.2 + 2 \times 0.2 = 1.6 > 1,$$

$$v_1^0 = 0.6 > 0, \quad \text{根据 } x_1^0 v_1^0 = 0, \text{ 得 } x_1^0 = 0$$

(4) 同理, 对偶第二个约束在最优值时,

$$2y_1^0 + y_2^0 = 2.4 + 0.2 = 2.6 > 2,$$

$$v_2^0 = 0.6 > 0, \quad \text{根据 } x_2^0 v_2^0 = 0, \text{ 得 } x_2^0 = 0$$

(5) 对偶第三个约束在最优值时,

$$2y_1^0 + 3y_2^0 = 2.4 + 0.6 = 3, \text{ 得 } v_3^0 = 0,$$

根据  $x_3^0 v_3^0 = 0$ ,  $x_3^0$  可能为正数或零。

(6) 同理, 对偶第四个约束方程在最优值时, 得  $u_4^0=0$ , 根据  $x_4^0 u_4^0=0$ , 因此,  $x_4^0$  可能为正数或零。

综上述情况, 原始问题在最优值时,  $x_1^0=0, x_2^0=0$ , 而  $x_3^0, x_4^0$  可能为正数, 可能为零。把  $x_1^0=x_2^0=0, u_1^0=u_2^0=0$  代入原始约束, 得:

$$2x_3^0+3x_4^0=20$$

$$3x_3^0+2x_4^0=20$$

解上述只含两个未知数的联立方程, 求得原始问题的最优解, 最优解为:

$$x_1^0=0, x_2^0=0, x_3^0=4, x_4^0=4, x_5^0=4, \max Z=28.$$

$\max Z=28$ , 与  $\min W=28$  相符, 这证实了定理三。

互补松弛条件对检验线性规划最优解性质是很有用的。比如说, 我们要检查上例中原始问题的两个资源约束条件, 如果在最优情况下, 两个原始约束条件仍为严格的不等式, 那就表明可利用的资源都未能充分地利用。相应地,  $y_1^0=y_2^0=0$ 。

互补松弛条件应用比较广泛, 下面略举:

- (1) 用以从已知的最优对偶解, 去求原始问题最优解, 反之亦然。
  - (2) 用以证实原始问题的可行解是否最优解。
  - (3) 从不同的假设来进行试算, 从而研究原始、对偶问题最优解的一般性质。
  - (4) 非线性规划的库恩-特克 (Kuhn-Tucker) 最优性条件是互补松弛条件的应用。
- 对于对称原始对偶问题, 已作了介绍, 一般有如下关系:

原始问题,	对偶问题,
$\max Z = CX$	$\min W = Yb$
约束, $AX \leq b$	$YA \geq C$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$
$A$ 为约束矩阵	$A$ 为约束矩阵转置
$b$ 为右端常数	$b$ 为成本向量
$C$ 为利润向量	$C$ 为右端常数向量

或

原始问题  
目标函数  
极小化:  $Z = CX$

对偶问题  
目标函数  
极大化:  $W = Yb$

约束条件:  $AX \geq b$

$$X \geq 0$$

约束条件:  $YA \leq C$

$$Y \geq 0$$

对偶的对偶即为原始问题。

以上介绍了对称对偶线性规划, 至于非对称对偶问题, 在实际上也会遇到的, 下面予以介绍。

### 非对称对偶问题

前面对对称对偶问题已作了较详细的叙述, 而非对称对偶问题是可以转化为对称对偶问题的, 然后按对称对偶问题去处理就可以了。为此, 对于非对称对偶问题的探讨, 重点放在把非对称对偶问题转化为对称对偶问题, 下面举例说明。

### 非对称原始——对偶问题

例: 非对称形式的原始问题:

极大化:  $Z = 4x_1 + 5x_2$

约束条件:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$4x_1 - 3x_2 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ 自由变量}$$

本题为极大化问题, 对于极大化问题的对称要求变量全为非负, 约束为小于不等式, 为此作如下变换。

$$4x_1 - 3x_2 \geq 10 \quad \text{乘以} (-1) \text{ 得}$$

$$-4x_1 + 3x_2 \leq -10$$

$$x_1 + x_2 = 5, \quad \text{可由两个式子表示}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

自由变量  $x_2$ , 可由  $x_3 \sim x_4$  表出

因此, 原始问题化成对称形式:

极大化:  $Z = 4x_1 + 5x_3 - 5x_4$

约束条件:

$$3x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 20$$

$$-4x_1 + 3x_3 - 3x_4 \leq -10$$

$$x_1 + x_3 - x_4 \leq 5$$

$$-x_1 - x_3 + x_4 \leq -5$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

对偶问题为

极小化:  $W = 20y_1 - 10y_2 + 5y_3 - 5y_4$

约束条件:  $3y_1 - 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 4$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 \geq 5$$

$$-2y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 \geq -5$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

显然, 现在所构造的对偶问题, 与原问题作对比, 会发现: 对偶约束的系数矩阵并不是原始规划系数矩阵的转置, 对偶目标函数系数, 也不是原问题约束方程右端常数。如果把问题换一下, 如  $y_3 - y_4 = y_3$ ,  $-y_2 = y_2$ , 可得

极小化:  $W = 20y_1 + 10y_2 + 5y_3$

约束条件:  $3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4$

$$2y_1 - 3y_2 + y_3 = 5$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 为自由变量}$$

通过对偶问题和本题初始问题作比较, 可发现, 对任何线性规划问题 (对称的或非对称的), 对偶问题与原问题的相应关系如下:

原始问题	对偶问题
最大化	最小化
$A$ 系数矩阵	$A^T$
$b$ 右端常数 (列向量)	目标函数系数 (行向量)
$C$ 目标函数系数	右端常数 (列向量)
第 $i$ 个约束为等式	对偶变量 $y_i$ 为自由变量
第 $i$ 个约束为 " $\leq$ "	对偶变量 $y_i \geq 0$
第 $i$ 个约束为 " $\geq$ "	对偶变量 $y_i \leq 0$
$x_j$ 为自变量	第 $j$ 个约束为等式
$x_j \geq 0$	第 $j$ 个约束为 " $\geq$ "
$x_j \leq 0$	第 $j$ 个约束为 " $\leq$ "

下面再举例子说明上面原始问题与对偶问题的关系。

例: 写出下列问题的对偶形式

极大化:  $Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$

约束条件:  $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ 为自由变量}$$

对偶问题:

$$\text{极小化: } W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\text{约束条件: } 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1$$

$$3y_1 - y_2 + y_3 \leq 4$$

$$-5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 为自由变量}$$

### § 4.3 对偶单纯形法

求对偶问题的最优解途径可通过互补松弛关系, 原始问题的最终单纯形表的检验数  $\bar{C}_N$  得到, 这是上面提及的。此外还可通过对偶单纯形法找到对偶问题的最优解。

#### 一、对偶单纯形法的理论依据

前面在提及原始问题与对偶问题的解之间的对应关系, 在用单纯形表进行迭代求解时, 在  $b$  列中得到的是原问题的基本可行解, 在检验数  $\bar{C}$  行得到的是对偶问题的基本解。通过逐步迭代, 当在检验数行得到的对偶问题的解也是可行解时, 根据弱对偶性及定理二最优性准则, 可以知道这时已得到了最优解。即原问题与对偶问题都是最优解。

根据对偶问题的对称性, 也可这样来考虑: 如果保持对偶问题的解是可行解, 即  $C_j - C_B B^{-1} P_j \geq 0$  (对于原问题为求最小值), 而原问题在非可行解的基础上, 通过迭代, 逐步达到基本可行解, 这样也得到了最优解。总言之, 对偶单纯形法是由对偶规划的一个可行解开始 (而不一定为原问题的可行解), 经过迭代运算, 一旦求出满足原始规划的一个可行解时, 这个可行解就是原始问题的最优解, 对偶问题的最优解也同时获得, 下面作进一步的阐述。

设有一原始问题为:

$$\text{极小化: } Z = CX$$

$$\text{约束条件: } AX = b$$

$$X \geq 0$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \text{ 为基矩阵}$$

对应基变量  $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$



$$X_B = B^{-1}b, X_N = 0$$

当 $B^{-1}b \geq 0$ 时的基为原始问题的可行基，现行的基是否就是最优基呢？必须算出检验数 $\bar{C}_j$ ，如果 $\bar{C}_j \geq 0$ 的话，原最小问题为最优，相应的基 $B$ 也为最优基。根据修正单纯形的 $\bar{C}_j$ 的计算方法，有：

$$\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1} P_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\bar{C}_j \geq 0 \text{ 时, 原始基为最优.}$$

现在考虑对偶问题：

对偶问题：

$$\text{极大化: } W = Yb$$

$$\text{约束条件: } YA \leq C$$

$Y$ 符号不限。

把对偶约束条件改写一下有：

$$C - YA \geq 0$$

或

$$C_j - Y P_j \geq 0$$

原问题的最优基的检验数 $\bar{C}_j$ 有：

$$\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1} P_j \geq 0.$$

把对偶问题约束条件与原问题最优基时检验数进行比较，就可以发现

$$Y = C_B B^{-1}.$$

对偶目标函数值

$$W = Yb$$

$$= C_B B^{-1}b$$

通过上面比较，可以知道，在单纯形法中检验问题是否达到最优，无非就是检验一下当前的 $Y = C_B B^{-1}$ 是否已满足了对偶约束，如果满足了，原始问题就获得最优解了，与此同时，对偶问题的最优解也可以原规划问题最终表的 $\bar{C}$ 行中读到，原问题与对偶问题有相同的最优值。因而当求出原问题的基阵 $B$ ，并有 $C_j - C_B B^{-1} P_j \geq 0$ 时，才是对偶可行解。

总的说来，求线性规划问题的最优解，实际上是求得一个基，基 $B$ 既是原始问题可行基，又是对偶问题可行基，这样的基 $B$ 一旦求到，最优解也就得到。

单纯规法求这样的基 $B$ ，是从一个原始可行基转到另一个可行基，直到该基同时也是对偶可行基为止。

对偶单纯形法是从一个对偶可行基出发，再从这个对偶可行基转到另一个对偶可行基，直到该基同时是原始问题的可行基为止。

## 二、对偶单纯形算法

根据上面分析，可以知道， $B$ 阵是最优基的条件是： $X = b' B^{-1} \geq 0$

$$\bar{C} = C - C_B B^{-1} A \geq 0$$

对偶单纯形算法，是通过対偶可行基的逐次迭代，即迭代过程中始终保持所有 $\bar{C}_j \geq 0$ ，

直到所有  $B^{-1}b \geq 0$ ，迭代终止。

设有原问题：

极小化：

$$Z = CX$$

约束条件：

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

用对偶单纯形法求解。

步骤 1 列出对偶单纯形表。

$C_j \rightarrow$		$C_1$	$C_2$	...	$C_l$	...	$C_m$					常数 $b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	...	$x_l$	...	$x_m$	$x_{m+1}$	...	$x_k$	...	$x_n$
$C_1$	$x_1$	1						$y_{1,m+1}$	...	$y_{1k}$	...	$y_{1n}$
$\vdots$	$\vdots$							$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$C_l$	$x_l$							$y_{l,m+1}$	...	$y_{lk}$	...	$y_{ln}$
$\vdots$	$\vdots$							$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$C_m$	$x_m$					1		$y_{m,m+1}$	...	$y_{mk}$	...	$y_{mn}$
$\bar{C}$ 行		0	0	...	0	...	0	$\bar{C}_{m+1}$	...	$\bar{C}_k$	...	$\bar{C}_n$

表中  $y_{ij}$  为  $A$  的元素。

$$\bar{C}_l \geq 0, \text{ 因为表中基是对偶可行的}$$

$$\bar{b}_i = \begin{cases} \text{非负} \\ \text{非正} \end{cases}$$

步骤 2 选取调出的变量。

在  $b$  列中，选出最负的数，相应的基变量为  $x_l$ ， $x_l$  为调出变量。

$$\min \{ \bar{b}_i \} = \bar{b}_l \quad b_l < 0 \quad l \text{ 行为主元行。}$$

步骤 3 选进入基的非基本变量。

$$\max \left\{ \frac{\bar{C}_l}{y_{lj}} \right\} = \frac{\bar{C}_k}{y_{lk}} \quad y_{lk} < 0$$

$x_k$  为进入变量， $k$  列为主元列， $y_{lk}$  为主元。

步骤 4 以  $y_{lk}$  作为主元，作旋转变换，得一新的对偶可行基。其中新表各数为：

$$\text{新 } y_{il} = -\frac{\text{旧 } y_{il}}{\text{旧 } y_{lk}} \quad i \neq l$$

$$\text{新 } y_{ij} = \text{旧 } y_{ij} - \frac{\text{旧 } y_{ik}}{\text{旧 } y_{lk}} \text{旧 } y_{lj} \quad j \neq l$$

步骤 5 如果新  $\bar{b}_i$  仍有非正，则转回第 2 步，直到算出最优解为止。如果在第 3 步  $y_{ij}$  全为非负，则问题无可行解，终止迭代。

下面举例说明

例：求  $X$

$$\text{极小化： } Z = x_1 + 4x_2 + 3x_4$$

满足约束:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\geq 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &\geq 2 \\ x_j &\geq 0, (j=1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

解: 引进松弛变量, 写成标准形式

极小化:  $Z = x_1 + 4x_2 + 3x_4$

约束条件:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - x_6 &= 2 \\ x_j &\geq 0, (j=1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

把两个约束都乘以  $-1$ , 可以得到以  $x_5$  和  $x_6$  为基变量的标准方程。虽然, 这时的基本解对原始问题来说是不可行的, 但是由于  $\bar{C}_j$  系数为非负, 所以对于对偶问题是可行的。这样, 就得以  $x_5$  和  $x_6$  为基变量的对偶可行表, 见表 4-3-1

约束条件:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + x_6 &= -2 \\ x_j &\geq 0 (j=1, 2, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

表 4-3-1

$C_j$		1	4	0	3	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	$x_5$	-1*	-2	1	-1	1	0	-3 ←
0	$x_6$	2	1	-4	-1	0	1	-2
$\bar{C}$		1 ↑	4	0	3	0	0	

由  $x_5 = -3$ ,  $x_6 = -2$ ,  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  所组成的基本解 虽然 满足了 最优条件  $\bar{C}_j \geq 0$ , 但是却不可行。由于基变量  $x_5$  具有最小的负值, 所以选择它为调出变量。为了确定哪一个变量进入基, 观察主元行中具有负系数的是  $x_1, x_2, x_4$ , 因此只有 这三个 变量才有资格进入基。对这些变量求得比值:

$$\frac{\bar{C}_1}{y_{11}} = \frac{-1}{-1} = -1$$

$$\frac{\bar{C}_2}{y_{12}} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\frac{\bar{C}_4}{y_{14}} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\max \{-1, -2, -3\} = -1$$

所以选  $x_1$  进入基而取代  $x_5$ 。然后以  $y_{11}$  作为主元, 作旋转变换, 变换过程如下:

(1) 主元行除以  $(-1)$  即  $\frac{y_{11}}{y_{1k}}$

(2) 主元行乘以 2 与第二行相加, 得新的第二行。即, 新  $y_{2j} = \text{旧 } y_{2j} - \frac{\text{旧 } y_{2k}}{y_{1k}} \text{ 旧 } y_{1j}$

(3) 将主元行乘以 1。加至  $\bar{C}$  行。得另一新表: 表 4-3-2。

表 4-3-2

$C_j$		1	4	0	3	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
1	$x_1$	1	2	-1	1	-1	0	3
0	$x_6$	0	-3	-2	-3	2	1	-8
$\bar{C}$		0	2	1	2	1	0	

表 4-3-2 列出的解,  $x_1 = 3$ ,  $x_6 = -8$  仍为不可行的, 继续进行迭代。选  $x_6$  为调出变量, 主元行为  $x_6$  所在行, 即第二行。

选进入基的变量  $\max \left\{ \frac{2}{-3}, \frac{1}{-2}, \frac{2}{-3} \right\} = -\frac{1}{2}$

$x_3$  为进入变量, 以  $x_3$  取代  $x_6$ , 以  $y_{1k}$  作为主元, 作旋转变换得新表, 表 4-3-3。

表 4-3-3

$C_j$		1	4	0	3	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
1	$x_1$	1	7/2	0	5/2	-2	-1/2	7
0	$x_3$	0	3/2	1	3/2	-1	-1/2	4
$\bar{C}$		0	1/2	0	1/2	2	1/2	$Z = 7$

在表 4-3-3 里,  $b > 0$ ,  $\bar{C} \geq 0$ , 既是原始问题的可行解, 又是对偶问题的可行解。因此, 求得原始问题的最优解为:

$$X = (7, 0, 4, 0, 0, 0)^T$$

$Z = 7$  达到极小值。

注意: 如果主元行各数均为非负, 则问题无解。因为主元行右端常数  $\bar{b}_l < 0$ , 而所有  $y_{lj} > 0$ , 将第  $l$  约束展开就是:

$$x_{m+1}y_{l,m+1} + x_{m+2}y_{l,m+2} + \cdots + x_n y_{ln} = \bar{b}_l$$

对于全部为非负值的  $x_j$ , 显然式子左端仍为非负, 但式子右端却是负值, 可见  $l$  约束是不相容的, 从而原始问题不可行。

## § 4.4 灵敏度分析

上面所讨论的线性规划问题中, 假定各参数是肯定的,  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  都是已知的常数。但实际上这些参数往往是一些估计和预测的数字。如果市场条件一变,  $c_j$  值就会变化;  $a_{ij}$  也因工艺技术条件的改变而改变;  $b_i$  值是根据资源可供使用量变化而改变。在这样情况下, 自然地提出这样的问题:

(1) 当这些系数中的一个或多个发生变化时, 已求得的规划问题的最优解将会有什么样的变化呢?

(2) 这些系数在一个什么范围内变化, 规划问题的最优基仍然保持不变呢?

(3) 如果最优解发生了变化, 如何用最简便的方法找到现行的规划问题的最优解呢?

这些显然是决策者所关心的, 也就是灵敏度分析所要研究的问题。当线性规划数学模型系数发生了变化, 为了建立一个总的策略方针, 以应付各种偶然发生的情况, 必须研究和分析, 由于系数改变而导致最优解的改变, 这样的分析, 叫做灵敏度分析, 或称为优化后分析。下面将讨论由于:

(1) 成本系数 ( $c_j$ ) 的变化;

(2) 右侧常数 ( $b_i$ ) 的变化;

(3) 约束条件或系数矩阵 ( $A$ ) 的变化

而使最优解发生的变化, 以及如何有效地应付这些变化。这里, 通过具体的例子予以说明。

例: 某工厂计划生产甲、乙、丙三种产品, 这三种产品的单位利润分别为 2 元, 3 元, 1 元; 生产单位产品所需要的劳动力和材料如下表所列。现工厂计划部门列出线性规划的模式, 以确定最优的生产方案。

单位产品耗	产 品			可使用资源量
	甲	乙	丙	
劳动力	1/3	1/3	1/3	1
材 料	1/3	4/3	7/3	3
利润 (元)	2	3	1	

设: 计划生产三种产品产量分别为  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$

极大化:  $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

约束条件:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

引进松弛变量  $x_4$ ,  $x_5$ , 可得单纯形表:

表 4-4-1

$C_j$			2	3	1	0	0	$b$
$C_B$		基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
初始表→	0	$x_4$	1/3	1/3	1/3	1	0	1
	0	$x_5$	1/3	4/3*	7/3	0	1	3
	$\bar{C}$		2	3	1	0	0	$Z=0$
	0	$x_4$	1/4*	0	-1/4	1	-1/4	1/4
	3	$x_2$	1/4	1	7/4	0	3/4	9/4
	$\bar{C}$		5/4	0	-17/4	0	-9/4	$Z=27/4$
最终表→	2	$x_1$	1	0	-1	4	-1	1
	3	$x_2$	0	1	2	-1	1	2
	$\bar{C}$		0	0	-3	-5	-1	$Z=8$

从最终表里，可以得到生产方案是：

甲产品生产 1 个单位，

乙产品生产 2 个单位，

总利润为 8 元。

现在再进行灵敏度分析，从而取得一些有价值的资料。通过这些资料，使决策者可以掌握在最优解附近的其他生产计划方案。当客观情况发生变化时，决策者可及时作出相应的对策。正因如此，线性规划在实际工作中得到广泛应用。

### 一、目标函数系数 $C_j$ 的改变

目标函数系数的改变，也就是基变量（或非基变量）的利润或成本发生变化，现分别加以讨论。

#### 1. 非基变量目标函数系数的改变。

在表 4-4-1 中，丙产品不安排生产，因为它的单位利润  $C_3=1$ ，与产品乙相比就太小了。现在想知道，当丙产品单位利润增大至多少时，丙产品应该安排生产？如果要安排丙产品生产，即  $x_3$  要进入基， $x_3$  成为基变量。如果  $x_3$  成为基变量，并且方案已达到最优时，那么相应的检验数必为非正。即：

$$\bar{C}_1 = C_1 - C_B B^{-1} P_1 \leq 0$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= C_3 - (2, 3) \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$= C_3 - 4$$

$$\bar{C}_3 \leq 0, \quad C_3 - 4 \leq 0, \quad C_3 \leq 4$$

即当丙产品单位利润从1元增加3元至4元, 仍然不安排丙产品的生产, 当 $C_3 > 4$ , 丙产品单位利润超过4元, 应考虑丙产品的生产。

如果丙产品的单位利润增至6元, 那么目前的产品计划生产方案就不再是最优的了。应该考虑丙产品的生产, 即 $x_3$ 应该进入基, 成为基变量。现在的新方案在原来的最终表里以 $C_3=6$ 换入, 施行旋转变换, 见表4-4-2

表 4-4-2

$C_j$		2	3	6	0	0	b
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
2	$x_1$	1	0	-1	4	-1	1
3	$x_2$	0	1	2*	-1	1	2
$\bar{C}$		0	0	2 ↑	-5	-1	$Z=8$
2	$x_1$	1	1/2	0	7/2	-1/2	2
6	$x_3$	0	1/2	1	-1/2	1/2	1
$\bar{C}$		0	-1	0	-4	-2	$Z=10$

从表4-4-2可见, 新方案是甲产品生产2个单位, 丙产品生产1个单位, 乙产品不安排生产, 这样最大利润是10元。

2. 基变量目标函数系数的改变。由于基变量单位利润发生变化, 考察这一变化对目前最优解的影响。显然, 当甲产品单位利润降低到某一程度之下, 与乙产品、丙产品的单位利润相比之下小得多, 是不应该生产甲产品的, 即 $x_1$ 退出基成为非基变量。如果甲产品的单位利润增加到某一水平之上, 与乙、丙产品比较大得多, 生产甲产品是最为有利, 这样乙、丙产品自然不全安排生产, 上述两种情况都会改变现行的最优基的, 如果 $C_1$ 在某范围内变化, 而又保持现行最优基不变, 这个范围如何找到呢?

对于求基本变量的变化范围, 是不能采用对求非基本变量变化范围那样的方法。因为对于基变量来说, 检验数 $\bar{C}_B = C_B - C_B B^{-1} B = 0$ 永远是等于零。但是, 如果要保持最优基, 所有检验数必须满足:  $\bar{C}_N \leq 0$  根据这个不等式, 可以求出基变量目标函数系数的变化范围, 又保持最优基不变。

$$\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} P_N \leq 0$$

$$\bar{C}_3 = C_3 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= 1 - (C_1, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 - 5 \leq 0, C_1 \leq 5$$

$$\bar{C}_4 = C_4 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$$

$$= 0 - (C_1, 3) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -4C_1 + 3 \leq 0 \quad C_1 \geq \frac{3}{4}$$

$$\bar{C}_5 = C_5 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \end{pmatrix}$$

$$= 0 - (C_1, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 - 3 \leq 0 \quad C_1 \leq 3$$

只要 $C_1$ 的变化不超出上述的界限, 最优基就保持了。因此, 如果 $C_1$ 的范围选择为 $[3/4, 3]$ , 那末所有的检验数 $\bar{C}_i$ 保持非正, 而目前的解 $X = (1, 2, 0)^T$ 仍旧是最优。当然, 当 $C_1$ 变化时, 目标函数的最优值将起变化。例如,  $C_1 = 1$ 时, 最优解为 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$ , 但是最大利润为7元。当 $C_1$ 值超出了敏感分析所定的界限时, 由于非基 $\bar{C}_i$ 之一将变成正值, 原来最优解就发生了变化了, 不再为最优, 这样必须再次运用单纯形法, 来求得新的最优解。

如果以 $\Delta C$ 表示基变量目标函数系数的变化量, 对于基变量目标函数的变化范围的计算, 从对 $C_1$ 变化分析过程中, 可以推出有如下的简化计算式子:

$$[C - \Delta^- C, \quad C + \Delta^+ C]$$

其中,

$$\Delta^- C = \min_j \left\{ \left| \frac{\bar{C}_j}{a_{ij}} \right|, a_{ij} > 0 \right\}$$

$$\Delta^+ C = \min_j \left\{ \frac{\bar{C}_j}{a_{ij}}, a_{ij} < 0 \right\}$$

如例最终表4-4-1, 基变量为 $x_1, x_2$ , 若要保持现行方案的最优性, 相应 $C_1, C_2$ 的可变化范围计算为:

$$[C_1 - \Delta^- C_1, \quad C_1 + \Delta^+ C_1],$$

$$\Delta^- C_1 = \min_j \left\{ \left| \frac{\bar{C}_j}{a_{1j}} \right|, a_{1j} > 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \left| \frac{-5}{4} \right| \right\} = \frac{5}{4},$$

$$\Delta^+ C_1 = \min_j \left\{ \frac{\bar{C}_j}{a_{1j}}, a_{1j} < 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{-3}{-1}, \frac{-1}{-1} \right\} = 1$$

$$C_1 \text{ 可变化范围为: } \left[ 2 - \frac{5}{4}, 2 + 1 \right] = \left[ \frac{3}{4}, 3 \right]$$

结果与解不等式  $\bar{C}_1 = C_1 - C_B B^{-1} P_1 \leq 0$  相同。



现再利用简化式子计算 $C_2$ 的可变化范围。

$$[C_2 - \Delta^- C_2, C_2 + \Delta^+ C_2]$$

$$\begin{aligned}\Delta^- C_2 &= \min_j \left\{ \left| \frac{\bar{c}_j}{a_{2j}} \right|, a_{2j} > 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \left| \frac{-3}{2} \right|, \left| \frac{-1}{1} \right| \right\} = 1 \\ \Delta^+ C_2 &= \min_j \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{2j}}, a_{2j} < 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{-5}{-1} \right\} = 5\end{aligned}$$

$C_2$ 可变化范围为： $[3 - 1, 3 + 5] = [2, 8]$

3. 基变量和非基变量的利润系数同时改变。处理方法类似上两种情况，以新的目标函数系数代入最终表计算检验数 $\bar{C}_j$ ，若 $\bar{C}_j \leq 0$ ，则原最优解不变，若 $\bar{C}_j \leq 0$ 不满足，再施行迭代运算求出新的最优解。

例如三种产品的利润系数都起了变化，目标函数变为： $Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$ ，从表4-4 1最终表可以算出检验数 $\bar{C}_j$ ， $\bar{C}_N = (\bar{C}_3, \bar{C}_4, \bar{C}_5)$ ， $C_B = (C_1, C_2)$

$$\begin{aligned}\bar{C}_3 &= C_3 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \\ &= 2 - (1, 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -5 < 0 \\ \bar{C}_4 &= C_4 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} \\ &= 0 - (1, 4) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \bar{C}_5 &= C_5 - (C_1, C_2) \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \end{pmatrix} \\ \bar{C}_5 &= 0 - (1, 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 < 0 \\ \bar{C}_1 &= \bar{C}_2 = 0\end{aligned}$$

所有 $\bar{C}_j$ 都为非正，最优解没有改变，即  
 $X = (1, 2, 0)^T$ ， $Z = 9$ 元达到最大。

## 二、改变右侧常数 $b_i$

在单纯形算法中，曾经阐述过，在标准形式的线性规划问题里，右端常数有非负的要

求, 亦即相应的基变量的值是满足非负约束的, 因此有,  $b \geq 0$

在修正单纯形法中, 求一组新的基本可行解的值  $\bar{b}$ , 是由下面式子算出来的。

$$\bar{b} = B^{-1}b, \bar{b} \geq 0, B^{-1}b \geq 0.$$

如果要保持现在最优基不变的情况下, 保持所有  $\bar{C}_j \leq 0$ , 并根据  $B^{-1}b \geq 0$  这个关系, 可以确定  $\bar{b}$  的变化范围。而  $B^{-1}$  可以在单纯形表里得到, 现以 §4.4 例为例予以说明。

现在假设该工厂增加一个劳动力, 那么表 4-4-1 中初始表右端常数:

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{改变为} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

而其他任何参数不变。现在需要讨论:

1. 增加了劳动力, 最优基是否会改变? 即生产甲、乙两种产品而不生产丙产品是否仍为最优选择? 各种产品的产量应该是多少?

2. 劳动力发生了变化, 利润值相应发生变化, 劳动力在哪一范围内变化, 于利润值的改善有利?

增加了劳动力, 想知道最优基有没有改变, 只要检验一下  $\bar{C}_j$  是否满足非负; 由于除了常数  $b$  改变外, 其余各系数均不变, 显然, 检验数  $\bar{C}_j$  是没有变化的, 仍然满足非负,  $\bar{C}_j \leq 0$ , 可见最优基没改变; 只生产甲、乙两产品不生产丙产品仍然是最优选择。

由于劳动力增加了, 显然生产甲、乙产品数量有所改变, 新的生产量应为:

$$\bar{b} = B^{-1}b \quad B = (P_1, P_2), \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 4 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Z' = C_B \bar{b} = (2, 3) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 13$$

即当劳动力增加 1 个, 从 1 增至 2 时, 相应的最优解为甲产品生产 5 单位, 乙产品生产 1 单位, 这时利润值  $Z = 13$  (元)

原来  $Z = 8$  元, 增加一个劳动力, 使利润增至 13 元, 显然一个劳动力创造利润值为  $Z' - Z = 5$  (元), 如果一个劳动力的加班费为 4 元, 每增加一个劳动力, 可使厂方有  $5$  元  $- 4$  元  $= 1$  元的收益。通过加班来增加劳动力用以生产, 于工厂是有经济收益的。但应加班多少个劳动力呢? 显然不能任意地扩大, 因为还有材料限制, 加班多了, 劳动力过剩, 每劳动力创造利润值不再是 5 元了。这就要知道使单位劳动力创利润值 5 元的劳动力变化范围, 即对  $b_1$  的变化范围的讨论。

设  $b^*$  为变化后右端常数向量。

$$b^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

现保持最优基仍为  $B = (P_1, P_2)$ ，新的最优解

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b^* \geq 0 \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

代入有：

$$B^{-1}b^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_1 - 3 \\ -b_1 + 3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$4b_1 - 3 \geq 0 \quad b_1 \geq \frac{3}{4},$$

$$-b_1 + 3 \geq 0 \quad b_1 \leq 3.$$

$b_1$  的变化范围为：

$$\frac{3}{4} \leq b_1 \leq 3$$

只要劳动力的供应数量在  $\frac{3}{4}$  (  $\frac{3}{4}$  个劳动力可理解为 6 小时工作 ) 个与 3 个之间，生产甲、乙两种产品是优选择，即原来最优基不变。但最优解和最大利润值将改变，计算式子为

$$x_1 = 4b_1 - 3$$

$$x_2 = -b_1 + 3$$

$$x_3 = 0$$

最大利润为：

$$\begin{aligned} Z &= 2(4b_1 - 3) + 3(-b_1 + 3) \\ &= 5b_1 + 3 \text{ (元)} \end{aligned}$$

若  $b_1 = 3$ ，则利润值为  $Z = 5 \times 3 + 3 = 18$  (元)

现在回过头来小结一下开始时提出两个讨论问题，当  $b$  改变，而最优基不变，相应的基变量值将发生改变，新的值的计算式：

$$X = \bar{b} = B^{-1}b$$

变化范围的计算式：

$$B^{-1}b^* \geq 0$$

与基变量目标函数  $C$  可变化范围简算式子的推出相仿，约束条件常数可变化范围计算也可用简化式子计算。若以  $\Delta b_i$  表示约束条件右端常数的变化量，要保持当前的最优基不变，常数可变化范围的计算有如下的简化计算式子：

$$[b_i - \Delta^- b_i, b_i + \Delta^+ b_i]$$

其中

$$\Delta^- b_i = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}}, a_{is} > 0 \right\}, s = n + 1$$

$$\Delta^+ b_i = \min_i \left\{ \left| \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \right|, a_{is} < 0 \right\}$$

如例最终表 4-4-1，要保持现行基仍为最优，即  $x_1, x_2$  仍为基变量，约束条件右端常数  $b_1$  的可变范围计算为：

$$[b_1 - \Delta^- b_1, b_1 + \Delta^+ b_1]$$

$$\Delta^- b_1 = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{i4}}, a_{i4} > 0 \right\} \quad s=3+1$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta^+ b_1 = \min \left\{ \left| \frac{\bar{b}_i}{a_{i4}} \right|, a_{i4} < 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{2}{1} \right\} = 2$$

$$\left[ 1 - \frac{1}{4}, 1 + 2 \right] = \left[ \frac{3}{4}, 3 \right]$$

结果与解不等式  $B^{-1}b \geq 0$  求得的结果相同。 $b_2$  的可变化范围计算为:

$$[b_2 - \Delta^- b_2, b_2 + \Delta^+ b_2]$$

$$\Delta^- b_2 = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{i5}}, a_{i5} > 0 \right\} \quad s=3+2$$

$$= \min \left\{ \frac{2}{1} \right\} = 2$$

$$\Delta^+ b_2 = \min \left\{ \left| \frac{\bar{b}_i}{a_{i5}} \right|, a_{i5} < 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \left| \frac{1}{-1} \right| \right\} = 1$$

$$[3-2, 3+1] = [1, 4]$$

### 三、约束矩阵 $A$ 的改变

约束矩阵  $A$  改变, 往往是由于下面三种原因引起的:

- (1) 增加新的产品生产 (增加新的变量);
- (2) 现行的产品生产资源消耗量发生改变 ( $a_{ij}$  发生变化);
- (3) 要求增加新的技术或资源 (增加了新的约束条件)。

下面分别予以讨论。

1. 增加新的产品生产。假设该工厂研究出一种新的产品丁, 每生产一单位产品丁, 需要 1 个劳动力和 1 单位原料, 单位利润为 3 元, 丁产品销路很好。现在想知道, 在原有资源量不变情况下, 安排生产产品丁于工厂是否有利。

要想知道生产产品丁是否有利, 只要算出其相对利润值  $\bar{C}$ , 如果  $\bar{C} > 0$ , 说明能使总利润  $Z$  增大应安排丁产品生产, 如果  $\bar{C} < 0$ , 表明将使总利润  $Z$  减小, 不必考虑丁产品生产。

设  $x_6$  为生产丁产品的数量, 有:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_6 \quad \text{达到最大}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 + x_6 &= 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 + x_6 &= 3 \\ x_j &\geq 0, (j=1 \cdots 6)\end{aligned}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1} P_j$$

$$\bar{C}_6 = C_6 - (C_1, C_2) B^{-1} P_6$$

$$= 3 - (2, 3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - (5, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -3 < 0 \quad \text{表明不应生产了产品。}$$

2. 现行的产品生产资源消耗量发生改变。当产品丙（非基变量）的单位产品资源消耗量，劳动或材料的消耗量变化时，对优方案分析的方法与增添新产品的情况相同。如果产品甲、乙（基变量）的约束条件系数发生变化，那就基阵也将受到影响，在这样情况下，应该对此规划重新计算。

3. 增添了新的约束条件，如果产品甲、乙和丙，各需要增加某一设备的加工处理，该设备能提供使用的总数为10小时，每单位甲、乙、丙产品各需加工时间为1小时，2小时和1小时。这样，相当于在原始问题的数学模式上，添加一个新的约束条件，其形式为：

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

现在想知道，增加了新约束后原来的最优解  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$  是否仍为最优解。实际上，增添新约束肯定不会使线性规划问题的最优值增大的，至多是不变，一般情况下，最大利润将会降低的，此外，考虑原来的最优解是否能使新添约束得到满足，如果是满足的，那原来的最优解不变，如果不满足，那就在原最终表添上新添约束，再施行迭代计算，以取得新的最优解，这新的最优值，会比原来的最优值有所减少。

当  $x_1 = 1, x_2 = 2$  时，

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 < 10, \quad \text{满足新约束。因此多了一个约束}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \quad \text{最优解仍为:}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, Z = 8 \text{ (元)}$$

如果现在这设备仅有4小时可供使用，那新约束为：

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$ ，这时  $x_1 = 1, x_2 = 2$  就不满足此约束，必须求新的最优解，就得把新的约束添到原最终单纯形表中去，然后施行迭代计算，从而获得新的最优解。不过在把新约束放进单纯形表之前，首先要把它化为标准形式，原来  $x_1, x_2$  为基变量，基变量要以非基变量表出。

根据单纯形的终表有（见表4-4-1）

$$x_1 + 0x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 1$$

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2$$

$x_1, x_2$  用非基变量表出:

$$x_1 = 1 + x_3 - 4x_4 + x_5$$

$$x_2 = 2 - 2x_3 + x_4 - x_5$$

新约束标准形式为

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 4$$

$x_1, x_2$  以非基变量表出式代入:

$$(1 + x_3 - 4x_4 + x_5) + 2(2 - 2x_3 + x_4 - x_5) + x_3 + x_6 = 4$$

整理后:  $-2x_3 - 2x_4 - x_5 + x_6 = -1$

把整理后的约束放进表里, 进行迭代, 得最优解, 见表4-4-3。

表 4-4-3

$C_j$		2	3	1	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
2	$x_1$	1	0	-1	4	-1	0	1
3	$x_2$	0	1	2	-1	1	0	2
0	$x_6$	0	0	-2	-2	-1	1	-1
$\bar{C}$		0	0	-3	-5	-1	0	
2	$x_1$	1	0	1	6	0	-1	2
3	$x_2$	0	1	0	-3	0	1	1
0	$x_5$	0	0	2	2	1	-1	1
$\bar{C}$		0	0	-1	-3	0	-1	$Z=7$

即 原问题为

极大化:  $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

约束条件:  $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

最优解为:  $x_1 = 1, x_2 = 2, Z = 8$

增加新约束条件:  $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$

最优解为:  $x_1 = 2, x_2 = 1$

$x_3 = 1$  (可理解为尚有一单位材料未加使用) 最大利润  $Z = 7$

以上说明了各种条件发生变化后, 重新再求得最优解的方法。这种优化后的分析, 得到的信息, 较之最优值本身具有更为多的价值, 在实际工作中更有意义。

## 第五章 线性规划的特殊类型及目标规划

在实际工作中，往往碰到有些约束方程组系数矩阵具有特殊结构的线性规划问题，如运输问题和分派问题。对于这一类问题的求解方法，固然可以用单纯形法，但可以用比单纯形法更为省事的方法，就是表上作业法和匈牙利法。

### § 5.1 表上作业法

同单纯形法类似，用表上作业法求解运输问题时，首先给出一个初始方案，一般地，这个初始方案不会是最优的，因此需要给出一个判别是否达到最优的准则，并且对初始方案进行调整，改变，直到求得最优方案为止。

下面通过例子来具体地说明表上作业法的计算步骤。

例：某服装总厂的产品供应给  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ 、 $D_4$  等四家大商店。 $D_1$  需要 40 箱， $D_2$  需要 20 箱， $D_3$  需要 50 箱， $D_4$  需要 20 箱。这个服装总厂的三个分厂是  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ ，它们的产量分别为 55 箱，45 箱，30 箱。请问如何安排供应，使得总运输费用最小。

要解决这个问题，首先调查各分厂（产地）到商店（销地）每箱产品的运价，再根据现场资料，整理出一个运价表，见表 5-1-1-a。

表中方格右上方小框内的数字，表示单位货物的运价，如  $S_1$ 、 $D_1$  对应格右上方小框内的数字 12，表示第一分厂  $S_1$  每送一箱产品到商店  $D_1$  需付出运费是 12 个单位； $S_3$ 、 $D_4$  对应格右上方小框内的数字 7，表示第三分厂  $S_3$  每送一箱产品到商店  $D_4$  需付出运费 7 个单位，其余依此类推。

此外，根据产销的数量，列出一个产销平衡表，见表 5-1-1-b。

表中最右一列的 55，45，30 分别表示分厂  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  的产量；最后一行的 40，20，50，20 分别表示商店  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ 、 $D_4$  的需要量。为了计算方便，往往把运价表和产销平衡表合起来使用，如表 5-1-1-c。有了运价表和产销平衡表后，就可以开始运算。

表 5-1-1-a 运 价

		销 地			
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
产 地	$S_1$	12	4	9	5
	$S_2$	8	1	6	6
	$S_3$	1	12	4	7

表 5-1-1-b 产销平衡

		销 地				产量
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
产 地	$S_1$					55
	$S_2$					45
	$S_3$					30
销 量		40	20	50	20	130

表 5-1-1-c

		销 地				产量
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
产 地	$S_1$	12	4	9	5	55
	$S_2$	8	1	6	6	45
	$S_3$	1	12	4	7	30
销 量		40	20	50	20	130

计算的步骤是：

- (1) 作出初始方案。
- (2) 检查方案是否最优。
- (3) 如果方案不是最优，便进行调整，以得出新方案。
- (4) 每得一个新方案，都必须检查它是否最优方案，如果不是，就转回步骤③，再进行调整，直至得到最优方案为止。

如何作出一个初始方案呢？方法有多种，如西北角法，最小元素法，大小元素法等，这里先介绍最常用的一种——最小元素法。



最小元素法就是在运价表中，选一个在产销之间运价最小的优先安排，比如在表 5-1-1c 中，最小运价是 1，于是先让产地  $S_3$  供给销地  $D_1$ （也可以先让产地  $S_2$  供给销地  $D_2$ ）， $D_1$  需要 40 箱， $S_3$  就把它的全部产品 30 箱供给  $D_1$ （把 30 填在格内），产地  $S_3$  再也没有供给能力了，于是把  $S_3$  行划去，并从  $D_1$  列的销量 40 减去 30 得 10（把 40 划去，并在其下填下 10），见表 5-1-2a。然后，继续寻找运价最小的，这时是产地  $S_2$  到销地  $D_2$  的运价最小，也是 1。 $D_2$  需要量是 20 箱，产地  $S_2$  就供给 20 箱（把 20 填在格内）。这时，销地  $D_2$  已经满足，于是把  $D_2$  这一列划去（这是第二次划去），并在  $S_2$  行的产量 45 减去 20，余 25（在  $S_2$  产量格内把 45 划去，并在其下填上 25），见表 5-1-2a。继续在没有划去的行和列中重复上述步骤。经过有限次，便可以得出一个初始方案，在见表 5-1-2b。这里应该注意的是，填在空格内的数字的个数等于行数加列数减 1。本例填在空格上的数字的个数为：3 + 4 - 1 = 6（个数字）

初始方案的总运费（Z）是：

$$Z = 12 \times 10 + 9 \times 25 + 5 \times 20 + 1 \times 20 + 6 \times 25 + 1 \times 30 = 645$$

表 5-1-2a

		销 地				产量
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
产地	$S_1$	10 12	4	25 9	20 5	55 35 20 0
	$S_2$	8	1 20	6 25	6	45 25 20 0
	$S_3$	1 30	12	4	7	30 0
	销量	10 10 0	20 0	50 25 0	20 0	130

第四次划去  
第一次划去

第六次划去      第二次划去      第五次划去      第三次划去

表 5-1-2-b 初始方案

		销 地				产量
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
产地	$S_1$	10 12	4	25 9	20 5	55
	$S_2$	8	1 20	6 25	6	45
	$S_3$	1 30	12	4	7	30
	销量	40	20	50	20	130

$$Z = 645$$

如何检验初始方案是否最优呢？这里介绍一个方法，叫做闭回路法。

闭回路法就是在初始方案中，对于没有数字的空格（运价除外）找闭回路，可以先从任意某一空格开始，沿着水平或垂直的方向前进，当遇到一个有适当数字（如有利于回到原来空格的数字）的方格，就转 $90^\circ$ 继续前进，再遇到一适当数字的方格，又转向 $90^\circ$ 前进，这样重复一定次数后必会回到原来的空格，构成一条闭回路。如果遇到有数字的方格不转向而继续前进也是可以的，但是转角点一定要有数字（运价除外）。这里，把初始方案中的各个空格的闭回路表示出来，见表5-1-3（a）至（f）。

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$S_1$	10	12	4
$S_2$	8	1	6
$S_3$	1	20	25

表5-1-3（a）

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$S_1$	10	12	4
$S_2$	8	1	6
$S_3$	1	20	25

表5-1-3（d）

	$D_3$	$D_4$
$S_1$	25	9
$S_2$	6	6

表5-1-3（b）

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$S_1$	10	12	4
$S_2$	8	1	6
$S_3$	1	20	25

表5-1-3（e）

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$S_1$	10	12	4
$S_2$	8	1	6

表5-1-3（c）

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$S_1$	10	12	4	25
$S_2$	8	1	6	6
$S_3$	1	20	25	4

表5-1-3（f）

各条闭回路都找出来后，就要求它的检验数。在实际运算中往往是每找出一条闭回路，就马上求一个检验数，而不必等到全部闭回路都找出。

下面谈谈怎样求检验数。把闭回路的第一、3、5…个转角点的运价乘以 $-1$ ，然后和2、4、6…个转角点，以及空格本身的运价全部累加起来，这个结果叫做该空格的检验数。各空格检验数为：

$$\begin{aligned}
 4 - 1 + 6 - 9 &= 0 (+) \quad \text{表 5-1-3 (a)} \\
 6 - 6 + 9 - 5 &= 4 (+) \quad \text{表 5-1-3 (b)} \\
 8 - 6 + 9 - 12 &= -1 (-) \quad \text{表 5-1-3 (c)} \\
 12 - 1 + 12 - 9 + 6 - 1 &= 19 (+) \quad \text{表 5-1-3 (d)} \\
 4 - 1 + 12 - 9 &= 6 (+) \quad \text{表 5-1-3 (e)} \\
 7 - 1 + 12 - 5 &= 13 (+) \quad \text{表 5-1-3 (f)}
 \end{aligned}$$

把每一个空格的检验数依照上述方法求出后，填入检验数表中（见表 5-1-4），根据表可以判别这个方案是否最优。

表 5-1-4 检验数表一

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$S_1$	10	+	25	20
$S_2$	-	20	25	+
$S_3$	30	+	+	+

判别的法则是：

如果所有的检验数都不是负数，那么就可以肯定此方案是最优的；如果有负的检验数出现，那么总运输费用继续有减少的可能，说明这个方案就不是最优。以表 5-1-4 的检验数为例，由于表中有负的检验数，说明这个初始方案不是最优，应该加以调整。

调整的原则是这样的：从检验数是负的那个空格开始，沿着闭回路前进，把单数的转角处的数字记下来，如本例是 25，10，取出最小的一个数 10，该格成为新的空格，然后把 10 置到这个空格里，并且以它为起点，沿着闭回路前进，遇到第一个转角点减去 10，第二个转角点加上 10，第三个转角点减去 10，如此下去，直到回到原来的空格，其余的各数不变。为什么要这样交替地进行加、减 10 呢？这是为了继续满足各个约束条件。见表 5-1-5。

经过对初始方案的调整，得到一个比初方案有改进的新的方案，新方案见表 5-1-6。

表 5-1-5

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	
$S_1$	10 ○		⑤ 25	
	-		+	
$S_2$	+		-	
	⑩		⑩ 25	

表 5-1-6 新方案

		销 地				产量
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
产 量	$S_1$	12	4	9	5	55
	$S_2$	8	1	6	6	45
	$S_3$	1	12	4	7	30
销量		40	20	50	20	130

$$Z=835$$

这个新方案是否最优，还得按上述检验方法作出检验表来审查。见表 5-1-7。如果检验表中再没有负数出现，说明这个方案就是最优的了。

表 5-1-7 检验数表二

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$S_1$	+	+	35	20
$S_2$	10	20	15	+
$S_3$	30	+	+	+

从表 5-1-7 中可见，里面再没有负数，于是可以判断，新的方案就是最优的。最优方案是： $S_1$ 供给  $D_3$ 35箱， $D_4$ 20箱； $S_2$ 供给  $D_1$ 10箱， $D_2$ 20箱， $D_3$ 15箱； $S_3$ 供给  $D_1$ 30箱。

这时总运费 ( $Z$ ) 为：

$$Z=9 \times 35 + 5 \times 20 + 8 \times 10 + 1 \times 20 + 6 \times 15 + 1 \times 30 = 635$$

可以看出，新方案比初始方案减少运费

$$645 - 635 = 10$$

对于这一类求最小值的运输问题，找出初始方案的方法不仅最小元素法一种。这里，再介绍另一种方法——大小元素法。这种方法的重点是：先在运价表中找出最大的运价，然后在这个最大运价所在的行和列中找出最小的，并优先满足它，同时把已满足的行或列划去。其后，在没有划去的运价表中找最大的运价，再重复上面的做法，一直到运价表中所有行和列都划去为止。

现在用上面例子说明这个方法。

在运价和平衡表表 5-1-1c 中，最大的运价是  $S_1D_1$  的 12 和  $S_3D_2$  的 12，于是在  $S_3$  行和  $D_2$  列中找出最小运价是 1。考虑到先满足它们，所以在运价最小的  $S_2D_2$  填上 20（也可以在  $S_3D_1$  填上 30），并划去  $D_2$  列，继续下去是：

在  $S_3D_1$  填上 30，划去  $S_3$  行；

在  $S_1D_4$  填上 20，划去  $D_4$  列；

在  $S_2D_1$  填上 10，划去  $D_1$  列；

在  $S_2D_3$  填上 15，划去  $S_2$  行；

在  $S_1D_3$  填上 35，划去  $D_3$  列。这样得出初始方案，见表 5-1-8。

表 5-1-8 用大小元素法找初始方案

		销 地				产量
		$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
产 地	$S_1$	12	4	9	5	55
	$S_2$	8	1	6	6	45
	$S_3$	1	12	4	7	30
		10	20	15		
		30				
量 销		40	20	60	20	130

(4)    (1)    (6)    (3)

$Z=635$

（表框外小括号内数字表示划去的顺序）

对表 5-1-8 进行检验可知，这个方案是最优方案。有时，用大小元素法寻找初始方案，会比用最小元素法较为优胜。如本例，它的初始方案就是最优方案，但并不是所有的问题都是这样，所以对每一方案还是要检验的。

表上作业法还可以应用到生产调度问题，例如某飞机制造公司专造商用飞机，供各地使用，在生产过程中最后阶段是制造其发动机，且并装进已完成的飞机骨架里。根据合同，交货量分别为：

月 份	1 月	2 月	3 月	4 月
架 数	10	15	25	20

该公司最大生产能力为：

月 份	1 月	2 月	3 月	4 月
架 数	25	35	30	10

生产发动机的各种设备所需成本，由于在某时间里设备进行维修，技术革新及可用以生产其他产品等各种因素，使得发动机生产的成本有波动，其变化情况如下所列。

月 份	1 月	2 月	3 月	4 月
每台发动机成本	1.08	1.11	1.10	1.13

(百万元)

由于生产成本的变化，可能在某一个月制造成本低时多产些发动机，留到以后三个月用，但这样一来，这些发动机需要贮存到某一个日期，每台要多付出贮存费用，每月每台 0.015 万元，（包括已消耗资金的利息），现在要订出一个进度表，每月应安排生产发动机多少台，使总的成本达到最小。

解：由于存贮费，因此一月生产发动机每台成本：一月分为 1.08 百万元，二月分才卖出去，那么它的成本加上贮存费  $0.015$  百万元， $1.08 + 0.015 = 1.095$  百万元，若留到三月分才卖出，再加多贮费，即  $1.095 + 0.015 = 1.110$  百万元，留到四月分才卖出，则费用再多  $0.015$  百万元，即  $1.110 + 0.015 = 1.125$  百万元，或  $1.08 + 0.015 \times 3 = 1.125$ 。其余二、三月生产的发动机成本也按上述方法计算，把它列成一表，见表 5-1-9。

表 5-1-9

单位成本		收 点 (月份)				未使用 生产力	产生量 (台)
		1	2	3	4		
发 点 (月 份)	1	1.08	1.095	1.11	1.125	0	25
	2		1.11	1.125	1.140	0	35
	3			1.10	1.115	0	30
	4				1.130	0	10
需 求 量		10	15	25	20	30	100

用最小元素法方法，得到一初始方案，见表 5-1-10。

表 5-1-10

单位成本		收 点 (月份)				未使用 生产力	生产量 (台)
		1	2	3	4		
发 点 (月 份)	1	1.08 10	1.095 15	1.11	1.125	0	25
	2		1.11 0	1.125	1.140 5	0 30	35
	3			1.10 25	1.115 5	0	30
	4				1.130 10	0	10
需求量 (台)		10	15	25	20	30	100

经检验, 所有检验数均为非负, 此方案为最优, 最优生产方案为:

一月份生产25台, 10台本月用, 15台留到二月份用;

二月份生产5台, 留到四月份用;

三月份生产30台, 25台本月用, 5台留到四月份用。

四月份生产10台, 本月用。

这样最小生产成本为:  $Z=77.3$  (百万元)

## §5.2 分派问题

分派问题是运输问题的特例, 如果当运输问题中的行与列的数目相等, 并供需量都是1时, 也就是分配的数值在矩阵的行列中如果不是1, 就是零, 这样的运输问题, 就是分派问题了。解决分派问题, 可以用匈牙利法, 这方法是由匈牙利数学家 D. Koning 提出来的, 下面通过例子说明匈牙利法。

例: 假设有三件任务 A、B、C 分配给三个工人甲、乙、丙去做, 各人的工作能力和技术水平不同, 因而完成某项工作所取得的效果也不同, 三人的工作效果列于表 5-2-1。这个表叫做效果表。现在要求每件工作都由一个适当的工人担任, 使总效果达到最大。

表 5 2 1 效果表

效 果		工 作		
		A	B	C
工 人	甲	10	2	4
	乙	7	8	7
	丙	3	9	5

当然，这个问题也可以用另一种形式表示，比如说，怎样分派工作，才能使得总费用达到最小。这样，表中的数字就应该是表示完成某项工作所需要的费用，此时这个表，叫做费用表。

如果目标是使总费用最小，那么最优解就是求最小值问题。如果目标是使总效果最大，那么就是求最大值问题。

本例的分派方案有许多个，因为三个工人中，随便那一个都可以分派去完成任意一项任务，如果把可能的分派方案都一一列举出来，再逐个方案进行计算、比较，然后才选出一个使总效果最大的方案，那是十分麻烦的，其实也没有必要。

下面谈谈用匈牙利法求分派问题最优解的思路及步骤。

第一步：匈牙利法实质上是一种求最小值的方法，如果问题是求最大效果，那末，就要经过这一步，把问题转换成求最小值，再应用匈牙利法解出。如果问题是求最小费用或工时等一类问题，就不必经过这一步，直接从第二步开始便可以。转换方法如下：

在效果表中优先考虑效果最高的一个元素，如在表 5-2-1 中，甲工人完成 A 任务的效果最大，是 10，这就是说把任务 A 分派给甲工人是适宜的。于是把矩阵中各个元素用 10 去减，得到一个新的矩阵，这叫做缩减矩阵，如表 5-2-3 所列。在这个缩减矩阵中，各元素均由表 5-2-2 最大效率值 10 与每个数值的差额数组成的。差额大，表示原来的效率小，差额小，表示原来的效率大。因此，要求一个问题总的效率达到最大，只要通过求这个问题总的差额最小就可以获解。这样，原来求最大值的问题，都变成求最小值的问题。

表 5-2-2

10	2	4
7	8	7
3	9	5

表 5-2-3

0	8	6
3	2	3
7	1	5

表 5-2-4 单位：元

费 用		任 务		
		A	B	C
工 人	甲	0	8	6
	乙	3	2	3
	丙	7	1	5

表 5-2-5 单位：元

费 用		任 务		
		A	B	C
工 人	甲	0	7	3
	乙	3	1	0
	丙	7	0	2

第二步：经过第一步的变换，把求最大值问题转换为求最小值问题，为了说明的方便，不妨暂假设有另一问题的费用表如表 5-2-4 所示，目的是求出最优的分派方案，即总的费用最小的方案。在表 5-2-4 中，从任务 A 来看，如果由丙去完成，所需费用为七元，由乙去完成只需三元，而由甲去完成，费用为零元。显然，由甲去完成所需费用最低，因此，把任务 A 分派给甲是适宜的。对于任务 B，由丙去完成所需费用最低，于是，在 B 列的三个



元素都减去1，这样B列的三个元素变成7，1，0；同样地，对于任务C也作类似的处理。于是，得到一个新的矩阵，见表5-2-5。表5-2-5每列中的0，表示某工人担任对应任务的费用最低。

第三步：由于每个人只分派一种任务，而每种任务只由一人完成，因此把已经分派了任务的人，或已有人去做的工作，在相应的列或行上用一根直线划去。例如表5-2-5中工人乙的一行上有一个零，表示乙适宜安排完成C任务，于是把带零的一行划去，表明不再安排其他任务给乙。对甲、丙也作同样的处理，这样就得到一个最优的分派方案。这里，要求能够用最少的直线根数去划掉所有的零。如何衡量一个分派方案是否最优呢？从上述可以知道，每一项任务的安排，先是从费用最低的考虑，在最低费用的基础上再看看是否每个人都安排了一项任务，而且每项任务是否都有一个人去完成，如果满足了这个要求，那末这个方案就是最优的。对矩阵来说，划去矩阵中所有的零的最少直线根数，等于矩阵阶数，这就是最优方案的标志。因此，所求得的最优分派方案是乙工人分派C任务，甲工人分派A任务，丙工人分派B任务。根据表5-2-6可以计算出，完成任务的总费用是 $0 + 1 + 3 = 4$ （元）。

但例1的目标是求总效果的最大值，即求最大值问题，对照表5-2-1，很容易地看出，当A工作由甲去完成效果最大为10，B工作由丙去完成效果最大为9，C工作由乙去完成效果最大为7，这样的工作分派就可以获得最大的总效果，就是 $10 + 9 + 7 = 26$ 。

现在将表5-2-1和表5-2-4加以比较。前者是一个求最大值的问题，它的最优分配是：

A任务由甲去完成；

B任务由丙去完成；

C任务由乙去完成；

后者表5-2-4是一个求最小值的问题。表5-2-4内的各个数，由表5-2-1相应各个数减去最大数10，乘以-1而得到。表5-2-1，5-2-2的问题具有相同的分配方案，直观地可以知道，求一个问题的最大值，可以把该问题转换为另一个求最小值的问题，然后用匈牙利法去寻求这个问题的最优解。

然而，在实际问题中，一次求得最优方案的情况是不多见的。往往遇到有些任务没有人去做，或某些人没有分派到任务的情况。对矩阵来说，这种情况就表现为划去零的最少直线根数和矩阵数不相等。因此就必须作相应的调整、转换，这就是第四步的工作。

第四步：现在再假设有一费用表如表5-2-7所列，求一分派方案，使总费用达到最小。

表 5-2-6		单位：元		
费 用		任 务		
		A	B	C
工 人	甲	0	8	6
	乙	3	2	3
	丙	7	1	5

表 5-2-7		单位：元		
费 用		工 作		
		A	B	C
工 人	甲	25	31	35
	乙	15	20	24
	丙	22	19	17

表 5-2-8

25	31	35
15	20	24
22	19	17

表 5-2-9

10	12	18
0	1	7
7	0	0

表 5-2-10

10	12	18
0	1	7
7	0	0

表 5-2-11

10	11	17
0	0	6
8	0	0

按照上面的步骤，把费用表 5-2-7 的数字排列成表 5-2-8，各列减去该列最小的数，即第一列减去 15，第二列减去 19，第三列减去 17，得到表 5-2-9。表明，乙工人分派 A 任务为宜，丙工人则宜分派 B 和 C 任务，甲工人则没有事干。显然，这是不符合题目要求的，因为在矩阵中只用两根直线就划去了所有的零（见表 5-2-10），直线的根数少于矩阵的阶数 3。因此，需要调整这个方案，或作一些转换。

可从表 5-2-10 矩阵中，在未被直线划去的各元素里找出最小数 1，于是将 12、1、18、7 各元素都减去 1，获得另一个 0（希望得到较适当的分配）。同时，在两划线相交的元素 7 加上 1，其余元素不变（因为 A 工作宜由乙去做，故 A 列划出纵线，丙行划横线表示丙已分配到适当的工作；两线交点对应工人丙就不适宜担任 A 工作），于是得到一个新的矩阵，见表 5-2-11。

现在转回第三步，用最少数根直线划去所有的零，仍然是两根，见表 5-2-12。因而还要继续转换。未被划去的元素中最小的数为 10，因此将未被划去的各元素减去 10，其余元素不变，于是得到一个新矩阵，见表 5-2-13，这样，最少要用三根直线才能划去所有的零，由此可知已获得最优解。最优分派方案是：因 C 列只有一个有零，表示工作 C 只有丙一人适宜作，因此 C 工作分派给丙，而在丙行和 C 列都用直线划去说明丙不能再安排其他任务，C 任务也不再分派给别人。这样，剩下的 B 任务只有乙适宜，于是把它分派给乙，同时把乙行和 B 列划去，最后剩下 A 工作给甲，见表 5-2-14。从表 5-2-14 及表 5-2-7 可算出这个方案所需费用是  $25 + 20 + 17 = 62$ （元），达到费用最小。

表 5-2-12

10	11	17
0	0	6
8	0	0

表 5-2-13

0	1	7
0	0	6
8	0	0

表 5-2-14

	A	B	C
甲	10	1	7
丙	0	0	1
乙	8	0	0

在计算过程中，每一行或每一列可能出现不只一个零。如表 5-2-14 中工人乙的一行就有两个零，这表示把工作 A 和 B 分派给乙都是适宜的。当然，这两者也有差别，如果单独从乙工人来说，最好的还是分派工作 A，因为费用最低，但是目标不仅是安排一个工人的工作，而是全部工人，所有工作都要安排恰当，因此衡量一个方案的优劣，就应该通盘考虑，这就是匈牙利法的实质。

综上所述，匈牙利法的分析计算过程可归纳如下：

第一步，如果给出的是如效果表这样一类的问题，目标是求最大值，那么就先转换为求最小值的问题，即转换成缩减矩阵。如果给出的是如费用表这样一类的问题，目标是求最小值，那末就不必这一步。

第二步，考虑每一项工作应该由谁去做最适宜。对于矩阵来说，就是在每一列中应该有零出现，这是通过把每一列行都减去该列行各元素中最小的一个而获得的。

第三步，判断第二步得到的方案是否最优，即是否每项工作都有人去，每个人是否都分派了工作。对于矩阵来说，就是用最少根的直线划去所有的零，直线根数等于矩阵阶数。

第四步，如果未满足上述第三步的要求，就继续对矩阵进行转换，在未被划去的各元素中继续寻找最小的数，使矩阵里一些元素转变为零，然后回到第三步，作出判断。如此反复地进行，直至满足第三步的要求为止。

例：某工厂订购了三台机器（A、B、C），有四个位置可供机器安装（位置一、二、三、四、），但 B 机器不能装在第二号位置。由于这四个安装位置离工场中心的远近不同，所需要的原料运送费用也就不同，现要求总的原料运输费用达到最小，问这些机器安装在哪个位置最适宜？

解：这是要求一个总运费达到最小的分派方案问题。先估计机器安装在每个位置后每天所需要的材料运送费用，然后用匈牙利法寻找最优解。费用列于表 5-2-15。

表 5-2-15		单位：元			
费 用		位 置			
		一	二	三	四
机 器	A	13	10	12	11
	B	15	N	13	20
	C	5	7	10	6
	D	0	0	0	0

由于机器 B 不能安装在二号位置，所以表中用一个很大的数 N 表示这项运输费用，以排除机器 B 安装在二号位置的可能性。前面介绍匈牙利法时已提及到，匈牙利法是利用方阵的运算而取得最优解的。本例三台机器、四个位置，组成的是三行四列矩阵，因而要设法把它变成方阵。为此在第四行虚构一行，构成一个四阶方阵，然后按匈牙利法进行寻找最优的分派方案。

这是求最小值的问题。解法如前例，先把费用表转变成方阵，得表 5-2-16，再将每列减去该列中最小的数。但由于添进了虚构行，每列都有零出现，因此只对每行减去该行的

表 5-2-16

13	10	12	11
15	N	13	20
5	7	10	6
0	0	0	0

表 5-2-17

3	0	2	1
2	N	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

表 5-2-18

3	0	2	1
2	N	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

最小数，第一行减去10，第二行减去13， $N$ 减去13表示一个很大的数减去13，仍然是一个很大的数，还是用 $N$ 表示。第三行减去5，这样得到表5-2-17。表5-2-17里的零最小需用四根直线才能划去，由于直线根数与方阵阶数相等，因此可以判断这是最优分派方案。分派办法是：机器A安装在第二号位置，机器B安装在第三号位置，机器C安装在第一号位置，这样每天总的原料运送费用是： $5+10+13=28$ (元)，达到最小，见表5-2-18及表5-2-15。

在企业的生产管理中，常常碰到这类问题：有一条多产品的生产线，生产一组不同型号的若干种产品，每一种产品的部件，在形状，尺寸，重量和组成等方面都有一定联系，因而生产的工艺流程是类似的，但又有些差别，工艺流程事先由工艺设计部门拟订好。要求生产管理人员根据生产计划的安排，定期转换产品，以保证在一定时期内能够提供一定数量的各种产品。

通常，在转换产品时，需对生产线作相应的调整，包括调整机器设备，工具，运输装置，原材料供应以至人力的调配等，因而需要一定的转产费用。而各种产品中，从生产甲产品转换到生产乙产品所需费用，并不等于转换到生产丙产品的费用。由于生产计划只要求在一定时期内能够提供一定数量的各种产品，并没有规定轮番生产的顺序，因此，管理人员必须考虑怎样在保证完成生产计划的前提下，拟订出一个最优的，即总的调整费用最小的轮番生产顺序。在一般情况下，调整费用可以根据历史资料估计或计算出来。这就是转产成本问题，对这类问题，同样可以用匈牙利法求解。

例：某企业的一条生产线，可以同时生产五个不同型号的产品，并要求定期转换产品，问怎样安排轮番生产顺序，才能使调整费用最小。假设调整费用如表5-2-19所列。表5-2-19的数字表示从一种产品（前置产品）转换另一种产品（后继产品）所需的费用，对角线上的各个 $N$ ，是人为地加上，表示该种产品不能继续生产下去。

表 5-2-19

单位：元

费 用		后 继 产 品				
		1	2	3	4	5
前置产品	1	N	60	100	70	50
	2	90	N	110	80	30
	3	100	65	N	80	40
	4	80	70	120	N	50
	5	20	75	90	90	N

表 5-2-20

$N$	60	100	70	50
90	$N$	110	80	30
100	65	$N$	80	40
80	70	120	$N$	50
20	75	90	90	$N$

表 5-2-21

$N$	0	10	0	20
70	$N$	20	10	0
80	5	$N$	10	10
60	10	30	$N$	20
0	15	0	20	$N$

表 5-2-22

$N$	0	10	0	20
70	$N$	20	10	0
75	0	$N$	5	10
50	0	20	$N$	10
—0—	15—	0—	20—	$N$ —

表 5-2-23

— $N$ —	0—	0—	0—	20—
—60—	$N$ —	10—	10—	0—
65	0	$N$	5	5
40	0	10	$N$	10
—0—	25—	0—	30—	$N$ —

表 5-2-24

— $N$ —	0—	0—	0—	20—
—60—	$N$ —	10—	10—	0—
—80—	0—	$N$ —	0—	0—
35	0	5	$N$	5
—0—	30—	0—	30—	$N$ —

表 5-2-25

$N$	0	$\boxed{0}$	0	20
60	$N$	10	10	$\boxed{0}$
60	0	$N$	$\boxed{0}$	0
35	$\boxed{0}$	5	$N$	5
$\boxed{0}$	30	0	30	$N$

表 5-2-26

前置产品	后继产品
1	3
3	4
4	2
2	5
5	1

最小转产费用为：300元

解：用分派模型匈牙利方法求最优解。先根据表 5-2-19 的数值列成方阵（见表 5-2-20）将方阵中的各列减去该列的最小值。即第一列减去 20，第二列减去 60，第三列减去 90，第四列减去 70，第五列减去 30，得表 5-2-21。在表中，第三第四行没有零，在第三行减去 5，第四行减去 10，得表 5-2-22。划去表 5-2-22 中所有的零，最少用四条直线。由于划线根数四小于矩阵阶数五，所以还未得到最优方案，因而需对表 22 进行调整。即在表 5-2-22 所有未被直线划去的数中找出最小的数 10，将各未被直线划去的数都减去 10，而两计线相交两点相应的数 20，15， $N$  各加上 10，这样得出表 5-2-22（ $N$  为一个很大的数，加 10 后仍为一个很大的数）。

重复上述做法，得出表 5-2-23、表 5-2-24，最后得出表 5-2-25。划去表 5-2-25 中所有的零，由于最少要用五根直线才能划去所有的零，直线数与矩阵阶数相等，因此这时获得最优解。最优方案如表 5-2-26 所示。即如果从第一种产品开始生产，当第一种产品生产任务完成后，应转生产第三种产品；第三种产品任务完成后，转生产第四种产品；第四种产品任务完成后，转生产第二种产品；第二种产品完成后，转生产第五种产品，当第五种产品完成后再转回安排第一种产品。这样总的转产费用为：

$$20 + 70 + 100 + 80 + 30 = 300 \text{ (元)}$$

### § 5.3 目标规划

目标规划是以线性规划为基础，为适应企业经营管理中多目标决策的需要而逐步发展起来的。它既可研究单目标决策，也可研究多目标的决策。研究单目标决策时，可以人为地制定出一个目标值，然后分析达到这个目标的最优偏离。研究多目标时，可以将目标分为主、次，在保证主目标最优的前提下，使次目标较优。

下面举例说明。

例：某车间只生产甲、乙两种产品。每件甲产品的售价是 20 元，乙产品是 37 元，制造每件甲种产品需要劳动力 2 人，而乙种产品需要 1 人，车间现有的劳动力总数只有 30 人。制造甲产品需要原材料 1 公斤，乙种产品需要 2 公斤，车间总共只有 24 公斤原料材料可供使用。现在车间想使总产值达到 500 元，在这目标要求下、甲、乙两种产品应该各生产多少才能最接近于这个目标。

在本例，上级部门要求实现产值为 500 元，而车间在安排生产甲、乙两种产品的产量后，可能实现的产值与规定的产值 500 元之间有某一差距。这差距称为偏离量，并规定：

$d^-$ ——可能实现的值未能达到上级规定的指标值的偏离量，即负偏离量。当偏离量为未知数时，称它为负偏离变量，并规定， $d^- \geq 0$

$d^+$ ——可能实现的值超过规定指标值的偏离量，即正偏离量。当这偏离量为未知数时，称它为正偏离变量，并规定  $d^+ \geq 0$ 。

当在实现规定产值 500 元指标时，可能出现如下三种情况之一：

超额完成规定的产值 500 元指标。这样根据上述规定有： $d^+ > 0$ ， $d^- = 0$ ；

未完成规定的产值 500 元指标，这样有： $d^- > 0$ ， $d^+ = 0$ ；

如果恰好完成产值 500 元指标，则有： $d^+ = 0$ ， $d^- = 0$ 。

解：设  $d_1^-$  为实际能达到的产值小于原定500元目标的偏离数；

$d_1^+$  为实际能达到的产值大于原定500元目标的偏离数；

$x_1$  为计划生产甲产品的数量；

$x_2$  为计划生产乙产品的数量。

现在规划问题的目标是使达到500元的偏离数最小，当然如果是超过500元那是最好的，即  $d_1^-$  越小越接近500元的目标，以此作为目标，连同劳动力约束，原材料约束，构成下面规划问题。

$$2x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$20x_1 + 37x_2 + d_1^- - d_1^+ = 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0, d_1^+ \geq 0, d_1^- \geq 0.$$

$$\min D = d_1^-$$

从上可看到，目标规划形式与线性规划形式是相同的。可以用单纯形法求解，求解结果是： $x_1=12$   $x_2=6$   $d_1^-=38$  这样安排生产的话最大产值是462元。（见表5-3-1）

从这个例子可以很明显地看出目标规划的一个特点，就是把线性规划目标函数转化为约束条件，而用一个新的偏离数变量作为目标规划的目标函数。计算过程见表5-3-1。

表 5-3-1

$C_j$		0	0	0	0	1	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$d_1^-$	$d_1^+$	
0	$x_3$	2	1	1	0	0	0	30
0	$x_4$	1	2	0	1	0	0	24
1	$d_1^-$	20	37	0	0	1	-1	500
$\bar{C}$		-20	-37	0	0	0	1	500
0	$x_3$	3/2	0	1	-1/2	0	0	18
0	$x_2$	1/2	1	0	1/2	0	0	12
1	$d_1^-$	3/2	0	0	-37/2	1	-1	56
$\bar{C}$		-3/2	0	0	37/2	0	1	56
0	$x_1$	1	0	2/3	-1/3	0	0	12
0	$x_2$	0	1	-1/3	2/3	0	0	6
1	$d_1^-$	0	0	-1	-18	1	-1	38
$\bar{C}$		0	0	1	18	0	1	38

$$Z = 12 \times 20 + 6 \times 37 = 462$$

### 多目标规划

在实际工作中，决策者往往面临着多个目标的决策问题。比如说，某工厂将要采用一项新工艺，希望采用了新工艺后，产品产量高，产品的质量要好，产品的成本要低。这些指标之间的要求常常会发生矛盾，亦有可能可行域不存在，这时，应用多目标规划求解，往往得到满意的方案。

例：仍以单目标规划的例为例。如果该车间不但要求产值达到500元，而且要求总的利润值达到96元。假设甲产品每斤利润为3元，乙产品每斤利润为8元。

这样就有两个目标，一为产值达到500元，另一为总利润达到96元，那么，产品甲，产品乙安排生产数量是多少斤才使得最接近于这两个目标呢？

类似单目标规划问题，只是增加两个表示利润偏离量  $d_1^+$ ,  $d_1^-$ , 即

$d_1^-$  为低于产值目标500元的偏离量；

$d_1^+$  为高于产值目标500元的偏离量；

$d_2^-$  为低于利润目标96元的偏离量；

$d_2^+$  为高于利润目标96元的偏离量；

$x_1$  斤为生产甲产品的计划数量；

$x_2$  斤为生产乙产品的计划数量。

产值目标约束：  $20x_1 + 37x_2 + d_1^- - d_1^+ = 500$

利润目标约束：  $3x_1 + 8x_2 + d_2^- - d_2^+ = 96$

资源约束：  $2x_1 + x_2 \leq 30$

$$x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$$

目标函数：  $\min D = d_1^- + d_2^-$

用单纯形法求解，可得

$$x_1 = 12, x_2 = 6, \text{总产值为} 462 \text{元}, d_1^- = 38 \text{元},$$

$$\text{总利润为} 84 \text{元}, d_2^- = 12 \text{元。 (见表 5-3-2)}$$

目标规划问题模型的建立，基本上与线性规划问题模型建立相同，稍有区别之处是：

(1) 根据具体要求，列出目标约束；

(2) 在目标函数，目标约束中引入偏离变量。

在目标规划求解过程中，各目标的重要性是不同的，并且因人，因地，因时而异。例如提高产品质量这一目标，对有的企业来讲是第一位，而对另一个企业来讲是第二位。在



表 5-3-2

		0	0	1	0	1	0	0	0	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$x_3$	$x_4$	$b$
1	$d_1^-$	20	37	1	-1	0	0	0	0	500
1	$d_2^-$	3	8	0	0	1	-1	0	0	96
0	$x_3$	2	1	0	0	0	0	1	0	30
0	$x_4$	1	2	0	0	0	0	0	1	24
$\bar{C}$		-23	-45	0	1	0	1	0	0	596
1	$d_1^-$	3/2	0	1	-1	0	0	0	-37/2	56
1	$d_2^-$	-1	0	0	0	1	-1	0	-4	0
0	$x_3$	3/2	0	0	0	0	0	1	-1/2	18
0	$x_2$	1/2	1	0	0	0	0	0	1/2	12
$\bar{C}$		-1/2	0	0	1	0	+1	0	45/2	58
1	$d_1^-$	0	0	1	-1	0	0	-1	-18	33
1	$d_2^-$	0	0	0	0	1	-1	2/3	-13/2	12
0	$x_1$	1	0	0	0	0	0	2/3	-1/3	12
0	$x_2$	0	1	0	0	0	0	-1/3	2/3	6
$\bar{C}$		0	0	0	1	0	1	1/3	24 $\frac{1}{2}$	50

多目标问题中决策者要订出各目标的重要程度的区别,可按重要程度不同,给予排队。一般以 $P_1$ 表示第一位重要, $P_2$ 表示第二位重要,依此类推, $P_k$ 表示第 $k$ 位重要。 $P_k$ 称为优先因子,优先因子 $P_k$ 的决定可以由决策者给出,也可以采用民主评定或专家评定等方法来确定。通过优先因子 $P_k$ 的确定,可以把目标按其重要性由大到小排列出来,先解决第一个目标作为前提,然后再解决第二个目标,如上面举的例子,目标函数就具有大致这样的形式:

$$\min D = (p_1 d_1^-, p_2 d_2^-)$$

这里 $P_1$ 和 $P_2$ 不是数量,只是代表目标重要性的大小符号,它是用来表示解决目标的顺序,更一般的形式,应该考虑加权。

仍以单目标规划的例为例,如果该车间把总产值、总利润这个目标作重要程度的比较,经研究认为这两个目标应以利润为第一重要,总产值次于总利润值,于是有:

第一优先级目标 利润值超出96元;

第二优先级目标 产值超出500元。

据此,建立如下的目标规划模型。

$$\min D = P_1 (d_2^-) + P_2 (d_1^-)$$

$$3x_1 + 8x_2 + d_2^- - d_2^+ = 96$$

$$30x_1 + 37x_2 + d_1^- - d_1^+ = 500$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$$

$$x_i \geq 0 \quad d_i^+ \geq 0 \quad d_i^- \geq 0 \quad i=1, 2; \quad j=1, 2, 3, 4$$

经计算（过程见 § 11.4）得如下解

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 18, \quad d_1^- = 56, \quad d_2^- = 0, \quad Z = 56P_2$$

即 甲产品不安排生产，利用现有资源全部安排生产乙产品，劳动力剩余18人，可安排另外生产任务，总产值比原目标偏小56元，即

$$\text{总产值: } 500 - 56 = 444 \text{ (元)}$$

$$\text{总利润: } 8 \times 12 = 96 \text{ (元)}, \quad d_2^- = 0$$

如果产值达500元，利润值达96元，这两个目标作为同一重要情况来计算的话，结果是总利润84元，总产值462元，十分明显，对不同的目标，采用不同的优先级，其计算结果是不同的。

目标规划是在60年代初兴起的，产生的历史不长，但由于在处理多目标决策中具有一定的实用意义，得到越来越多的管理工作者的重视。

## 第六章 整数规划

在一个规划问题里，如果它的全部变量，或者是其中部分变量要求取整数值时，就叫它为整数规划问题。在经济领域中，制定计划、规划时，需要确定的工人人数，设备台数，建设厂房数，装货车皮数等等，都必须是整数才有实际意义。但用线性规划方法求得最优解时，不能保证得到整数解。若采取舍入法将非整数最优解凑成相近的整数时，可能得到非可行解或非最优解。下面通过图解法来说明。

### § 6.1 图解法

整数规划问题和线性规划问题相似，在求整数规划的最优解时，可以用线性规划的图解法（两个决策变量），单纯形法求出最优解，如果答案不全部是整数的时候，就把整数的约束条件加到原线性规划的约束条件中去，用单纯形法继续求解，以便得到整数最优解。这附加的约束条件相当于把某个要求取整数的决策变量在可行域中割掉其非整数部分。

例：设有一线性规划问题：

$$\begin{aligned} \text{目标函数:} & \quad \text{使 } f(x) = x_1 + 4x_2 \quad \text{达到最大} \\ \text{约束条件:} & \quad -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ 且 } x_1, x_2 \text{ 均为整数。} \end{aligned}$$

为了易于理解，先用图解法解出。

根据约束条件，可以画出图 6-1，在图 6-1 中可以看到，问题的可行解域在直线 AB、BC 及  $x_1, x_2$  轴正向所围成的多边形 OACB 内，多边形内的全部黑交点，表示本例所有满足约束条件的整数解。

如果  $x_1, x_2$  不要求整数解，那么本例就成为一般的线性规划问题，这样很容易地在图 6-1 中看到它的最优解。

$$x_1 = 2.5, x_2 = 2.7$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 + 4x_2 \\ &= 13.3 \text{ 达到最大值。} \end{aligned}$$

但本例要求  $x_1, x_2$  为整数解，那么，能不能用进位的方法使小数解成为整数解呢？那是不恰当的。从图 6-1 可以见到， $x_1 = 3, x_2 = 3$  这点是位于可行解域 OACB

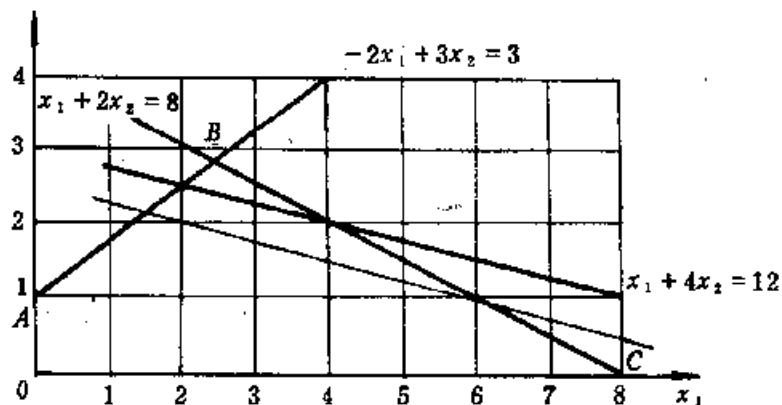


图 6-1 整数解

的外面,说明 $x_1=3, x_2=3$ 这组不满足本例的约束条件,所以不是一个可行解。

又如果把 $x_1=2.5, x_2=2.7$ 的小数舍去不要,即 $x_1 \approx 2, x_2 \approx 2$ 。显然,从图6-1可以看到,这组解是位于可行解域 $OABC$ 的里面,满足约束条件,是一组可行解,相应的目标函数值 $x_1+4x_2=2+8=10$ 。但从图6-1直观地可以看到,这个目标函数值并没有达到最大。因而采用舍去小数的方法来求问题的整数解,也是不恰当的。但是,我们可以把表示目标函数的直线经过点 $(2, 2)$ 继续向右上方缓缓地移动,再过点 $(3, 2)$ ,此时目标函数值为 $3+8=11$ ;继续沿原来方向移动,与点 $(4, 2)$ 相交,相应目标函数值为 $4+8=12$ 。对整数解来说,这是目标函数线与可行解域 $OABC$ 最后一个整数交点,因此取得最优整数解, $x_1=4, x_2=2, f(x)=4+2 \times 4=12$ 。

以上是通过图形求出整数规划最优解的方法。除了用图解法求最优整数解外,还可以通过分枝定界法,割平面法等求得整数解。

## § 6.2 分枝定界法

分枝定界法是一种计算与分析判断相结合的、求解整数规划问题的重要方法。用分枝定界法求解整数规划,其过程如下:

首先不考虑整数约束,通过线性规划求解一般方法(§6.1例1)求出 $x_1=2.5, x_2=2.7$ 。这是解整数规划问题的第一步,表示在图2-6中的结点0。

其次考虑整数约束。 $x_2$ 的值不能是小数,考虑到 $x_2$ 是一个接近于2.7的整数,因此一个可能是: $x_2$ 等于2,或1,或0;另一个可能是, $x_2$ 等于3,或4,或5等等。于是从结点0可以引出两分枝:结点1和结点2。在结点1增加 $x_2 \geq 3$ 的约束,在结点2增加 $x_2 \leq 2$ 的约束(当然也可以先考虑 $x_1$ 的整数约束,在 $x_1, x_2$ 中任选一个整数约束都可以),对于结点1,由于 $x_2 \geq 3$ 已超出了原问题的约束范围,见图6-1对本例来说是没有意义的,可以把它叫做空解。对于结点2, $x_2 \leq 2$ 并没有超出约束范围,于是再一次用单纯形法求解,这样就得到 $x_1=4, x_2=2$ ,目标函数 $f(x)=12$ ,获得最优整数解。见图6-2。

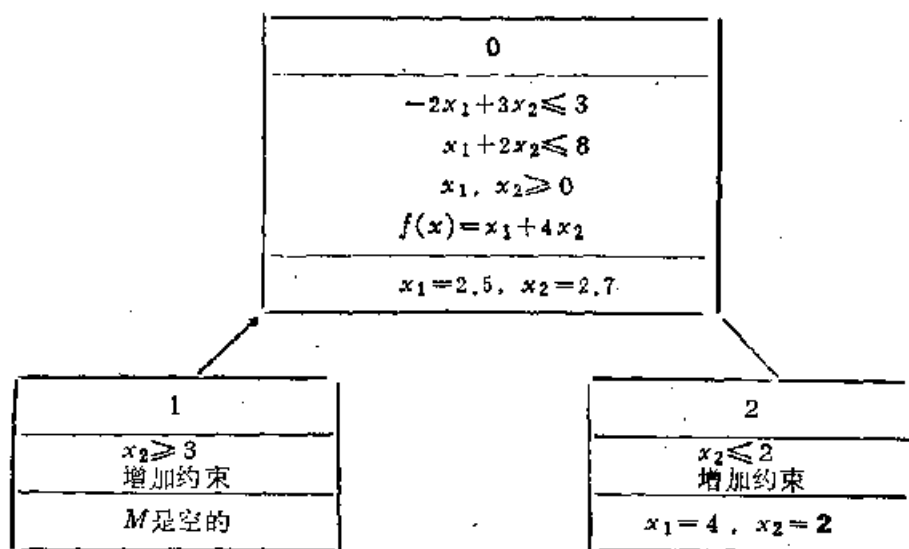


图 6-2

通过上面分析讨论,可以知道,用分枝定界法求整数规划问题的最优解步骤是:

第一步:首先不考虑整数的约束条件,将整数规划问题当作一般的线性规划问题处理,如果得到的解是整数解,问题也就解决了,如果得到的解不是整数解,就进行第二步。

第二步:增加整数约束,分枝,对分枝用线性规划求解的方法求解。如果已获得整数解,并目标函数值比其他分枝的整数解的值都要好,则分枝停止,说明已获得最优整数解。若还未获得整数解,转第三步。

第三步:若未获整数解的目标函数值比同层的分枝要差,则暂停分枝;如果其他枝的整数解目标函数值比这枝的要好,此枝再也不用再分枝;如果其他分枝的整数解目标函数比这枝要差,回过头来继续对此枝分枝,希望能找到一个使目标函数值有所改善的整数解,转回第二步。

第四步:读出最优解。在所有分枝中,找出一个目标函数值最好的整数解,这就是整个问题的最优解。

下面再举一例加以说明。

例:极大化:  $Z = 3x_1 + 2x_2$   
约束条件:  $x_1 \leq 2$   
 $x_2 \leq 2$   
 $x_2 + x_2 \leq 3.5$   
 $x_1, x_2 \geq 0$ , 整数

解:本例题只有两个变量,可以用图解法求解。

首先放弃整数约束,获得最优解为:  $x_1 = 2, x_2 = 1.5$  见图 6-3(a), 目标函数的极大值是  $Z_1 = 9$ ,  $x_2$  非整数,于是引出两分枝(见图 6-4), 分枝 2 添加  $x_2 \leq 1$  约束,求解,得  $x_1 = 2, x_2 = 1$  见图 6-3(b),  $Z_2 = 8$ 。

分枝 3 添加  $x_2 \geq 2$  约束,求解,得  $x_1 = 1.5, x_2 = 2, Z_3 = 8.5$  见图 6-3(b)。由于  $Z_3 = 8.5 > 8 = Z_2$ , 对分枝 3 继续施行分枝,希望能找到比节点 2 的目标函数值更好的整数解。增添  $x_1 \geq 2$  约束超出了原问题的可行解域,为不可行;增添  $x_1 \leq 1$  约束,得  $x_1 = 1, x_2 = 2, Z_6 = 7$  见图 6-3(c), 这时停止分枝,问题的最优解为所有目标函数值最大的整数解,即节点 2 的解为最优。

$x_1 = 2, x_2 = 1, Z = 8$  达到最大。

例:有 750 部汽车需要从日本运往美国,设可以用两种不同类型的船只运载这批汽车,两种类型船只的最大装载量如表 6-1 所列,现在总共只有燃料 5500 加仑,可以出海的船员最多是 90 人。使用第一类型的船装载汽车,每船可得收益 2000 元,用第二类型的船装载汽车,每船可得收益 1000 元,设两类船都多艘可供使用。现在问,应该用第一类船多少艘,用第二类船多少艘,才能把 750 部汽车全部运出,并使总收益达到最大。

表 6-1

		每艘船最大装载量 (部)	每一航程 需用燃料量(加仑)	每只船 需要船员人数
船 只	第一类	200	1200	25
	第二类	100	700	10

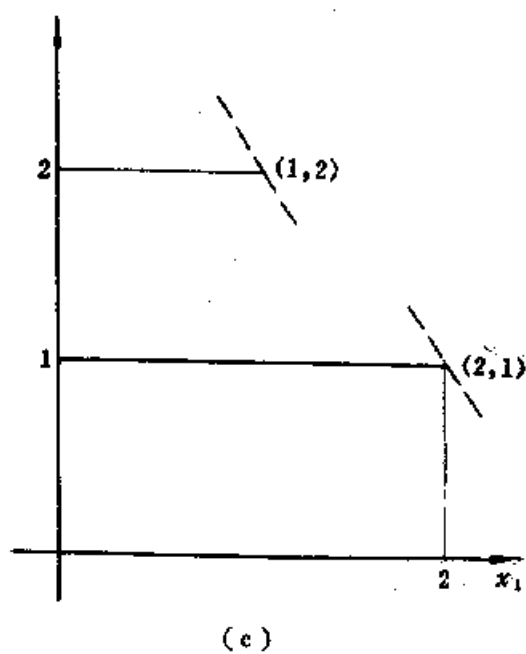
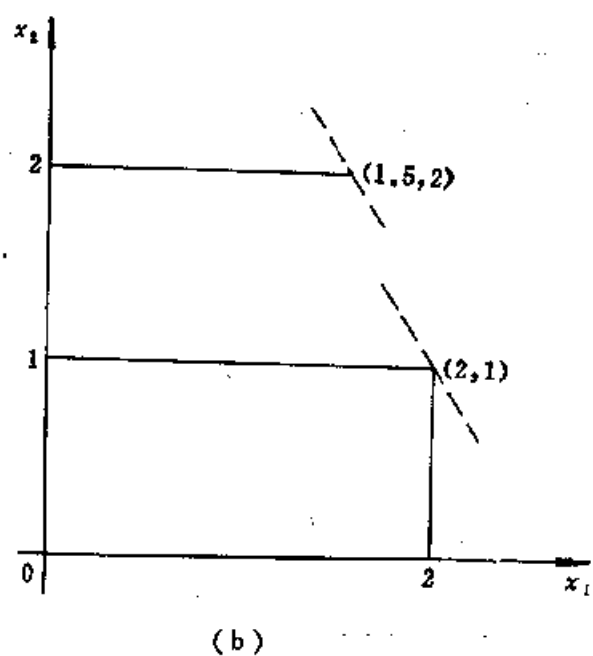
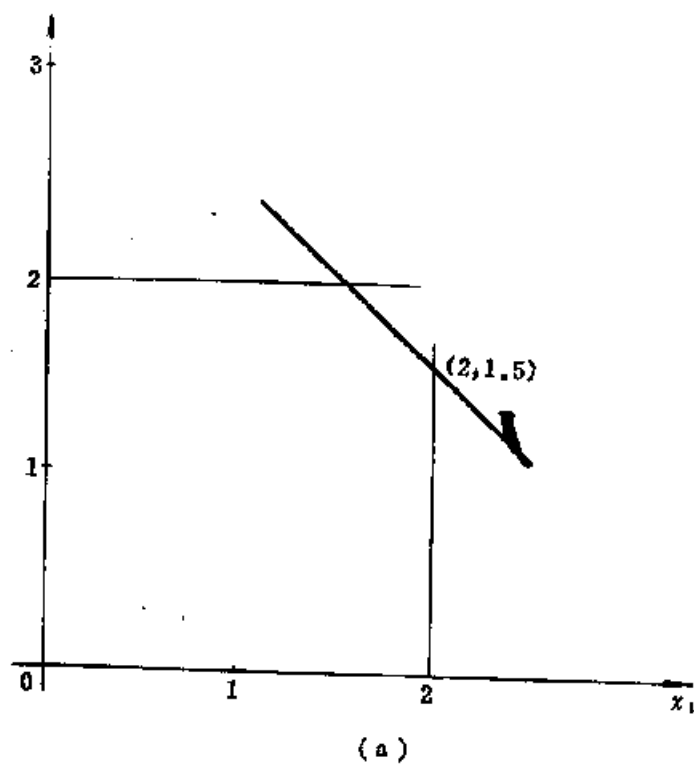


图 6-3

解：设  $x_1$ ,  $x_2$  分别表示第一类型，第二类型的数目。很明显，在本例中，船的数目不可能是一个小数，因而  $x_1$ ,  $x_2$  必须是整数。

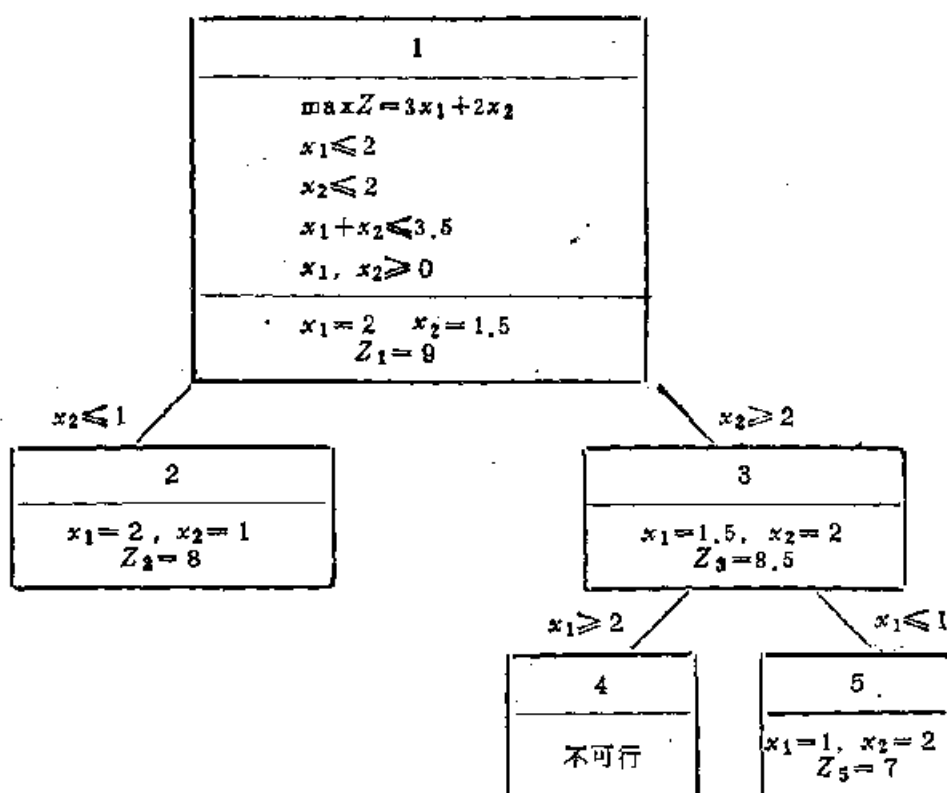


图 6-4

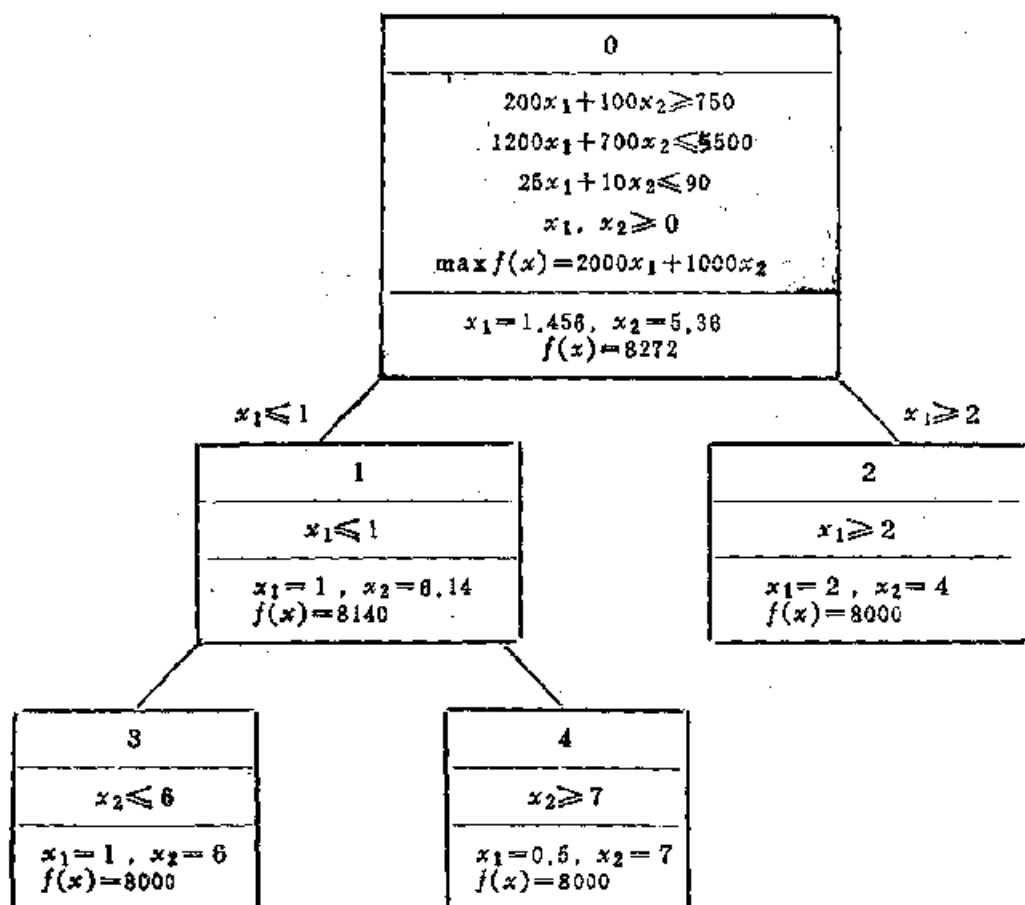


图 6-5

目标函数  
约束条件

$$\text{使 } f(x) = 2000x_1 + 1000x_2$$

到达最大。

$$200x_1 + 100x_2 \geq 750$$

$$1200x_1 + 700x_2 \leq 5500$$

$$25x_1 + 10x_2 \leq 90$$

$$x_1, x_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$200x_1$ 为第一类船的最大装载量,  $100x_2$ 为第二类船的最大装载量, 第一, 二类船总的装载量应大于或等于待装载车辆750部。

如果不考虑整数的约束条件, 问题就成为一般的线性规划问题, 通过单纯形法的计算, 可求出 $x_1 = 1.456$ ,  $x_2 = 5.36$ , 总收益值是8272元。由于 $x_1 = 1.456$ ,  $x_2 = 5.36$ 不是整数, 所以需要进行第二步, 把 $x_1 = 1.456$ ,  $x_2 = 5.36$ 作为图的起点, 见图6-5结点0。

考虑接近于 $x_1 = 1.456$ 的整数, 一个可能是1, 另一个可能是2, 当然 $x_1$ 也可能是小于1, 或大于2的数。因此在图结点0引出两分枝, 得结点1, 结点2。在结点1增添约束条件 $x_1 \leq 1$ , 在结点2增添约束条件 $x_1 \geq 2$ , 然后通过单纯形法的计算, 获得 $x_1, x_2$ 的解。对于结点1, 有 $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 6.14$ , 总收益值是8140元; 对于结点2, 有 $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ , 总收益值是8000元。这时 $x_1, x_2$ 已经得到整数解, 达到目的, 不需要再引分枝, 但结点1的收益值8140元, 比结点2收益值8000元要大, 应该对结点1再引分枝, 希望获得一个比结点2收益更大的方案。因此继续依照上述方法, 从结点1引出两分枝, 一是结点3, 另一是结点4。在结点3增添约束条件 $x_2 \leq 6$ , 在结点4增添约束条件 $x_2 \geq 7$ 。经过计算, 获得 $x_1, x_2$ 的解, 对于结点3有 $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 6$ , 总收益值是8000元; 对于结点4有 $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 7$ , 总收益值也是8000元。如果把结点4再引分枝, 可算出总收益值低于8000元, 因此本例计算到这里为止。从图6-5可以看到,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ 或 $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 6$ 相应的总收益值都是8000元, 说明两个方案都可以采用。即:

方案一: 使用第一类船2艘, 第二类船4艘。

方案二: 使用第一类船1艘, 第二类船6艘。这样可把750部汽车全部运出, 并可得到最大收益8000元。

### §6.3 割平面法

割平面法是先不考虑取整数解的条件, 用单纯形法将线性规划问题求解, 得到非整数的最优解, 再分别对应于取整数的决策变量建立一个附加的约束条件, 以代替整数条件并将它加到原规划问题的约束条件中, 用对偶单纯形法继续求解, 从而得到整数最优解。

例: 有一线性规划问题:

目标函数: 使 $Z = x_1 + 4x_2$  达到最大

约束条件:  $-2x_1 + 3x_2 \leq 3$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$x_1, x_2 \geq 0$ , 且 $x_1, x_2$ 均为整数。

用割平面法求整数最优解。

第一步: 用单纯形法求出规划问题的最优解 (见表6-3-1(a), (b), 表6-3-2。)



第二步：在最终单纯形表中，非整数解所在的行（如果多个变量的解都是非整数的话，可以任意选取其中一个变量所在的行），非整数系数 $a'_{ij}$ 和对应 $b$ 列的 $b_i$ ，与变量 $x_j$ 有这样的关系：

$$-\sum a'_{ij}x_{Nj} + x_{n+i} = -b'_i, \quad 0 < a'_{ij} < 1, \quad 0 < b'_i < 1$$

其中 $x_{n+i}$ 为引进的松弛变量， $b'_i$ 为真分数。遵从这个关系式，组成一新的附加约束条件，加入到最终单纯形表，从而得到一新表，见表6-3。

第三步：用对偶单纯形法求解。如果仍然出现非整数解，转回第二步，直到求出整数解为止。

表6-3-1(a)

$C_j$		1	4	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	$x_3$	-2	3	1	0	3
0	$x_4$	1	2	0	1	8
$\bar{C}$		1	4	0	0	0

表6-3-1(b)

$C_j$		1	4	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
4	$x_2$	-2/3	1	1/3	0	1
0	$x_4$	7/3	0	-2/3	1	6
$\bar{C}$		11/3	0	-4/3	0	4

表6-3-2

$C_j$		1	4	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
4	$x_2$	0	1	1/7	2/7	19/7
1	$x_1$	1	0	-2/7	3/7	18/7
$\bar{C}$		0	0	-2/7	-11/7	

对 $x_2$ 求整数，有切割方程，

$$-1/7x_3 - 2/7x_4 + x_5 = -\frac{5}{7}$$

通过单纯形表算出最优解： $x_1 = 2\frac{4}{7}$ ，

$x_2 = 2\frac{5}{7}$ 见表6-3-2。因为 $x_2$ 的真分数部分大于 $x_1$ 的真分数部分，因而先对 $x_2$ 求整，取出相应的方程式：

$$0x_1 + x_2 + 1/7x_3 + 2/7x_4 = 2\frac{5}{7}$$

根据切割方程的式子，有切割方程：

$$-1/7x_3 - 2/7x_4 + x_5 = -\frac{5}{7}$$

把切割方程添到表6-3-2中去，得表6-3-3，用对偶单纯形格法求解。得表6-3-4。从而得到最优整数解为：

$$x_1 = 4, x_2 = 2, z = 12.$$

表6-3-3

$C_j$		1	4	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
4	$x_2$	0	1	1/7	2/7	0	$2\frac{5}{7}$
1	$x_1$	1	0	-2/7	3/7	0	$2\frac{4}{7}$
0	$x_5$	0	0	-1/7	-2/7	1	$-\frac{5}{7}$
$\bar{C}$		0	0	-2/7	-11/7	0	

表6-3-4

$C_j$		1	4	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
4	$x_2$	0	1	0	0	1	2
1	$x_1$	1	0	0	1	-2	4
0	$x_3$	0	0	1	2	-7	5
$\bar{C}$		0	0	0	-1	-2	-12

## 第七章 动态规划

动态规划是解决阶段决策过程最优化的一种方法。动态规划的方法，在经济，工业生产等部门都有较广泛的应用，并且取得成效。

### §7.1 基本概念

动态规划的方法就是将一个较复杂的多阶段决策等问题分解为若干相互关联的较易求解的子决策问题，而每一个小的子决策问题都有多个选择，并且当一个子决策问题确定了以后，将影响另一个子决策问题，从而影响到整个问题的决策。1957年美国数学家贝尔曼(R. Bellman)在其《动态规划》一书中提出了《最优化原理》，就是：不论初始状态和初始决策如何，对先前的决策所造成的状态而言，余下的所有决策必须构成一个最优策略。

为了说明贝尔曼的最优化原理，不妨举一个很简单的例子加以阐明。

某旅行者，以A地出发到F地，可以选择两条路线，一是途经B地，D地到F；另一是途经C地，E地到F，如图7-1所示，每段路所需的费用在图中标出。

这个问题以总旅费达到最小作为目标。

第一阶段就应该确定是选择从A地至B地，抑或从A地至C地的路线。这个决策一旦作出后，就会影响下一阶段的路线是从B地到F地，或从C地到F地。从图7-1给出的数据来看，由A地至B地只需费用5，而由A地至C需费用10；前者费用比后者费用小得多，就这一阶段来说应该选择从A至B的路线。然而再往下看，对全程来说，由A经B至F需费用28，若经C至F费用23。显然应该选择后者路线，因为它的总费用比较前者小。

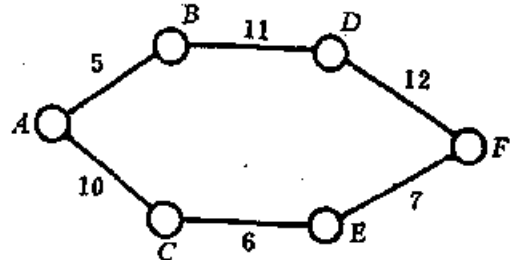


图7-1 一个简单的多级决策

这一类规划问题，就叫做动态规划问题。可以看到，在整个规划过程中，可以把问题分成若干个阶段，每一阶段，都要求作出决策，而下一阶段的决策必须在上一阶段决策所导致的结果的基础上作出。也就是说，上一阶段决策作出以后所导致的结果，会对下一阶段决策产生影响。同时，还应该注意，这一阶段的决策，同样会对以后各阶段的决策产生影响，因而各阶段的决策是互相牵连，互相影响。

整个规划的目标是使得最终的结果达到最优，这就意味着，某一阶段所作出的决策，就这个阶段来说，并不一定是一个最优的选择，甚至要作出某些牺牲。但是，由于各阶段的互相影响，到最后却会得到一个最优的结果。相反，在这一阶段选择了一个最优的决策，并不等于最后得到最优结果，这就是动态规划方法的基本思想。

## § 7.2 例 子

例 1：某厂从国外引进一台设备，由工厂  $A$  至港口  $J$  有多条通路可供选择，其路线及费用如图 7-2 所示，现要求找出一条能使总运费最小的路线。

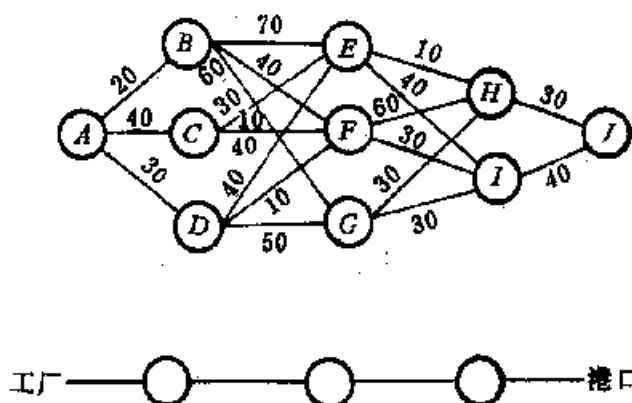


图 7-2 通道图

解：很明显，这个运输问题是属于多级决策问题，需要借助动态规划了方法去寻找最优解。

把整个运输路程分为四个阶段，作为从  $J$  地出发向  $A$  地运输，求它的最优解。首先以第四阶段考虑，从  $J$  地出发，到下一站，可通过  $H$ ，也可通过  $I$ ，所需费用分别是 30 元，40 元，见表 7-1 所列。

表 7-1

单位：元

下一站的名称	至下一站所需费用	最小的费用	下一站的 优 出 发 地
	出 发 地 $J$		
$H$	30	30	$H$
$I$	40	40	$I$

然后考虑第三阶段，当已到达了  $H$  地或  $I$  地后，至下一站为  $E$  或  $F$  或  $G$ 。如果从  $H$  地至  $E, F, G$  所需费用分别是 10 元，60 元，30 元，则从  $J$  经  $H$  到  $E, F, G$  地的费用，应该是再加上从  $J$  至  $H$  的费用 30 元，则分别为  $10+30=40$ ， $60+30=90$ ， $30+30=60$ 。此外，至  $E$  或  $F$  或  $G$  地，也可以从  $I$  地出发，所需费分别是 40，30，30 所以从  $J$  经  $I$  至  $E, F, G$  地总费用分别是 80、70、70。现在比较从  $J$  经  $H$  或经  $I$  至  $E$  地所需要的费用，可知经  $H$  至  $E$  需要总费用 40 元，经  $I$  至  $E$  需要总费用 80 元，前者费用较小，显然， $H$  地是较优的出发地。同样的道理，如果抵达  $F$  地， $I$  就是较优的出发地，如果到达  $G$  地， $H$  就是较优的出发地。分析计算结果，见表 7-2

表 7-2

单位: 元

下一站的名称	至下一站所需总费用		最小的费用	至下一站 优出发地
	出发地			
	<i>H</i>	<i>I</i>		
<i>E</i>	$10+30=40$	$40+40=80$	40	<i>H</i>
<i>F</i>	$60+30=90$	$30+40=70$	70	<i>I</i>
<i>G</i>	$30+30=60$	$30+40=70$	60	<i>H</i>

再考虑第二阶段。当已到达E、F地或G地后,下一站是B地、C地、D地。到达B地可以分别从E、F、G出发,其中总费用最小的是110元,即从J地经E地或F地至B地;到达C地的最小费用是70元,即从J经E地至C地;到达D地的最小费用是80元,即从J经E地或F地至D地,分析计算结果如表7-3所列。

最后考虑第一阶段。当已到达B地、C地或D地,下一站到达A地(工厂),最小费用是110元,即从C地或D地至A地。分析计算结果如表7-4所列。

表 7-3

单位: 元

下一站的 名称	至下一站所需总费用			最小的 费用	至下一站的 优出发地
	出发地				
	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>		
<i>B</i>	$70+40=110$	$40+70=110$	$60+60=120$	110	<i>E、F</i>
<i>C</i>	$30+40=70$	$10+70=80$	$40+60=100$	70	<i>E</i>
<i>D</i>	$40+40=80$	$10+70=80$	$50+60=110$	80	<i>E、F</i>

表 7-4

单位: 元

下一站的 名称	至下一站所需总需费用			最小的 费用	至下一站的 优出发地
	出发地				
	B	C	D		
A	$20+110=130$	$40+70=110$	$30+80=110$	110	C、D

从上面一系列的递推演算,可见最优路线有三条:

A—C—E—H—J

A—D—F—I—J

A—D—E—H—J

以上三条路线的总运费都是110元。

通过上面例子,可见解决动态规划问题的方法是:

第一,将整个问题划分成几个阶段(子问题),使它成为好几个阶段(子)问题。

第二,对整个问题的求解,可从最后那个阶段开始,逐个向前推进,直至整个问题全部

解决为止。

以上是通过列表法求得问题的最优解，也可以用解析式求解，下面通过例1的演算，说明用解析式求解的全过程。

阶段1 有两个站、站H、站I。

如果现在处于H，到达终点J的最佳路线是：

$$f_1(H) = 30$$

如果现在处于I，到达终点J的最佳路线是：

$$f_1(I) = 40$$

阶段2 有三个站、站E、站F、站G。

如果现在处于E，到达终点J沿哪一路线走费用最小？

$$f_2(E) = \min \begin{Bmatrix} 10 + f_1(H) \\ 40 + f_1(I) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 10 + 30 \\ 40 + 40 \end{Bmatrix} = 40$$

最小费用的路线是 E-H-J

如果现在处于F，到达终点J沿哪一路线走费用最小？

$$f_2(F) = \min \begin{Bmatrix} 60 + f_1(H) \\ 30 + f_1(I) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 60 + 30 \\ 30 + 40 \end{Bmatrix} = 70$$

最小费用的路线是 F-I-J

如果现在处于G，到达终点J沿哪一路线走费用最小？

$$f_2(G) = \min \begin{Bmatrix} 30 + f_1(H) \\ 30 + f_1(I) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 30 + 30 \\ 30 + 40 \end{Bmatrix} = 60$$

应走路线是 G-H-J

阶段3 有三个站、站B、站C、站D。

如果现在处于B，到达终点J哪一路路线费用最小？

$$f_3(B) = \min \begin{Bmatrix} 70 + f_2(E) \\ 40 + f_2(F) \\ 60 + f_2(G) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 70 + 40 \\ 40 + 70 \\ 60 + 60 \end{Bmatrix} = 110$$

最小费用的路线是 B-F-I-J

B-E-H-J

如果现在处于C，到达终点J走哪一路路线费用最小？

$$f_3(C) = \min \begin{Bmatrix} 30 + f_2(E) \\ 10 + f_2(F) \\ 40 + f_2(G) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 30 + 40 \\ 10 + 70 \\ 40 + 60 \end{Bmatrix} = 70$$

最小费用的路线是 C-E-H-J

$$f_3(D) = \min \begin{Bmatrix} 40 + f_2(E) \\ 10 + f_2(F) \\ 50 + f_2(G) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 40 + 40 \\ 10 + 70 \\ 50 + 60 \end{Bmatrix} = 80$$

最小费用的路线是 D-E-H-J

$D-F-I-J$

阶段4 只有一站A, 走到A, 全程也就完成了。

如果现在处于A, 到达终点J走哪一路线费用最小?

$$f_4(A) = \min \begin{Bmatrix} 20 + f_3(B) \\ 40 + f_3(C) \\ 30 + f_3(D) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 20 + 110 \\ 40 + 70 \\ 30 + 80 \end{Bmatrix} = 110$$

最小费用的路线是  $A-C-E-H-J$ ;  $A-D-F-I-J$ ;  $A-D-E-H-J$

下面再举一些不同类型的例子说明。

例2: 考虑一个供水网络结构问题。根据有关的历史资料(如水压区域等)画出了一个可行的管道系统, 如图7-3所示。现在要求找出一个从A点到M点成本最低的管道设置方案。

解: 把每段管道用网络技术\*的术语标注出来, 即以结点之间的连线表示管道, 而结点A, B, ..., M的实际位置应该由设计人员确定; 每一连线有一个箭头, 表示管道中的水流方向; 连线旁有一个表示费用(或成本)的数字, 这包括所有材料费(水管, 伐门等等)及结构费用(如要求道路的所

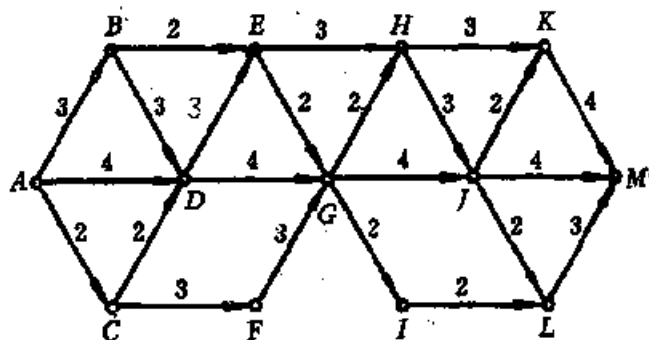


图7-3 一个管道系统

有权, 掘孔, 连接管道等等)。同时假设已经做了足够的分析工作, 以选用水管的参数(直径, 壁厚等), 使得管子的连接和设置都能满足全部工作条件的要求。现在的问题是要找出从A到M的管道设置方案, 使设置费用最小。解决这问题, 可利用动态规划的递推法来求得最优解。

首先从问题的最后部分开始, 再向前递推。为了书写方便, 用符号 $f(n)$ 表示该结点n到终点M所需的最低总费用。显然, 这个总费用与供水路线有关, 是所选路线的函数, 并用结点符号表示, 例如 $f(J)$ 表示从J结点到终点M的总费用。解题开始时, 可以假设 $f(M)=0$ , 从图7-3可知, 结点J, K和L都与结点M连接, 于是先找出从结点J到终点M的最小费用 $f(J)$ 。显然, 这项费用是从 $2+f(K)$ ,  $4+f(M)$ ,  $2+f(L)$ 中取最小的一个, 但是现在只知道 $f(M)=0$ , 其余 $f(K)$ ,  $f(L)$ 尚未求出, 从图7-3可见, K只发出一根连接线, 于是可以立即求出这项最小费用, 即 $f(K)=4+f(M)=4$ 。把结点上的费用放在一个小圆圈内表示, 如图7-4所示。

再用类似方法求出结点L的最小费用, 即 $f(L)=3+f(M)=3+0=3$ 。

以上是第一个阶段的计算。并求出结点K, L, M的费用。接着是求出连接K, L, M的紧前结点I, J, H的最小费用, 这是第二阶段的计算。计算结果是

结点I的最小费用:

$$\begin{aligned} f(I) &= 2 + f(L) \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

结点J的最小费用:

$$\begin{aligned} f(J) &= \min \{ 2 + f(K), \\ &\quad 4 + f(M), 2 + f(L) \} \\ &= \min \{ 2 + 4, 4 + 0, \\ &\quad 2 + 3 \} \\ &= 4 \end{aligned}$$

结点H的最小费用:

$$\begin{aligned} f(H) &= \min \{ 3 + f(K), \\ &\quad 3 + f(J) \} \\ &= \min \{ 3 + 4, 3 + 4 \} \\ &= 7 \end{aligned}$$

第二阶段计算结果见图7-5。

其余各结点计算方法同上, 不再赘述、完成这个问题的计算结果见图7-6。

由此得到的最优管道设置方案, 是从A结点开始, 经过结点B、E、G、I、L然后到达终点M。总费用是  $3 + 2 + 2 + 2 + 3 = 14$ 。

除了上述例子外, 动态规划还可应用于:

(1) 将有限资源合理地分配给若干使用单位, 使总收益最大;

(2) 为了在几个时期内满足对某产品的需要量, 如何合理地确定各时期的产量与库存量, 使总的费用最少;

(3) 在多级物资库存系统中确定各级仓库的合理库存量;

(4) 设备的合理更新年限;

(5) 各种零件加工顺序的合理安排等问题。

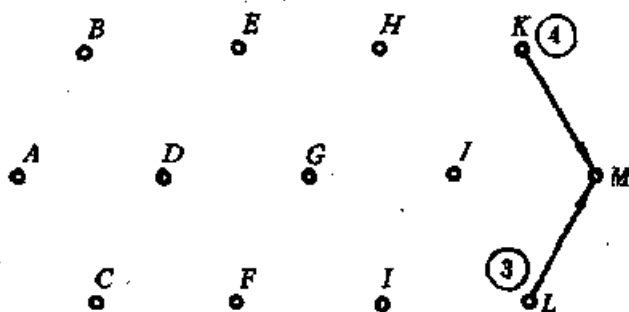


图7-4 经过一个阶段的计算结果

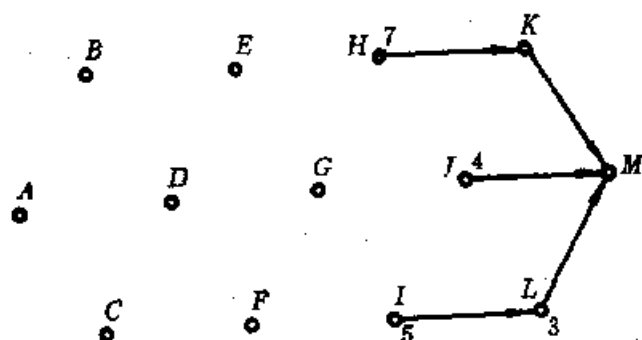


图7-5

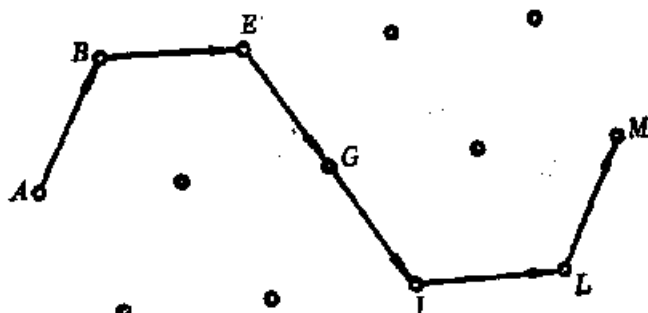


图7-6

## 第八章 非线性规划初步

非线性规划是运筹学的重要分支之一，很多实际问题可抽象为非线性规划模型。过去由于解法上的困难，非线性规划的应用受到了限制。近年来，电子计算机及计算方法的迅速发展，使非线性规划的研究及应用有了很大进展。目前，非线性规划主要用在工程的最优设计、资源利用、质量控制和企业经营管理等方面。

### § 8.1 非线性规划问题及数学模型

前面的章节已讨论了线性规划问题及其求最优解。线性规划问题的模型特征是：目标函数和每一个约束条件都必须是线性函数（自变量的一次函数）。在企业的经营管理和生产实践中，建立的数学模型可能会出现以下情况：

- (1) 非线性的目标函数，线性的约束条件；
- (2) 线性的目标函数，非线性的约束条件；
- (3) 目标函数与约束条件均为非线性函数。

上述任一种情况，都构成非线性规划问题的数学模型。概括地说，如果目标函数或约束条件中，有一个或多个是变量的非线性函数，就称这种规划问题为非线性规划问题。

例1：某金属制品厂现有一批边长为0.6米的钢板，要做成一种无盖的正方形箱子，并使箱子的容积最大。企业的技术人员面临如何开料，使箱子的容积最大的问题。这个开料问题可用下图表示：

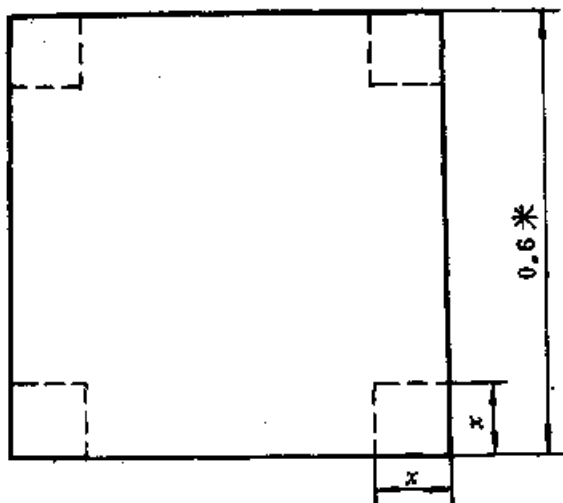


图 8-1 开料图

图 8-1 中，虚线所围的面积表示被截去的小方块。设  $x$  为小方块的边长， $S$  为箱子的容积。箱子容积的计算公式如下：



$$S = \text{长} \times \text{宽} \times \text{高}$$

其中,

$$\text{高} = x$$

$$\text{长} = (0.6 - 2x)$$

$$\text{宽} = (0.6 - 2x)$$

于是, 容积的计算公式可写成

$$\begin{aligned} S &= x(0.6 - 2x)(0.6 - 2x) \\ &= x(0.6 - 2x)^2 \end{aligned}$$

考察被截去的方块的边长 $x$ 的取值, 显然,  $x$ 的最小取值为0, 最大取值为0.3米。所以,  $x$ 取值的约束可表示为二个不等式, 即

$$x \leq 0.3$$

$$x \geq 0$$

例1: 要求容积最大的开料方案, 而 $x$ 的取值必须满足约束条件。因此这个开料问题可用数学模型表达如下:

$$\begin{aligned} \max S &= x(0.6 - 2x)^2 && \text{目标函数} \\ x &\leq 0.3 \\ x &\geq 0 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{约束条件} \end{aligned}$$

根据微积分的极值原理, 求得目标函数的极值点 $x^* = 0.1$ 。 $x^*$ 满足约束条件, 故为例1的最优解。对应的最大容积

$$\begin{aligned} \max S &= 0.1(0.6 - 2 \times 0.1)^2 \\ &= 0.016 (\text{立方米}) \end{aligned}$$

例2: 某公司承建一项工程, 工程总成本可分为直接费用和间接费用两部分。直接费用与工期有关, 若要缩短工期, 就必须增加机械设备和劳动力等, 直接费用也会相应增加。设 $x$ 为施工天数, 设 $C_1$ 为直接费用。根据经验, 直接费用与施工天数的关系式为  $C_1 = 30 + 25\frac{1}{x}$ 。

设 $C_2$ 为间接费用; 间接费用与施工天数的关系式为  $C_2 = 5 + 0.2x$ 。费用均以万元为计量单位。根据企业的财务状况, 要求将直接费用控制在35万元以内, 合同要求施工期限不超过40天。求使工程总成本取低的施工天数。

设 $C$ 为工程总成本, 其数学表达式为

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= 30 + 25\frac{1}{x} + 5 + 0.2x \\ &= 35 + 0.2x + 25\frac{1}{x} \end{aligned}$$

考虑直接费用 $C_1$ 和施工天数的限制, 求总成本最小的数学模型如下

$$\begin{aligned} \min C &= 35 + 0.2x + 25\frac{1}{x} && \text{目标函数} \\ 30 + 25\frac{1}{x} &\leq 35 && \text{约束条件} \\ x &\leq 40 \\ x &\geq 0 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{约束条件} \end{aligned}$$

例2的成本费用 工期曲线见图8-2

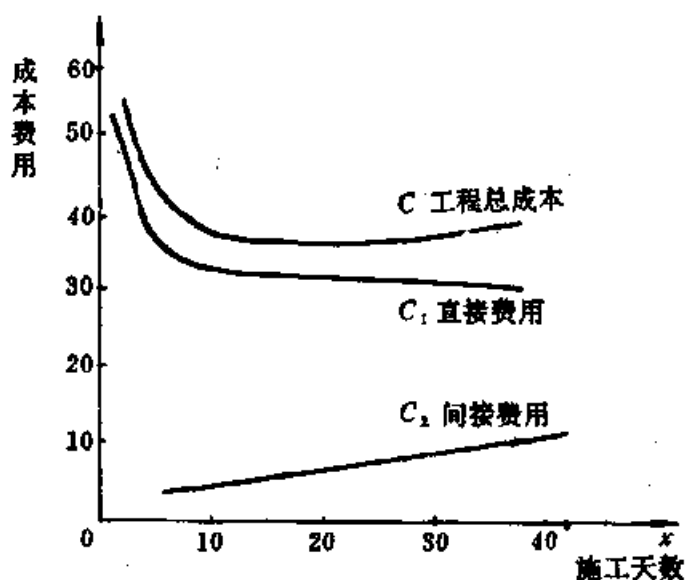


图8-2 成本费用——工期曲线

例1的目标函数为自变量的非线性函数，因而是非线性规划问题。例2的目标函数为自变量的非线性函数，第一个约束条件也是非线性函数。所以例2也是一个非线性规划问题。

非线性规划问题的数学模型常表示成以下形式：

$$\begin{cases} \min f(X) & (8-1') \\ h_i(X) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) & (8-2') \\ g_j(X) \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l) & (8-3') \end{cases}$$

其中， $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是未知数向量； $f(X)$  为目标函数。 $h_i(X) = 0$  为第  $i$  个等式约束条件；共有  $n$  个等式约束条件。 $g_j(X) \geq 0$  为第  $j$  个不等式约束条件；共有  $l$  个不等式约束条件。

如果需使目标函数最大化，则可根据关系式， $\max f(X) = -\min [-f(X)]$ ，即使其负值最小化即可（见图8-3），因此，式(8-1')具有一般性

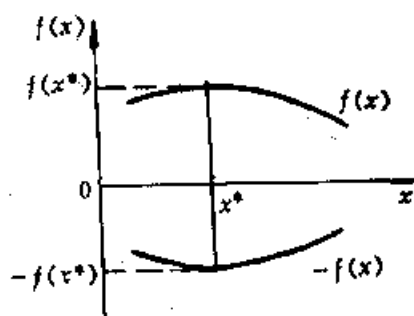


图8-3

若某个约束条件是“ $\leq$ ”不等式，仅需用“-1”乘这个约束的两端，即可将约束变为“ $\geq$ ”的形式。

因而式(8-1')、(8-2')、(8-3')构成了非线性规划模型的一般表达形式。

## § 8.2 非线性规划的图示

图示法便于人们建立直观形象的概念。首先回顾线性规划的最优解的特点。设只有一个自变量  $x$  的线性规划问题为

因而式(8-1')、(8-2')、(8-3')构成了非线性规划模型的一般表达式。

$$\begin{aligned} \max & f(x) \\ & x \leq b \\ & x \geq a \end{aligned}$$

其图形见图 8-4 (a)，显而易见，目标函数的最大值在  $b$  点上必可达到。反之，目标函数的最小值则可在  $a$  点上达到。 $a$  点和  $b$  点正是这个线性规划问题的可行解域的顶点。这个简单的例子再次验证了线性规划的重要定理：线性规划问题如果有最优解，则一定可在可行解域的某一顶点上达到。

作为比较，考察一个简单的非线性规划问题。假设目标函数  $f(x)$  是只有一个自变量  $x$  的单峰函数，变量  $x$  的取值范围为  $[a, b]$ ，其图形见图 8-4 (b)。 $a$  点和  $b$  点是这个非线性规划的可行解域的顶点，或称为约束区域的边界。

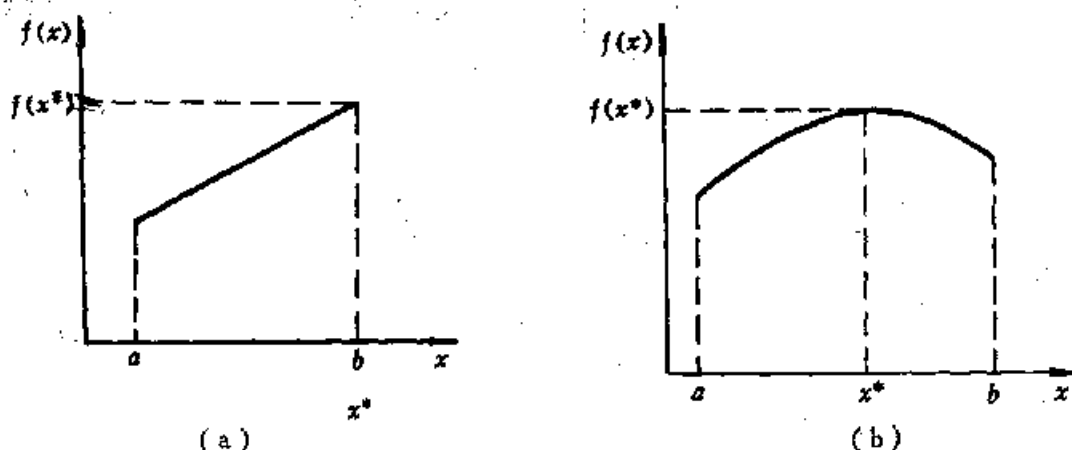


图 8-4

观察图 8-4 (b)，此非线性规划的最优解  $x^*$  并不在可行解域的顶点，而是在可行域以内。如果目标函数  $f(x)$  略有变化，则最优解  $x^*$  将会在另一点上取得。由此得到一个重要的概念，非线性规划的最优解并不一定在约束区域的边界上达到，而根据不同的目标函数和不同的约束区域，其最优解可能在约束区域上（包括约束区域内的所有点和边界）的某一点上达到。

比较上述线性规划与非线性规划的两个特殊的例子，可见非线性规划的最优解的情况复杂得多。当非线性规划的目标函数和约束条件的变量较多，形式比较复杂时，求最优解是一项相当困难的工作。

由于非线性规划问题的最优解的复杂性，一般来说，解非线性规划比解线性规划的难度大得多。线性规划有单纯形法这一通用方法，而目前非线性规划还没有适用于各种问题的一般算法。非线性规划的解法种类很多，但各个方法都有本身特定的适应范围。

按照本刊授教材《运筹学》的要求，本章的目的是使学员建立非线性规划的基本概念，重点介绍非线性规划问题的一维搜索方法。

### § 8.3 一维搜索

若已知目标函数  $f(x)$  为单峰函数，变量  $x$  的取值区间为  $[a, b]$ 。求这样一个比较简

单的非线性规划问题,可以采用一维搜索的方法。本章介绍的一维搜索方法又称为单因素优选法。

优选方法可分为直接搜索法和解析法二类。解析优化方法也可称为间接优化方法,其特点是首先建立描述研究对象变化规律的数学方程,再用数学解析的方法求出数学方程的最优解。直接优化方法的优点是不需知道研究对象的严格的数学表达式,而在变量的取值上直接搜索,通过少数次试验,寻找其最优解。

在实际工作中,建立研究对象的数学方程往往很困难,因而直接搜索方法的用途更广。著名科学家华罗庚在全国各地推广应用优选法,取得了丰硕的成果。企业在新产品、新工艺研制,仪表、设备调试等方面,采用优选法能够以较少试验次数,迅速找到较优的方案。在不用增加设备、投资、人力和原材料的条件下,应用优选法可以缩短工时,增加产量,提高质量、节约原料、降低成本,挖掘潜力,目前应用最广泛的是配方配比、工艺操作条件、仪器仪表的调试以及工程最优设计等方面。

本节介绍常用的一维最优化方法,包括菲波那契法、0.618法和抛物线逼近法。

### § 8.3.1 菲波那契 (Fibonacci) 法

设目标函数  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的下单峰函数 (图 8-5), 在此区间内有唯一的极小点  $x^*$ 。若在此区间内任取两点  $a_1$  和  $b_1$ , 并计算 (或作试验) 得到其目标函数值  $f(a_1)$  和  $f(b_1)$ 。于是, 可能出现以下两种情形:

(1)  $f(a_1) < f(b_1)$  (图 8-5(a))。这时极小点  $x^*$  必在区间  $[a, b_1]$  内。

(2)  $f(a_1) \geq f(b_1)$  (图 8-5(b))。这时极小点  $x^*$  必在区间  $[a_1, b]$  内。

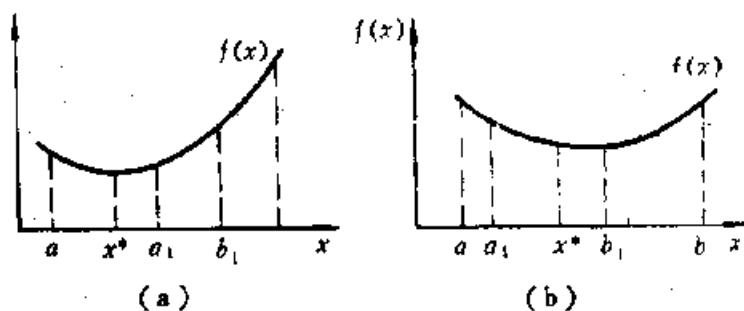


图 8-5

目标函数为单峰函数 (包括下单峰函数和上单峰函数), 极值点在区间  $[a, b]$  内, 是十分重要的假设。单峰函数有一个重要的性质: 比较区间  $[a, b]$  内不同两点的函数值, 就可以确定最优值的位置。因此, 在区间  $[a, b]$  内取两个不同点, 并将两个函数值加以比较, 就可以把搜索区间  $[a, b]$  缩小成  $[a, b_1]$  (或  $[a_1, b]$ ), 如果继续搜索下去, 则可在缩小的区间  $[a, b]$  内再取一点, 求出其函数值并与  $f(a_1)$  加以比较, 进一步缩小搜索区间。试验次数越多, 搜索区间越小, 从而求出满足一定精确度要求的最优解。

#### 1. 菲波那契数列及其递推公式

菲波那契法是利用菲波那契数列安排试验的单因素优选法。菲波那契数列如下

表 8-1

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$F_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

表中,  $n$  表示菲波那契数列的下标变量,  $F_n$  表示对应下标变量  $n$  时的数列值。当  $n=0$ ,  $F_n=1$ ; 当  $n=1$ ,  $F_n=1$ ; ..., 当  $n=5$ ,  $F_n=8$ 。菲波那契数列有一个重要的递推关系式

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 0 \quad (8-1)$$

例如, 当  $n=4$  时,  $F_{n-1}=F_3=3$ ,  $F_{n-2}=F_2=2$ 。根据递推关系式 (8-1) 得

$$F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5$$

## 2. 利用菲波那契数列安排试验

这里设目标函数的具体形式未知, 但根据经验可判断其为单峰函数, 且选定包含最优值在内的试验区为  $[a_0, b_0]$ , 试验的目标函数值 (试验结果) 可测量得到。这种情况比较常见, 也适合一般实际工作的特点。

$n$  次试验能获得最大的区间缩短率 (缩短后的区间长度与原区间长度之比) 为  $\frac{1}{F_n}$ 。例如进行 10 次试验,  $F_{10}=89$ , 所以 10 次试验可把原区间长度  $L$  缩短为  $\frac{L}{89} \approx 0.01124L$ 。

若想进行  $n$  次试验把区间  $[a_0, b_0]$  缩短为原来区间长度的  $\delta$  倍, 只要  $n$  足够大, 能使下式成立。

$$F_n \geq \frac{1}{\delta} \quad (8-2)$$

式中,  $\delta$  为一个正小数, 称为区间的相对精度。

菲波那契法安排试验的步骤如下:

### (1) 确定试验点个数 $n$

根据缩短率  $\delta$ , 用式 (8-2) 算出  $1/\delta$ , 然后由表 8-1 确定一个最小的  $n$ 。

例如, 某试验取定相对精度  $\delta=0.05$ ,  $1/\delta=20$ , 查表 8-1, 得最小的  $n=7$ , 即选定  $F_n=F_7=21$ 。

### (2) 选取前二个试点的位置

设  $x_1$  为第 1 个试点,  $x_2$  为第 2 个试点。

$x_1, x_2$  可根据以下公式计算得到:

$$x_1 = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n} (b_0 - a_0) \quad (8-3)$$

$$x_2 = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n} (b_0 - a_0) \quad (8-4)$$

注意到,  $x_1$  位于试验区间的右侧,  $x_2$  位于试验区间的左侧, 两个试点的位置是对称的。菲波那契法是按数列中  $F_{n-1}$  与  $F_n$ ,  $F_{n-2}$  与  $F_n$  的比值来确定试点的, 故又称为分数法。

(3) 在  $x_1, x_2$  两点上作试验, 并比较两点的目标函数值  $f(x_1)$  和  $f(x_2)$  的大小。

若 $f(x_1)$ 比 $f(x_2)$ 好, 则说明 $x_1$ 为较好点, 并可判断最优值位于区间 $(x_2, b_0)$ 。取

$$a_1 = x_2, b_1 = b_0$$

缩短的区间长度为 $F_{n-1}$ , 根据对称试验的特点, 显然, 第3个试点 $x_3$ 应在 $x_1$ 的右侧, 按公式(8-3), 得

$$\begin{aligned} x_3 &= a_1 + \frac{F_{n-1-1}}{F_{n-1}} (b_1 - a_1) \\ &= a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} (b_1 - a_1) \end{aligned}$$

其过程见图8-6, 原 $x_1$ 点位于新试验区间的 $\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}$ 处。

注意到, 每次试验后, 原区间长度 $F_n$ 将缩小为 $F_{n-1}$ 。

若 $f(x_1)$ 比 $f(x_2)$ 差, 说明 $x_2$ 点是好点, 可判断最优值位于区间 $(a_0, x_1)$ 。取

$$a_1 = a_0, b_1 = x_1$$

缩短的区间长度为 $F_{n-1}$ , 由对称试验的特点可知第3个试点 $x_3$ 应位于 $x_2$ 的左侧。按公式(8-4), 得

$$\begin{aligned} x_3 &= a_1 + \frac{F_{n-1-2}}{F_{n-1}} (b_1 - a_1) \\ &= a_1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} (b_1 - a_1) \end{aligned}$$



图8-6

(4) 进行第3个试点 $x_3$ 的试验, 与前次好的试验点比较, 可以继续缩小试验区间。重复以上过程, 直到满足试验精度要求为止。

例3: 卡那霉素生物测定培养温度的优选。

卡那霉素发酵生物测定, 国内外都规定培养温度为 $37 \pm 1^\circ\text{C}$ , 培养时间在16小时以上。某制药厂为缩短时间, 决定优选培养温度, 试验范围定为 $29 \sim 50^\circ\text{C}$ , 试验精确度要求 $1^\circ\text{C}$ 。一般认为, 试验精度是指经过试验范围的大小。用菲波那契法安排试验, 其过程如下。

本例要求精确度为 $1^\circ\text{C}$ , 为使试验方便, 试点应以整数为单位, 因而特选定试验区间长度为某个 $F_n$ , 故由表8-1取 $F_7 = 21$ , 即 $n = 7$ 。试验区间 $[a_0, b_0]$ 为 $[29, 50]$ 。

第1个试点 $x_1$ , 第2个试点 $x_2$ 分别由(8-3)、(8-4)式确定

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n} (b_0 - a_0) \\ &= 29 + \frac{13}{21} (50 - 29) = 42^\circ\text{C} \\ x_2 &= a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n} (b_0 - a_0) \\ &= 29 + \frac{8}{21} (50 - 29) = 37^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$x_1, x_2$ 两点试验的结果表明,  $x_1$ 比 $x_2$ 点好, 因而舍弃区间 $(a_0, x_2)$ , (图8-7(a))

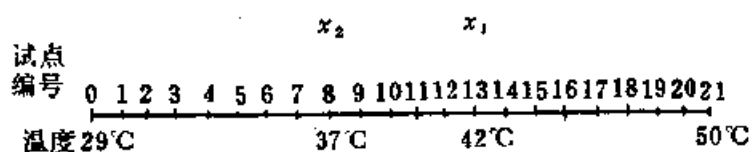
新的试验区间为 (37, 50) 即设  $a_1 = 37$ ,  $b_1 = 50$ 。按照菲波那契法对称试验的特点, 可知第 3 个试点  $x_3$  应在  $x_1$  的右侧, 由式 (8-3) 计算  $x_3$

$$x_3 = a_1 + \frac{F_{n-1-1}}{F_{n-1}} (b_1 - a_1)$$

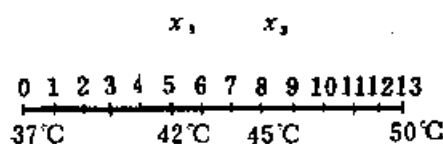
$$= 37 + \frac{8}{13} (50 - 37) = 45^\circ\text{C}$$

$x_3$  点的试验结果表明,  $x_1$  点比  $x_3$  点好, 试验区间缩小为 (37, 45), 见图 (8-7(c))

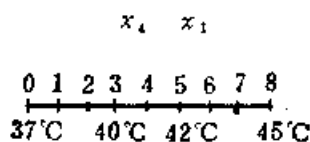
确定试点  $x_4 = 40^\circ\text{C}$ , 试验结果是  $x_1$  点  $x_4$  点好。再确定试点  $x_5 = 43^\circ\text{C}$ 。 $x_4$  和  $x_5$  的确定由读者自作练习。经过 5 个试验, 证明培养温度  $42 \sim 43^\circ\text{C}$  时效果最好, 达到了试验精度的要求, 只需要培养时间 8~9 小时。



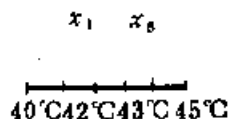
(a)



(b)



(c)



(d)

图 8-7

### § 8.3.2 0.618 法

0.618法又称黄金分割法。0.618法与菲波那契法的区别主要是用 0.618 和 0.382 代替

$\frac{F_{n-1}}{F_n}$  和  $\frac{F_{n-2}}{F_n}$  来安排试验, 以后的步骤相同。

设目标函数为单峰函数，试验区间为  $[a, d]$ 。 $x_1, x_2$  为第 1 个试点和第 2 个试点。第 1 个试点  $x_1$  安排在区间的 0.618 处，第 2 个试点  $x_2$  安排在区间的 0.382 处。可按下列式计算  $x_1$  和  $x_2$

$$x_1 = a + 0.618(b - a) \quad (8-5)$$

$$x_2 = a + b - x_1 \quad (8-6)$$

注意到， $x_2$  与  $x_1$  在位置上是对称的，故  $x_2$  又称为  $x_1$  的对称点。

如果称  $a$  为试验范围的小头， $b$  为试验范围的大头，公式可通俗地写成

$$x_1 = \text{小头} + 0.618(\text{大头} - \text{小头})$$

(8-5')

$$x_2 = \text{小头} + \text{大头} - x_1 \quad (8-6')$$

公式 (8-6) 和 (8-6') 称为对称公式。

用  $f(x_1)$  和  $f(x_2)$  分别表示试点  $x_1$  和  $x_2$  的试验结果，如果  $f(x_1)$  比  $f(x_2)$  好，即  $x_1$  是好点，于是把试验范围  $(a, x_2)$  划去。根据单峰函数的性质，最优点必位于试验范围  $[x_2, b]$ 。下一步是按对称公式确定下一个试点  $x_3$ ，即

$$x_3 = x_2 + b - x_1$$

见图 8-8(a)

如果  $f(x_1)$  比  $f(x_2)$  差，即  $x_2$  是好点，划去试验范围  $(x_1, b)$ ，而保留试验范围  $[a, x_1]$ 。按对称公式，确定试验范围  $[a, x_1]$  内的下一个试点  $x_3$ ，即

$$x_3 = a + x_1 - x_2$$

见图 8-8(b)

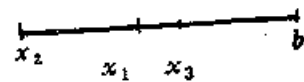
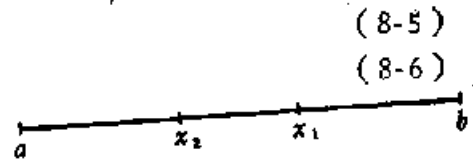
以后的试验重复上述步骤，直到找出满意的试验点，得到比较好的结果，或者留下的试验范围已很小，继续试验的结果相差不大，这时即可停止试验。

作为一种特殊情形，如果  $f(x_1)$  和  $f(x_2)$  相等，则应根据经验作具体分析，判断最优点可能在哪一边，再决定试验范围的取舍。在一般情况下，可以同时划去试验范围  $(a, x_2)$  和  $(x_1, b)$ ，仅保留中间的试验范围  $(x_2, x_1)$ 。然后把  $x_2$  看成新的试验范围的小头  $a$ ，把  $x_1$  看成大头  $b$ ，用公式 (8-5) 和 (8-6) 重新安排两次试验，如图 8-8(c)。

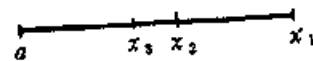
例 4：某塑料厂生产微孔胶拖鞋，过去产品质量存在的问题是微孔拖鞋有较严重的缩码现象，即原 10 码的拖鞋逐渐缩为  $9\frac{1}{2}$  码，9 码。经分析认为配方配比中促进剂用量是关键因素，该厂对促进剂用量来用 0.618 法优选。

根据经验确定促进剂用量的试验范围为 1.5 到 5，即试验范围为  $(1.5, 5)$ 。第 1 试点  $x_1$  和第 2 试点  $x_2$  确定如下：

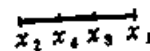
$$\begin{aligned} x_1 &= a + 0.618(b - a) \\ &= 1.5 + 0.618(5 - 1.5) = 3.66 \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

图 8-8



$$x_2 = a + b - x_1$$

$$= 1.5 + 5 - 3.66 = 2.84$$

试验结果是,  $x_1$  点的收缩率  $f(x_1) = 2.65\%$ ,  $x_2$  点的收缩率  $f(x_2) = 1.85\%$ 。显然,  $f(x_2)$  比  $f(x_1)$  好, 于是划去试验范围  $(x_1, 5)$ , 见图 8-9(a)。

根据对称公式确定第 3 试点

$$x_3 = 1.5 + 3.66 - 2.84 = 2.32$$

试验结果是,  $x_3$  点的收缩率  $f(x_3) = 2.65\%$ ,  $x_3$  与  $x_2$  比较, 还是  $x_2$  点好, 于是划去试验范围  $(1.5, x_3)$ , 见图 8-9(b),

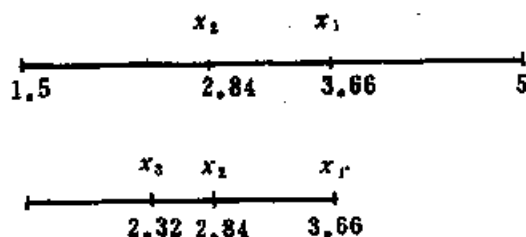
根据对称公式确定第 4 试点

$$x_4 = 2.32 + 3.66 - 2.84 = 3.14$$

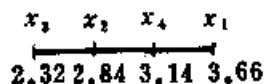
试验结果是,  $x_4$  点的收缩率  $f(x_4) = 1.45\%$ 。

$x_2, x_4$  的试验结果比较满意, 取 2.84 和 3.14 的中值 2.99 为促进剂用量。为了生产方便, 最后取定促进剂用量为 3。

应用 0.618 法, 并不需要事先给定试验精度的要求, 若认为已取得满意的试验结果, 即可终止试验。0.618 法是非波那契法的近似, 应用比较方便, 效果也相当好, 因而得到广泛应用。



(a)



(b)

图 8-6

### § 8.3.3 抛物线逼近法

菲波那契法和 0.618 法在安排试验的过程中, 只是比较两点的结果好坏, 再决定下一步的试验。如果能利用以前试验结果的数值, 有可能更好地安排以后的试验, 较快取得满意的效果。抛物线逼近法就是利用以前 3 个试点的数值安排试验的一种方法。

设已有 3 个试点  $x_1, x_2, x_3$ , 分别试验得数据  $y_1, y_2, y_3$ 。这三个试点及结果可用平面坐标上的三点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  表示, 用以拟合一条二次抛物线

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 \quad (8-7)$$

这条抛物线用来近似目标函数  $f(x)$ , 且抛物线在点

$$x_4 = \frac{\frac{1}{2} y_1 (x_2^2 - x_3^2) + y_2 (x_3^2 - x_1^2) + y_3 (x_1^2 - x_2^2)}{y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2)} \quad (8-8)$$

取得最大值。 $x_4$  可用来近似目标函数  $f(x)$  的最优点。因此, 可取  $x_4$  为下次试验的试点。

这个方法在中间高、两头低的情形, 即  $x_1 < x_2 < x_3$ , 而  $y_2 > y_1, y_2 > y_3$  时效果较好。

见图 8-10。

因为设目标函数为单峰函数，二次抛物线是单峰曲线，所以可望较快逼近最优解。

本节所述的抛物线逼近法，直接用式 (8-8) 计算试点  $x_4$ ，并不需要计算抛物线的函数式和求导数，因而便于应用。 $x_4$  点试验后，如认为还需继续试验，仍可选取三个已作的试点，用抛物线逼近法安排下一个试验。

如果用 (8-8) 式算出的  $x_4$  与  $x_2$  相等，可在  $x_2$  附近安排试验，或取  $x_4 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ，在  $x_4$  点上安排试验。

例 5：某电镀厂为提高镀硬铬速度，对氟硅酸浓度优选。优选范围 2.5~9 克/升。用分数法做了四点试验，结果如下：

$x_1 = 6.5$ ， $y_1 = 14.8$  丝/时，

$x_2 = 7.5$ ， $y_2 = 15.5$  丝/时，

$x_3 = 8$ ， $y_3 = 12.75$  丝/时，

$x_4 = 5$ ， $y_4 = 13.5$  丝/时。

经分析比较，取  $x_1$ ， $x_2$ ， $x_3$  三个点用抛物法逼近法安排以后的试验。设下一个试点为  $x_5$ ，由式 (8.8) 得

$$x_5 = \frac{1}{2} \frac{14.8(7.5^2 - 8^2) + 15.5(8^2 - 6.5^2) + 12.75(6.5^2 - 7.5^2)}{14.8(7.5 - 8) + 15.5(8 - 6.5) + 12.75(6.5 - 7.5)} = 7.08$$

为方便起见，取第五个试点  $x_5 = 7$ ，试验结果  $y_5 = 17.5$  丝/时，效果最好。

非线性规划问题的解法很多，除了本章介绍的有关一维搜索方法外，还有梯度法、共轭梯度法、变尺度法、步长加速法等无约束非线性规划的解法；还有可行方向法、线性规划逐步逼近法、制约函数法等有约束的非线性规划解法。这些内容已远超出本刊授课程的要求，有兴趣和有需要的读者可参阅有关书籍和资料。

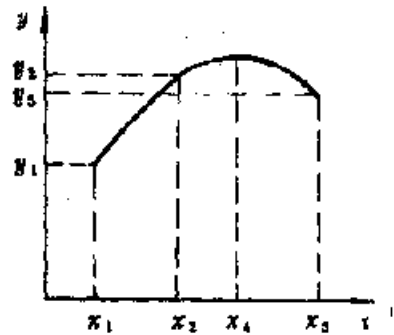


图 8-10

## 第九章 库存论

库存论是以工商企业所面临的各种客观情况为背景,从数学和应用角度研究库存问题的运筹学分支。早1915年,就已有学者推导出最简单的库存数学模型。随着企业生产规模的扩大,随着产品结构和经营环境日趋复杂,库存控制已成为工业企业生产经营管理中不可忽视的工作。由于库存处理不当,造成企业严重亏损的事例,在国外和国内都是屡见不鲜的。故此,许多学者从事这方面的研究,发表了大量著作,并建立了各种形式的库存模型。本章主要介绍库存管理的有关概念及简单的库存模型。

### § 9.1 库存问题的提出

工业企业为了保证生产正常、均衡地进行,必须储备适量的原材料、外购件、燃料和在制品;有时为了适应市场需求的变化,还需储备适量的成品。这些物品的储存,往往占用大量流动资金。不同行业、生产不同产品的企业,库存占用的流动资金量不同,有的企业少至10%,有的企业高达50%以上。七十年代中期,美国最大的电器及汽车各公司,每年的巨额库存为七亿五千万至十五亿美元之间。我国企业管理中,库存量过大,物资积压的现象比较普遍。例如,我国钢铁生产水平较低,但据某年的统计,钢材库存量竟高达1980万吨,占用140亿元人民币,确实是很大的浪费。

对于企业来说,库存量过少,可能会造成生产中断、设备能力不能充分发挥,还可能拖延产品交货期而影响信誉。库存量过多,则需增加仓库容积,支付更多的流动资金贷款利息,有些物品还会变质和损坏。如何考虑库存数量,降低成本,加速资金周转,正是库存管理要研究解决的问题。

国外许多企业采用现代库存管理的科学方法,取得了良好效果。美国福特汽车公司因改善库存管理,每年节省了一笔可观的费用。日本丰田汽车公司推行“准时生产制”,提倡“只在必要的时间,按必要的数量,生产的产品”,把原材料和在制品的储备压缩到最低限度,尽可能节省资金而使企业获得更多的利润。

近年来,我国一些企业应用现代库存管理方法,取得了很好的经济效益。北京重型机器厂、重庆汽车发动机厂等企业的应用成果曾发表在有关的学术刊物上。

为了更好地建立库存管理的概念和意识,先考察几种实际情况。

(1) 某食品厂需用鲜蛋作原料。鲜蛋存量过少,会产生停工待料,工厂将遭受损失。如储存鲜蛋过多,工厂需扩建原料仓库,还要支付一笔冷冻保鲜费用,储存时间过长,部分鸡蛋将会变质。在这种情况下,工厂最好应储存多少鲜蛋?

(2) 在机器制造厂中,加工一个零件常须经过多道工序。零件经一道工序加工后,即成为下一工序的生产备件。为了保证每道工序能连续进行加工,每个环节都要考虑备件的存储问题。整个产品由许多零件组装而成,每个零件又必须经过许多道工序,因而总计起来将

有大量的在制品储备，从而占用数目甚大资金。这个机器制造厂应如何控制在制品的数量，既避免停工待料，又可降低生产成本？

(3) 商店若储存商品数量不足，会出现缺货现象，因此将失去销售机会而减少利润，但若存量过多，又可能造成商品积压，降低资金周转率，有的商品存放时间过长还会变质、损耗。这个问题还与市场需求的变化有关。为了获取更多利润，商店应对各种商品品种及储存量进行合理的控制？

上述情况表明，储存问题普遍存在于工商企业的管理中。

对于一般工业企业，库存的形态可用图9-1表示。

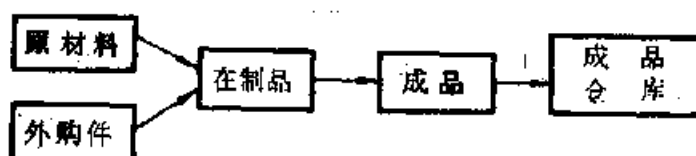


图9-1 库存的形态

## § 9.2 库存模型的有关概念

库存模型是以存储问题为研究对象，求得最低费用的数学模型。库存模型涉及的各种费用及因素分别叙述如下：

(1) 订购费用。即订购某种货物所支付的费用，包括手续费，订购人员的外出采购的差旅费，电信往来等费用，订购费用与订购次数有关，与订购数量无关。

(2) 存储费用。即订购的货物进厂后，直到生产使用前所需的费用，包括仓库费用、保管费用以及货物损坏变质的费用，存储费用与存储数量和时间有关。

(3) 缺货损失，即货物存贮供不应求所引起的损失，包括停工待料的损失，拖延产品交货期而缴纳的罚款，失去销售机会的损失等。在不允许缺货的情况下，假设缺货损失为无穷大。

(4) 购运时间，即从订购至货物到交付工厂所需的时间，包括供应制造货物和运输的时间。

(5) 最高存量，即货物存量的最高数额，最高存量必须小于由仓库容积或资金限制等因素所决定的库存最高限额。

(6) 安全库存量。为了避免货物供给不及时等意外情况而造成的经济损失，可制定安全库存量。在正常情况下，不必动用安全库存量。安全库存量过低，则安全性较差，过高则会使存储费用较高。

(7) 存货周期。指两次订货的时间间隔。

(8) 存货补充。如果货物由企业外部购入，则存货补充的形式是间断的，如果货物是本厂下属车间生产的，存货的补充形式往往是均匀和连续的。

## § 9.3 不允许缺货的库存模型

在许多企业中，如果某种货物（原材料、元件、配件等）不能及时供应，会造成很大的经济损失。这种情况以不允许缺货的库存模型来研究，并假设缺货费用为无穷大。

### 一、瞬时补足库存量的库存模型

在很多情况下，企业所需的货物从市场上购入。通常每次订购一批，每批货量的数量等于最高库量，货物的供给是间断的，并在极短的时间（瞬时）补足库存量，其情形见图9-2。

图9-2的纵坐标表示库存量，横坐标表示时间。当库存量为零时，即时一次补充至最高库存量 $Q_0$ ，货物是等量使用的，故库存量随时间均匀下降，库存量的下降是一条直线。库存变化的一个周期记为 $t_0$ 。

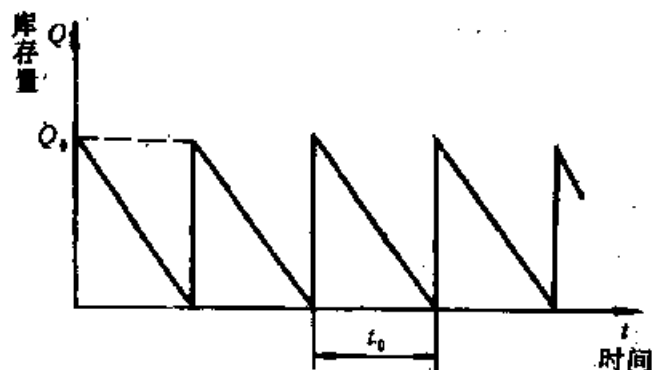


图9-2 瞬时补足存量的库存模型

在图9-2的有关假设下，如何确定企业的存贮策略呢？或者说每次订货的数量是多少呢？库存控制的主要目的是确定使总费用最低的最优库存量。在某一期间（如一年），订购次数越多，订购的费用就越大；订购的次数多，则每批货物的数量（批量）就越小，在此期间的存储费用也相应减少。订货批量与库存费用的关系见图9-3。

图9-3 最上面的曲线表示总库存费用。

年度总库存费 = 年度存储费用 + 年度购货费总额

设  $D$ ——全年货物需要量；

$Q$ ——订货批量（一次订货数量）；

$P$ ——货物单价；

$I$ ——单位货物年存储费用；

$S$ ——每一次订购费用；

$n$ ——全年订货次数；

$TC$ ——年库存总费用。

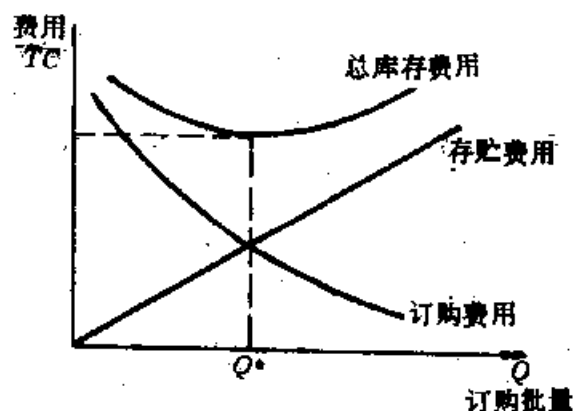


图9-3 订货批量与库存费用的关系

利用图9-3可求得最优订购批量，最优订货次数。

由图9-2可见，每次订货量 $Q$ 就是最高库存量。库存量在最高库存量 $Q$ 和零之间变动，因为库存量的下降是一直线（等量消耗），故平均库存量为 $Q/2$ ，年库存贮费用是平均库存量 $Q/2$ 与单位货物年存贮费用的乘积。即

$$\text{年度存贮费用} = Q/2 \times I \quad (9-1)$$

年度订货费用为订购次数与每次订购费用的乘积，而订购次数 $n$ 为全年货物需要量除以每次订货量。即

$$\text{订购次数 } n = \frac{D}{Q} \quad (9-2)$$

$$\text{年度订货费用} = n \times S$$

$$=D/Q \times S \quad (9-3)$$

年度购货费总额应为全年货物需要量与单价的乘积。即

$$\text{年度购货费总额} = D \times P \quad (9-4)$$

于是，年度库存总费用

$$TC = \frac{Q}{2} \times I + \frac{D}{Q} \times S + D \times P \quad (9-5)$$

由图 9-3 可见，订购费用曲线与存贮费用曲线交点处所对应的总费用曲线处于最低点，即订购费用与存储费用相等时，总库存费用为最低。故有

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} \times I &= \frac{D}{Q} \times S \\ Q^2 &= \frac{2DS}{I} \\ Q^* &= \sqrt{\frac{2DS}{I}} \end{aligned} \quad (9-6)$$

$Q^*$  就是最优订货批量，也称为经济订货批量。本章中，凡上标带有\*号的量为最优量。

利用微积分求最小值的办法，也可求得最优订货批量  $Q^*$ 。其推导过程如下：

对 (9-5) 式的变量  $Q$  求导数，并令其为零。即

$$\frac{dTC}{dQ} = \frac{1}{2} I - \frac{DS}{Q^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} I Q^2 = DS$$

$$\text{解得, } Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{I}}, \text{ 即为 (9-6)}$$

**例 1：**有一工厂每年需用某物料 3000 件，每件单价 40 元，已知每件的存储费用为 2 元，订购费用每次 30 元。试求最优订货批量  $Q^*$  和最优订购次数  $n^*$ ，每次订货可供使用的最优天数  $d^*$ ，最优每批订货金额  $M^*$ 。

**解：**由题意知  $D=3000$  件， $I=2$  元/件， $S=30$  元/次。将上述数值代入公式 (9-6)

$$\begin{aligned} Q^* &= \sqrt{\frac{2SD}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 3000}{2}} \\ &= 300 \text{ (件)} \end{aligned}$$

由 (9-2) 式，可知最优订购次数的计算公式为

$$n^* = D/Q^*$$

将  $D$  和  $Q^*$  的数值代入上式，即

$$\begin{aligned} n^* &= 3000/300 \\ &= 10 \text{ (次)} \end{aligned}$$

设一年生产使用物料的天数为 300 天。则可求得每天的使用量为  $\frac{3000}{300} = 10$  (件/天)。

显然，每次订货可供使用的最优天数

$$d^* = \frac{300}{10} = 30 \text{ (天)}$$

此例还可算出最优每批货物的金额  $M^*$ 。

$$\begin{aligned} M^* &= Q^* \times P \\ &= 300 \times 40 \\ &= 12000 \text{ (元/批)} \end{aligned}$$

## 二、边消耗边补充的库存模型

瞬时补足存量的库存模型，假设工厂所需货物从外部购入，当货物消耗完时，立即可以补足库存量。但在很多情况下，库存是陆续补充和陆续消耗的。比如，在企业里，加工车间为装配车间提供各种零件，通常是分批陆续送往装配车间的，这时装配车间的库存就属于边补充边消耗的形式。又如某零售商店订了一批货，由于运输等方面的原因，货物分多次陆续送齐。该零售商店一边收货一边售货，货物的库存也是边消耗边补充。此时，库存量的变化如图 9-4 所示。

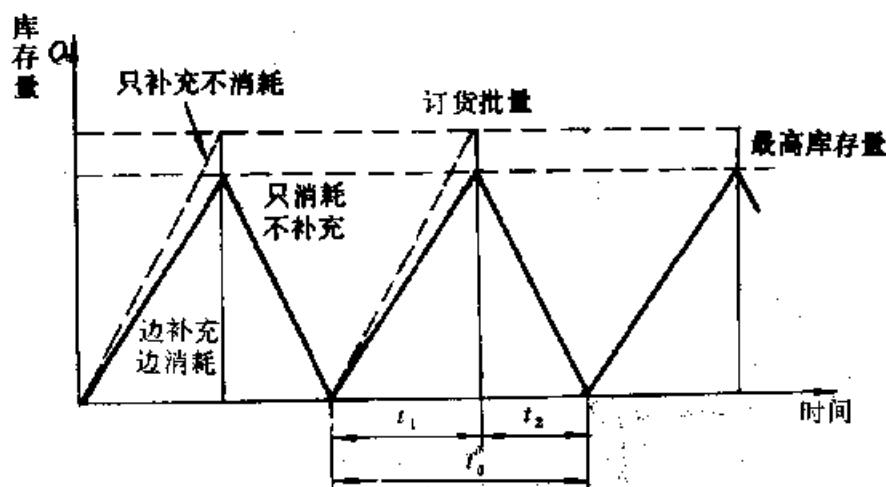


图 9-4 边补充边消耗的库存模型

由图 9-4 可知，最高库存量比订货批量低。原因是货物的补充过程中，货物也在消耗。显然，图 9-4 不能按瞬时补足库存量的模型来计算最优库存量。现研究边消耗边补充的库存模型。

- 设  $Q$ ——订购批量；  
 $X$ ——每日供给的货物数量；  
 $Y$ ——每日耗用的货物数量；  
 $P$ ——货物单价；  
 $I$ ——单位货物年储存费用；  
 $D$ ——全年货物用量；  
 $S$ ——一次订购费用。

已知每天供给的货物量为  $X$ ，则订购批量  $Q$  全部送到所需的天数为  $Q/X$  天，即供货时

$$\text{间 } t_1 = \frac{Q}{X}.$$

每天耗用量为  $Y$ ，则此批货物在送货期间的耗用量为  $(Q/X)Y$ 。

由于边补充边消耗，故每批订货的最高库存量为订货批量  $Q$  与送货期间的货物耗用量  $(Q/X)Y$  之差，即

$$\text{最高库存量} = Q - (Q/X)Y$$

当货物达到最高库存量时，供货停止，存货以每日耗用量  $Y$  的速率下降。当库存量下降为零时，另一批货物开始送到，库存量又重新上升。如图 9-4。

由于库存量以直线（等量增加、等量下降）变化，故平均库存量为最高库存量的一半，即

$$\text{平均库存量} = \frac{1}{2} \left( Q - \frac{Q}{X}Y \right) = \frac{1}{2} Q \left( 1 - \frac{Y}{X} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{全年存储费用} &= \frac{1}{2} Q \left( 1 - \frac{Y}{X} \right) \times I \\ &= \frac{1}{2} Q I \left( 1 - \frac{Y}{X} \right) \end{aligned} \quad (9-7)$$

全年订购费用为订购次数与每次订购费用的乘积，即

$$\text{全年订购费用} = \frac{D}{Q} \cdot S = \frac{DS}{Q} \quad (9-8)$$

当全年存储费用等于全年订购费用时，总库存费用最小，即

$$\frac{1}{2} Q I \left( 1 - \frac{Y}{X} \right) = \frac{DS}{Q}$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{I \left( 1 - \frac{Y}{X} \right)}$$

$$\text{解得} \quad Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{I \left( 1 - \frac{Y}{X} \right)}} \quad (9-9)$$

**例 2：**某厂每天需用某元件 200 件，全年以 300 个工作日计。已知元件每天送达的数量是 1000 件，每件年存储费用为 0.6 元/年，每次订购费用为 40 元/次。试求最优订货批量  $Q^*$ 、最优库存周期  $t_0^*$ 。

**解：**依题意有

$$D = 200 \times 300 = 60000 \text{ 件/年,}$$

$$X = 1000 \text{ 件/天,}$$

$$Y = 200 \text{ 件/天,}$$

$$S = 40 \text{ 元/批,}$$

$$I = 0.6 \text{ 元/年.}$$

由 (9-9) 式，得最优订购批量

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{I \left( 1 - Y/X \right)}}$$



$$= \sqrt{\frac{2 \times 60000 \times 40}{0.6 \left(1 - \frac{200}{1000}\right)}} \\ = 3162.3 \approx 3200 \text{ (件/批)}$$

为方便起见, 取  $Q^* = 3200$  (件/批)

最优库存周期

$$t_0^* = \frac{Q^*}{Y} = \frac{3200}{200} = 16 \text{ (天)}$$

$$\text{最高库存量} = Q^* - \left(\frac{Q^*}{X}\right) Y = 3200 - \left(\frac{3200}{1000}\right) \cdot 200 = 2560 \text{ (件)}$$

$$t_1^* = \frac{Q^*}{X} = 3.2 \text{ (天)}$$

$$t_2^* = t_0^* - t_1^* = 12.8 \text{ (天)}$$

例 2 的库存变化见图 9-5。

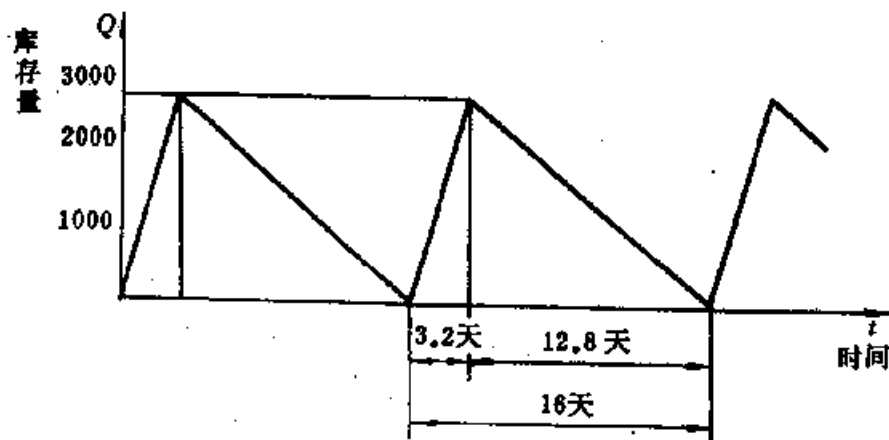


图9-5 例9-2的库存模型

上述不允许缺货的二种库存模型, 都是以经济订货批量为依据的。库存论所研究的模型还包括允许缺货的库存模型、有安全库存量的库存模型、订货价格随订货量不同的有折扣的库存模型、货物消耗量不确定的随机需求库在模型等等。

库存论所研究的库存模型, 是工商企业物资管理的工具。在企业的物资管理中, 还有许多实际问题需要处理。例如用 *ABC* 法按占用金额将种类繁多的物资分类, 分别以不同的方法进行库存管理; 此外还有库存管理的制度、仓库管理的制度。物资消耗定额的确定等等。这些问题和内容将在后继课程中继续研究。

## 第十章 排队论

排队现象在我们生活中是十分普遍的现象，诸如排队等候公共汽车，到银行存款，电话的忙音，工厂生产工人等候领取原料、工具，半成品等待加工，出了故障机器等待维修等。从等待乘坐公共汽车者，到打电话者，等待服务者总希望减少排队现象的出现，缩短排队时间，要满足等待者的这一要求，很简单的办法是增加服务设施的数量或质量，如增加公共汽车运行的车辆，提高修理工人工作效率等，这样排队现象就得到解决。诚然，服务设施越多（或服务效率越高），不用排队等待服务，越方便；另一方面，服务设施越多，对人力，物力的支出越大。显然，这是不经济的，因此，就产生了顾客排队等待服务与服务设施（或服务效率）之间的合理平衡问题。如何配备服务设施，使既能适当地满足顾客的要求，又能使服务设施的花费达到最小（或收益最大）。这就是排队论所要研究的目的。当然这也就是当今管理者所关心的事情。

一个好的，合理的服务系统，应该是服务设施空闲的时间不多，顾客等待服务的时间也不多，如图10-1所示。

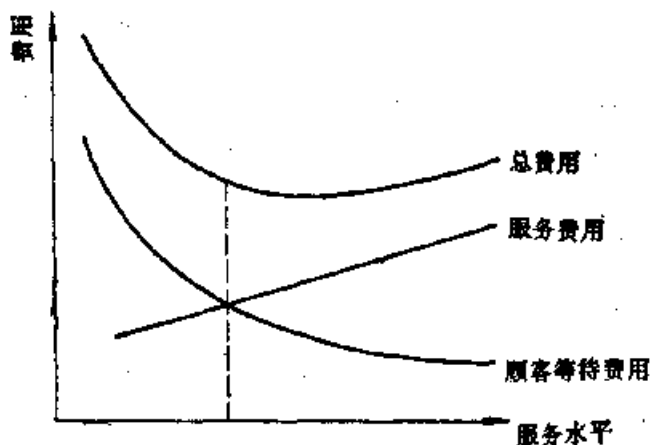


图10-1 最优费用模型

排队论是研究系统拥挤现象的一门科学，要解决拥挤现象，如前所述，增加服务机构，势必增加服务成本；若提高服务机构利用率，减少服务机构，显然降低了服务成本，却增加了顾客的排队和等待时间，这是相互矛盾的。要解决这个矛盾，通常，在短期行为中，可以在服务系统设置以后，根据顾客到来的情况加以调整解决。比如到银行存取款的人多了，可临时增加储蓄员，待高峰期过去了，储蓄员减少至两人。另一种办法是经过实践，收集资料，运用数理统计、概率论的知识，加以分析，然后对服务机构的各项指标作出合理的安排。例如先设置一定数量的服务机构，然后在服务过程中，对顾客的到达时间，排队等候情况，服务机构忙闲情况等，作详细的记录，把这些数据加以整理，得到服务机构的利用率、顾客到达系统的规律、平均每个顾客需要的服务时间，平均有多少个顾客在排队等待服务。

每个顾客平均等待服务的时间等必要的指标，根据排队论理论，对系统设施作出合理调整，无疑这对决策者来说是十分需要的。

## § 10.1 排队论基本概念及其共性

### 一、基本概念

1. 顾客——要求给予服务的人或物统称顾客。等候乘坐公共汽车者、等待领取生产工具或物料的人，等待某本书刊阅读的读者，要求收看电视节目的观众等，都是要求服务的人，是顾客。等待加工的半成品、等待修复的故障机器，等待我方高炮射击服务的入侵敌机等都是有给予服务的要求，也称为顾客。

2. 服务台、员（服务机构）——为顾客服务的人或物统称服务机构。公共汽车、修理工，图书，电视节目，我方高炮等都是服务台或服务机构。

显然，在不同的问题上，顾客和服务员可以有不同的具体含义，如某机器，当半成品在等待它加工时，它是服务员；当它发生故障需要修理工排除故障时，它是顾客。

3. 服务系统——由顾客和服务员组成了服务系统。为了获得服务而到达的顾客若不能立即获得服务，而又允许排队等候，则加入等待队伍，一旦获得服务之后，便离开系统，如图10-2所示。

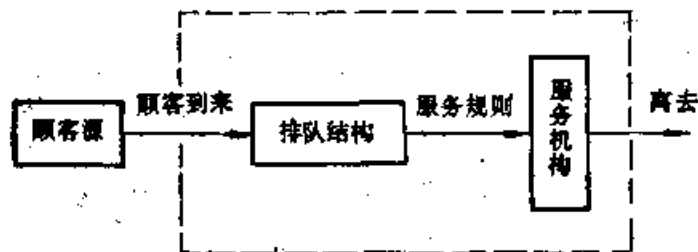


图10-2 排队系统

在各种排队系统中，相继顾客到来的间隔时间与每个顾客所需要的服务时间，往往是无法事先确切地预知的，这一随机性，是排队系统的一个特点，因此排队论也称为随机服务系统理论。

### 二、排队系统的基本组成部分

在生产活动中，可能发生的排队模型是千变万化的，但概括起来，不外乎是三个基本组成部分（对一些特殊问题，可能还有别的组成部分）：输入过程、排队规则和服务机构。下面分别对这三个组成部分予以讨论。

#### 1. 输入过程

输入过程就是刻划顾客按照怎样的规律到达服务系统的。一般地，可有下列各种不同形式到达。

（1）顾客到达服务系统的方式可以是一个一个地来，也可以是成批地到来。如包装线产品一个一个地到来，仓库的库存物品，一批一批地到达。

(2) 顾客相继到达的时间可以是确定型的, 也可以是随机型的。如定期运行的火车到达月台是确定型, 而一般运转的机器出故障是随机型。

(3) 顾客的总体组成可能是有限的, 也可能是无限的, 如工厂某车间正在营运的机器, 它们发生故障, 待修复, 这就是有限的总体。

一般最常讨论的是随机型到达中的最简单流。

流是指事件的序列, 由顾客序列组成的流, 称为顾客流。

满足下列四个条件的流, 称为最简单流, 或普阿松流 (Poisson)。

①平稳性 在时间间隔  $[t, t+\Delta t]$  里, 有一个顾客到达系统的概率是一个常数。这就是说, 在一个给定的时间间隔里顾客到达系统概率是稳定的, 这与起始时间无关。如工人看管自间隔动机床, 不管是在中班, 早班, 夜班, 在当班期间机床发生故障, 需工人修复  $k$  次的概率是一个常数。

②无后效性 (独立性) 在不相重迭的时间间隔里, 顾客到达系统的个数是相互独立的。

③普通性 在同一瞬间, 多于一个顾客到达系统, 实际上是不可能的。这一特性说明顾客是一个一个地进入系统的。

④有限性 任意有限区间里到达有限个顾客的概率为 1。

根据上面的条件, 不难推导出最简单流是服从普阿松 (Poisson) 概率分布的。

首先根据其平稳性, 在任一时间间隔  $t$  (时间区间) 里, 把这区间分成  $N$  个子区间

$$\Delta t = \frac{t}{N}$$

当  $t$  给定时, 只要  $N$  足够大, 就能保证  $\Delta t$  足够小, 并设顾客平均到达率为  $\lambda$ 。

再根据普通性, 在瞬间有多于一个顾客到达是不可能的, 这样就是说在很短的每个时间子区间内 (瞬间), 要么有一个顾客到达 (概率表达为  $\lambda \Delta t = \frac{\lambda t}{N}$ ), 要么没有顾客到达 (概率表达为  $1 - \frac{\lambda t}{N}$ )。

在时间区间  $t$  里, 设到达  $k$  ( $k$  为非负整数) 个顾客的概率为  $P_k$ 。根据最简单流的第二个特性, 在不相交区间内到达系统的顾客数是相互独立, 可以用二项分布来近似, 即

在时段  $t$  里有  $k$  个顾客到达系统的概率为

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \binom{N}{k} \left( \frac{\lambda t}{N} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda t}{N} \right)^{N-k} \\ &= \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k! N^k} (\lambda t)^k \left( 1 - \frac{\lambda t}{N} \right)^{N-k} \\ &= \frac{1 \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \cdots \left( 1 - \frac{k-1}{N} \right)}{k!} (\lambda t)^k \left( 1 - \frac{\lambda t}{N} \right)^{N-k} \\ &= \frac{1 \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \cdots \left( 1 - \frac{k-1}{N} \right)}{k!} (\lambda t)^k \left( 1 - \frac{\lambda t}{N} \right)^{N-k} \end{aligned}$$

令  $N \rightarrow \infty$

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad t > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

例：某工厂有多台机床，根据同行业资料可知，平均每小时有 3 台机床需调整，每台机平均调整时间为 10 分钟（1 个工人应付），现在想知道

①在 10 分钟内发生两台以上机床需要调整的可能性有多大？

②在一班（8 小时）内出现两台以上停机需调整的有几次？以便对因停机造成产值损失的估计。

解：首先考察机床技术状态：在一班内没有多大变化，可以认为它是平稳的；在同一瞬间，两台以上机床停机的概率很小，实际上这是不可能发生的，具有普通性，独立性也是显然的。

当然，由此而断定它是最简单流，这是不够的，必须对机床停机情况作详细的记录，通过统计假设检验，才可以判定它是最简单流。

现假设机床发生故障这一事件为最简单流，在 10 分钟内同时发生两台以上机床停机概率计算式为

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = 3 \text{ 台/小时}, \quad t = \frac{10}{60} \text{ 小时} = \frac{1}{6} \text{ 小时}$$

$$P_k\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\left(3 \times \frac{1}{6}\right)^k}{k!} e^{-3 \times \frac{1}{6}} \\ \approx \frac{0.607}{2^k k!}$$

$$\text{在 10 分钟内两台机发生故障概率为 } P_2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{0.607}{2^2 2!} \approx 0.076$$

$$\text{在 10 分钟内三台机发生故障概率为 } P_3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{0.607}{3! 2^3} \approx 0.013$$

$$\text{在 10 分钟内四台机发生故障概率为 } P_4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{0.607}{2^4 4!} \approx 0.0016$$

$$\text{在 10 分钟内五台机发生故障概率为 } P_5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{0.607}{2^5 5!} \approx 0.000158$$

可见，在 10 分钟内同时发生五台机出故障概率还不到万分之二，显然，五台机以上出故障，为一小概率事件，可以忽略不计。

在 10 分钟内，有两台以上机床发生故障的概率为

$$P_2\left(\frac{1}{6}\right) + P_3\left(\frac{1}{6}\right) + P_4\left(\frac{1}{6}\right) + P_5\left(\frac{1}{6}\right) = 0.091$$

根据计算结果，可以理解为在 10 分钟内，发生两台以上机床故障停机情况为 0.091 次。在一班 8 小时里含有 48 个 10 分钟因此有：

$$0.091 \times (8 \text{ 小时} / \frac{1}{6} \text{ 小时}) = 4.368 \text{ (次)}$$

## 2. 排队规则

排队规则是指到来的顾客是按怎样的规定次序接受服务的。一般有如下三种：

(1) 损失制 当一个顾客到达系统时，若所有的服务台都忙着，没空，顾客就自动离去，永不再来。如在军事上，如果敌机经过防空系统时未被击落，逃走了，则“顾客”就消失了。

(2) 等待制 当一个顾客到达系统时，若所有的服务台都忙着，没空，顾客就自动排队，等待服务。这时，顾客接受服务台服务的形式有：

先到先服务 后到先服务 随机服务 优先权服务 强占服务等

一般讨论的是先到先服务的情况，因为这比较简单，便于讨论。

(3) 混合制 混合制是损失制与等待制的混合。一种情况是，当顾客到达系统时，排队长度小于 $k$ ，就加入排队队伍；若队长等于 $k$ 时，顾客就自动离去。另一种情况是，顾客在系统中排队等待服务的时间是有限的，如果等待时间超过 $T$ ，顾客就自动离去。

## 3. 服务机构

服务机构是指在同一时刻内有多少个服务设备（服务台）可接纳顾客，对每一个顾客服务了多少时间。服务台的个数可以是一个或多个；服务的方式可以是单个服务，多个服务；平均服务率可以是一个常数，也可以是一个变量。如有经验的服务员，当遇到系统中排队等候服务的顾客多时，服务员的服务效率就自动提高；或对另一些服务员当遇到排队顾客多时，就会手忙脚乱，降低了服务率。一般地，平均服务率作为一个常量处理，便于讨论。也就是说，假定服务时间的分布是平稳的。

服务时间一般是一个随机变量，如果具有如下的特点，可考虑用负指数分布去描述它。

负指数分布特点是

① 服务开始后，服务结束得较快的概率很大，服务时间很长的概率很小。

② 顾客已被服务过一段时间，还需要继续服务的时间与已服务过的时间无关。

服务时间是指服务开始和服务完成之间的时间间隔。

平均服务率 $\mu$ 是单位时间平均完成服务的顾客数。

在系统里，可以用 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 来衡量服务机构的通过情况，它表示在相同时间段内，顾客到达的平均数与能接受服务的平均顾客数之比。一般地， $\rho < 1$ ，即在单位时间里平均服务效率 $\lambda$ 大于平均顾客到达率 $\mu$ 。顾客到达是一随机事件，对于等待制，若 $\rho = 1$ ，实际上会造成排队等待服务的顾客就会积压到很长的队伍，这时，只能限制队列长度，停止顾客的到达。

## § 10.2 排队过程的数量指标及其通用的记号

### 一、排队论的几个重要数量指标

在排队系统中，经常研究以下几个指标，这些指标可看作排队系统的有效性尺度。

#### 1. 平均队长 $L$

指在系统中，等待服务的平均顾客数。包括正在接受服务的顾客数 $L_{服}$ 和排队等待服务的平均顾客数 $L_{排}$  即

$$L = L_{服} + L_{排}$$

平均队长是顾客和服务机构所共同关心的问题，如果排队的队伍太长，则顾客因等待服务而造成相应的损失就较大，服务系统需设置的等待房间也就越大。这点，对设计人员是特别重要；若等待房间太小，又容纳不下顾客，造成顾客的损失。

## 2. 平均逗留时间 $W$

指平均一个顾客在服务系统中停留时间。包括接受服务的平均时间 $W_{服}$ 和排队等待服务的平均时间 $W_{排}$

$$W = W_{服} + W_{排}$$

平均逗留时间是顾客最关心的指标。在机器故障问题中，无论是等待修理或正在修理都使工厂受到停工的损失，所以对于一个管理者来说，对平均逗留时间（停工时间）的长短是十分关注的。

3. 忙期 指从顾客到达空闲服务机构到服务机构再次为空闲这段时间的长度，即服务机构连续繁忙的时间长度。这关系到服务员的工作强度。

## 4. 服务设备利用率

平均忙着服务台数与总的服务台数之比。这是衡量服务设施工作强度，磨损程度和疲劳程度的指标。无疑，这也是决定服务成本大小，为服务部门所关心的指标。

## 5. 顾客损失率

由于服务能力不足而造成顾客损失的概率，顾客损失率过高就会使服务系统的利润减少，所以采用损失制的系统都很重视对这一问题的研究

# 二、排队论的通用记号

从上面排队论的讨论可知，要描述某一个排队系统的特征，可以从顾客到达服务系统的概率分布，服务完成时间的概率分布，具有多少个服务台，排队等候服务的空间有多大等方面去描述。为了简明地说出某一排队系统的特征，国际学术界采用了统一的记号表示，按顺序分别示为：



这四个记号含意如下

[1] 表示顾客输入流的概率分布。如顾客到达是按普阿松（Poisson）分布，用 $M$ 表示；如果顾客到达是按定长分布，用 $D$ 表出。

[2] 表示服务时间的概率分布。如服务时间是按负指数分布，用 $M$ 表示。

[3] 表示服务台数。

[4] 表示等待房间的大小。其规则是：

损失制，用 $0$ 表出；

混合制 $m$ ，若排队等待服务的顾客小于 $m$ 个时，再来的顾客参加了排队；若排队等待服务

的顾客数大于 $m$ 个时，顾客就跑掉，再也不回来。

等待制，用 $\infty$ 表出。

如 $M/M/C/\infty$  表示该服务系统顾客的输入是按普阿松流输入，服务时间是按负指数分布，只有 $c$ 个服务台，队列是等待制。

### § 10.3 几个简单的排队系统模型

在这里只讨论几个简单的模型，即顾客到达流是最简单流，服务时间为负指数分布。

#### 一、单通道损失制 ( $M/M/1/0$ )

排队论中单通道损失制系统是最简单的经典问题之一。设系统内只有一个服务员，顾客按普阿松流来到服务系统，平均到达率为 $\lambda$ ；当顾客到达系统时，服务员忙着，没空，顾客立即离去。服务时间服从负指数分布，平均服务率为 $\mu$ 。为了便于对系统在稳态时几个重要数量指标的推出，不妨对系统先作暂态进行讨论。

在时刻 $t$ 系统 已有的顾客数	在时段 $(t, t+\Delta t)$ 里顾客流动情况		在时刻 $(t+\Delta t)$ 系统有顾客数	概 率 表 达 式
	到达系统	离开系统		
$K$ 个	没有到达	没有离去	$K$ 个	$P_K(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$
$K+1$ 个	没有到达	离去1个	$K$ 个	$P_{K+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$
$K-1$ 个	到达1个	没有离去	$K$ 个	$P_{K-1}(t)(1-\mu\Delta t)\lambda\Delta t$
$K$ 个	到达1个	离去1个	$K$ 个	$P_K(t)\lambda\Delta t\mu\Delta t$

从上面的列出，可以得出，在时刻 $(t+\Delta t)$ 里，系统有 $K$ 个顾客概率的暂态方程为：  

$$P_K(t+\Delta t) = P_K(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_{K+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t + P_{K-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) + P_K(t)\lambda\Delta t\mu\Delta t$$

把上式展开整理有：

$$\frac{P_K(t+\Delta t) - P_K(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \mu)P_K(t) + \mu P_{K+1}(t) + \lambda P_{K-1}(t)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时，有

$$\frac{dP_K(t)}{dt} = \lambda P_{K-1}(t) + \mu P_{K+1}(t) - (\lambda + \mu)P_K(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

当系统达到稳态时，与时间 $t$ 无关，变化率为0，有

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$



在  $M/M/1/0$  系统里, 系统里有 1 个顾客, 或系统里没有顾客, 因而有

$$P_1 + P_0 = 1 \quad P_1 = 1 - P_0$$

$$P_0 = 1 - P_1$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

系统里忙着的概率为  $P_1$

系统里闲着的概率为  $P_0$

当系统里有 1 个顾客, 服务台忙着, 再来的顾客就跑掉, 因此  $P_1$  也是顾客损失率。

例: 一条电话线, 平均 5 分钟有 4 次呼唤。如果每次通话时间平均为 1.5 分钟, 求:

(1) 该电话线闲着概率

(2) 该电话线顾客损失的概率

(3) 该电话线平均每小时能接通话多少次?

解: 设该电话线顾客到达服从 Poisson 分布, 通话时间服从负指数分布,

即  $M/M/1/0$

平均到达率  $\lambda = 4/5 = 0.8$  (次/分钟), 平均服务率  $\mu = \frac{1}{1.5}$  (次/分钟) = 0.667

(次/分钟)

(1) 空闲概率  $P_0$

$$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0.667}{0.667 + 0.8} = 0.455$$

(2) 顾客损失概率  $P_1$

$$P_1 = 1 - P_0 = 1 - 0.455 = 0.545$$

(3) 当电话空闲时, 即可通话, 故通话率为  $P_0 = 0.455$ , 平均每分钟顾客到达是 0.8 次, 在一分钟内, 平均通话次数为

$$0.8 \times 0.455 = 0.364 \text{ (次)}$$

平均每小时能通话次数为  $0.364 \times 60 = 22$  (次/小时)

## 二、单通道等待制 ( $M/M/1/\infty$ )

设系统里只有一个服务员, 顾客按普阿松流来到服务系统, 平均到达率为  $\lambda$ , 当顾客到达系统时, 服务台忙着, 顾客就自动加入排队等候服务的行列, 等待给予服务, 一直等至得到服务为止。

设平均服务率为  $\mu$ , 与讨论  $M/M/1/0$  模型相仿, 以  $P_k$  表示服务系统里有  $k$  个顾客的概率,  $P_1$  为系统里只有一个顾客的概率,  $P_0$  为系统里没有顾客, 服务台闲着的概率。

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0$$

...

依此类推有

$$P_k = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0$$

$$\text{设 } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho < 1$$

$$P_k = \rho^k P_0$$

根据最简单流的有限性, 有:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_k + \cdots = 1$$

$$P_0 + P_0 \rho + P_0 \rho^2 + \cdots + P_0 \rho^k + \cdots = 1$$

$$P_0 (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots) = 1$$

当  $\rho < 1$  时, 级数收敛于  $\frac{1}{1-\rho}$

$$P_0 \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = 1$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$P_k = \rho^k P_0 = \rho^k (1 - \rho)$$

① 系统里空着, 服务台闲着的概率  $P_0$

$$P_0 = 1 - \rho$$

② 服务台忙着, 系统里有  $K$  个顾客的概率  $P_k$

$$P_k = \rho^k P_0$$

③ 在系统里平均顾客数  $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k (1 - \rho)$$

$$= \rho (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d \rho^k}{d \rho}$$

$$= \rho (1 - \rho) \cdot \frac{d}{d \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$$

$$= \rho (1 - \rho) \cdot \frac{1}{(1 - \rho)^2} \quad 0 < \rho < 1$$

$$= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

④在系统里，平均排队等待服务顾客数  $L_{\text{排}} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$$\begin{aligned} L_{\text{排}} &= L - L_{\text{服}} \\ &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \rho = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

⑤在系统里，顾客平均逗留时间  $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

⑥顾客在系统里平均排队时间  $W_{\text{排}} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

$$W_{\text{排}} = \frac{L_{\text{排}}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

例：某修理店只有一个工人，每小时平均有 4 个顾客到达；该工人对顾客提出修理意见或立即修复的平均时间为 6 分钟。顾客到达按普阿松分布，服务时间是负指数分布：求：

- (1) 修理店空闲的时间概率
- (2) 店里至少有一个顾客的概率
- (3) 店里有三个顾客的概率
- (4) 店里平均有多少个顾客等候服务
- (5) 每个顾客平均需要在店里逗留多长时间

解：假设这系统是  $M/M/1/\infty$  模型，

$$\lambda = 4 \text{ (次/小时)}, \mu = 60/6 \text{ (次/小时)} = 10 \text{ (次/小时)}$$

(1) 修理店没有顾客的概率为

$$\rho_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{4}{10} = 0.6$$

说明有 60% 的时间，修理店没有顾客。

(2) 修理店至少有一个顾客的概率为店里没有顾客的对立事件，故有：

$$P(k > 0) = 1 - P_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho = 0.4$$

说明有 40% 时间，店内都有顾客在。

(3) 修理店里三个顾客的概率为

$$P_3 = \rho^3 P_0 = 0.4^3 \times 0.6 = 0.0384$$

(4) 修理店里平均顾客数

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{4}{10-4} = 0.67 \text{ (L)}$$

(5) 每个顾客平均要在店里逗留时间

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{10-4} = 0.167 \text{ (小时)} \\ &= 10 \text{ (分钟)} \end{aligned}$$

## § 10.4 排队系统的费用优化

一个好的，合理的服务系统，应该是系统在能达到必要的服务质量标准情况下，使服务设施投入费用为最省。也就是说，费用优化就是要求出一个合理的服务效率 $\mu^*$ 。

一般地，一个系统的服务效率越高，相应的服务费用越高，服务效率与费用成正比的关系( $C_2\mu$ )，顾客等待服务费用与队长 $L$ 也是成正比关系，在系统里顾客等待服务的人多了，自然总的损失费用就越大( $C_1L=C_1\lambda W$ )；整个服务系统的费用优化目标，是使顾客等待服务的损失费用及投入服务设施费用有一个合理的平衡点，即总费用达到最小值。

设：顾客逗留在系统里单位时间付出费用为 $C_1$ 元，总的等待费用为  $C_1\lambda W$ 元。

服务费用为  $C_2\mu$  元。

平均总费用为  $E(C) = C_1\lambda W + C_2\mu$

$$= C_1\lambda \frac{1}{\mu - \lambda} + C_2\mu$$

寻找最小总费用时最合理服务率

$$\frac{dE(C)}{d\mu} = 0$$

$$C_2 + \frac{C_1\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0$$

$$\mu^* = \sqrt{\frac{C_1\lambda}{C_2}} + \lambda$$

例：某零件在组装前需进行清洗生产出来合格品，该正品是按 Poisson流出来，并 $\lambda = 50$ 只/小时；若另件不及时清洗组装，会氧化，每只每小时损失费用为1元，清洗组装费用为每只2元。求平均组装效率（只/小时）多大时，总费用最小。

解： $\lambda = 50$ 只/小时， $C_1 = 1$ 元， $C_2 = 2$ 元

$$\mu^* = 50 + \sqrt{\frac{1}{2}} \times 50 = 55 \text{ (只/小时)}$$

制定岗位责任数量指标时，清洗组平均每小时清洗55只为宜。

## 第十一章 计算机分析程序

随着我国经济建设的迅速发展，在经济领域里采用现代化的管理手段越来越迫切。在企业里，现代化管理十分需要借助计算机这一有效的计算工具，以应付大量的定量分析工作，为企业领导的经营决策提供可靠的定量依据，而传统的手算往往是不能胜任的。为此在这里结合本教材有关章节的内容如线性规划，整数规划，目标规划等章的教学需要，配以计算机程序及其使用方法，以求能解决实际工作所需。

### § 11.1 带优化后分析的单纯形法计算

#### 一、功能

输出线性规划问题的最优解，及其相应的目标函数值，  
输出优化后各约束条件的相应影子价格，  
输出最优基不变时，各约束材料量的可变范围，  
输出最优解不变时，各产品利润（或成本）的可变范围。

#### 二、程序（SIMPLEX—SA）

```
10 REM FILE: SIMP-SA
20 REM SIMPLEX METHOD WITH SENSITIVE ANALYYSIS FOR
  LINEAR PROGRAMMING
30 DEF FN P(X)=INT(X*10000+.5)/10000
40 CLS
50 PRINT: PRINT "THE PROBLEM IS: "
60 PRINT: PRINT "1: TO MAXIMIZE"
70 PRINT "2: TO MINIMIZE"
80 PRINT: INPUT "INPUT 1 OR 2: ", M$
90 PRINT: INPUT "INPUT NUMBER OF CONSTRAINTS: ", M
100 PRINT: INPUT "INPUT NUMBER OF (>) & [=] CONSTRAINTS: ", G
110 INPUT "INPUT NUMBER OF DECISION VARIABLES: ", W
120 N=W+G
130 DIM A(50,100), C(50), B(100), D(50), E(50), P(100)
140 FOR I=1 TO M+1: FOR J=1 TO M+N+3: READ A(I,J):
  NEXT J: NEXT I
```

```

150 FOR I=1 TO M: P(I)=A(I+1, M+N+3): NEXT I
160 A(M+2, 1)=0: A(M+2, 2)=0
170 FOR J=3 TO M+N+3: S=0
180 FOR I=2 TO M+2: S=S+A(I, 2)*A(I, J): NEXT I
190 A(M+2, J)=A(1, J)-S
200 NEXT J
210 A(M+2, M+N+3)=-A(M+2, M+N+3): T=0
220 PRINT: PRINT "*****"
230 PRINT "      *                      *"
240 PRINT "      *      OPTIMUM SOLUTION      *"
250 PRINT "      *                      *"
260 PRINT "      *****"
270 PRINT: IF M$="1" THEN 290
280 PRINT "A MINIMUM PROBLEM": GOTO 300
290 PRINT "A MAXIMUM PROBLEM"
300 PRINT "NUMBER OF CONSTRAINTS,          ", M
310 PRINT "NUMBER OF (>) AND (=) CONSTRAINTS: ", G
320 PRINT "NUMBER OF DECISION VARIABLES:          ", W
330 PRINT: PRINT "NO. OF CYCLE    CURRENT VALUE"
340 PRINT "....."
350 M9=0
360 FOR J=3 TO M+N+2: IF A(M+2, J)<=M9 THEN 380
370 M9=A(M+2, J): K=J
380 NEXT J
390 IF T<>0 THEN 420
400 IF M9<=0 THEN 1840
410 GOTO 430
420 IF M9<=0 THEN 670
430 L1=1E14
440 FOR I=2 TO M+1: IF A(I, K)<=0 THEN 480
450 C(I)=A(I, M+N+3)/A(I, K)
460 IF C(I)>=L1 THEN 480
470 L1=C(I): P=I
480 NEXT I
490 IF L1=1E14 THEN 1860
500 H=A(P, K)
510 FOR J=3 TO M+N+3: A(P, J)=A(P, J)/H: NEXT J
520 FOR I=2 TO M+1: IF I=P THEN 550

```

```

530 H=A ( I, K )
540 FOR J=3 TO M+N+3: A(I, J)=A ( I, J)-A(P, J)*H: NEXT J
550 NEXT I
560 A ( P, 1 )=K-2: A ( P, 2 )=A ( 1, K )
570 FOR J=3 TO M+N+3: S=0
580 FOR I=2 TO M+1: S=S+A ( I, 2 ) *A ( I, J ): NEXT I
590 A ( M+2, J )=A ( 1, J )-S
600 NEXT J
610 A ( M+2, M+N+3 )=-A ( M+2, M+N+3 )
620 T=T+1
630 PRINT T,
640 PRINT "Z=" ,
650 PRINT FN P ( A ( M+2, M+N+3 )): GOTO 350
660 GOTO 590
670 FOR J=1 TO M+N: B ( J )=0: NEXT J
680 FOR I=2 TO M+1: B ( A ( I, 1 ))=A ( I, M+N+3 ): NEXT I
690 PRINT: PRINT "BASIC VARIABLES: "
700 FOR I=2 TO M+1
710 PRINT "X( ", A ( I, 1 ), " )=" , FN P ( A ( I, M+N+3 ))
720 IF A ( I, 2 ) < > -1E14 THEN 740
730 IF A ( I, M+N+3 ) > 0 THEN 1830
740 NEXT I
750 PRINT: PRINT "NON-BASIC VARIABLES: "
760 FOR J=1 TO M+N
770 FOR I=2 TO M+1: IF J=A ( I, 1 ) THEN 800
780 NEXT I
790 PRINT "X( ", J, " )=" , 0
800 NEXT J
810 PRINT
820 IF M$="1" THEN 850
830 PRINT "MIN VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION=" , FN
P ( -A ( M+2, M+N+3 ))
840 GOTO 880
850 PRINT "MAX VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION=" ,
FN P ( A ( M+2, M+N+3 ))
860 PRINT: PRINT " *****"
870 PRINT " * * "
880 PRINT " * SENSITIVITY ANALYSIS * "

```

```

890 PRINT " * * * * * "
900 PRINT " * * * * * "
910 PRINT: PRINT " * * * SHADOW PRICE * * * "
920 PRINT: PRINT "CONSTRAINT SHADOW-PRICE"
930 PRINT "....."
940 FOR J=N+3 TO M+N+2
950 IF A(1, J) = 0 THEN 970
960 PRINT J-N-2, FN P(A(M+2, J)-A(1, J)): GOTO 980
970 PRINT J-N-2, FN P(-A(M+2, J))
980 NEXT J
990 PRINT: PRINT " * * * RIGHT HAND SIDE RANGE * * * "
1000 FOR J=N+3 TO M+N+2: L1=1E14
1010 FOR I=2 TO M+1: IF A(I, J) <= 0 THEN 1050
1020 C(I)=A(I, M+N+3)/A(I, J)
1030 IF C(I) >= L1 THEN 1050
1040 L1=C(I)
1050 NEXT I
1060 D(J-N-2)=L1: L1=1E14
1070 FOR I=2 TO M+1: IF -A(I, J) <= 0 THEN 1110
1080 C(I)=-A(I, M+N+3)/A(I, J)
1090 IF C(I) >= L1 THEN 1110
1100 L1=C(I)
1110 NEXT I
1120 E(J-N-2)=L1
1130 NEXT J
1140 PRINT: PRINT "CONSTRAINT ORIGINAL DECREASE INCREASE
MINIMUM MAXIMUM"
1150 PRINT " VALUE"
1160 PRINT "....."
1170 FOR I=1 TO M
1180 I$=" " + STR$(I) + " " : P$=" " + STR$(
(FN P(P(I))) : D$=" " + STR$(FN P(D(I)))
1190 E$=" " + STR$(FN P(E(I))) : T$=" " + STR$(
(FN P((P(I)-D(I)))) : S$=" " + STR$(FN P((P(I)+
E(I))))
1200 IF D(I)=1E14 THEN 1240
1210 IF E(I)=1E14 THEN 1260

```



```

1220 PRINT RIGHT$(I$, 10); RIGHT$(P$, 10); RIGHT$
      (D$, 10); RIGHT$(E$, 10); RIGHT$(T$, 10); RIGHT$
      (S$, 10)
1230 GOTO 1270
1240 PRINT RIGHT$(I$, 10); RIGHT$(P$, 10); " NO LIMIT" ,
      RIGHT$(E$, 10); "      0" ; RIGHT$(S$, 10)
1250 GOTO 1270
1260 PRINT RIGHT$(I$, 10); RIGHT$(P$, 10); RIGHT$
      (D$, 10); "NO LIMIT" , RIGHT$(T$, 10); "NO LIMIT"
1270 NEXT I
1280 PRINT
1290 PRINT "* * * OBJECTIVE FUNCTION RANGING * *"
1300 FOR J=1 TO W: D(J)=-1E14: E(J)=-1E14: NEXT J
1310 PRINT: PRINT "DECISION ORIGINAL DECREASE INCREASE M
      INIMUM MAXIMUM"
1320 PRINT" VARIABLE VALUE"
1330 PRINT "....."
      "....."
1340 IF X = 0 THEN 1530
1350 FOR J=1 TO W: IF B(J) < > 0 THEN 1380
1360 D(J) = -A(M+2, J+2)
1370 GOTO 1500
1380 FOR I=2 TO M+1: IF B(J) < > A(I, M+N+3) THEN 1490
1390 FOR R=3 TO M+N+2: IF A(M+2, R) = 0 THEN 1470
1400 IF A(I, R) = 0 THEN 1470
1410 L1=A(M+2, R)/A(I, R)
1420 IF L1 < 0 THEN 1450
1430 IF L1 >=D(J) THEN 1470
1440 D(J)=L1: GOTO 1470
1450 IF ABS(L1) >=E(J) THEN 1470
1460 E(J)=ABS(L1)
1470 NEXT R
1480 GOTO 1500
1490 NEXT I
1500 NEXT J
1510 FOR J=1 TO W: A(1, J+2) = -A(1, J+2), NEXT J
1520 GOTO 1700
1530 FOR J=1 TO W: IF B(J) < > 0 THEN 1560

```

```

1540 E(J) = -A(M+2, J+2)
1550 GOTO 1690
1560 FOR I=2 TO M+1: IF B(J) < > A(I, M+N+3) THEN 1680
1570 FOR R=3 TO M+N+2: IF A(M+2, R) = 0 THEN 1660
1580 IF A(I, R) = 0 THEN 1660
1590 L1=A(M+2, R)/A(I, R)
1600 IF L1<0 THEN 1640
1610 IF L1>=E(J) THEN 1660
1620 E(J)=L1
1630 GOTO 1660
1640 IF ABS(L1)>=D(J) THEN 1660
1650 D(J)=ABS(L1)
1660 NEXT R: GOTO 1690
1670 GOTO 1690
1680 NEXT I
1690 NEXT J
1700 FOR J=1 TO W
1710 J$ = "    X( "+STR$(J)+" ) ": A$ = "          "+STR$
      (FN P(A(1, J+2))): D$ = "          "+STR$(FN P(D(J)))
1720 E$ = "          "+STR$(FN P(E(J))): T$ = "          "+
      STR$(FN P(A(1, J+2)-D(J))): S$ = "          "+STR$
      (FN P(A(1, J+2)+E(J)))
1730 IF D(J)=1E14 THEN 1770
1740 IF E(J)=1E14 THEN 1790
1750 PRINT J$, RIGHT$(A$, 10), RIGHT$(D$, 10),
      RIGHT$(E$, 10), RIGHT$(T$, 10), RIGHT$(S$, 10)
1760 GOTO 1800
1770 PRINT J$, RIGHT$(A$, 10), "NO LIMIT", RIGHT$
      (E$, 10), "NO LIMIT", RIGHT$(S$, 10)
1780 GOTO 1800
1790 PRINT J$, RIGHT$(A$, 10), RIGHT$(D$, 10),
      "NO LIMIT", RIGHT$(T$, 10), "NO LIMIT"
1800 NEXT J
1810 GOTO 1870
1820 PRINT
1830 PRINT: PRINT "ARTIFICIAL VARIABLE X(" ; STR$(A(1, 1)),
      ")" ; "NOT IN BASIS. "
1840 PRINT: PRINT "NO FEASIBLE SOLUTION"

```

```

1850 GOTO 1870
1860 PRINT: PRINT "OBJECTIVE FUNCTION NOT BOUND BY
      CONSTRAINTS"
1870 PRINT: PRINT " * * * END * * *"
1880 END
3010 DATA 0, 0, 2, 3, 1, 0, 0, 0
3020 DATA 4, 0, 0.3333, 0.3333, 0.3333, 1, 0, 1
3030 DATA 5, 0, 0.3333, 1.3333, 2.3333, 0, 1, 3

```

### 三、例子 (见 § 4.4 例)

首先把问题化为标准形式, 得数组如下列, 其中数组的第 1 列为初始时的基变量序号, 第二列为相应的基变量目标函数系数。

```

0, 0, 2, 3, 1, 0, 0, 0
4, 0, 0.3333, 0.3333, 0.3333, 1, 0, 1
5, 0, 0.3333, 1.3333, 2.3333, 0, 1, 3

```

这里有 2 个约束条件 2 (m), 含有  $\geq$  约束条件个数为 0, 0 (g), 含有 3 个决策变量 3 (D)。

通过计算可得下面结果:

迭代次数

1 (次)	目标函数值	$Z=6.75$
2 (次)	目标函数值	$Z=8.001$

达到最优时的基变量为

$x(1)=1$

$x(2)=2$

影子价格

第一个约束的影子价格是 5

第二个约束的影子价格是 1

约束条件右边 b 值变化

第一约束  $b_1$  原值为 1  $\Delta b_1^- = 0.25$   $\Delta b_1^+ = 2$  可变范围是  $[0.75, 3]$ 。

第二约束  $b_2$  原值为 3  $\Delta b_2^- = 2$   $\Delta b_2^+ = 1$  可变范围是  $[1, 4]$ 。

目标函数系数 C 值变化

$X_1$  的目标函数系数  $C_1$  原值为 2  $\Delta C_1^- = 1.25$   $\Delta C_1^+ = 1$  范围是  $[0.75, 3]$ 。

$X_2$  的目标函数系数  $C_2$  原值为 3  $\Delta C_2^- = 1$   $\Delta C_2^+ = 5$  范围是  $[2, 8]$ 。

$X_3$  的目标函数系数  $C_3$  原值为 1  $\Delta C_3^+ = 3$  范围为  $C_3 \leq 4$ 。

#### 四、使用方法

(1) 把将要计算的线性规划问题,适当地添上松弛变量,剩余变量,人工变量,使之变成标准形式;各不等式约束转化为等式约束,各变量均为非负变量,目标函数转化为求最大值的函数形式。

(2) 把程序 SIMP-SA 调入。

(3) 输入数据。从键盘打入

3010 DATA 0, 0,  $C_1, C_2, \dots$  已化为标准形式的目标函数系数。

3020 DATA 基变量排列序号,  $a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}, b_1$

.....

(4) 从键盘打入 RUN, 运行程序, 屏幕显示 INPUT 1 OR 2: 键入1

NUMBER OF CONSTRAINTS 键入约束条件的个数 ( $m$ )。

NUMBER OF [ $>$ ] & [ $=$ ] CONSTRAINTS: 键入 $>$ ,  $=$ 约束条件的个数 ( $g$ )。

NUMBER OF DECISION VARIABLES: 键入决策变量个数 ( $D$ )。

把这些数据输入后, 片刻即显示计算结果。如上例分别输入 1, 2 ( $m$ ), 0 ( $g$ ), 3 ( $D$ ), 计算机自动输出如上述结果。  $x_1=1, x_2=2$ 。

### § 11.2 整数规划——分枝定界法的计算INTPR

#### 一、功能

输出整数规划的最优解;

输出整数规划达到最优解时的目标函数值;

输出各级分枝的上, 下限, 及迭代次数。

#### 二、整数规划——分枝定界法程序INTPR

```
10 REM FILE: INTPR
20 REM INTEGER PROGRAMMING
30 DEF FN P(X)=INT(X*1000+.5)/1000
40 PRINT: INPUT "NUMBER OF CONSTRAINTS: "; M0
50 PRINT: INPUT "NUMBER OF [ $>$ ] & [ $=$ ] CONSTRAINTS: "; G0
60 PRINT: INPUT "NUMBER OF DECISION VARIABLES: "; W0
70 DIM U(25, 50), A(25, 25), B(25), F(25), P(25), Q(25),
    R(25), C(25), S(25), T(25), X(25), H(25, 25), V(25, 50)
80 FOR I=0 TO M0: FOR J=0 TO M0+W0+G0+1: READ U(I, J):
    NEXT J: NEXT I
90 M=M0: W=W0: G=G0
```

```

100 FOR I=0 TO M: FOR J=0 TO M+W+G+1: V(I, J)=U(I, J),
    NEXT J: NEXT I
110 GOSUB 1200
120 IF Y3=1 THEN 1130
130 IF Y3=2 THEN 1150
140 Z2=Z0: Z1=-99999
150 FOR I=1 TO W: E(I)=X(I): NEXT I
160 H(1, 1)=0: M1=0
170 PRINT: PRINT " CYCLE NO, SUB-LP NO, LOW-BOUND
    CURRENT UP-BOUND"
180 PRINT " (T1) (I0) (Z1) (Z0)
    (Z2)"
190 PRINT "....."
    .....
200 T1=1: I0=0
210 FOR I=1 TO M: X(F(I))=B(I)
220 T2=0
230 FOR I=1 TO W
240 IF X(I) < > INT(X(I)) THEN 270
250 NEXT I
260 GOTO 1000
270 T2=I: I=0
280 I=I+1: IF H(I, 1)=0 THEN 300
290 GOTO 280
300 T3=I: H(T3, 1)=999: H(T3, 2)=M1+1
310 IF I0=0 THEN 330
320 FOR J=3 TO M1 * 3+5: H(T3, J)=H(I0, J): NEXT J
330 H(T3, M1 * 3+3)=T2: H(T3, M1 * 3+4)=0: H(T3, M1 * 3+5)
    =INT(X(T2)): H(T3+1, 1)=999: H(T3+1, 2)=M1+1
340 IF I0=0 THEN 360
350 FOR J=3 TO M1 * 3+5: H(T3+1, J)=H(I0, J): NEXT J
360 H(T3+1, M1 * 3+3)=T2
370 H(T3+1, M1 * 3+4)=2
380 H(T3+1, M1 * 3+5)=INT(X(T2))+1
390 H(T3+2, 1)=0
400 T4=T3+1
410 FOR I=T4 TO 1 STEP -1
420 IF H(I, 1)=999 THEN 440

```

```

430 NEXT I
440 I0=I; M1=H(I0, 2); G1=0
450 FOR I=1 TO M1
460 W(I)=H(I0, 3 * I)
470 Y(I)=H(I0, 3 * I+1)
480 Z(I)=H(I0, 3 * I+2)
490 IF Y(I) < > 2 THEN 510
500 G1=G1+1
510 NEXT I
520 FOR J=0 TO W0+G0; V(0, J)=U(0, J); NEXT J
530 IF G1=0 THEN 550
540 FOR J=W0+G0+1 TO W0+G0+G1; V(0, J)=0; NEXT J
550 FOR J=W0+G0+G1+1 TO W0+G0+G1+M0; V(0, J)=U(0, J
    -G1); NEXT J
560 FOR J=W0+G0+G1+M0+1 TO W0+G0+G1+M0+M1
570 IF Y(J-W0-G0-G1-M0)=0 THEN 600
580 V(0, J)=-1E14
590 GOTO 610
600 V(0, J)=0
610 NEXT J
620 V(0, W0+G0+G1+M0+M1+1)=0
630 FOR I=1 TO M0; V(I, 0)=U(I, 0)+G1
640 FOR J=1 TO W0+G0; V(I, J)=U(I, J); NEXT J
650 IF G1=0 THEN 670
660 FOR J=W0+G0+1 TO W0+G0+G1; V(I, J)=0; NEXT J
670 FOR J=W0+G0+G1+1 TO W0+G0+G1+M0; V(I, J)=U(I, J
    -G1); NEXT J
680 FOR J=1+W0+G0+G1+M0 TO W0+G0+G1+M0+M1; V(I, J)
    =0; NEXT J
690 V(I, W0+G0+G1+M0+M1+1)=U(I, W0+G0+M0+1)
700 NEXT I
710 Y4=1
720 FOR I=M0+1 TO M0+M1
730 V(I, 0)=U(M0, 0)+G1+I-M0
740 FOR J=1 TO M0+M1+G0+G1+W0; V(I, J)=0; NEXT J
750 V(I, W(I-M0))=1
760 IF Y(I-M0) < > 2 THEN 780

```

表

①  
②  
③

①  
②  
③

运筹学  
十一  
贴底

```

770 V ( I, W0+G0+Y4 ) = -1; Y4=Y4+1
780 V ( I, W0+G0+G1+I ) = 1
790 V ( I, W0+G0+G1+M0+M1+1 ) = Z ( I-M0 )
800 NEXT I
810 M=M0+M1; W=W0; G=G0+G1
820 GOSUB 1200
830 H ( I0, 1 ) = -999
840 T1$ = " " + STR$ ( FN P ( T1 ) ) + " "
850 I0$ = " " + STR$ ( FN P ( I0 ) ) + " "
860 Z1$ = " " + STR$ ( FN P ( Z1 ) )
870 Z0$ = " " + STR$ ( FN P ( Z0 ) )
880 Z2$ = " " + STR$ ( FN P ( Z2 ) )
890 IF Y3=1 THEN 920
900 PRINT RIGHT$ ( T1$, 14 ); RIGHT$ ( I0$, 14 ); RIGHT$
    ( Z1$, 14 ); RIGHT$ ( Z0$, 14 ); RIGHT$ ( Z2$, 14 )
910 GOTO 930
920 PRINT RIGHT$ ( T1$, 14 ); RIGHT$ ( I0$, 14 ); RIGHT$
    ( Z1$, 14 ); "NOT FEASIBLE" ; RIGHT$ ( Z2$, 14 )
930 T1=T1+1
940 IF Y3=1 THEN 960
950 IF Z0>=Z1 THEN 220
960 FOR I=T4 TO 1 STEP -1
970 IF H ( I, 1 ) = 999 THEN 410
980 NEXT I
990 GOTO 1030
1000 Z1=Z0
1010 FOR I=1 TO W0: E ( I ) = X ( I ); NEXT I
1020 IF Z1 < > Z2 THEN 960
1030 PRINT
1040 PRINT " .....
    ..... " ,
1050 PRINT: PRINT: PRINT "NUMBER OF CONSTRAINTS: " , M0
1060 PRINT "NUMBER OF [ > ] & [ = ] CONSTRAINTS: " , G0
1070 PRINT "NUMBER OF DECISION VARIABLES. " , W0
1080 Z0=Z1
1090 PRINT: PRINT: PRINT "OPTIMUM SOLUTIONS: "

```

```

1100 PRINT, PRINT "MAX VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION: "
      Z0
1110 PRINT, FOR I=1 TO W0: X(I)=E(I): PRINT "X(" , STR$
      (I): ")=" , X(I): NEXT I
1120 GOTO 1170
1130 PRINT "A FEASIBLE SOLUTION DOES NOT EXIST"
1140 GOTO 1170
1150 PRINT "OBJECTIVE FUNCTION IS NOT BOUND" ,
1160 PRINT "BY CONSTRAINT"
1170 PRINT
1180 PRINT "      * END *"
1190 END
1200 N=W+G
1210 FOR I=1 TO M: B(I)=V(I, M+N+1): F(I)=V(I, 0)
1220 FOR J=1 TO M: A(I, J)=V(I, J+N): NEXT J
1230 NEXT I
1240 T0=1
1250 FOR I=1 TO M
1260 FOR J=1 TO M+N: IF F(I)=J THEN 1290
1270 NEXT J
1280 GOTO 1300
1290 C(I)=V(0, J)
1300 NEXT I
1310 Z=0
1320 FOR I=1 TO M: Z=Z+C(I)*B(I): NEXT I
1330 FOR J=1 TO M: T(J)=0
1340 FOR I=1 TO M: T(J)=T(J)+C(I)*A(I, J): NEXT I
1350 NEXT J
1360 FOR J=1 TO M+N: S(J)=0: NEXT J
1370 Y1=0: FOR J=1 TO N+M
1380 FOR I=1 TO M
1390 IF J=F(I) THEN 1470
1400 NEXT I
1410 FOR I=1 TO M: P(I)=V(I, J): NEXT I
1420 W9=0
1430 FOR I=1 TO M: W9=W9+T(I)*P(I): NEXT I
1440 S(J)=V(0, J)-W9
1450 IF S(J)<=Y1 THEN 1470

```



```

1460 Y1=S(J); K0=I
1470 NEXT J
1480 IF Y1 < > 0 THEN 1510
1490 IF T0=1 THEN 1800
1500 GOTO 1700
1510 FOR I=1 TO M: P(I)=V(I, K0); NEXT I
1520 FOR I=1 TO M: Q(I)=0
1530 FOR J=1 TO M: Q(I)=Q(I)+A(I, J)*P(J); NEXT J
1540 NEXT I
1550 Y2=1E14; FOR I=1 TO M
1560 IF Q(I) <= 0 THEN 1600
1570 R(I)=B(I)/Q(I)
1580 IF R(I) >= Y2 THEN 1600
1590 Y2=R(I); P0=I
1600 NEXT I
1610 IF Y2=1E14 THEN 1810
1620 F(P0)=K0
1630 FOR J=1 TO M: A(P0, J)=A(P0, J)/Q(P0); NEXT J
1640 B(P0)=B(P0)/Q(P0)
1650 FOR I=1 TO M: IF I=P0 THEN 1680
1660 FOR J=1 TO M: A(I, J)=A(I, J)-Q(I)*A(P0, J); NEXT J
1670 B(I)=B(I)-Q(I)*B(P0)
1680 NEXT I
1690 T0=T0+1; GOTO 1250
1700 FOR I=1 TO M: X(F(I))=B(I)
1710 IF C(I) < > -1E14 THEN 1730
1720 IF X(F(I)) > 0 THEN 1800
1730 NEXT I
1740 FOR J=1 TO M+N
1750 FOR I=1 TO M: IF J=F(I) THEN 1780
1760 NEXT I
1770 X(J)=0
1780 NEXT J
1790 Y3=0; Z0=Z; GOTO 1820
1800 Y3=1; GOTO 1820
1810 Y3=2
1820 RETURN
3010 DATA 0, 2000, 1000, 0, -1E+14, 0, 0, 0

```

```

3020 DATA 4, 200, 100, -1, 1, 0, 0, 750
3030 DATA 5, 1200, 700, 0, 0, 1, 0, 5500
3040 DATA 6, 25, 10, 0, 0, 0, 1, 90

```

### 三、例子（见 § 6.2 例）

首先把问题化为标准形式，得数组如下列，其中数组的第 1 列为初始时的基变量序号，第一行为相应的目标函数系数，最前，最后的数为 0。

```

0, 2000, 1000, 0, -1E+14, 0, 0, 0
4, 200, 100, -1, 1, 0, 0, 750
5, 1200, 700, 0, 0, 1, 0, 5500
6, 25, 10, 0, 0, 0, 1, 90

```

这里具有 3 个约束方程，含有  $\geq$  号的约束有 1 个，决策变量为 2 个。即 3 (m)，1 (g)，2 (D)。

通过计算，可得下面结果：

次	规划	下限	当前值	上限
1	2	-99999	8000	8272.727
2	4	-99999	7500	8272.727
3	6	-99999	无	8272.727
4	5	-99999	7500	8272.727
5	8	-99999	无	8272.727
6	7	-99999	无	8272.727
7	3	-99999	8000	8272.727
8	1	8000	8142.857	8272.727
9	10	8000	8000	8272.727
10	12	8000	无	8272.727
11	11	8000	7857.143	8272.727
12	9	8000	8000	8272.727

最优整数解的目标函数值  $Z=8000$ ，最优整数解为  $x_1=1$ ， $x_2=6$ 。

### 四、使用方法

(1) 把将要计算的整数规划问题，适当地添上松弛变量，剩余变量，人工变量，使之成为标准形式，各不等式约束转化为等式约束，各变量均为非负变量，目标函数转化为求最大值的函数形式，人工变量的系数为  $-1E+14$ 。

(2) 把程序 INTPR 调入。

(3) 输入数据。从键盘打入

```

3010 DATA 0, C1, C2, ..., 0 已化为标准形式的目标函数系数
3020 DATA 基变量排列序号, a11, a12, ..., a1n, b1

```

.....

(4) 从键盘打入 RUN, 运行程序, 屏幕显示  
 NUMBER OF CONSTRAINTS, 键入约束条件的个数 (m)  
 NUMBER OF (>) & (=) CONSTRAINTS, 键入 >, = 约束条件的个数 (g)  
 NUMBER OF DECISION VARIABLES, 键入决策变量个数 (D)  
 把这些数据输入后, 片刻即显示计算结果。如上例分别输入 3 (m), 1 (g), 2 (D),  
 计算机自动输出结果。  $x_1=1, x_2=6$ 。

### § 11.3 单目标规划的计算SG

#### 一、功能

输出最优解  
 输出迭代次数及表格。

#### 二、程序SG

```

100 REM SG, SINGLE-GOAL PROGRAMMING
110 DEF FN P(X)=INT (X *1000+.5)/1000
120 PRINT
130 PRINT: INPUT "NUMBER OF CONSTRAINTS: ", M
140 PRINT: INPUT "NUMBER OF DECISION-VARIABLES: ", W
150 PRINT: INPUT "NUMBER OF SLACK/ARTIFICIAL
    VARIABLES: ", S
160 PRINT: INPUT "NUMBER OF DEVIATION VARIABLES: ", D
170 N=W+S+D+1
180 PRINT
190 DIM A(50, 100), C(50), X(50)
200 FOR I=0 TO M: FOR J=0 TO N: READ A(I, J): NEXT J,
    NEXT I
210 FOR J=1 TO N
220 R=0
230 FOR I=1 TO M: R=R+A(0, A(I, 0))*A(I, J): NEXT I
240 A(M+1, J)=R-A(0, J)
250 NEXT J
260 T=0
270 GOSUB 2030
280 A1=0: FOR J=1 TO N-1
290 IF A(M+1, J)<=A1 THEN 320

```

```

300 A1=A ( M+1, J)
310 K=J
320 NEXT J
330 IF T< >0 THEN 360
340 IF A1<=0 THEN 820
350 GOTO 370
360 IF A1<=0 THEN 600
370 L1=1E14; FOR I=1 TO M
380 IF A ( I, K ) <=0 THEN 420
390 C ( I ) =A ( I, N ) /A ( I, K )
400 IF C ( I ) >=L1 THEN 420
410 L1=C ( I ), P=I
420 NEXT I
430 IF L1=1E14 THEN 840
440 H=A ( P, K )
450 PRINT; PRINT "PIVOT COLUMN=" , K; PRINT "PIVOT
    ROW=" , P; PRINT "PIVOT ELEMENT=" , H; PRINT
460 FOR J=1 TO N: A ( P, J ) =A ( P, J ) /H; NEXT J
470 FOR I=1 TO M
480 IF I=P THEN 510
490 H=A ( I, K )
500 FOR J=1 TO N: A ( I, J ) =A ( I, J ) -A ( P, J ) * H; NEXT J
510 NEXT I
520 A ( P, 0 ) =K
530 FOR J=1 TO N: R=0
540 FOR I=1 TO M: R=R+A ( 0, A ( I, 0 ) ) * A ( I, J ); NEXT I
550 A ( M+1, J ) =R-A ( 0, J )
560 NEXT J
570 T=T+1
580 GOSUB 2030
590 GOTO 280
600 PRINT; PRINT "NUMBER OF CONSTRAINTS, " , M
610 PRINT "NUMBER OF DECISION VARIABLES, " , W
620 PRINT "NUMBER OF SLACK/ARTI. VARIABLES, " , S
630 PRINT "NUMBER OF DEVIATION VARIABLES, " , D
640 PRINT
650 FOR J=1 TO N-1: X ( J ) =0; NEXT J
660 PRINT "BASIC VARIABLES: "

```

```

670 FOR I=1 TO M: X(A(I, 0))=A(I, N)
680 PRINT "X( ", A(I, 0), " )=" , X(A(I, 0))
690 NEXT I
700 PRINT
710 PRINT "NON-BASIC VARIABLES: "
720 FOR J=1 TO N-1
730 FOR I=1 TO M: IF J=A(I, 0) THEN 760
740 NEXT I
750 PRINT "X( ", J, " )=" , X(J)
760 NEXT J
770 PRINT
780 PRINT "OBJECTIVE FUNCTION VALUE:
790 PRINT "Z=" , A(M+1, N)
800 PRINT
810 GOTO 860
820 PRINT "NO FEASIBLE SOLUTION"
830 GOTO 860
840 PRINT "NOT BOUND"
850 PRINT
860 PRINT " *END*"
870 END

2030 PRINT
2040 PRINT "CYCLE: " , T
2045 PRINT
2050 FOR J=0 TO N
2055 B$= " " +STR$(FN P(A(0, J)))
2060 PRINT RIGHT$(B$, 7),
2070 NEXT J
2080 PRINT " .....
....."

2090 PRINT
2120 PRINT
2130 FOR I=1 TO M
2140 FOR J=0 TO N
2145 B$= " " +STR$(FN P(A(I, J)))
2150 PRINT RIGHT$(B$, 7),
2160 NEXT J
2170 PRINT

```

```

2180 NEXT I
2190 PRINT " .....
      .....
2220 PRINT
2230 FOR J=0 TO N
2235 B$ = " " + STR$ (FN P (A (M+1, J)))
2240 PRINT RIGHT$ (B$, 7),
2250 NEXT J
2260 PRINT
2270 PRINT " .....
      .....
2280 PRINT "Z ( ", T" ) = " , A (M+1, N)
2290 PRINT
2300 RETURN
3010 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
3020 DATA 3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 30
3030 DATA 4, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 24
3040 DATA 5, 20, 37, 0, 0, 1, -1, 500

```

### 三、例子 (见 § 5.3)

首先把问题化为标准形式, 如表5-3-2初始表所列, 得数组如下: 其中数组的第1列为基变量序号, 第一行为相应的目标函数系数, 最前的, 最后的那个数为0。

```

0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 30
4, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 24
5, 20, 37, 0, 0, 1, -1, 500

```

这里有3个约束方程,  $3(m)$ , 含有两个决策变量,  $2(D)$ , 具有松弛变量 (或人工变量) 2个,  $2(S)$ , 并有偏离变量2个,  $2(d)$ 。

通过计算, 可得下面结果。

$x(1)=12$   $x(2)=6$   $x(5)=38$  (即在表5-3-1中基行第5位的变量为  $d_1^-$ )  $d_1^-=38$ 。

### 四、使用方法

(1) 把单目标规划问题化为标准形式, 各约束均为等式, 各变量为非负数。

(2) 把程序 SG 调入。

(3) 输入数据。从键盘打入

3010 DATA 0,  $C_1$ ,  $C_2$ , ..., 0, 已化为标准形式的目标函数系数, 其中最前的, 最

后的那两个数是0。

3020 DATA 基变量排列序号,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ...,  $a_{1n}$ ,  $b_1$

.....

(4) 从键盘打入 RUN, 屏幕显示

NUMBER OF CONSTRAINTS; 键入约束条件的个数(m)

NUMBER OF DECISION VARIABLES; 键入决策变量个数(D)。

NUMBER OF SLACK/ARTIFICIAL VARIABLES; 键入松弛变量, 人工变量, 剩余变量的个数2(S)。

NUMBER OF DEVIATION VARIABLES; 键入偏离变量的个数(d)。

把这些数据输入后, 片刻即显示计算结果, 如上例分别输入3(m), 2(D), 2(S), 2(d)。

计算机自动输出如上列出结果。  $x_1=12$ ,  $x_2=6$ 。

## § 11.4 多目标规划的计算MG

### 一、功能

输出目标规划的最优解;

输出目标函数的最优值;

输出迭代次数及该次单纯形表。

### 二、程序MG

```
100 REM MG: MULTI-GOAL PROGRAMMING
110 DEF FN P(X)=INT(X*100+.5)/100
120 PRINT: INPUT "NUMBER OF CONSTRAINTS: ", M
130 PRINT: INPUT "NUMBER OF DECISION-VARIABLES: ", W
140 PRINT: INPUT "NUMBER OF SLACK/ARTIFICIAL
    VARIABLE: ", S
150 PRINT: INPUT "NUMBR OF DEVIATION VARIABLES: ", D
160 PRINT
170 N=W+S+D+1
180 DIM A(30, 60), B(30, 60), C(30), X(60), R(30)
190 FOR I=1 TO 2+M: FOR J=0 TO N: READ A(I, J), NEXT J,
    NEXT I
200 PO=A(2, 1)
210 FOR J=2 TO N-1
```

```

220 IF A ( 2, J ) <= P0 THEN 240
230 P0=A ( 2, J )
240 NEXT J
250 PRINT " * * * " , STR$ ( P0 ) ; " PRIORITIES MULTI-GOAL
    PROGRAMMING * * * "
260 PRINT
270 FOR I=2+M+1 TO 2+M+P0; FOR J=0 TO N; A ( I, J )=0;
    NEXT J; NEXT I
280 FOR J=1 TO N; IF A ( 1, J )=0 THEN 330
290 IF A ( 2, J ) < > 0 THEN 320
300 FOR I=3+M TO 2+M+P0; A ( I, J )=-A ( 1, J ); NEXT I
310 GOTO 330
320 I0=3+M+P0-A ( 2, J ); A ( I0, J )=-A ( 1, J )
330 FOR I=3 TO M+2; J0=A ( I, 0 )
340 IF A ( 1, J0 )=0 THEN 420
350 IF A ( I, J )=0 THEN 420
360 A0=A ( I, J ) * A ( 1, J0 )
370 IF A ( 2, J0 ) < > 0 THEN 400
380 FOR I1=3+M TO 2+M+P0; A ( I1, J )=A ( I1, J )+A0; NEXT I1
390 GOTO 420
400 I0=3+M+P0-A ( 2, J0 )
410 A ( I0, J )=A ( I0, J ) +A0
420 NEXT I; NEXT J
430 T=0; PRINT " CYCLE..... " , STR$ ( T )
440 I1=2+M+P0
450 GOSUB 2500
460 A1=0
470 FOR J=1 TO N-1
480 IF A ( I1, J ) <= A1 THEN 500
490 A1=A ( I1, J ); K=J
500 NEXT J
510 IF A1 < > 0 THEN 570
520 IF I1 < > 3+M THEN 550
530 IF T=0 THEN 1290
540 GOTO 970
550 I1=I1-1
560 GOTO 460
570 FOR JJ=1 TO N-1; IF JJ=K THEN 590

```



```

580 IF A ( I1, JJ ) = A1 THEN 610
590 NEXT JJ
600 GOTO 700
610 FOR I2=I1-1 TO M+3 STEP -1
620 A2= 0
630 FOR L=1 TO N-1
640 IF A ( I1, L ) < > A1 THEN 670
650 IF A ( I2, L ) <= A2 THEN 670
660 A2=A ( I2, L ) : K=L
670 NEXT L
680 IF A2< > 0 THEN 700
690 NEXT I2
700 L1=1E14
710 FOR I=3 TO 2+M
720 IF A ( I, K ) <= 0 THEN 760
730 C ( I ) = A ( I, N ) / A ( I, K )
740 IF C ( I ) >= L1 THEN 760
750 L1=C ( I ) : P=I
760 NEXT I
770 IF L1=1E14 THEN 1310
780 FOR I=1 TO M+2: FOR J=0 TO N
790 B ( I, J ) = A ( I, J )
800 NEXT J
810 NEXT I
820 H=A ( P, K )
830 PRINT: PRINT "PIVOT COLUMN=" , K: PRINT "PIVOT
      ROW= " , P: PRINT "PIVOT ELEMENT=" , H: PRINT
840 FOR J=1 TO N: A ( P, J ) = A ( P, J ) / H: NEXT J
850 FOR I=3 TO 2+M+P0: IF I=P THEN 880
860 H=A ( I, K )
870 FOR J=1 TO N: A ( I, J ) = A ( I, J ) - A ( P, J ) * H: NEXT J
880 NEXT I
890 A ( P, 0 ) = K: T=T+1: PRINT "CYCLE....." ,
      STR$ ( T )
900 GOSUB 2500
910 IF I1=2+M+P0 THEN 460
920 FOR I=2+M+P0 TO I1+1 STEP -1: FOR J=1 TO N-1
930 IF A ( I, J ) > 0 THEN 960

```

```

930 IF A(I, J) > 0 THEN 960
940 NEXT J, NEXT I
950 GOTO 460
960 FOR I=1 TO M+2: FOR J=0 TO N, A(I, J) = B(I, J), NEXT
    J, NEXT I
970 PRINT
980 FOR J=1 TO N-1: X(J) = 0: NEXT J
990 PRINT: PRINT "OPTIMUM SOLUTION, " : PRINT "*****"
    "*****"
1000 PRINT: PRINT "NUMBER OF CONSTRAINTS, " , M
1010 PRINT "NUMBER OF DECISION VARIABLES, " , W
1020 PRINT "NUMBER OF SLACK/ARTI. VARIABLES, " , S
1030 PRINT "NUMBER OF DEVIATION. VARIABLES, " , D
1040 PRINT
1050 PRINT "BASIC VARIABLES, "
1060 FOR I=3 TO 2+M: X(A(I, 0)) = A(I, N)
1070 PRINT "X( " , A(I, 0), " ) = " , X(A(I, 0))
1080 NEXT I
1090 PRINT
1100 PRINT "NON-BASIC VARIABLES, "
1110 FOR J=1 TO W+S+D: FOR I=3 TO 2+M
1120 IF J=A(I, 0) THEN 1150
1130 NEXT I
1140 PRINT "X( " , J, " ) = " , X(J)
1150 NEXT J
1160 PRINT
1170 PRINT "OBJECTIVE FUNCTION Z, "
1180 F = 0
1190 FOR I=1 TO P0: R(I) = 0
1200 FOR J=W+S+1 TO W+S+D: IF A(2, J) < > I THEN 1220
1210 R(I) = X(J) * A(1, J) + R(I)
1220 NEXT J
1230 IF R(I) = 0 THEN 1280
1240 IF F=1 THEN 1270
1250 PRINT R(I), "P( " , I, " )",
1260 F=1: GOTO 1280
1270 PRINT "+", R(I), "P( " , J, " )",
1280 NEXT I, PRINT: GOTO 1320

```

```

1290 PRINT "NO FEASIBLE SOLUTION, "
1300 GOTO 2040
1310 PRINT "NOT BOUND, " ; PRINT
1320 PRINT: PRINT "*END *"; END
2500 PRINT: FOR I=3 TO 2+M+P0
2510 FOR J=1 TO N
2515 B$ = " " + STR$(FN P(A(I, J)))
2520 PRINT RIGHT$(B$, 5);
2530 NEXT J; PRINT
2540 NEXT I
2560 RETURN
3010 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0
3020 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0
3030 DATA 7, 3, 8, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 95
3040 DATA 5, 30, 37, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 500
3050 DATA 3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 30
3060 DATA 4, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 24

```

### 三、例子（见§5.3例2）

首先把问题化为标准形式，得数组如下列，其中数组的第1列为基变量序号，第一行为目标函数系数，最前的，最后的那个数为0；第二行为优先级别， $d_1^-$ 是第2优先级， $d_2^-$ 是第1级优先级，见表11-1。

表11-1

变量排列序号——→		1	2	3	4	5	6	7	8	
变 量——→		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$d_1$	$d_1^+$	$d_2^-$	$d_2^+$	$b$
目标函数系数——→	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
优先级别——→	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0
	7	3	8	0	0	0	0	1	-1	95
	5	30	37	0	0	1	-1	0	0	500
	3	2	1	1	0	0	0	0	0	30
	4	1	2	0	1	0	0	0	0	24
基变量序号										

这里有4个约束方程, 4 ( $m$ ); 含有两个决策变量, 2 ( $D$ ); 具有松弛变量2个, 2 ( $S$ ); 偏离变量4个, 4 ( $d$ )。

通过计算, 可得如下结果:

$$x_1=0, x_2=12, x_3=18, x_4=0, x_5=56 \text{ (即 } d_1^-=56 \text{)}, d_1^+=x_6=0, d_2^-=x_7=0,$$

$$d_2^+=x_8=0$$

$$Z=56p_2=56d_1^-$$

#### 四、使用方法

(1) 把多目标规划问题化为标准形式, 列出如表11-1形式。

(2) 把程序 MG 调入。

(3) 输入数据。从键盘打入形式如表11-1标准形式数组。

3010 DATA 0,  $C_1, C_2, \dots, 0$  表11-1的第1行数据(目标函数系数)。

3020 DATA 0,  $p_1, \dots, 0$  表11-1的第2行数据(目标函数优先权数)。

3030 DATA 基变量排列序号,  $a_{11}, \dots, b_1$

.....

(4) 从键盘打入 RUN, 运行程序, 屏幕显示。

约束条件个数 键入 ( $m$ )

决策变量个数 键入 ( $D$ )

松弛变量, 人工变量, 剩余变量个数, 键入 ( $S$ )。

把这些数据输入后, 片刻即显示计算结果, 如本例, 分别输入4 ( $m$ ), 2 ( $D$ ), 2 ( $S$ ), 4 ( $d$ )。计算机自动输出:  $x_1=0, x_2=12, x_3=18, x_5=d_1^-=56, Z=56p_2$ 。

# 练习题

## 第一章 练习题

1. 运筹学在企业管理中有什么作用?

## 第二章 练习题

1. 列出数学模型。

设某工厂能够制造  $A$  和  $B$  两种产品。制造  $A$  产品一公斤需要用煤 9 吨，劳动力 3 个（以工作日计），电力 4 瓩；制造  $B$  产品一公斤需要用煤 4 吨，劳动力 10 个，电力 5 瓩。制造  $A$  产品一公斤能获利 7 千元，制造  $B$  产品一公斤能够获利 1 万 2 千元，该厂现时只有煤 360 吨、电力 200 瓩、劳动力 300 个，问在这些现有资源的条件下，应该制造  $A$  和  $B$  产品各多少公斤，才能获得最大利润。

2. 列出数学模型。

某工地要求做 100 套钢筋，每套为 3 根，它们的长度分别为 2.9 米，2.1 米和 1.5 米；原材料长为 7.4 米，问应当怎样截割钢筋，才能使所需的原材料根数为最少？

3. 列出数学模型

一家工厂可以制造三种产品，每单位产品分别获利润 10 元，6 元，4 元；每种产品生产需要消耗原材料 1 个单位；劳动力消耗分别为 10 个劳动力，4 个劳动力，5 个劳动力；设备消耗工时分别为 2 小时，2 小时，6 小时。现有原料 100 个单位；劳动力 600 个；设备可利工时为 300 小时，求一使总利润达到最大的生产计划。

4. 列出数学模型

某工厂生产  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种产品，每种产品的原料消耗量、机械台时消耗量、资源限量及单位产品利润如表所列。

产品	材料单耗	机械台时单耗	单位产品利润(元)
$A$	1	2	10
$B$	1.5	1.2	14
$C$	4	1.0	12
资源限量	2000	1000	

根据客户订货，三种产品的最低月需要量分别为 200 件，250，100 件。

又据销售部门预测，三种产品的最大生产量应分别为 250、280 和 120 件，否则难以销售。

如何安排这三种产品的生产量，在满足各项要求的条件下，使该厂的利润达到最大。

5. 图解法有什么优缺点?

6. 用图解法解:

求  $x_1, x_2$  使

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \quad \text{达到最大}$$

满足

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. 用图解法解:

求  $x_1, x_2$  使

$$Z = 9x_1 + 7x_2 \quad \text{达到最大}$$

满足

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 0.5x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8. 用图解法解:

求  $x_1, x_2$  使

$$Z = 20x_1 + 16x_2 \quad \text{达到最小}$$

满足

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9. 求  $x_1, x_2$  使

$$Z = 2x_1 + x_2 \quad \text{达到最大}$$

满足

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10. 求  $x_1, x_2$  使

$$Z = 40x_1 + 36x_2 \quad \text{达到最小}$$

满足

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 10 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11. 线性规划问题的标准形式具有什么特征?

12. 线性规划问题的标准形式化有什么作用?

13. 把问题标准式化:

求  $x_1, x_2$  使

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

14. 求  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使

$$Z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \text{达到最小}$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

15. 求  $X = (x_1, x_2)^T$  使

$$Z = 10x_1 + 5x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 100 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

16. 将下列线性规划问题变换为标准形式:

求  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使

$$Z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \quad \text{达到最小}$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

17. 有五个未知数, 两个方程的方程组如下:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 以  $x_1, x_2$  为基本变量, 将方程组化成典型的形式;

(2) 写出基本解;

(3) 是否可行解? 为什么?

18. 应用单纯形法求解:

求  $X = (x_1, x_2)^T$  使

$$Z = x_1 + 3x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

19. 应用单纯形法求解

求  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  使  
 $Z = 2x_1 + x_3 - x_2$  达到最大

$$\text{满足} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

20. 应用单纯形法求解:

求  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使  
 $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  达到最小

$$\text{满足} \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

21. 应用单纯形法求解:

求  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使  
 $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$  达到最大

$$\text{满足} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

22. 用大M单纯形法解:

求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使  
 $Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$  达到最小

$$\text{满足} \begin{cases} x_1 \geq 30 \\ x_2 \leq 50 \\ x_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

23. 用二阶段求解:

求  $X = (x_1, x_2)^T$  使  
 $Z = 3x_1 - x_2$  达到极大

$$\text{满足} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

24. 用二阶段法求解:

求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使  
 $Z = 5x_1 + 21x_3$  达到最小



$$\text{满足} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 & \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 1 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

25. 用二阶段法求解:

求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使

$Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$  达到最大

$$\text{满足} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 30 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 & = 0 \\ x_2 & -x_7 = 4 \\ x_i \geq 0, & (i = 1, 2, \dots, 7) \end{cases}$$

26. 用二阶段法求解本练习第7题

### 第三章 练习题

1. 求  $x_1, x_2$ , 使

$Z = 2x_1 + x_2$  达到最大

$$\text{满足} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 & = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 & = 21 \\ x_i \geq 0, & (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

### 第四章 练习题

1. 写出下列给出原始问题的对偶问题。

原问题

极大化:  $Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{约束条件:} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq 14 \\ x_1 - x_2 & \leq 3 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. 写出下列给出原始问题的对偶问题。

原问题

极大化:  $Z = x_1 + 2x_2 + x_3$

约束条件:  $x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$

$x_1 - x_2 + x_3 = 1$

$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3$  符号不限

3. 用对偶单纯形法求解:

求  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  使  
 $Z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$  达到最小

满足 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

4. 用对偶单纯形法解:

求  $X$

极小化:  $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

约束条件: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 30 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

5. 用对偶单纯形法解:

求  $X$

极小化:  $Z = x_1 + 3x_2$

约束条件: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. 某车间有一批长度为260公分的钢管, 现为了生产的需要, 需要截成长度为130公分, 98公分和65公分三种规格的坯料。各种规格的需要量分别为不少于10(千条), 20(千条), 18(千条)。问如何开料, 使截出余料总量为最少(设切割口宽度很小, 可以忽略不计)。

7. 某工厂制造三种产品, 生产这三种产品需要三种资料——材料Ⅰ, 材料Ⅱ, 劳动力。三种产品单位耗资源量及单位利润如下表所列。

	产 品			资 源 量
	甲	乙	丙	
材 料 Ⅰ	1	1	1	100
劳 动 力	10	4	5	600
材 料 Ⅱ	2	2	6	300
单位产品利润 (元)	10	6	4	

现列出其数学模型及用单纯形表求出最优解。

设  $x^j$  件为生产产品甲、乙、丙的件数

$$\max Z = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

$$\text{满足约束} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 600 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 300 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, 3) \end{cases}$$

最终单纯形表为:

$C_j$		10	6	4	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
6	$X_2$	0	1	5/6	10/6	-1/6	0	200/3
10	$X_1$	1	0	1/6	-4/6	1/6	0	100/3
0	$X_6$	0	0	4	-2	0	1	100
$C$		0	0	-16/6	-20/6	-4/6	0	$Z=2200/3$

现需进行优化后的分析(灵敏度分析),回答下列问题:

- (1) 丙产品的单位利润为多大时,应安排丙产品的生产?
  - (2) 甲产品单位利润在什么范围内变动,现行的生产品种仍为不变?(即仍然生产甲、乙两种产品)。
  - (3) 指出三种资源的影子价格。
8. 设一个求最大利润的规划问题的最终表如下列:

基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	1	1/2	-1/2	0	2
$x_1$	1	0	-1/8	3/8	0	3/2
$x_5$	0	0	1	-2	1	4
$C$	0	0	-1/4	-1/4	0	5

在保持现行基不变的情况下,假如要把一个约束条件的右端扩大,应扩大哪一个?为什么?最多扩大多少?求出新的目标函数值。

## 第五章 练习题

1. 已知运价供求关系如表所示,求一使总运费达到最小的调度方案。

<div>销地 运价</div>						产 量
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
产地	$A_1$	3	11	3	10	7
	$A_2$	1	9	2	8	4
	$A_3$	7	4	10	5	9
	销 量	3	6	5	6	20

2. 已知运行及供求关系如表所列, 求使总费用最省的供给方案。

发点	收点				发量
	运价	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$		2	17	20	13
$A_2$		1	3	5	5
$A_3$		4	10	12	5
收量		4	8	11	23

3. 已知有关资料如下, 求使总运费走到最小的调运方案。

		销 地				
运 价		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	产 量
产 地	$A_1$	15	4	14	8	12
	$A_2$	16	7	6	5	5
	$A_3$	30	20	3	10	5
	销 量	6	5	4	7	22

4. 四个工人分派做四项工作, 每个工人做每项工作所消耗的时间如下表。求总消耗时间最少的分配方案(假设所有工人的工资相同)。

单位: 小时

时 间		工 作			
		A	B	C	D
工 人	a	15	18	21	24
	b	19	23	22	18
	c	26	17	16	19
	d	19	21	23	17

5. 有四项工作, 四台设备, 所需加工费用如下表所列。求最小总费用的分配方案。

单位: 元

费 用		设 备			
		A	B	C	D
工 作	1	5	2	4	6
	2	3	5	4	3
	3	2	3	4	5
	4	5	4	3	4

6. 销售经理分派四个推销员去四个地区, 四个推销员各有不同的经验和能力, 每个推销员在每一地区估计所能获得的利润如下表所示, 求利润最大的分配方案。

单位: 元

利 润		地 区			
		A	B	C	D
推 销 员	a	35	27	28	37
	b	28	34	29	40
	c	35	24	32	33
	d	24	32	25	28

7. 某厂准备装置三台机器 (A、B、C), 安装位置有四处 (1、2、3、4), 机器B不能装在位置3, 其余没有限制, 由于各处对这些机器需要程度, 离开某工场中心的远近不同, 单位时间所需原料运送费也不同, 估计运输成本如下表所示。求最低运输成本的安装方案。

单位: 元

运输成本		位 置			
		1	2	3	4
机 器	A	16	10	12	15
	B	11	12	N	18
	C	8	17	13	16
	D	0	0	0	0

8. 某工厂有四件工件, 可在四台机床中任一台加工, 每件工件在每一台机床加工所需的小时数如下表所列。求总工时最小的分配方案。

单位: 时

费 用		设 备			
		A	B	C	D
工 作	1	10	14	15	13
	2	12	13	15	12
	3	8	12	12	11
	4	13	16	18	16

9. 某家具店出售桌椅。售出一张桌子获利润8元，一把椅子获利润4元。现该店要求获利640元/周，而桌子最大出售量是60张/周，椅子最大出售量是80把/周。问在一周里桌子，椅子最低销售量应该是多少。

## 第六章 练习题

1. 求:  $x_1, x_2$  使

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{约束条件} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

## 第七章 练习题

		单位: (数)		
利 润		销 售 点		
		一	二	三
	0	0	0	0
箱	1	3	5	4
	2	7	10	6
	3	9	11	11
数	4	12	11	12
	5	13	11	12

1. 某公司给三个零售点供应商品，总数为五箱。各零售点出售该项商品所得的利润随售出数而不同，如表所列。问应向每一零售点供应多少箱商品，才能获得总利润最大？

## 第八章 练习题

思考题:

1. 直接最优化方法与间接最优化方法各有什么优点？
2. 0.618法和分数法关于目标函数的重要假设是什么？如果这个假设与实际情况不相符，将会出现什么情况？

习 题

1. 某厂研制一种新工艺，对一种原料的用量优选。拟定试验范围为200~800克，试用0.618法确定第1个试点 $x_1$ ，第2个试点 $x_2$ ，若这两试点的试验结果为 $f(x_1)$ 比 $f(x_2)$ 好，求第8个试点 $x_3$ 。

2. 某项电气试验需优选电阻的阻值, 拟定试验范围 $800 \sim 865 \Omega$ , 试验精确度要求 $5 \Omega$ 。试用菲波那契法求第1个试点 $x_1$ , 第2个试点 $x_2$ 。若 $f(x_1)$ 比 $f(x_2)$ 差, 求第3个试点 $x_3$ 。

## 第九章 练习题

### 思考题

1. 瞬时补足库存的模型与边补充边消耗模型的主要区别是什么?
2. 边补充边消耗的库存模型的最高库存量是否等于订购批量? 为什么?

### 习题

3. 某厂每年以300个工作日计, 每天需用某原料3吨。已知每吨每月的存储费用为5元, 每次订购费为185元, 试求最优订货批量 $Q^*$ , 最优库存周期 $t^*$ , 最优订购次数 $n^*$ 。

## 第十章 练习题

1. 汽车按照平均数每小时90辆的普阿松分布到达快车道上的一个收费关卡。通过关卡的平均时间(平均服务时间)是38秒钟, 驾驶员埋怨等待时间太长。主管部想采用新装置, 使通过关卡的时间减少到平均30秒, 但这只有在老系统中等待的汽车超过平均5辆, 新系统中关卡的空闲时间不超过10%时才是合算的。根据这个要求, 问新装置是否合算?

## 练习题答案

### 第二章 练习题解

1. 设生产 A、B 产品各为  $x_1, x_2$  公斤,  
求  $x_1, x_2$ 。

	产 品		
	A	B	
煤	9	4	360
劳动力	3	10	300
电 力	4	5	200
单位利润 (千元)	7	12	

$$\text{约束条件} \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

目标函数  $Z = 7x_1 + 12x_2$  达到最大

2. 设按第  $j$  种方法开数为  $x_j$  条,

求  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 。

约束条件:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 100 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 + 2x_6 + 8x_7 + 4x_8 \geq 100 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, 8) \end{cases}$$

目标函数:

$$Z = 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.9x_3 + 1.1x_5 + 0.2x_6 + 0.8x_7 + 1.4x_8$$

达到最小

	方 法								需要量
	一	二	三	四	五	六	七	八	
规 2.9	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1	0	2	1	0	3	2	1	0	100
格 1.5	1	0	1	3	0	2	3	4	100
边余料	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4	



3. 解: 设  $x_1$  为第一种产品的计划产量,  
 $x_2$  为第二种产品的计划产量,  
 $x_3$  为第三种产品的计划产量。

求  $x_1, x_2, x_3$ 。

使  $Z = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$  达到最大

满足  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$

$$10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 600$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 300$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3.$$

4. 解: 设  $x_1, x_2$  和  $x_3$  分别表示产品 A、B 和 C 的产量。

求  $x_1, x_2, x_3$ 。

使  $Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$  达到最大

满足  $x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \leq 2000$

$$2x_1 + 1.2x_2 + x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \geq 200$$

$$x_2 \geq 250$$

$$x_3 \geq 100$$

$$x_1 \leq 250$$

$$x_2 \leq 280$$

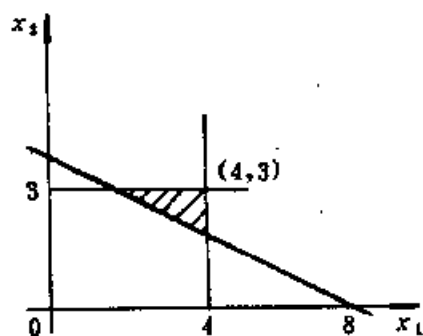
$$x_3 \leq 120.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

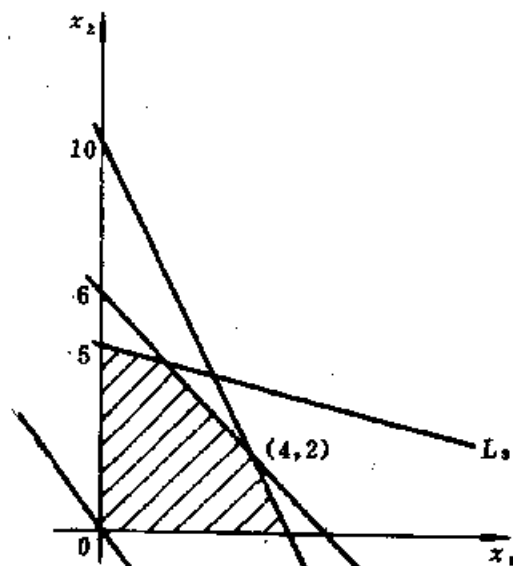
5. 略

6.  $x_1 = 4, x_2 = 3, Z = 23$  达到最大

7.  $x_1 = 4, x_2 = 2, Z = 50$  达到最大

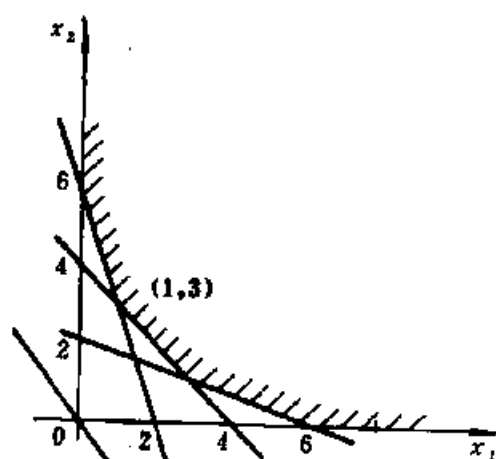


习题 6



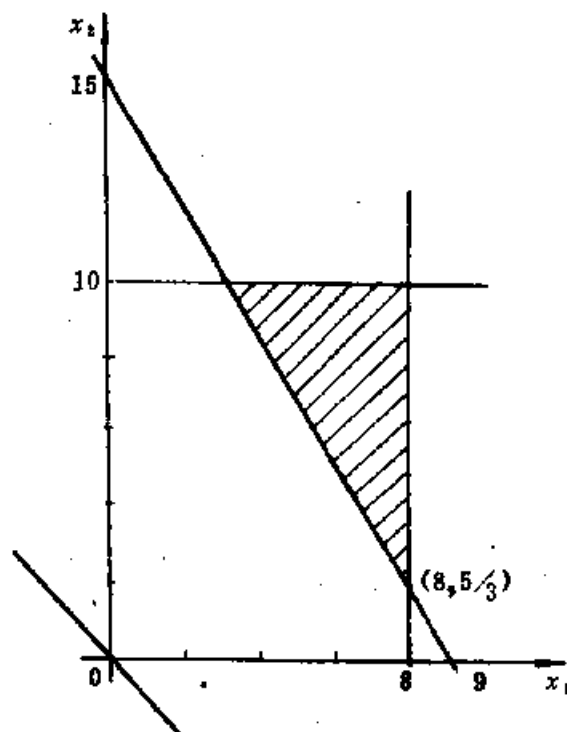
习题 7

8.  $x_1=1, x_2=3, Z=68$  达到最小



习题 8

9.  $X=(13, 5)^T, Z=31$



习题 10

10.  $x_1=8, x_2=5/3, Z=380$  达到最小

11. 略

12. 略

13. 求  $x_1, x_2$  使

$Z=2x_1+3x_2-3x_3$  达到最大

$$\text{满足} \begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=3 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

14. 应用单纯形法解:

求  $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使

$Z=3x_1+x_2+x_3+x_4$  达到最小

$$\text{满足} \begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1+x_2+x_4=6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

**解**

$C_1$		3	1	1	1	b
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
1	$x_3$	-2	$2^*$	1	0	4←
1	$x_4$	3	1	0	1	6
$\overline{C}$ 行		2	$-2 \uparrow$	0	0	$Z=10$
1	$x_3$	-1	1	1/2	0	2
1	$x_4$	4	0	$-1/2$	1	4
$\overline{C}$ 行		0	0	1	0	$Z=6$

最优解:  $X = (0, 2, 0, 4)^T$

$$\min Z = 6$$

15. 求  $X = (x_1, x_2)^T$  使  
 $Z = 10x_1 + 5x_2$  达到最大

满足  $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 100 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

解:  $Z = 10x + 5x_2$  达到最大

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 100 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 80 \\ x_j \geq 0 \ (j=1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

$C_j$		10	5	0	0	$b_i$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	$x_3$	4	5	1	0	100
0	$x_4$	5*	2	0	1	80
$\bar{C}$ 行		10↑	5	0	0	$Z=0$
0	$x_3$	0	17/5*	1	-4/5	36
10	$x_1$	1	2/5	0	1/5	16
$\bar{C}$ 行		0	1↑	0	-2	$Z=160$
5	$x_2$	0	1	5/17	-4/17	180/17
10	$x_1$	1	0	-2/17	5/17	200/17
$\bar{C}$ 行		0	0	-5/17	-30/17	$Z=170.6$

表 1 中  $\bar{C}$  行计算:

$$\bar{C}_1 = 10 - (0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 10$$

$$\bar{C}_2 = 5 - (0, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$\bar{C}_3 = 0 - (0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z = (0, 0) \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} = 0$$

表 2 中  $\bar{C}$  行计算:

$$\bar{C}_1 = 10 - (0, 10) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_2 = 5 - (0, 10) \begin{pmatrix} 17/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{C}_3 = 0 - (0, 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (0, 10) \begin{pmatrix} -4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = -2$$

$$Z = (0, 10) \begin{pmatrix} 36 \\ 16 \end{pmatrix} = 160$$

表 3 中  $\bar{C}$  行计算

$$\bar{C}_1 = 10 - (5, 10) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_2 = 5 - (5, 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_3 = 0 - (5, 10) \begin{pmatrix} 5/17 \\ -2/17 \end{pmatrix} = -5/17$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (5, 10) \begin{pmatrix} -4/17 \\ 5/17 \end{pmatrix} = -\frac{30}{17}$$

$$Z = (5, 10) \begin{pmatrix} 180/17 \\ 200/17 \end{pmatrix} = 170.6$$

16. 将下列线性规划变换为标准形式:

$$\text{求 } X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \quad \text{使}$$

$$Z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \quad \text{达到最小}$$

$$\text{满足} \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 符号无限制} \end{cases}$$

解: 设  $x_4 = x_8 - x_9$

$$Z' = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_8 - x_9) \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \quad -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_8 - x_9 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_8 + x_9 + x_5 = 14$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_8 - 2x_9 - x_6 = 2$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9)$$

17. 有五个未知量, 两个方程的方程组如下:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 以  $x_1, x_2$  为基本变量, 将方程组化成典型形式;

(2) 写出基本解;

(3) 是否可行? 为什么?

解:

$$(1) \quad x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 5$$

$$-) \quad x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 8$$

$$x_2 + 6x_3 + x_4 - 3x_5 = -3$$

$$-x_2 - 6x_3 - x_4 + 3x_5 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 5$$

$$+) \quad -2x_2 - 12x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 6$$

$$x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 11$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 11 \\ +x_2 + 6x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \end{cases}$$

(2) 基本解:  $x_1 = 11, x_2 = -3, x_3 = x_4 = x_5 = 0$

(3) 由于  $x_2 = -3 < 0$ , 这是不可行解。

18. 应用单纯形法求解:

求  $x = (x_1, x_2)^T$  使  
 $Z = x_1 + 3x_2$  达到最大

满足

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解:  $Z = x_1 + 3x_2$  达到最大

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

表 1 中  $\bar{C}$  行计算:

$$\bar{C}_1 = 1 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{C}_2 = 3 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\bar{C}_3 = 0 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_5 = 0 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$C_I$		1	3	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	0	0	1	0	0	5
1, 0	$x_4$	1	2	0	1	0	10
0	$x_5$	1	1*	0	0	1	4 ←
$\overline{C}$ 行		1	3 ↑	0	0	0	$Z=0$
0	$x_3$	1	0	1	0	0	5
2, 0	$x_4$	1*	0	0	1	-2	2 ←
3	$x_2$	0	1	0	0	1	4
$\overline{C}$ 行		1 ↑	0	0	0	-3	$Z=12$
0	$x_3$	0	0	1	-1	2	3
3, 1	$x_1$	1	0	0	1	-2	2
3	$x_2$	0	1	0	0	1	4
$\overline{C}$ 行		0	0	0	-1	-1	$Z=14$

表2中 $\overline{C}$ 行的计算

$$\overline{C}_1 = 1 - (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\overline{C}_2 = 3 - (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_3 = 0 - (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_4 = 0 - (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_5 = 0 - (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$Z = (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 12$$

表3中 $\overline{C}$ 行的计算:

$$\bar{C}_1 = 1 - (0, 1, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_2 = 3 - (0, 1, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_3 = 0 - (0, 1, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (0, 1, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\bar{C}_5 = 0 - (0, 1, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$Z = (0, 1, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 14$$

19. 求  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  使  
 $Z = 2x_1 - x_2 + x_3$  达到最大

满足

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$C_j$		2	-1	1	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	$x_4$	3	1	1	1	0	0	60
0	$x_5$	1*	-1	2	0	1	0	10
0	$x_6$	1	1	-1	0	0	1	20
$\bar{C}$		2	-1	1	0	0	0	$Z=0$
0	$x_4$	0	4	-5	1	-3	0	30
2	$x_1$	1	-1	2	0	1	0	10
0	$x_6$	0	2*	-3	0	-1	1	10
$\bar{C}$		0	1	-3	0	-2	0	20
0	$x_4$	0	0	1	1	-1	-2	10
2	$x_1$	1	0	1/2	0	1/2	1/2	15
-1	$x_2$	0	1	-3/2	0	-1/2	-1/2	6
$\bar{C}$		0	0	-3/2	0	-3/2	-1/2	25

$$\therefore x_1 = 15, x_2 = 5, x_3 = 0. \quad Z = 25.$$



20. 求  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使  
 $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  达到最小

满足  $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$C_j$		3	1	1	1	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
1	$x_3$	-2	2*	1	0	4
1	$x_4$	3	1	0	1	6
$\bar{C}$		2	-2↑	0	0	10
1	$x_2$	-1	1	1/2	0	2
1	$x_4$	4	0	-1/2	1	4
$\bar{C}$		0	0	1	0	6

$\therefore x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 4 \quad Z = 6$

1. 应用单纯形法求解

求  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  使  
 $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$  达到最大

满足  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$

解:  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$

$C_j$		1	2	3	4	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	$x_5$	1	2	2	3*	1	0	20 ←
0	$x_6$	2	1	3	2	0	1	20
$\bar{C}$ 行		1	2	3	4↑	0	0	$Z=0$
4	$x_4$	1/3	2/3	2/3	1	1/3	0	20/3
0	$x_6$	4/3	-1/3	5/3*	0	-2/3	1	20/3 ←
$\bar{C}$ 行		-1/3	-2/3	1/3↑	0	-4/3	0	$Z=80/3$
4	$x_4$	-1/5	4/5	0	1	3/5	-2/5	4
3	$x_3$	-4/5	-1/5	1	0	-2/5	3/5	4
$\bar{C}$ 行		-3/5	-3/5	0	0	-6/5	-1/5	$Z=28$

最优解为:  $x = (0, 0, 4, 4)^T$

$$\max Z = 28$$

22. 用大M单纯形法解:

求  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  使

$$Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \text{达到最小}$$

$$\text{满足} \begin{cases} x_1 \geq 30 \\ x_2 \leq 50 \\ x_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 120 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

$$\text{解: } \min Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + Mx_5 + Mx_8 + Mx_9$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 30 \\ x_2 + x_6 = 50 \\ x_3 - x_7 + x_8 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_9 = 120 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_8 \geq 0, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

$C_j$		6	3	4	0	M	0	0	M	M	
$C_B$	$\bar{C}_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$b$
M	$x_5$	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	30
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
M	$x_8$	0	0	1*	0	0	0	-1	1	0	20 ←
M	$x_9$	1	1	1	0	0	0	0	0	1	120
C		6-2M	3-M	4-2M	M	0	0	M	0	0	Z=176M

↑

$$\bar{C}_1 = 6 - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 2M$$

$$\bar{C}_2 = 3 - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - M$$

$$\bar{C}_3 = 4 - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 2M$$

$$\overline{C}_4 = 0 - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

$$\overline{C}_5 = M - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_6 = 0 - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_7 = 0 - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

$$\overline{C}_8 = M - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_9 = M - (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z = (M, 0, M, M) \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix} = 170M$$

$C_j$		6	3	4	0	$M$	0	0	$M$	$M$	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$M$	$x_5$	1*	0	0	-1	1	0	0	0	0	30 ←
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
4	$x_3$	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	20
$M$	$x_9$	1	1	0	0	0	0	1	-1	1	100
$\overline{C}$		$6-2M$	$3-M$	0	$M$	0	0	$4-M$	$-4+2M$	0	$Z=130M+80$

$$\uparrow$$

$$\min \{ 6-2M, 3-M, 4-M \} = 6-2M$$

$C_j$		6	3	4	0	M	0	0	M	M	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
M	$x_1$	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	30
0	$x_6$	0	1*	0	0	0	1	0	0	0	50 ←
4	$x_3$	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	20
M	$x_9$	0	1	0	1	-1	0	1	-1	1	70
$\bar{C}$		0	3-M	4	6-M	-6+2M	0	4-M	-4+M	0	$Z=70M+260$

$$\min \{3-M, 6-M, 4-M\} = 3-M$$

$C_j$		6	3	4	0	M	0	0	M	M	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
6	$x_1$	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	30
3	$x_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
4	$x_3$	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	20 ←
M	$x_9$	0	0	0	1	-1	-1	1*	-1	1	20
$\bar{C}$		0	0	0	6-M	-6+2M	-3+M	4-M	-4+2M	0	$Z=20M+410$

↑

$$\min \{6-M, 4-M\} = 4-M$$

$C_j$		6	3	4	0	M	0	0	M	M	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
6	$x_1$	1	0	0	-1	1	6	0	0	0	30
3	$x_2$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
4	$x_3$	0	0	1	1	-1	-1	0	0	1	40
0	$x_7$	0	0	0	1	-1	-1	1	-1	1	20
$\bar{C}$		0	0	0	2	M-2	1	0	M	M-4	$Z=490$

最优解为

$$X = (30, 50, 40, 0, 0, 0, 20)^T$$

$$\min Z = 490$$

23. 求  $X = (x_1, x_2)^T$  使

$$Z = 3x_1 - x_2 \quad \text{达到极大}$$

$$\text{满足} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_6 = 4 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, 6) \end{cases}$$

$\min W = x_4$

$C_j$		0	0	0	1	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
1	$x_4$	2*	1	-1	1	0	0	2 ←
0	$x_5$	1	3	0	0	1	0	3
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	4
$\bar{C}$		-2↑	-1	1	0	0	0	$W=2$
0	$x_1$	1	1/2	-1/2	1/2	0	0	1
0	$x_5$	0	5/2	1/2	-1/2	1	0	2
0	$x_6$	0	1	0	1	0	1	4
$\bar{C}$		0	0	0	1	0	0	$W=0$

$\max Z = 3x_1 - x_2$

$C_j$		3	-1	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_5$	$x_6$	
3	$x_1$	1	1/2	-1/2	0	0	1
0	$x_5$	0	5/2	1/2*	1	0	2 ←
0	$x_6$	0	1	0	0	1	4
$\bar{C}$		0	-5/2	3/2↑	0	0	$Z=3$
3	$x_1$	1	3	0	1	0	3
0	$x_3$	0	5	1	2	0	4
0	$x_6$	0	1	0	0	1	4
$\bar{C}$		0	-10	0	-3	0	$Z=9$

最优解为:  $X = (3, 0, 4)^T$

$\max Z = 9$

24. 求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使

$Z = 5x_1 + 21x_3$  达到最小

满足 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解, 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, 7) \end{cases}$$

$\min W = x_5 + x_7$

$C_j$		0	0	0	0	1	0	1	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
1	$x_6$	1	-1	6*	-1	1	0	0	2 ←
1	$x_7$	1	1	2	0	0	-1	1	1
$\bar{C}$		-2	1	-8 ↑	1	0	1	0	$W=3$
0	$x_3$	1/6	-1/6	1	-1/6	1/6	0	0	1/3
1	$x_7$	2/3	4/3*	0	1/3	-1/3	-1	1	1/3 ←
$\bar{C}$		-2/3	-4/3 ↑	0	-1/3	4/3	1	0	$W=1/3$
0	$x_3$	1/4	0	1	-1/8	1/8	-1/8	1/8	3/8
0	$x_2$	1/2	1	0	1/4	-1/4	-3/4	3/4	1/4
$\bar{C}$		0	0	0	0	1	0	1	$W=0$

$\min Z = 5x_1 + 21x_3$

$C_j$		5	0	21	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	
21	$x_3$	1/4	0	1	-1/8	-1/8	3/8
0	$x_2$	1/2*	1	0	1/4	-3/4	1/4 ←
$\bar{C}$		-1/4 ↑	0	0	21/8	21/8	$Z=63/8$
21	$x_3$	0	-1/2	1	-1/4	1/4	1/4
5	$x_1$	1	2	0	1/2	-3/2	1/2
$\bar{C}$		0	1/2	0	21/4	9/4	$Z=31/4$

最优解为:  $X = (1/2, 0, 1/4)^T$

$\min Z = 31/4$

25. 求  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$  使

$Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$  达到最大

满足 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 - x_7 = 4 \\ x_j \geq 0 (j=1, \dots, 7) \end{cases}$$

$$\text{解: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 - x_7 + x_8 = 4 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, 8) \end{cases}$$

$$\min W = x_8$$

$C_j$		0	0	0	0	0	0	0	1	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
0	$x_5$	1	1	1	1	1	0	0	0	30
0	$x_6$	3	6*	1	-2	0	1	0	0	0 ←
1	$x_8$	0	1	0	0	0	0	-1	1	4
$\bar{C}$		0	-1 ↑	0	0	0	0	1	0	$W=4$
0	$x_5$	1/2	0	5/6	4/3	1	-1/6	0	0	30
0	$x_2$	1/2	1	1/6	-1/3	0	1/6	0	0	0
1	$x_8$	-1/2	0	-1/6	1/3*	0	-1/6	-1	1	4 ←
$\bar{C}$		1/2	0	1/6	-1/3 ↑	0	1/6	1	0	$W=4$
0	$x_5$	5/2	0	3/2	0	1	1/2	4	-4	14
0	$x_2$	0	1	0	0	0	0	-1	1	4
0	$x_4$	-3/2	0	-1/2	1	0	-1/2	-3	3	12
$\bar{C}$		0	0	0	0	0	0	0	0	$W=0$

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$C_j$		3	4	2	0	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	$x_5$	5/2	0	3/2	0	1	1/2	4*	14 ←
4	$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	4
0	$x_4$	-3/2	0	-1/2	1	0	-1/2	-3	12
$\bar{C}$		3	0	2	0	0	0	4 ↑	$Z=16$
0	$x_7$	5/8	0	3/8*	0	1/4	1/8	1	7/2 ←
4	$x_2$	5/8	1	3/8	0	1/4	1/8	0	15/2
0	$x_4$	3/8	0	5/8	1	3/4	-1/8	0	45/2
$\bar{C}$		1/2	0	1/2 ↑	0	-2	-1/2	0	$Z=30$
2	$x_3$	5/3	0	1	0	2/3	1/3	8/3	28/3
4	$x_2$	0	1	0	0	0	0	-1	4
0	$x_4$	-2/3	0	0	1	1/3	-1/3	-5/3	50/3
$\bar{C}$		-1/3	0	0	0	-4/3	-2/3	4/3	$Z=104/3$

最优解为:  $x = (0, 4, 28/3, 50/3)^T$

$$\max Z = 104/3$$

26. 用二阶段法求解:

$$\begin{aligned} \text{求 } x = (x_1, x_2, x_3)^T \quad & \text{使} \\ Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad & \text{达到最小} \end{aligned}$$

$$\text{满足 } \begin{cases} x_1 \geq 30 \\ x_2 \leq 50 \\ x_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 120 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\text{解: } \begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 30 \\ x_2 + x_6 = 50 \\ x_3 - x_7 + x_8 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_9 = 120 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 9) \end{cases}$$

$$\min W = x_5 + x_8 + x_9$$

$C_j$		0	0	0	0	1	0	0	1	1	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
1	$x_5$	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	30
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
1	$x_8$	0	0	1*	0	0	0	-1	1	0	20
1	$x_9$	1	1	1	0	0	0	0	0	1	120
$\bar{C}$		-2	-1	-2	1	0	0	1	0	0	$W=170$
1	$x_5$	1*	0	0	-1	1	0	0	0	0	30
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	$x_3$	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	20
1	$x_9$	1	1	0	0	0	0	1	-1	1	100
$\bar{C}$		-2	-1	0	1	0	0	-1	2	0	$W=130$
0	$x_1$	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	30
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	$x_3$	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	20
1	$x_9$	0	1	0	1*	-1	0	1	-1	1	70
$\bar{C}$		0	-1	0	-1	2	0	-1	2	0	$W=70$
0	$x_1$	1	1	0	0	0	0	1	-1	1	100
0	$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	$x_3$	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	20
0	$x_4$	0	1	0	1	-1	0	1	-1	1	70
$\bar{C}$		0	0	0	0	1	0	0	1	1	$W=0$



$$\min Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$C_j$		6	3	4	0	0	0	b
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
6	$x_1$	1	1	0	0	0	1	100
0	$x_5$	0	1*	0	0	1	0	50 ←
4	$x_3$	0	3	1	0	0	-1	20
0	$x_4$	0	1	0	1	0	1	70
$\bar{C}$		0	-3 ↑	0	0	0	-2	$Z=680$
6	$x_1$	1	0	0	0	-1	1	50
3	$x_2$	0	1	0	0	1	0	50
4	$x_3$	0	0	1	0	0	-1	20
0	$x_4$	0	0	0	1	-1	1*	20
$\bar{C}$		0	0	0	0	3	-2	$Z=530$
6	$x_1$	1	0	0	-1	0	0	30
3	$x_2$	0	1	0	0	1	0	50
4	$x_3$	0	0	1	1	-1	1	40
0	$x_4$	0	0	0	1	-1	0	20
$\bar{C}$		0	0	0	2	1	0	$Z=490$

最优解为:  $X = (30, 50, 40)^T$

$$\min Z = 490$$

### 第三章 练习题解

1. 求:  $X$  使

$$Z = 2x_1 + x_2 \quad \text{达到最大}$$

$$\text{满足} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

解: 基  $B_0 = (P_3, P_4, P_5) \quad C_{B0} = (3, 0, 0)$

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X_{B0} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \pi = (0, 0, 0)$$

$$C_1 - \pi P_1 = (2, 1, 0) - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = (2, 1)$$

$$k=1, \quad B_0^{-1} P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad Q = \min \left\{ \frac{5}{1}, \frac{21}{6} \right\} = \frac{7}{2}$$

$L=3$  以  $x_1$  取代  $x_3$

$$B_3 = (P_3, P_4, P_1) \quad C_{B_3} = (0, 0, 2),$$

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad x_{B_3} = B_3^{-1} X_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\pi = C_{B_3} B_3^{-1} = (0, 0, 2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = (0, 0, \frac{1}{3})$$

$$C_3 - \pi P_1 = (0, 1) - (0, 0, \frac{1}{3}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

$$C_2 - \pi P_2 = \frac{1}{3} > 0 \quad k=2$$

$$B_3^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q = \min \left\{ \frac{3}{\frac{2}{3}}, \frac{\frac{7}{2}}{\frac{4}{3}}, \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{3}} \right\} = \frac{9}{4} \quad L=1$$

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{以 } x_2 \text{ 取代 } x_3$$

$$B_1 = (P_2, P_4, P_1) \quad C_{B1} = (1, 0, 2)$$

$$X_{B1} = B_1^{-1} X = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

$$\pi = C_{B1} B_1^{-1} (1, 0, 2) = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right)$$

$$C_i - \pi P_i = (0, 0) - \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$$

$C_i - \pi P_i \leq 0$  已取得最优解, 最优解为

$$x_1 = \frac{11}{4}, \quad x_2 = \frac{9}{4},$$

$Z = 31/4$  达到最大。

## 第四章 练习题解

1. 写出下列给出原始问题的对偶问题。

原问题

$$\text{极大化: } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2 \end{cases}$$

对偶问题

$$\text{极小化: } W = 4y_1 + 14y_2 + 3y_3$$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} -y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 2 \\ y_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3 \end{cases}$$

2. 写出下列给出原始的对偶问题。

原问题

极大化:  $Z = x_1 + 2x_2 + x_3$

约束条件: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ 符号不限} \end{cases}$$

对偶问题:

极小化:  $W = 2y_1 + y_2 + 2y_3$

约束条件: 
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{ 无限制}, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

3. 用对偶单纯形法求解:

求  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  使

$Z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$  达到最小

满足  $3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$

$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10$

$C_j$		5	2	4	0	0	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	$x_4$	-3	-1	-2	1	0	-4
0	$x_5$	-6	-3*	-5	0	1	-10
$\bar{C}$		5	2	4	0	0	0
0	$x_4$	-1*	0	-1/3	1	-1/3	-2/3
2	$x_2$	2	1	5/3	0	-1/3	10/3
$\bar{C}$		1	0	2/3	0	2/3	20/3
5	$x_1$	1	0	1/3	-1	1/3	2/3
2	$x_2$	0	1	1	2	2	2
$\bar{C}$		0	0	1/3	1	1/3	22/3

$x_1 = 2/3, x_2 = 2, Z = 22/3。$

4. 用对偶单纯形法解。

求:  $X$

极小化:  $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{aligned} \text{约束条件: } & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 30 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 极小化:  $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{aligned} \text{约束条件: } & \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -30 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_6 = -20 \\ x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$C_j$		1	2	3	4	0	0	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
0	$x_5$	-1*	-2	-2	-3	1	0	-30 ←
0	$x_6$	-2	-1	-3	-2	0	1	-20
$\bar{C}$		1	2	3	4	0	0	
1	$x_1$	1	2	2	3	-1	0	30
0	$x_6$	0	3	1	4	-2	1	40
$\bar{C}$		0	0	1	1	1	0	$Z=30$

最优解为:

$$X = (30, 0, 0, 0, 0, 40)^T$$

$$\min Z = 30$$

或

$C_j \rightarrow$		1	2	3	4	0	0	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
0	$x_5$	-1	-2*	-2	-3	1	0	-30 ←
0	$x_6$	-2	-1	-3	-2	0	1	-20
$\bar{C}$		1	2	3	4	0	0	
2	$x_2$	1/2	1	1	3/2	-1/2	0	15
0	$x_6$	-3/2*	0	-2	-1/2	1/2	1	-5 ←
$\bar{C}$		0	0	1	1	1	0	
2	$x_2$	0	1	1/3	4/3	-1/3	1/3	40/3
1	$x_1$	1	0	4/3	1/3	-1/3	-2/3	10/3
$\bar{C}$		0	0	0	1	1	0	$Z=30$

最优解为:

$$X = (10/3, 40/3, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\min Z = 30$$

## 5. 用对偶单纯形法解

求:  $X$

极小化:  $Z = x_1 + 3x_2$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 极小化:  $x_1 + 3x_2$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$C_j$		1	3	0	0	0	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
0	$x_3$	-2	-1	1	0	0	-3
0	$x_4$	-3	-2	0	1	0	-4
0	$x_5$	-1	-2	0	0	1	-1
$\bar{C}$		1	3	0	0	0	
0	$x_3$	0	1/3	1	-2/3	0	-1/3
1	$x_1$	1	2/3	0	-1/3	0	4/3
0	$x_5$	0	-4/3	0	-1/3	1	1/3
$\bar{C}$		0	7/3	0	1/3	0	
0	$x_4$	0	-1/2	-3/2	1	0	1/2
1	$x_1$	1	1/2	-1/2	0	0	3/2
0	$x_5$	0	-3/2	-1/2	0	1	1/2
$\bar{C}$		0	5/2	1/2	0	0	$Z=3/2$

6. 某车间有一批长度为 260 公分的钢管, 现为制造产品的需要, 需要截成长度为 130 公分, 98 公分和 65 公分三种规格, 各规格需要量分别为不少于 10 (千条), 20 (千条), 18 (千条)。问如何开料, 使截出余料总量为最少 (设切割口宽度很小, 可以忽略不计)。

解: 先列出数学模型。

管材的三种规格截裁方法有如下六种。

开得各种 规格条数	开料方法						最少需要量 (千条)
	一	二	三	四	五	六	
规格 130	2	1	1	0	0	0	10
98	0	1	0	2	1	0	20
65	0	0	2	1	2	4	18
余料	5	37	5	4	37	5	

设  $x_j$  为用第  $j$  种方法开料的原材料条数

$$\min Z = 5x_1 + 37x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 37x_5 + 5x_6$$

$$\text{约束方程: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 10 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 20 \\ 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 \geq 18 \\ x_j \geq 0, j=1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

化为标准形式

$$\min Z = 5x_1 + 37x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 37x_5 + 5x_6$$

$$\text{约束方程: } \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_6 + x_7 = -10 \\ -x_2 - 2x_4 - x_5 + x_8 = -20 \\ -2x_3 - x_4 - 2x_5 - 4x_6 + x_9 = -18 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, 9) \end{cases}$$

$C_j$		5	37	5	4	37	5	0	0	0	
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$b$
0	$x_7$	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-10
0	$x_8$	0	-1	0	-2*	-1	0	0	1	0	-20 ←
0	$x_9$	0	0	-2	-1	-2	-4	0	0	0	-18
	$\bar{C}$	5	37	5	4	37	5	0	0	0	
0	$x_7$	-2*	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-10 ←
4	$x_4$	0	1/2	0	1	1/2	0	0	-1/2	0	10
0	$x_9$	0	1/2	-2	0	-3/2	-4	0	-1/2	1	-8
	$\bar{C}$	5	35	5	0	35	5	0	2	0	
5	$x_1$	1	1/2	1/2	0	0	0	-1/2	0	0	5
4	$x_4$	0	1/2	0	1	1/2	0	0	-1/2	0	10
0	$x_9$	0	1/2	-2	0	-3/2	-4*	0	-1/2	1	-8 ←
	$\bar{C}$	0	32.5	5/2	4	35	5	5/2	2	0	
5	$x_1$	1	1/2	1/2	0	0	0	-1/2	0	0	5
4	$x_4$	0	1/2	0	1	1/2	0	0	-1/2	0	10
5	$x_6$	0	-1/8	1/2	0	3/8	1	0	1/8	-1/4	2
	$\bar{C}$	0	33 1/8	0	0	31 1/8	0	5/2	11/8	5/4	$Z=75$

最优解为:

$$X = (5, 0, 0, 10, 0, 2)^T \quad \min Z = 75$$

即: 以 5 条按第一种方法开料;

以 10 条按第四种方法开料;

以 2 条按第六种方法开料;

各规格料为:

$$130 \text{公分}: 5 \times 2 = 10 \text{ (千条)}$$

$$98 \text{公分}: 10 \times 2 = 20 \text{ (千条)}$$

$$65 \text{公分}: 10 \times 1 + 4 \times 2 = 18 \text{ (千条)}, \text{ 满足生产需要, 用原材管总共是 } 17000 \text{ 条。}$$

7. (1) 要安排丙产品的生产,  $\bar{C}_3 \geq 0$

$$\bar{C}_3 = C_3 - C_B \bar{P}_3 = C_3 - (6, 10, 0) \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C_3 - \frac{20}{3} \geq 0, \quad C_3 \geq 20/3$$

当丙产品单位利润超过 6.7 元时, 才有安排生产的意义。

(2) 要保持现行基仍为最优, 只要  $\bar{C}_i \leq 0$

$$\bar{C}_3 = 4 - (6, C_1, 0) \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 - \frac{1}{6}C_1$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (6, C_1, 0) \begin{pmatrix} 10/6 \\ -4/6 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 + \frac{2}{3}C_1$$

$$\bar{C}_5 = 0 - (6, C_1, 0) \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + \frac{1}{6}C_1$$

$$\bar{C}_3 \leq 0, \quad C_1 \geq -6$$

$$\bar{C}_4 \leq 0, \quad C_1 \leq 15$$

$$\bar{C}_5 \leq 0, \quad C_1 \geq 6$$

$$\therefore 6 \leq C_1 \leq 15$$

当甲产品的单位利润在 [6, 15] 元里, 仍然只生产甲、乙产品最优选择。

(3) 影子价格是  $C_B B^{-1}$

$$(6, 10, 0) \begin{pmatrix} 10/6 & -1/6 & 0 \\ -4/6 & 1/6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (10/3, 2/3, 0)$$

材料 I 的影子价格为 10/3 元, 劳动力的影子价格为 2/3 元, 材料 II 的影子价格为 0 元。

8. 设一个求最大利润的规划问题的最终表如下列:



基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	2
$x_1$	1	0	$-1/8$	$3/8$	0	$3/2$
$x_5$	0	0	1	-2	1	4
$\bar{C}$	0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	5

在保持现行基不变的情况下，假如要把一个约束条件的右端扩大，应扩大哪一个？为什么？最多扩大多少？求出新的目标函数值。

解：根据影子价格的概念， $\bar{C}_3 = -1/4$ ， $\bar{C}_4 = -1/4$ ， $\bar{C}_5 = 0$ ，故应扩大第一个、第二个约束条件的左端， $b_1$ 每增加1单位，使利润值增大 $1/4$ ； $b_2$ 每增加1单位，使利润增大 $1/4$ 。

根据 $\Delta^+ b_1 = \frac{3/2}{1/8} = 12$ ，第一个约束条件右端常数最多扩大12。

$\Delta^+ b_2 = \min \left\{ \left| \frac{2}{-1/2} \right|, \left| \frac{4}{-2} \right| \right\} = 2$ ，第二个约束条件右端常数最多扩大2。

若 $\Delta^+ b_1$ 为12，则目标函数新值为： $5 + 12 \times \frac{1}{4} + 8$

若 $\Delta^+ b_2$ 为2，则目标函数新值为： $5 + 2 \times \frac{1}{4} = 5 \frac{1}{2}$

## 第五章 练习题解

1.  $\min Z = 83$

产地 \ 销地	销地				产量
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	2		5		7
$A_2$	1			3	4
$A_3$		6		3	9
销 量	3	6	5	6	20

2.  $\min Z = 249$

$Z = 83$

发点 \ 收点	收点			发量
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	4	8	1	13
$A_2$			5	5
$A_3$			5	5
收 量	4	8	11	23

$Z = 249$

3.  $\min Z = 165$

产 地	方 案	销 地				产 量
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
	$A_1$	6	5		1	12
	$A_2$				5	5
	$A_3$			4	1	5
	销 量	6	5	4	7	22

4.

15	18	21	24		0	1	5	7
19	23	22	18	→	4	6	6	1
26	17	16	19		11	0	0	2
19	21	23	17		4	4	7	0
0	1	5	7		-0	-0	-4	-7
3	5	5	0	→	3	4	4	0
-11	-0	-0	-2		-12	-0	-0	-3
4	4	7	0		4	3	6	0
-0	-0	-4	-10		<span style="border: 1px solid black;">15</span>	18	21	24
-0	-1	-1	-0		19	23	22	<span style="border: 1px solid black;">18</span>
-12	-0	-0	-6		26	17	<span style="border: 1px solid black;">16</span>	19
-1	-0	-3	-0		19	<span style="border: 1px solid black;">21</span>	23	17
					$\min Z = 70$			

5.

5	2	4	6		-3	-0	-1	-3
3	5	4	3		-1	-3	-1	-0
2	3	4	5	→	-0	-1	-1	-2
5	4	3	4		-3	-2	-0	-1
5	<span style="border: 1px solid black;">2</span>	4	6					
3	5	4	<span style="border: 1px solid black;">3</span>		$\min Z = 10$ 元			
<span style="border: 1px solid black;">2</span>	3	4	5					
4	4	<span style="border: 1px solid black;">3</span>	4					

6.

$$\begin{array}{cccc}
 35 & 27 & 28 & 37 \\
 28 & 34 & 29 & 40 \\
 35 & 24 & 32 & 33 \\
 24 & 32 & 25 & 28
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 5 & 13 & 12 & 3 \\
 12 & 6 & 11 & 0 \\
 5 & 16 & 8 & 7 \\
 16 & 8 & 15 & 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 -0- & -7- & -4- & -3- \\
 -7- & -0- & -3- & -0- \\
 0- & -10- & 0- & -7- \\
 11- & 2- & 7- & -12-
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 -0- & -7- & -4- & -3- \\
 -7- & -0- & -3- & -0- \\
 -0- & -10- & 0- & -7- \\
 9 & 0 & 5 & 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{35} & 27 & 28 & 37 \\
 28 & 34 & 29 & \boxed{40} \\
 35 & 24 & \boxed{32} & 33 \\
 24 & \boxed{32} & 25 & 28
 \end{array}$$

$$\max Z = 139 \text{ 元}$$

7.

$$\begin{array}{cccc}
 16 & 10 & 12 & 15 \\
 11 & 12 & N & 18 \\
 8 & 17 & 13 & 16 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 -6- & -0- & -2- & -5- \\
 0 & 1 & N & 7 \\
 0 & 9 & 5 & 8 \\
 -0- & -0- & -0- & -0-
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 7 & 0 & 2 & 5 \\
 0 & 0 & N & 6 \\
 0 & 8 & 4 & 7 \\
 -1 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 -7- & -0- & -0- & -3- \\
 -0- & -0- & -N- & -4- \\
 -0- & -8- & -2- & -5- \\
 -3- & -2- & -0- & -0-
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 16 & 10 & \boxed{12} & 15 \\
 11 & \boxed{12} & N & 18 \\
 \boxed{8} & 17 & 13 & 16 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\min Z = 32 \text{ 元}$$

8.  $\min Z = 50$  元

9. 解: 设  $x_1$ ,  $x_2$  分别为桌、椅的销售量, 其偏离变量分别为  $d_1^-$ ,  $d_2^+$ 。

依题意有

$$\min Z = d_1^- + d_1^+$$

$$8x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 640$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+ \geq 0$$

用单纯形法求解得：

$$x_1 = 60, x_2 = 40$$

$Z = 8 \times 60 + 4 \times 40 = 640$ ，达到预期目标。（计算过程见下表）

$C_j$		1      1						$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$d_1^-$	$d_1^+$	$x_3$	$x_4$	
1	$d_1^-$	8	4	1	-1	0	0	640
0	$x_3$	1	0	0	0	1	0	60
0	$x_4$	0	1	0	0	0	1	80
$\bar{C}$		-8	-4	0	0	0	2	640
1	$d_1^-$	0	4	-8	0	1	-1	160
0	$x_1$	1	0	1	0	0	0	60
0	$x_4$	0	1	0	1	0	0	80
$\bar{C}$		0	-4	8	0	0	2	160
0	$x_2$	0	1	-2	0	1/4	-1/4	40
0	$x_1$	1	0	1	0	0	0	60
0	$x_4$	0	0	2	1	-1/4	1/4	20
$\bar{C}$		0	0	1	1	0	0	0

## 第六章 练习题解

求  $x_1, x_2$

$$\max Z = 7x_1 + 9x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 7x_1 + x_2 + x_4 = 35 \\ x_j \geq 0, (j=1, 2, 3, 4) \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

$$X = (4, 3)^T$$

$$\max Z = 55$$

$C_j$		7	9	0	0	0	0	b
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	$x_3$	-1	3*	1	0			8
0	$x_4$	7	1	0	1			36
$\overline{C}$		7	8	0	0			
9	$x_2$	-1/3	1	1/3	0			2
0	$x_4$	22/3*	0	-1/3	1			33
$\overline{C}$		10	0	-3	0			
9	$x_2$	0	1	7/22	1/22			7/2
7	$x_1$	1	0	-1/22	3/22			9/2
$\overline{C}$		0	0	-28/11	-16/11			Z=63

增添切割方程:  $-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$

$C_j$		7	9	0	0	0	b
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
9	$x_2$	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{7}{2}$
7	$x_1$	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$\frac{9}{2}$
0	$x_5$	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$\frac{1}{2}$
$\overline{C}$		0	0	$-\frac{28}{11}$	$-\frac{16}{11}$	0	63
9	$x_2$	0	1	0	0	1	3
7	$x_1$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{32}{7}$
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$\frac{11}{7}$
$\overline{C}$		0	0	0	-1	-8	59

增添切割方程:  $-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}x_5 + x_6 = -\frac{4}{7}$

$C_j$		7	9	0	0	0	0	$b$
$C_B$	基	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
9	$x_2$	0	1	0	0	1	0	3
7	$x_1$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{32}{7}$
0	$x_3$	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$\frac{11}{7}$
0	$x_5$	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$
$\bar{C}$		0	0	0	-1	-8	0	59
9	$x_2$	0	1	0	0	1	0	3
7	$x_1$	1	0	0	0	-1	1	4
0	$x_3$	0	0	1	0	-4	1	1
0	$x_4$	0	0	0	1	6	-7	4
$\bar{C}$		0	0	0	0	-2	-7	55

## 第七章 练习题解

### 第一阶段

	相应利润	应卸下箱数
0	0	0
待卸箱数	1	4
	2	6
	3	11
	4	12
	5	12

### 第二阶段

单位：百元

待分配 的箱数	分配三店 相应利润	利 润					最大的 利 润	在二店应 卸下箱数
		分配到二店箱数						
		1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	4	5					5	1
2	6	9	10				10	2
3	11	11	14	11			14	2
4	12	16	16	15	11		16	1, 2
5	12	17	21	17	15	11	21	2

第三阶段		单位:百元						
待分配 箱数	五箱都给 二、三分点	分到第一分点利					整个问题 最大利润	在一分点 卸下数箱
	最大利润	1箱	2箱	3箱	4箱	5箱		
5	21	19	21	19	17	13	21	0.2

根据上述计算,最优分配方案有两个,它们相应的利润都是2100元,达到最大。这两个方案为:

- (1) 一分店两箱,二分店两箱,三分店三箱。
- (2) 一分店两箱,二分店两箱,三分店一箱。

## 第八章 练习题解

1.  $x_1 = 261.8$ 克       $x_2 = 238.2$ 克  
 $x_3 = 276.4$ 克
2.  $x_1 = 34\Omega$        $x_2 = 325\Omega$   
 $x_3 = 315\Omega$

## 第九章 练习题解

$$Q^* = 75 \text{吨} \quad t^* = 25 \text{天}, n^* = 12 \text{次}$$

## 第十章 练习题解

解: 这是  $M/M/1$  无限队长的排队系统。依题意有:

$$\lambda = 90 \text{ (辆/小时)}$$

$$\text{老系统服务率 } \mu_1 = 3600/38 \text{ (辆/小时)}$$

$$\text{新系统服务率 } \mu_2 = 3600/30 \text{ (辆/小时)}$$

$$\text{老系统服务强度 } \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{90}{\frac{3600}{38}} = 0.95$$

$$\text{新系统服务强度 } \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{90}{\frac{3600}{30}} = 0.75$$

$$\text{老系统队长 } L_1 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{0.95}{0.05} = 19 \text{ (辆)}$$

$$\text{新系统空闲概率 } P_0 = 1 - \rho_2 = 1 - 0.75 = 0.25$$

新系统的空闲时间为25%,超过10%的要求,新装置不合算,但老系统中汽车等待数为19辆,超过5辆要求,可考虑新装置。