

课后答案网，用心为你服务！



[大学答案](#) --- [中学答案](#) --- [考研答案](#) --- [考试答案](#)

最全最多的课后习题参考答案，尽在课后答案网（www.khdaw.com）！

Khdaw团队一直秉承用心为大家服务的宗旨，以关注学生的学习生活为出发点，

旨在为广大学生朋友的自主学习提供一个分享和交流的平台。

爱校园（www.aixiaoyuan.com） 课后答案网（www.khdaw.com） 淘答案（www.taodaan.com）

机械原理是一门基础技术课程，主要研究机械设计和制造技术中机械的运动特性、性能和设计问题。其基础性表现在研究对象并不是确定的某一类机械，研究的问题是任何机械中共有的机械运动规律及其设计；其技术性表现在要解决的是实际环境下的工程技术问题，也就是用怎样的结构来实现运动要求的一系列具体措施。它既不像基础理论课程那样经过高度的抽象而离实际很远，又不像工程技术那样涉及到很具体、实际的方方面面，例如设计、制造、使用、资源、管理等诸多问题。因此，在学习基础课程之后，学习专业技术之前，需要培养一种将实际问题抽象成基础理论问题的能力，以及将基础理论应用于解决涉及面较窄的工程技术问题的能力。而反映能力的两个主要方面是知识和思维方式。这就是设置技术基础课程的主要目的和主要任务。

机械原理课程的研究对象是机器和机构，其重要任务就是进行机械运动方案的设计，各个执行机构的类型和尺度综合，机械系统的动力性能分析和综合。为了学好机械原理课程，在学习过程中应牢牢掌握以下方法：

了解课程学习内容及其体系，以便了解课程章节之间的联系，有利于掌握全书的内容脉络，做到心中有数。

熟悉和掌握机械运动简图的画法，要习惯于采用运动简图来认识机构和机器。

熟悉和掌握各种典型机构的运动特点、动力特性及其设计方法。

对于课程中的基本概念要深刻理解，更好地掌握课程内容。

深入理解和全面掌握本课程所采用的基本研究方法。这些基本研究方法有：杆组法、机架转换法、机构演化法、等效法等。这些方法在对各种机构进行分析和设计工程中，充分显示出它们的重要性。

注意学习中内容前后联系，融会贯通。如瞬心的概念，不但对连杆机构而且对凸轮机构、齿轮机构的分析都是十分有用的。

注意运用理论力学的有关知识。要注意培养自己运用所学的基本理论和方法去分析和解决工程实际问题的能力。

根据基础技术课的性质,其习题大致有两类:一类是分析已有机械的特性;另一类是根据给定的要求和条件设计出“新”的机械。就机械原理课程的习题而言,一类是分析机构组成、运动特性、传力特性和动力特性;另一类则是根据给定的功能要求或运动要求,设计出实现这一要求的机构组成(包括运动方案、机构组成方案、结构),最后得到机构的运动简图。此外,还应注意所设计机构能否实用,即考虑构件的形状构造(也称结构)能否实现等现实问题。因此在解题过程中应注意以下几点:

①做题之前应熟悉教材相应内容。

②仔细审题。首先明确题意,即明确本题是做分析还是设计,分析什么问题,设计什么东西。其次,了解该题给出哪些已知条件和限定条件。然后根据题意,搜索与该题有关的要素,与给出的条件对比确定缺少哪些条件,而其中哪些是可自行决定的,哪些是可以通过什么办法确定的,哪些是多余的,哪些是不足的。这也就确定了解题思路,这是关键的一步。

③认真解题。由于本课程研究的问题多是运动几何学问题,所以(主要)采用图解法解题,它有直观、简便、易于校验和发现问题等优点,而精度一般也能满足工程技术要求。

④小结归纳。这一点很重要,能够扩展知识和思路,从中得到启示,以达到举一反三的效果。

根据课程教学的基本要求,书中具体指出了各章的基本要求、难点和考点以及内容提要。每章的答疑解惑一节集中解答了同学们在学习过程中容易出现的困惑,对所有难以理解的概念进行了全面、深层的阐述。典型例题的筛选体现了作者对课程的理解与把握,并融入了作者的经验和体会,希望能有助于同学们掌握解题思路 and 技巧。配套教材习题与思考题的解析,重点放在分析与解答上,对一些题目中出现的经典问题,给出了必要的说明和提示。各章的自测试题,有利于学生检查基本内容的掌握程度。许多题目是从近年各重点高校的考研试卷中精选出来的,目的是让同学们了解各校对该门课程的要求程度和常见的考试题型。

本书由天津工业大学机械电子学院赵镇宏、严明富编著。参加本书编写工作的还有郝彩虹、雷晓康、张琪、沈靖、周黎黎、刘颖、张远征、赵年欣、周艳、董晓童、刘秀婷、何丽、陈建、顾祎娜、岳缓缓、刘宗健。

由于编写时间仓促,书中疏漏和欠妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2005年4月

目 次

第 1 章 平面机构的结构分析	(1)
1.1 考核知识点	(2)
1.1.1 基本要求	(2)
1.1.2 内容提要 with 考点提示	(2)
1.2 专题释疑	(4)
1.2.1 机构自由度 F 、机构原动件的数目和机构运动的关系	(4)
1.2.2 机构拆组分析与机构级别的判断	(4)
1.3 典型例题解析	(4)
1.4 原教材习题详解	(8)
1.5 原教材思考题详解	(13)
1.6 自测试卷及答案	(14)
1.6.1 自测试卷	(14)
1.6.2 自测试卷答案	(16)
第 2 章 平面机构的运动分析	(17)
2.1 考核知识点	(18)
2.1.1 基本要求	(18)
2.1.2 内容提要 with 考点提示	(18)
2.2 专题释疑	(19)
2.2.1 用机构瞬心求解机构的运动速度	(19)
2.2.2 构件上重合点之间的速度和加速度分析	(20)
2.2.3 特殊点法求解Ⅲ级机构的速度和加速度	(20)
2.3 典型例题分析	(21)
2.4 原教材习题详解	(25)
2.5 原教材思考题详解	(36)
2.6 自测试卷及答案	(36)
2.6.1 自测试卷	(36)
2.6.2 自测试卷答案	(37)

第3章 平面连杆机构及其设计	(39)
3.1 考核知识点	(40)
3.1.1 基本要求	(40)
3.1.2 内容提要 with 考点提示	(40)
3.2 专题释疑	(43)
3.2.1 四杆机构设计的条件	(43)
3.2.2 机构自锁、机构自由度为零、机构死点的本质区别	(43)
3.2.3 急回特性	(43)
3.3 典型例题解析	(44)
3.4 原教材习题详解	(47)
3.5 原教材思考题详解	(57)
3.6 自测试卷及答案	(57)
3.6.1 自测试卷	(57)
3.6.2 自测试卷答案	(58)
第4章 凸轮机构及其设计	(61)
4.1 考核知识点	(62)
4.1.1 基本要求	(62)
4.1.2 内容提要 with 考点提示	(62)
4.2 专题释疑	(64)
相对运动原理 (反转法)	(64)
4.3 典型例题解析	(64)
4.4 原教材习题详解	(68)
4.5 原教材思考题详解	(70)
4.6 自测试卷及答案	(70)
4.6.1 自测试卷	(70)
4.6.2 自测试卷答案	(72)
第5章 齿轮机构及其设计	(73)
5.1 考核知识点	(74)
5.1.1 基本要求	(74)
5.1.2 内容提要 with 考点提示	(74)
5.2 专题释疑	(79)
5.2.1 齿轮传动中易混淆的概念	(79)
5.2.2 齿轮齿条啮合传动与标准齿条型刀具范成加工齿轮	(80)
5.2.3 齿轮传动的传动比及从动轮的转向	(80)
5.2.4 当量齿轮及当量齿数	(81)
5.3 典型例题解析	(81)
5.4 原教材习题详解	(84)
5.5 原教材思考题详解	(95)

5.6 自测试卷及答案	(96)
5.6.1 自测试卷	(96)
5.6.2 自测试卷答案	(98)
第6章 轮 系	(101)
6.1 考核知识点	(102)
6.1.1 基本要求	(102)
6.1.2 内容提要与考点提示	(102)
6.2 专题释疑	(103)
6.2.1 定轴轮系传动比计算时主从动轮转向关系的确定	(103)
6.2.2 周转轮系传动比计算应注意事项	(104)
6.2.3 复合轮系传动比计算应注意事项	(104)
6.3 典型例题解析	(104)
6.4 原教材习题详解	(106)
6.5 原教材思考题详解	(113)
6.6 自测试卷及答案	(114)
6.6.1 自测试卷	(114)
6.6.2 自测试卷答案	(115)
第7章 其他常用机构	(117)
7.1 考核知识点	(118)
7.1.1 基本要求	(118)
7.1.2 内容提要与考点提示	(118)
7.2 典型例题解析	(120)
7.3 原教材习题详解	(121)
7.4 原教材思考题详解	(123)
7.5 自测试卷及答案	(123)
7.5.1 自测试卷	(123)
7.5.2 自测试卷答案	(124)
第8章 机械运动方案的拟定	(125)
8.1 考核知识点	(126)
8.1.1 基本要求	(126)
8.1.2 内容提要与考点提示	(126)
8.2 典型例题解析	(127)
8.3 原教材习题详解	(129)
8.4 原教材思考题详解	(130)
第9章 平面机构的力分析	(131)
9.1 考核知识点	(132)

9.1.1	基本要求	(132)
9.1.2	内容提要 with 考点提示	(132)
9.2	专题释疑	(133)
9.2.1	运动副中摩擦和自锁的分析步骤	(133)
9.2.2	运动副中总反力的确定方法	(134)
9.2.3	当量摩擦系数概念	(134)
9.3	典型例题解析	(134)
9.4	原教材习题详解	(137)
9.5	原教材思考题详解	(154)
9.6	自测试卷及答案	(155)
9.6.1	自测试卷	(155)
9.6.2	自测试卷答案	(155)
第 10 章	平面机构的平衡	(157)
10.1	考核知识点	(158)
10.1.1	基本要求	(158)
10.1.2	内容提要 with 考点提示	(158)
10.2	典型例题解析	(160)
10.3	原教材习题详解	(163)
10.4	原教材思考题详解	(172)
10.5	自测试卷及答案	(172)
10.5.1	自测试卷	(172)
10.5.2	自测试卷答案	(173)
第 11 章	机器的机械效率	(175)
11.1	考核知识点	(176)
11.1.1	基本要求	(176)
11.1.2	内容提要 with 考点提示	(176)
11.2	专题释疑	(178)
	自锁的概念	(178)
11.3	典型例题解析	(178)
11.4	原教材习题详解	(179)
11.5	原教材思考题详解	(188)
11.6	自测试卷及答案	(188)
11.6.1	自测试卷	(188)
11.6.2	自测试卷答案	(189)
第 12 章	机器的运转及其速度波动的调节	(191)
12.1	考核知识点	(192)
12.1.1	基本要求	(192)

12.1.2	内容提要 with 考点提示	(192)
12.2	专题释疑	(195)
	最大剩余功的计算	(195)
12.3	典型例题解析	(195)
12.4	原教材习题详解	(198)
12.5	原教材思考题详解	(210)
12.6	自测试卷及答案	(211)
12.6.1	自测试卷	(211)
12.6.2	自测试卷答案	(212)

第 1 章



本章考点

- 构件、运动副、运动链等概念
- 自由度与约束的关系
- 机构运动简图绘制
- 机构具有确定运动条件
- 机构自由度计算
- 复合铰链、局部自由度、虚约束判断

本章难点

- 机构自由度计算中有关复合铰链、局部自由度及虚约束问题的判断及正确处理

1.1 考核知识点

本章介绍机构、结构、运动条件等基本概念。重点内容是：有关机构组成中的构件、运动副、运动链及机构等概念；机构具有确定的运动条件，机构运动简图的绘制和平面机构自由度的计算；机构的组成分析和机构的级别判断。主要解决用自由度计算公式来判断构件组合体运动的可能性和确定性问题。

1.1.1 基本要求

- 掌握机构运动简图的绘制；
- 掌握机构具有确定运动的条件；
- 掌握机构自由度、复合铰链、局部自由度、虚约束等概念；能正确计算平面机构自由度并能判断其是否具有确定的运动；
- 了解机构的组成原理和结构分析与高副低代的方法；会分析确定机构的组成和机构的级别。

1.1.2 内容提要 with 考点提示

(1) 有关机构组成的概念

1) **构件**是机器中每一个独立运动的单元体，是组成机构的基本要素之一。而**零件**是机器制造的单元体。实际的构件可以是一个独立运动的零件，也可以是由若干个零件固连在一起的一个独立运动的整体。构件在图形表达上是用最简单的线条或几何图形来表示的。但从运动学的角度来看，构件又可视为任意大的平面刚体。

2) **运动副**是由两构件组成的相对可动的连接，是组成机构的又一基本要素。把两构件上能够参加接触而构成运动副的表面称为**运动副元素**。

运动副的基本特征为：

①构成运动副的两构件具有一定的接触形式。

②两构件能产生一定形式的相对运动。因此，运动副可按其接触形式分为**高副**（即点或线接触的运动副）和**低副**（即面接触的运动副）。又可按所能产生的相对运动的形式分为转动副、移动副、螺旋副及球面副等。由于两构件构成运动副之后，它们之间尚能产生何种相对运动是决定于该运动副所引入的约束情况，所以运动副常根据其所引入约束的数目分类为I级副、II级副、III级副、IV级副及V级副。

在实际机械中，常常有两构件多处接触构成运动副的情况，这时必须注意分析接触各处所引入的约束情况，并根据所引入独立约束的数目来判定两构件构成运动副类别及数目。总之，两构件构成运动副应至少要引入一个约束，也至少要保留一个自由度。至于运动副的表达则应按照规定符号来画。

③**运动链**是两个或两个以上构件通过运动副连接而构成的相对可动系统。如果构成的是相对不可动的系统，则为桁架或结构体，即蜕变成成为一个构件。运动链可以是首末封闭的**闭链**，也可以为未封闭的**开链**，又有平面运动链和空间运动链之分。

④**机构**从其功能来理解是一种用来传动运动和力的可动装置。而从机构组成来看，机构是具有固定构件的运动链。机构中的固定构件称为机架，按给定的已知运动规律独立运动的构件称为**原动件**，而其余活动构件称为**从动件**。从动件的运动规律决定于原动件的运动规律和机构的结构尺寸。

(2) 机构运动简图及其绘制

机构的运动仅与机构中运动副的结构情况（转动副、移动副及高副等）和机构的运动尺寸（由各

运动副的相对位置确定的尺寸)有关,而与构件的外形尺寸等因素无关。因此,根据机构的运动尺寸,按一定的比例尺定出各运动副的位置,再用规定的运动副代表符号及常用机构代表符号和简单线条或几何图形将机构的运动情况表示出来,这种简单的图形称为**机构运动简图**。机构运动简图不仅表示了机构的组成和运动情况,而且可用作机构的运动分析和力分析。

绘制机构简图的方法及步骤如下:

第一步:通过观察和分析机械的实际构造和运动情况,先搞清机械的原动部分和执行部分,然后循着运动传递的路线,查明组成机构的构件情况和运动副的类别、数目及相对位置情况。

第二步:恰当地选择投影面。选择时应以简单、清楚地把机构的运动情况表示出来为原则。一般选机构中的多数构件的运动平面为投影面。

第三步:选取适当的比例尺,根据机构的运动尺寸,先确定出各运动副的位置(如转动副的中心、移动副的导路方位及高副的接触点位置),并画上相应的运动副符号,然后用代表构件的简单线条或几何图形将运动副连接起来,最后标出构件号数字及运动副的代号字母以及原动件的转向箭头,便绘制出了机构运动简图。

(3) 机构具有确定运动的条件

机构的自由度是机构具有确定运动时所需的独立运动参数的数目。为了使机构能按照一定的要求进行运动变换和力的传递,机构应具有确定的运动,其确定运动的条件是机构的原动件的数目应等于机构的自由度数。否则,机构的运动将不确定或没有运动的可能。因此,在分析现有机械或设计新机械时,通常根据这一条件来判断所画的机构结构图是否正确。因为机构只有运动确定时,才能对其进行结构分析、运动分析和力分析等。

(4) 机构的自由度计算

平面机构自由度的计算公式:

$$F = 3n - 2p_L - p_H$$

式中: n ——机构中活动构件的数目;

p_L ——机构中低副的数目;

p_H ——机构中高副的数目。

在计算机构的自由度时,应特别注意处理好以下3种情况:

①**复合铰链**:由两个以上构件在同一处构成的重合转动副,称为复合铰链。由 m 个构件汇集而成的复合铰链应当包含 $(m-1)$ 个转动副。

②**局部自由度**:在一些机构中某些构件所产生的不影响整个机构运动的局部运动的自由度,称为局部自由度。在计算机构自由度时,局部自由度应当舍弃不计。即在计算自由度时,可以将产生局部自由度的构件视为焊成一体,然后进行计算。

③**虚约束**:指在机构中不起独立限制作用的约束。在计算机构自由度时应将虚约束去掉。

(5) 平面机构组成原理及结构分类

我们把不能再拆的最简单的自由度为零的构件组称为基本杆组或阿苏尔杆组,简称杆组。根据机构杆组的条件 $3n - 2p_L - p_H = 0$ 可知,最简单的杆组是由2个构件和3个低副组成的,这种杆组称为Ⅱ级杆组(有5种不同形式);把由4个构件和6个低副组成的基本杆组称为Ⅲ级杆组。机构的组成原理就是任何机构都可以看作是由若干个基本杆组依次连接于原动件和机架而上构成的。

在同一机构中可包含不同级别的基本杆组。我们把最高级别为Ⅱ级的杆组组成的机构称为Ⅱ级机构;把最高级别为Ⅲ级的杆组组成的机构称为Ⅲ级机构;而把由机架和原动件组成的机构称为Ⅰ级机构。机构结构分析的目的就是要确定机构的级别。因此,还应掌握机构的级别的判别方法。

(6) 平面机构中的高副低代

高副低代就是将机构中的高副根据一定的条件虚拟地以低副来代替的方法。其条件为：代替前后机构的自由度完全相同；代替前后机构的瞬时速度和瞬时加速度完全相同。

高副低代的方法为：用一个虚拟两副构件将两高副构件在接触点的曲率中心处相连起来即可。若高副两元素之一为直线时，则因其曲率中心在无穷远处，故所连接这一端的运动副为移动副。

1.2 专题释疑

1.2.1 机构自由度 F 、机构原动件的数目和机构运动的关系

机构的自由度是机构具有确定位置时所必须给定的独立运动参数数目。在机构中引入独立运动参数的方式，通常是使其原动件按给定的某一运动规律，所以，可以认为机构的自由度数也就是机构应当具有的原动件数目。

机构的自由度 F 、机构原动件的数目和机构的运动有着密切的关系。具体如下：

- ①若机构自由度 $F \leq 0$ ，则机构不能动；
- ②若 $F > 0$ 且与原动件数相等，则机构各构件间的相对运动是确定的。因此，机构具有确定运动的条件是：机构的原动件数等于机构的自由度数；
- ③若 $F > 0$ ，而原动件数小于 F ，则构件间的运动是不确定的；
- ④若 $F > 0$ ，而原动件数大于 F ，则构件间不能运动或产生破坏。

1.2.2 机构拆组分析与机构级别的判断

平面机构的拆分步骤如下：

- ①先剔除机构中的虚约束和局部自由度；
- ②若机构存在高副，则应采用高副低代的方法，使其成为低副机构；
- ③根据机构具有确定运动的条件，设定主动件；
- ④从远离主动件处（传动关系最远处）开始拆分杆组（先试拆Ⅱ级杆组，如不能，再试拆Ⅲ级杆组、Ⅳ杆组等）；
- ⑤接着在剩余机构中试拆第2个杆组、第3个杆组等，直到剩下主动件和机架为止；
- ⑥机构级别的判定：在所拆杆组级别中，取最高级杆组的级别为机构的级别。如最高级别的杆组为Ⅲ级杆组，则机构的级别为Ⅲ机构。

在确定机构的级别时是以所拆最惯级别的基本杆组的级别来确定机构的级别，对于同一机构，在取不同构件作为主动体时，可能其拆分结果不同。

1.3 典型例题解析

例1 图1-1 (a)所示为一牛头刨床的初拟设计方案。设计思路是：动力由小齿轮1输入，并推动大齿轮2绕其轴A连续转动，又通过铰接在大齿轮2上B处的滑块3使摆动导杆4往复摆动，并带动滑枕5往复运动以达到刨削的目的。分析其运动是否能实现设计意图，并提出修改方案。

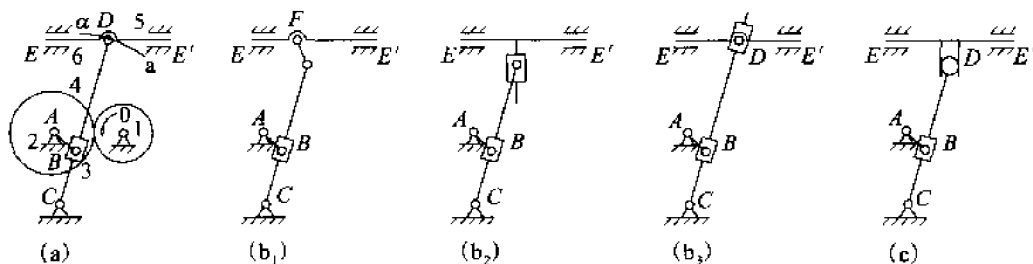


图 1-1

【分析】 在分析现有机械或设计新机械时,通常用计算机构自由度并判断机构是否具有确定运动的方法来分析判断所画出的机构运动简图(或机构示意图)的正确性或能否实现设计意图,以避免出现机构结构上的错误。

【解答】 由图知, $n=5$, $p_L=7$, $p_H=1$, 于是该机构的自由度 $F=3n-2p_L-p_H=3\times 5-2\times 7-1=0$, 计算结果表明此刨床机构不能运动。事实上,此机构也根本不能动。因为构件4与构件5的铰接点D不能同时实现沿EE'方向运动又沿 $\alpha\alpha$ 弧线(即以C为圆心, l_{CD} 为半径的圆弧)运动,故该机构不能实现设计意图。故需在D处增加1个自由度,其改进后的方案如图1-1(b₁~b₃)所示,它们的自由度都是1。此时,机构的原动件(齿轮1)数目等于该机构的自由度数,故该机构具有确定的运动,可实现设计意图。



①增加机构自由度的方法是:在机构的适当位置上添加一个构件和一个低副[见图1-1(b₁~b₃)所示的3种情况],或用一個高副去代替一个低副[见图1-1(c)]。

②从机构运动观点来看,机构的结构组成改进往往有多种方案。如本例除上述在转动副D处的4种改进方案外,还可以在转动副C处通过增加一个自由度的方法来改进,同样也有类似上述4种情况(此时的刨床机构为Ⅲ级机构,请读者自己分析)。至于实际选定哪一种方案为好,还必须考虑其他的因素加以分析比较后决定。

例2 计算图1-2(a)所示机构的自由度,分别以2、8为原动件,确定机构的杆组及机构的级别。

【分析】 机构中虽然滑块4和8运动方向平行,但不是重复结构,所以不存在虚约束。

【解答】 由于此机构既无虚约束又无局部自由度,故机构的自由度为

$$n=7 \quad p_L=10 \quad p_H=0$$

$$F=3n-2p_L-p_H=3\times 7-2\times 10-0=1$$

以2为原动件:如图1-2(b) 7、8构件,5、6构件,3、4构件构成Ⅱ级杆组。

该机构的基本杆组最高级别为Ⅱ级,故以2为原动件机构为Ⅱ级机构。

以8为原动件:如图1-2(c)所示。

2、3、4、5构件组成Ⅲ级杆组,6、7构件组成Ⅱ级杆组,该机构的基本杆组最高级别为Ⅲ级,故以8为原动件时机构为Ⅲ级机构。



由上分析可知,对同一机构,当选用的原动件不同,所得到机构级别也不同。但不论以何杆作为原动件,拆组时都仍需满足拆杆组的原则。

一个具有确定运动的机构，不管给定机构哪一个构件为机架，其运动都是完全确定的。选用的原动件不同，所得到的机构级别也不同。这个性质在机构运动分析时也可以利用。可以通过变换原动件，使高一级的机构变为低一级的机构，这样就可以用分析Ⅱ级机构的方法去分析Ⅲ级机构了。

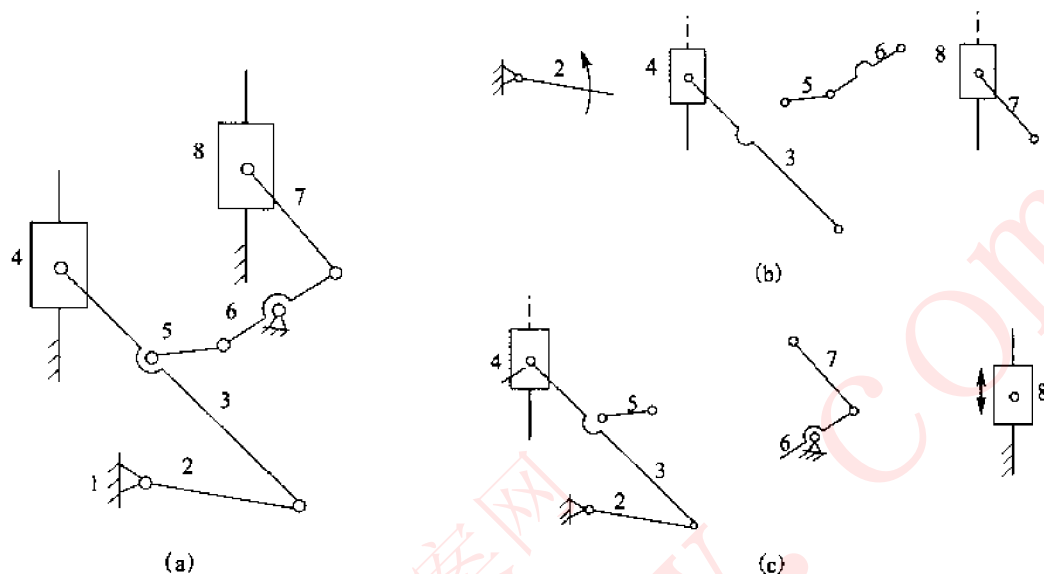


图 1-2

例 3 如图1-3所示，已知 $HG = IJ$ ， H 相互平行； $GL = JK$ ，且相互平行。计算此机构的自由度。（若存在局部自由度、复合铰链、虚约束，请指出。）

【分析】 该机构有重复部分，10 杆为虚约束杆，机构是为了保证主动力由 J 、 G 传入，使冲头平移运动，且 J 、 G 处有均衡作用力。滚子 C 带来一个局部自由度，应除去滚子引入的局部自由度，即将其与 3 固连，计算自由度时应不予考虑； G 为复合铰链。

【解答】 根据图 1-3 计算机构的自由度：

$$n = 8 \quad p_L = 11 \quad p_H = 1$$

$$F = 3n - 2p_L - p_H = 3 \times 8 - 2 \times 11 - 1 = 1$$



提示 机构自由度计算步骤：

- ① 注意复合铰链，刚化局部自由度，剔除虚约束；
- ② 分别确定构件数、低副数和高副数；
- ③ 用平面机构自由度计算公式计算机构的自由度。

不要认为机构中有“多余”构件就有虚约束，其实很多机构中这样所谓的多余构件要么是运动的另一个分支，要么就是对机构的运动范围进行约束。

例 4 如图1-4所示，计算机构自由度，若有复合铰链、局部自由度和虚约束，请指出。

【分析】 A 处的滚子为局部自由度，铰链 B 为复合铰链，根据给定的几何条件，点 C 绕 E 点作半径为 R 的圆周运动，因此 D 处的约束已不起作用，所以滑块 8 及运动副 C 、 D 是虚约束。在计算机构自由度时，除去滑块 8 及其带来的约束 C 、 D ，除去滚子引入的局部自由度并将其与杆 2 焊接固连， B 处为 2 副复合铰链。

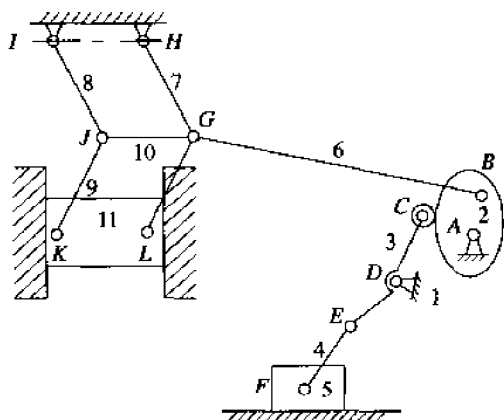


图 1-3

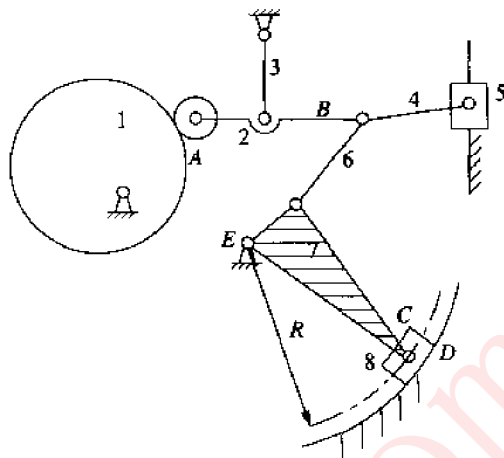


图 1-4

【解答】 计算自由度：

$$n=7 \quad p_L=9 \quad p_H=1$$

$$F=3n-2p_L-p_H=3\times 7-2\times 9-1=2$$



一般出现虚约束时往往具有一定的几何条件，计算时需将带入虚约束的构件及其所带入的约束一同除去。

例 5 如图1-5所示的冲压机高副机构由原动件齿轮1、齿轮2、凸轮3、滚子4、摆杆5、滑块6和执行件7所组成。试求机构的自由度，并用“高副低代法”进行机构的组成分析。

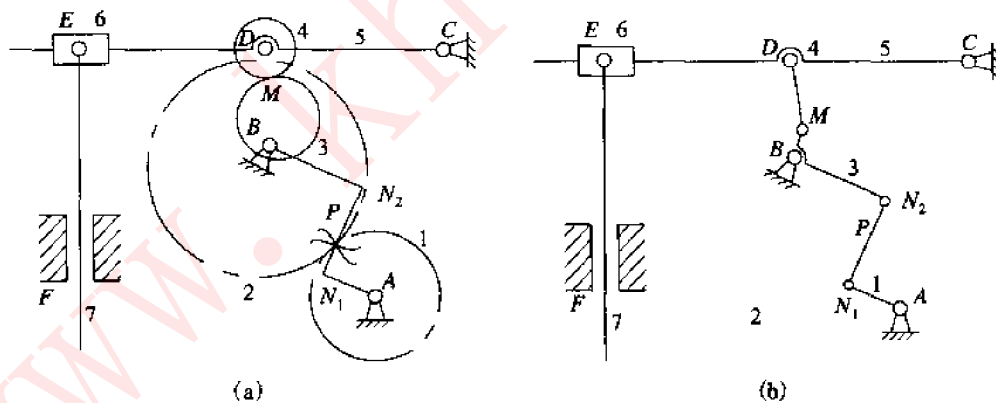


图 1-5

【分析】 此机构原动件齿轮1与机架8、齿轮2（或凸轮3）与机架8、摆杆5与机架8、摆杆5与滚子4、滑块6与冲头7分别在A、B、C和D处组成回转副，冲头7与机架8在F处组成移动副，凸轮3与滚子4、齿轮1与2分别M和P处组成高副。

【解答】 计算此平面机构的自由度。滚子4绕其自身轴线转动为一局部自由度，设想将滚子4与摆杆5固联成一个构件；齿轮2与凸轮3无相对运动，为一个构件，于是

$$F=3\times 5-2\times 6-2=1$$

所以此高副机构只要给定一个原动件即可得到确定的运动。

为了进行机构的组成分析,以低副代替机构中的高副,求出此高副机构瞬时等效的低副机构。

齿轮 1 与 2 组成的高副,可用引入的一个运动件和两个回转副去替代,引入的两个回转副分别放置在两个齿轮齿廓接触点的曲率中心 N_1 与 N_2 上,引入运动件长度 N_1N_2 等于理论啮合线长度。同理,凸轮 3 与滚子 4 组成的高副,也可用引入的一个运动件和两个回转副去替代,引入的两个回转副分别放置在凸轮轮廓接触点的曲率中心 O 上和滚子的圆心 D 上。引入的运动件长度 DO 是两曲率中心的距离,如果凸轮是偏心圆凸轮,这个距离的长度各瞬时是不变的。替代机构如图 1-5 (b) 所示。

在替代机构中, AN_1 为原动件,则其余的构件组的自由度为

$$F = 3n - 3p_5 = 3 \times 6 - 2 \times 9 = 0$$

冲头 EF 和滑块 E 组成一个 II 级组;摆杆 CD 和构件 DM 组成另一个 II 级组;摆杆 BN_2 和连杆 N_1N_2 组成第三个 II 级组。故该机构是由 1 个原动件和 3 个 II 级组组成的 II 级机构。



绘制机构运动简图的步骤:

- ①定机架和主动件,按运动传递路线逐个分清各从动件构件,并依次标上数学编号;
- ②认清相邻两构件所组成的运动副(可根据运动的几何特征和运动特征来判断),并标上字母;
- ③合理选择视图和主动件的位置,使所画的机构运动简图上代表构件的线条尽可能避免重叠和相交现象;
- ④按键及规定的符号绘制机构运动简图;
- ⑤标上与运动有关的参数。

1.4 原教材习题详解^①

1-1 题

【分析】解原教材中习题 1-1~1-4 时,按运动传递路线先分清构件,并标上数字编号,其次是分析各机构构件间所形成的运动副类型,然后再按选定的比例尺在适当的位置上画上运动副符号,并将同一构件上的运动副用简单的线条相连,以代表该构件。

【解答】

$$n = 3, p_L = 4$$

$$F = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$$



本机构是移动导杆机构。

1-2 题

【分析】转盘构件 1 与机架 4 以转动副相连,1、2 以转动副相连,2、3 之间形成移动副,而 3

^① 本节为配合原教材(高教社《机械原理》第 7 版,郑文纬等编)的习题分析与解答,作者花费了不少心血,对绝大部分的习题做了详细的分析与解答,并提出许多有见解的提示。为了减少篇幅,降低成本,这里没有给出原题,仅仅列出原教材上的题号,虽然给同学们带来不便,但还是值得的。另外,对特别简单的习题没有做解答。后续章节同类情况不再注释。

构件以转动副与机架4相连,构成了转动导杆机构。如图1-6所示。

【解答】

$$n=3, p_L=4$$

$$F=3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$$

1-3题

【解答】 如图1-7所示。

$$n=3, p_L=4$$

$$F=3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$$



注意选择恰当的视图,即选与多数构件的运动平面相平行的面为投影面。

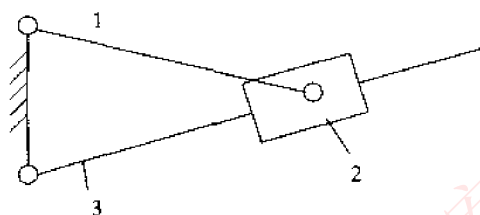


图1-6

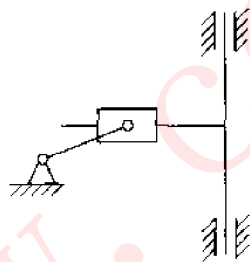


图1-7

1-4题

【解答】

$$n=4, p_L=5, p_H=1$$

$$F=3 \times 4 - 2 \times 5 - 1 = 1$$

1-5题

【解答】

$$n=7, p_L=10$$

$$F=3 \times 7 - 2 \times 10 = 1$$

依次拆下6-7、4-5、2-3等3个Ⅱ级组,故为Ⅱ级机构。

1-6题

【解答】 $n=7, p_L=10$ (4个移动副、6个转动副,其中C处为复合铰链)

$$F=3 \times 7 - 2 \times 10 = 1$$

依次拆下6-7、4-5、2-3等3个Ⅱ级组,故为Ⅱ级机构。



要正确确定复合铰链,按复合铰链的定义,只有当 m 个构件在同一处构成转动副时才形成 $m-1$ 个复合转动副。不能以为若干构件汇交在一起就构成复合铰链。

图1-8(a)中1、2、3在同一处以转动副相连,所以是2副复合铰链。

图1-8(b)中虽有4个构件汇交,但只是1与2间形成转动副,而1与4、2与3分别形成移动副,所以此处不是复合铰链。

尤其注意当含有盘类构件齿轮时容易漏掉,另外机架也是个构件。

1-7题

【分析】 这是一个平面高副机构,要进行拆组分析需先进行高副低代。

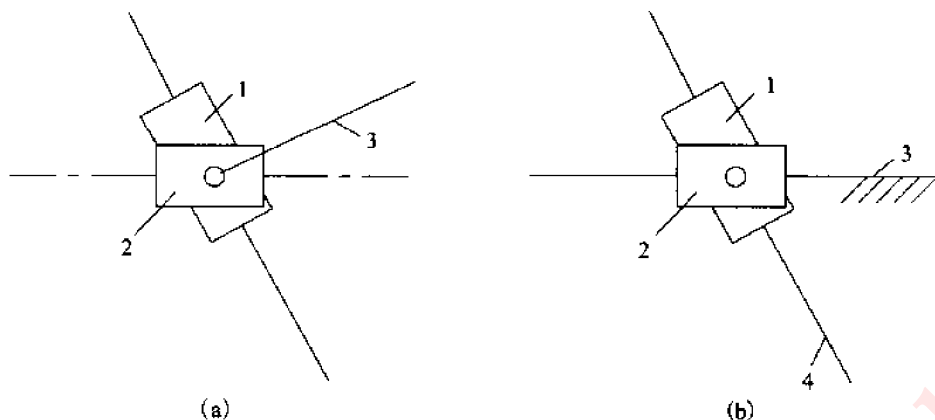


图 1-8

【解答】 计算机构自由度: $n=4, p_L=5, p_H=1$

$$F=3 \times 4 - 2 \times 5 - 1 = 1$$

高副低代, 如图 1-9 所示, 只能拆下一个Ⅲ级组 2-3-4-5, 故为Ⅲ级机构。

1-8 题

【分析】 机构中摆杆与凸轮、滚子形成两处高副, 所以必须进行两次高副低代。

【解答】 去除局部自由度: $n=3, p_L=3, p_H=2$

$$F=3 \times 3 - 2 \times 3 - 2 = 1$$

高副低代, 如图 1-10 所示, 依次拆下 4-5、2-3 两个Ⅱ级杆组, 故为Ⅱ级机构。

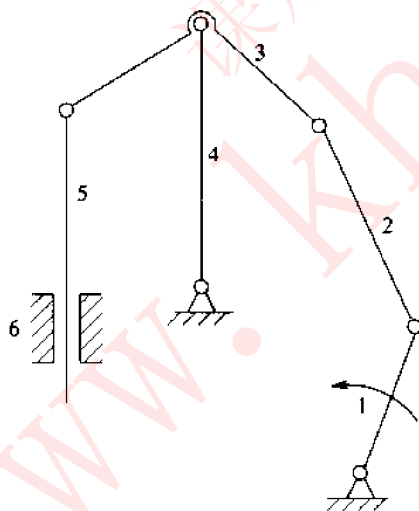


图 1-9

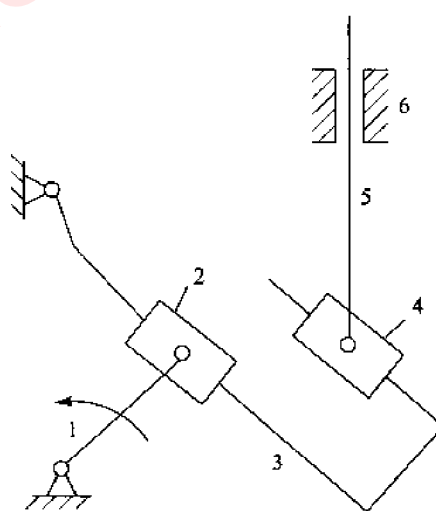


图 1-10

1-9 题

【解答】 去除局部自由度: $n=8, p_L=11, p_H=1$

$$F=3 \times 8 - 2 \times 11 - 1 = 1$$

高副低代, 如图 1-11 所示, 依次拆下 8-9、6-7、4-5、2-3 四个Ⅱ级组, 故为Ⅱ级机构。

1-10 题

【分析】 去除局部自由度, 气阀与机架间的一个移动副为虚约束。

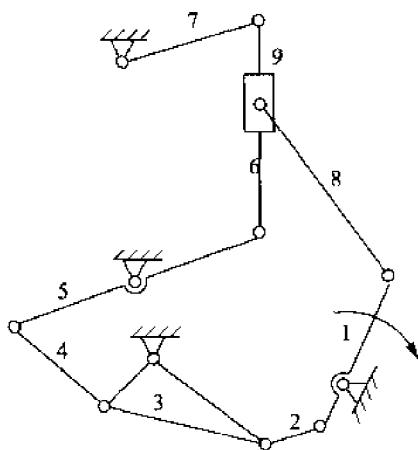


图 1-11

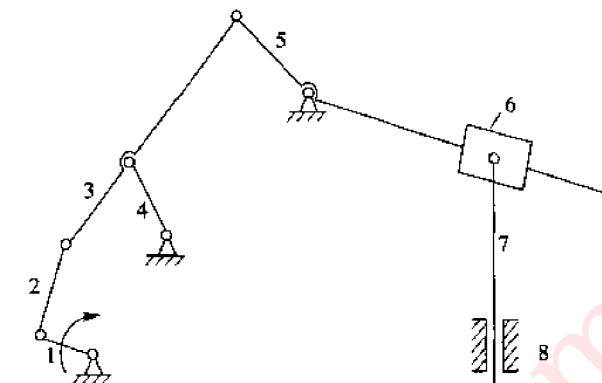


图 1-12

【解答】

$$n=6, p_L=8$$

$$F=3 \times 6 - 2 \times 8 - 1 = 1$$

高副低代, 如图 1-10 所示, 依次拆下 II 级组 6-7 和 III 级组 2-3-4-5, 故为 III 级机构。

1-11 题

【解答】

$$n=6, p_L=8, p_H=1$$

$$F=3 \times 6 - 2 \times 8 - 1 = 1$$

高副低代, 如图 1-13 所示, 依次拆下 6-7、4-5、2-3 三个级组, 故为 II 级机构。

1-12 题

【分析】 本题具有两个高副, 一个是齿轮高副, 另一个是凸轮与滚子构成高副, 滚子处是局部自由度, 将其焊死, 有一处两副复合铰链, 大齿轮和凸轮是同一个构件。

【解答】 去除局部自由度:

$$n=9, p_L=12, p_H=2$$

$$F=3 \times 9 - 2 \times 12 - 2 = 1$$

高副低代, 如图 1-14 所示, 依次拆下 10-11、8-9、6-7、4-5、2-3 五个 II 级组, 故为 II 级机构。

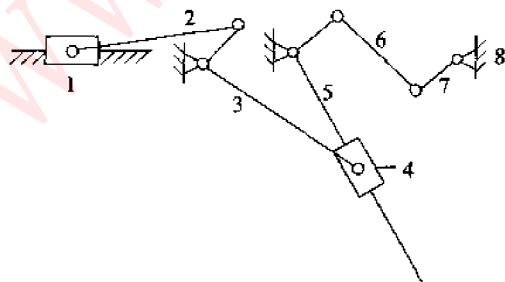


图 1-13

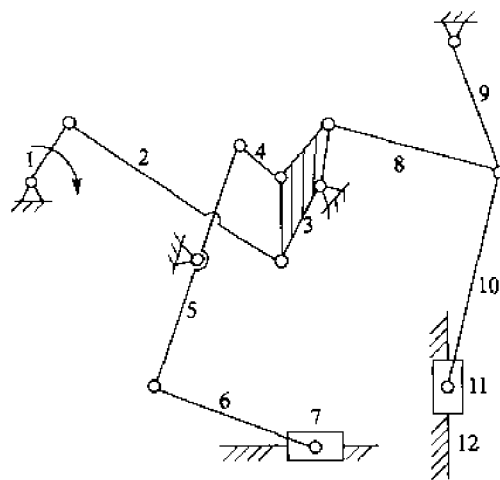


图 1-14

1-13 题

【分析】 当底座及驾驶室不动时，为一平面机构，上油缸活塞杆右端为复合铰链。

【解答】

$$n = 11, p_L = 15$$

$$F = 3 \times 11 - 2 \times 15 = 3$$



在对行走运动类的实际机构分析时，需特别注意机构的运动参考系即机架的选择问题。如果所选择机构的机架不同，则机构的类型也会有所不同，其自由度计算的繁简程度就不同。如本题若取挖掘机的履带为机架，此时该机构为空间开式运动链，其自由度为 4，其中一个自由度为本身的转动。

1-14 题

【分析】 这是一个差动轮系，构件 2 和 2' 有一处为重复结构，故存在一个虚约束。

【解答】

$$n = 4, p_L = 4, p_H = 2$$

$$F = 3 \times 4 - 2 \times 4 - 2 = 2$$



机架 5 与构件 1 和 4 形成的两个转动副，虽然轴线重合，但因为不是与同一个构件形成的，所以它们之间不存在虚约束。

1-15 题

【分析】 本题给定了几何条件，注意分析是否有虚约束。

去掉滑块 C，如图 1-15 所示，连接 C、A、D 得 $\triangle ACD$ ，因已知 $AB = BC = BD$ ，故得

$$\angle CAB = \angle ACB = \angle 1$$

$$\angle BAD = \angle BDA = \angle 2$$

$\triangle CAD$ 中 3 个内角之和

$$\angle C + \angle A + \angle D = \angle 1 + (\angle 1 + \angle 2) + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\text{所以 } \angle 1 + \angle 2 = \angle A = 90^\circ$$

它说明没有滑块 4 时，C 点仍沿 y 轴运动，故滑块 4 产生虚约束，应除去不计。

【解答】 由图 1-15 知：

$$n = 3, p_L = 4$$

$$F = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$$



本机构之所以利用滑块 4 所产生的虚约束，是因为在曲柄滑块机构 ABD 运动时，若 $l_{AB} = l_{BD}$ ，则当 $\angle 2 = 90^\circ$ 时滑块运动方向不定，因此可附加设置一定几何形状的挡块或借助外力强制滑块有确定的走向。于是得到题中所示的机构，即利用虚约束条件 ($l_{AB} = l_{BD} = l_{AC}$) 构造出运动副 C，再利用 C 的支点作用，强制使滑块继续前移。

1-16 题

【分析】 脱开铰链 C，观察轮 2 上 C 点的运动，连接 OC 及 CB，因 B 为轮 2 绝对瞬心，故 $V_C \perp BC$ ，又半圆内， $\angle OCB = 90^\circ$ ， $OC \perp BC$ ，由此可知 $V_C \parallel OC$ ，C 点将始终沿 OC 方向作直线运动，该处用转动副相联将因轨迹重合而产生一个虚约束。为了除去这个虚约束，可以将 C 点铰链改为高副，如图 1-16 所示。

【解答】

$$n = 3, p_L = 3, p_H = 2$$

$$F = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 2 = 1$$

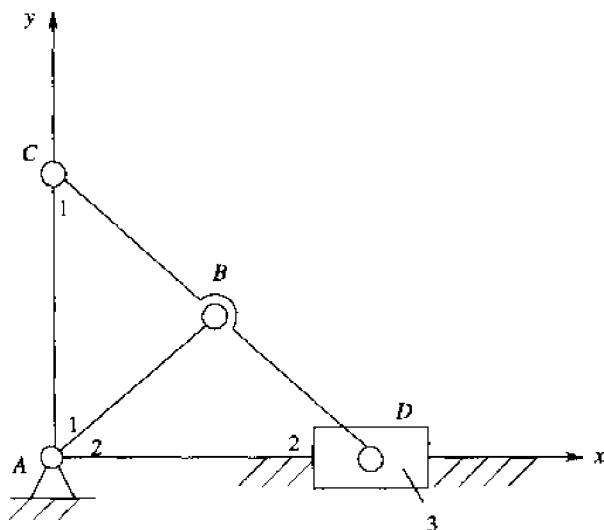


图 1-15

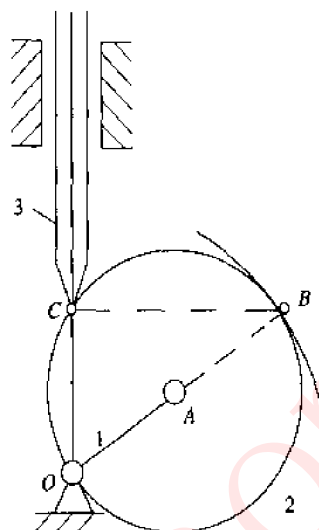


图 1-16

也可用解析的方法进行证明。分析此机构可知,当构件绕固定轴线 O 转动时,由于齿轮的互相啮合,迫使行星轮 2 沿固定内齿轮 4 的节圆作纯滚动。现以 O 为坐标原点,以 OC 为 y 轴作直角坐标系,由解析几何可知,当一滚圆在固定基圆(即内齿轮节圆)内作纯滚动时,滚圆上任一点 C 的轨迹为一内摆线,其参数方程为:

$$\begin{cases} x = (r_4 - r_2) \sin\left(\frac{r_2}{r_4}\theta\right) - r_2 \sin\left(\theta - \frac{r_2}{r_4}\theta\right) \\ y = (r_4 - r_2) \cos\left(\frac{r_2}{r_4}\theta\right) - r_2 \cos\left(\theta - \frac{r_2}{r_4}\theta\right) \end{cases}$$

现以 $r_4 = 2r_2$ 代入,则滚圆上 C 点的轨迹为:

$$\begin{cases} x = r_2 \sin\left(\frac{r_2}{2}\theta\right) - r_2 \sin\frac{\theta}{2} = 0 \\ y = r_2 \cos\frac{\theta}{2} + r_2 \cos\frac{\theta}{2} = 2r_2 \cos\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

这是坐标轴 Oy 的方程式。这说明 C 点的运动轨迹为过 O 点的直线 Oy ,或者说,机构中构件 3 与行星轮 2 的连接点 C 的运动轨迹与内啮合齿轮中行星轮上 C 点的轨迹重合。因此,构件 3 与行星轮 2 所组成的约束是虚约束。这里所给定的几何条件是非常重要的。

1.5 原教材思考题详解^①

思 1-1 题

【解析】 不能。在理论上,因为其自由度 $F = 3n - 2p_L - p_H = 3 \times 2 - 2 \times 3 - 0 = 0$ 。直观上,摆

^① 本节为配套教材(高教社《机械原理》第7版,郑文纬等编)上的思考题解析。对非常简单的思考题未做解析。同样,此处也仅列出思考题的题号,目的是减少篇幅,降低成本。后续章节同类情况不再注释。

杆上任一点要求作圆周运动,但是和活塞相铰接的点在活塞的带动下作直线运动,所以机构势必被卡死而不能运动。

思 1-2 题

【解析】 不能。在理论上,因为其自由度 $F = 3n - 2p_L - p_H = 3 \times 3 - 2 \times 4 - 1 = 0$ 。直观上,摆杆上任一点要求作圆周运动,冲杆与摆杆以铰链相连,而冲杆在机架的约束下进行上下的直线运动,所以机构势必被卡死而不能运动。

思 1-3 题

【解析】 此种组合形式的杆组公共约束与一般平面机构的公共约束不同,不能用一般的方法来计算杆组。

1.6 自测试卷及答案^①

1.6.1 自测试卷

(1) 填空

- 1) 一个平面运动副的最多提供_____个约束,最少提供_____个约束。(2002 西北工业大学)
- 2) 机构具有确定运动的条件是_____。
- 3) 机构中相对静止的构件称为_____;按给定运动规律而独立运动的构件为_____;
其余运动构件称为_____。(1999 华南理工大学)
- 4) 局部自由度是指_____;虚约束是指_____。
- 5) 在平面机构中若引入一个高副将带入_____个约束;而引入一个低副将带入_____个约束。
约束数与自由度的关系是_____。(1997 上海交通大学)
- 6) 根据机构的组成原理,任何机构都看成是由_____、_____和_____组成的。
(2000 上海交通大学)
- 7) 两构件通过面接触而构成的运动副为_____,它引入_____个约束;通过点、线接触而构成的运动副称为_____,它引入_____个约束。
(2000 西安交通大学)

(2) 问答

- 1) 计算机构自由度时应注意哪些事项?
- 2) 对机构进行组成和结构分析的目的是什么?它们分别用于什么场合?
- 3) 如何确定机构的级别?影响机构级别变化的因素是什么?为什么?
- 4) 既然虚约束对机构的运动实际上不起约束作用,那么在实际机械中为什么又常常存在虚约束?
- (3) 试计算图 1-17 所示的齿轮连杆组合机构的自由度。若机构中有复合铰链、局部自由度和虚约束,应明确指出。
(2003 西北工业大学)
- (4) 计算图 1-18 所示的机构的自由度。若机构中有复合铰链、局部自由度和虚约束,直接在试题纸上标出。
(2000 哈尔滨工业大学)
- (5) 图 1-19 所示的平面机构,标有运动方向的构件为主动件,现要求:
 - 1) 在图上指出是否存在复合铰链、局部自由度和虚约束;

^① 本节选用了大量历年各重点高校的考研真题,以求在达到自我检测的同时,能让同学们了解与掌握各高校对本门课程的要求,对大家应考会有所帮助,这也是本书的特色之一。

1.6.2 自测试卷答案

(1) 填空

1) 2; 1

2) 自由度大于或等于 1 且机构原动件数等于机构自由度数

3) 机架; 原动件; 从动件

4) 与输出件运动无关的自由度; 不起独立限制作用的约束

5) 1; 2; 两者之和为 3

6) 机架; 原动件; 从动件

7) 低副; 2; 高副; 1

(2) 问答 (略)

(3) 无局部自由度。C、D 处为复合铰链, 齿轮 4' 引入的约束为虚约束, 且 $n=6$, $p_L=7$, $p_H=3$, 则 $F=3n-2p_L-p_H=3\times 6-2\times 7-3=1$ 。

(4) $F=3n-2p_L-p_H=3\times 8-2\times 11-1=1$

B 处为局部自由度, E 处是复合铰链, LK 杆及其两端的转动副为虚约束, H 与 I 有一处移动副为虚约束。

(5) 对图 1-19 (a):

1) 滚子处有局部自由度, 且滚子的 2 处高副有 1 处为虚约束。

2) 机构中有 6 个活动构件, 低副数 $p_L=8$, 高副数 $p_H=1$ 。

自由度为

$$F=3n-2p_L-p_H=3\times 6-2\times 8-1=1$$

3) 高副低代如图 1-20 (a) 所示。

4) 该机构由 1 个 II 级杆组、1 个 III 级杆组、机架、原动件组成, 该机构为 III 级机构。

对图 1-19 (b):

1) C、D 之中存有 1 处高副是虚约束, E、F 之中有 1 处移动副是虚约束。

2) 该机构中有 4 个活动构件, 5 个低副, 1 个高副。

自由度为

$$F=3n-2p_L-p_H=3\times 4-2\times 5-1=1$$

3) 高副低代如图 1-20 (b) 所示。

4) 该机构由两个 II 级杆组和机架、原动件组成, 该机构是 II 级机构。

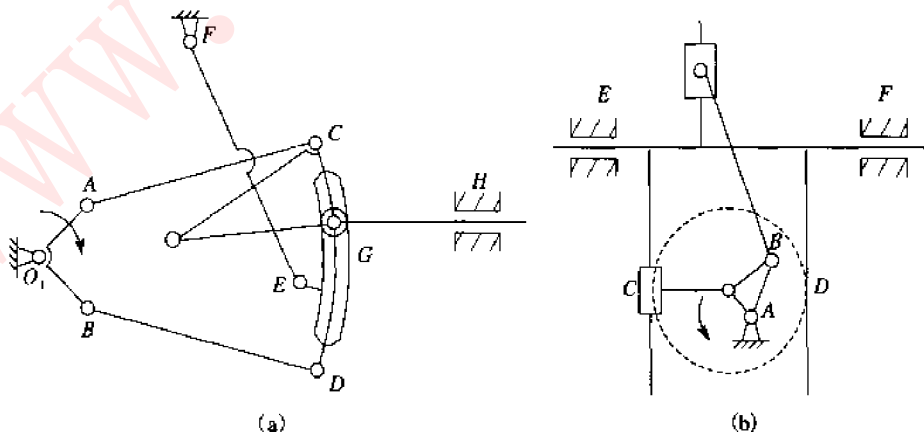


图 1-20

第2章

平面机构的运动分析

本章考点

- 速度瞬心的概念和三心定理的正确运用
- 用速度瞬心法作机构的速度分析
- 用矢量方程图解法作机构的运动分析以及速度影像和加速度影像原理的应用
- 用综合法对复杂机构进行速度分析
- 用解析法作机构的运动分析。关键是建立机构位置矢量封闭方程式

本章难点

- 对具有共同转动且具有相对移动的构件重合点间的运动参数的求解
- 重合点速度的选取
- 含有哥氏加速度时机构的加速度图解分析

2.1 考核知识点

本章主要解决的问题是已知平面机构的运动尺寸、机构的位置和原动件的运动规律,求解其余活动构件上各点的运动规律(位置、轨迹、位移、速度、加速度、角位移、角速度、角加速度)问题。

2.1.1 基本要求

- 正确理解速度瞬心的概念,并能运用三心定理确定一般平面机构各瞬心的位置;
- 能用速度瞬心法对一般高、低副机构进行速度分析;
- 搞清速度影像及加速度影像的原理和速度多边形及加速度多边形的特性;用矢量方程图解法或解析法求机构的速度和加速度;
- 用解析法作机构的运动分析。

2.1.2 内容提要 with 考点提示

(1) 速度瞬心的概念及确定方法

速度瞬心:就是作相对运动的两刚体的瞬时相对速度为零、瞬时绝对速度相等的重合点,也称瞬时回转中心。瞬心分为绝对瞬心和相对瞬心,凡与机架组成的瞬心为绝对瞬心,否则为相对瞬心。

瞬心的数目:
$$N = \frac{k(k-1)}{2}$$

式中: N ——瞬心数;

k ——构件数。

确定速度瞬心的方法:

①两构件之间组成运动副时,可用观察法确定。

若两构件组成转动副,则转动副的中心就是其瞬心;

若两构件组成移动副,则其瞬心位于导路的垂直方向无穷远处;

若两构件组成纯滚动的高副,因其接触点的相对速度为零,所以其接触点就是其瞬心;

若两构件组成高副,其瞬心位于过高副接触点的公法线上。

②两构件不直接组成运动副时,可借助于三心定理来确定速度瞬心的位置。

三心定理:作平面运动的3个构件之间共有3个瞬心,而它们必位于同一直线上。

③用速度瞬心的定义确定速度瞬心的位置。

(2) 相对运动图解法求机构速度和加速度

其理论基础是理论力学课程中运动学部分,即刚体平面运动合成原理和点的复合运动原理。根据点的绝对运动是牵连运动与相对运动的合成,逐个建立运动矢量方程,然后联立求解。

具体步骤为:从主动件开始,由近及远,由同及非,逐个进行。也就是说,从已知运动的构件开始,按运动传递路线,先分析同一构件上两点之间的运动关系,再分析不同汇交构件瞬时重合点之间的运动关系,然后建立运动矢量方程式。在求解机构运动时,分析“点”尽可能取在转动副中心,以便于建立运动矢量方程。

当某一构件两点的速度或加速度已知时,可通过“速度影像原理”和“加速度影像原理”求解该构件上另一点的速度或加速度。利用影像求解时必须注意以下两点:第一,每一个构件都与其速度图、加速度图存在影像关系,但整个机构与速度图和加速度图却无影像关系,即不同构件的点之间不

存在影像关系,也就是影像原理只能用于同一构件上。第二,同一构件的速度图和加速度图上,各点的角标字母的顺序必须与构件上对应点的角标字母的顺序一致。

在对Ⅲ级机构进行运动分析时,往往要借助于特殊点(阿苏尔点)对机构速度和加速度进行分析。特殊点应位于Ⅲ级杆组中两副构件的两个运动副中心连线上,且应取在三副构件上。即可任选两个两副构件,分别作该两构件的两个运动副中心连线,其交点就是特殊点,故一个Ⅲ级杆组共有3个特殊点。

(3) 解析法求解机构速度和加速度

用解析法作平面机构运动分析的关键是建立机构位置矢量封闭方程式。常用的解析法有矢量法、复数矢量法及矩阵法等。矢量法和复数矢量法都是先写出机构的封闭方程式,然后将它对时间求一次和二次导数即得速度及加速度矢量方程式,最后用矢量计算法或复数矢量运算法求出所需的运动参数。矢量法和复数矢量法当用于求解Ⅱ级机构的运动问题时,可直接求出所需的运动参数或表达式;当用于求解Ⅲ级机构的运动问题时,还需要借助于数值逼近的方法才能求出所需参数的结果。矩阵法是根据机构的封闭矢量关系式,写出它们的两坐标投影方程式,即得机构位置方程式,再将它们对时间求一次和二次导数即得机构的速度和加速度方程式,并写成矩阵形式。然后可利用通用程序上机进行求解。通常其位置方程为非线性方程组,故需用数值逼近方法进行求解;而其速度及加速度方程均为线性方程组,故可用高斯消元法进行求解。因此,矩阵法是适合于计算机求解的一般解析法。

2.2 专题释疑

2.2.1 用机构瞬心求解机构的运动速度

对直接组成运动副的相邻构件,可用观察法确定速度瞬心的位置,对未构成运动副的两构件间的瞬心,可由三心定理来确定。在确定瞬心时,可借助于辅助多边形,以免遗漏瞬心;在进行速度分析时,可利用瞬心点求解待求构件的速度。

辅助多边形法求瞬心:用数字编号代表相应构件,两构件间的连线表示它们之间的瞬心,已求出的瞬心用实线表示,将待求的瞬心用虚线表示,如图2-1。

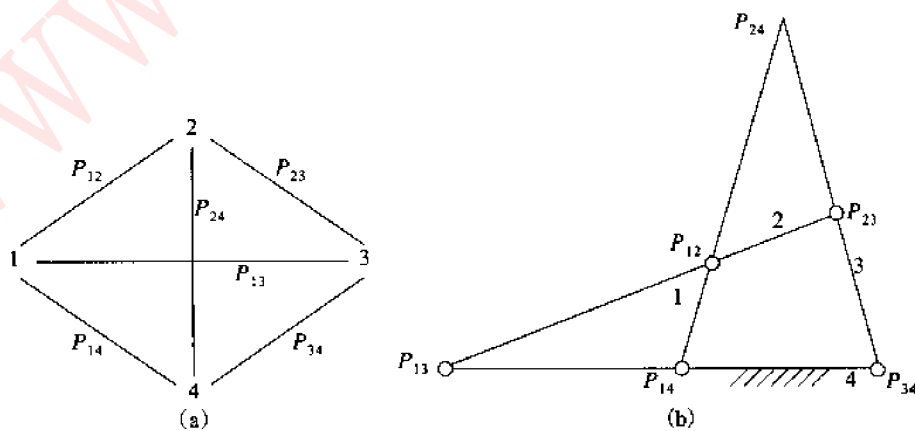


图 2-1

如铰链四杆机构, 共有 6 个瞬心, 可用观察法确定出 4 个瞬心 P_{14} 、 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} 。根据三心定理, 瞬心 P_{13} 与 P_{14} 、 P_{34} 在同一条直线上, 也与 P_{12} 、 P_{23} 在同一条直线上, 即势必在 P_{14} 、 P_{34} 连线与 P_{12} 、 P_{23} 连线的交点处, 体现在瞬心多边形上时, P_{13} 、 P_{14} 、 P_{34} 构成一个 $\triangle 123$ (表示此 3 个瞬心在同一条直线上), P_{13} 、 P_{12} 、 P_{24} 构成另一个 $\triangle 134$ (表示此 3 个瞬心也在同一条直线上), P_{13} 是这两个三角形的公共边。由此在机构图中找出 P_{13} 的位置, 同理 P_{24} 是 $\triangle 124$ 和 $\triangle 234$ 的公共边, 表示 P_{24} 在 P_{12} 、 P_{14} 的连线上, 也应在 P_{23} 、 P_{34} 的连线上, 如图 2-1 所示。

2.2.2 构件上重合点之间的速度和加速度分析

对于具有共同转动且有相对移动的两构件, 要利用理论力学中关于点的复合运动关系, 选取形成移动副时作平面一般运动的构件上的点作为两构件的重合点, 用矢量方程图解法或解析法对 II 级机构进行速度和加速度分析。求解时应特别注意相对速度、相对加速度以及法向加速度的指向, 并正确地写出机构的运动关系式。

对于哥氏加速度, 应明确在何种情况下有哥氏加速度, 其大小如何计算, 方向如何确定。特别是方向, 要能根据相对速度的角标和构件回转方向作出正确判断。显然, 如果机构中存在具有共同转动 ω 的两构件组成的移动副时, 机构中便存在哥氏加速度; 如果两构件只有相对移动而无共同转动时, 其重合点间速度关系不变, 而加速度关系中无哥氏加速度。

特别注意, 哥氏加速度仅产生于两构件间瞬时重合点之间的加速度分析中。在分析两构件间两瞬时重合点之间的加速度关系时, 一定要明确哪一个构件为动坐标构件, 哪个构件上的点为动点, 即明确动点和动系。哥氏加速度的大小为两倍的动坐标构件的角速度与动点相对动系的相对速度的乘积, 其方向为动点相对动系的相对速度方向顺动坐标构件的角速度方向转过 90° 的方向。需要指出的是: 当取作动坐标构件的加速度为零或动点相对动系的相对速度为零时, 哥氏加速度也为零, 即不存在哥氏加速度。

2.2.3 特殊点法求解 III 级机构的速度和加速度

所谓特殊点, 就是组成 III 级机构的 III 杆组中基础构件上的一个点, 它与任意两个悬杆轴线的交点重合, 即可任选两个两副构件, 分别作该两构件的两个运动副中心连线, 其交点就是特殊点。因此, III 级组基础构件上共有 3 个特殊点: S_{24} 、 S_{45} 、 S_{52} , 且应取在三副构件上, 如图 2-2。如果 III 级杆组的悬杆具有一个回转副和一个移动副, 那么特殊点 S 位于通过回转副中心且垂直于移动副轴线的直线上。选特殊点 S_{24} , 分析机构速度和加速度, 即有

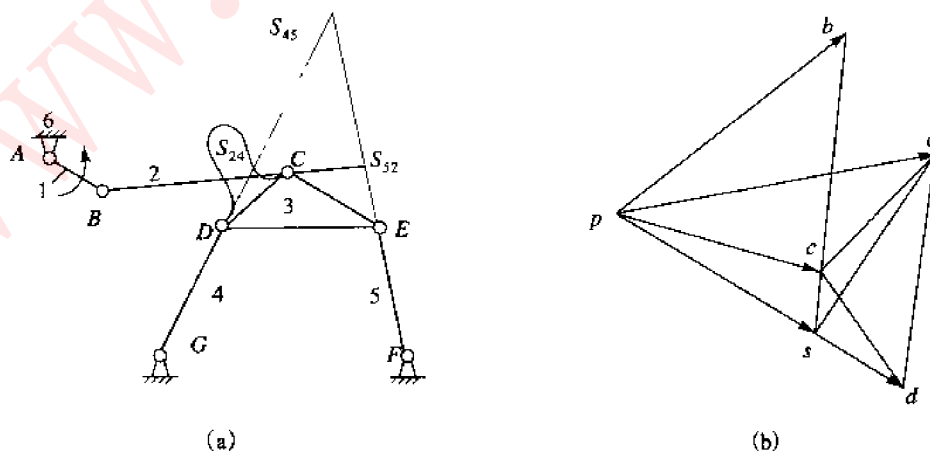


图 2-2

$$v_{S24} = v_C + v_{S24C} = v_B + v_{CB} + v_{S24C}$$

$$v_{S24} = v_D + v_{S24D}$$

联立上面两个方程,可解出特殊点 S_{24} 的速度

$$v_B + (v_{CB} + v_{S24C}) = (v_D + v_{S24D})$$

特殊点的速度 v_{S24} 求出后,其他各点的速度不难求出。

同理可以求出特殊点 S_{24} 的加速度,即

$$\begin{aligned} a_{S24} &= a_C + a_{S24C}^n + a_{S24C}^t = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t + a_{S24C}^n + a_{S24C}^t \\ &= a_B + (a_{CB}^n + a_{S24C}^n) + (a_{CB}^t + a_{S24C}^t) \end{aligned}$$

又有

$$a_{S24} = a_C + a_{S24D}^n + a_{S24D}^t = (a_{SD}^n + a_{S24D}^n) + (a_{SD}^t + a_{S24D}^t)$$

两个方程联立可以解出

$$a_B + (a_{CB}^n + a_{S24C}^n) + (a_{CB}^t + a_{S24C}^t) = (a_{SD}^n + a_{S24D}^n) + (a_{SD}^t + a_{S24D}^t)$$

特殊点的加速度 a_{S24} 求出后,其他各点的加速度不难求出。

2.3 典型例题分析

例 1 如图2-3所示,已知机构的尺寸和构件1上 J 点的速度 v_J ,试用瞬心法求图示位置各构件间的瞬心位置, K 点速度和 L 点速度大小及方向。

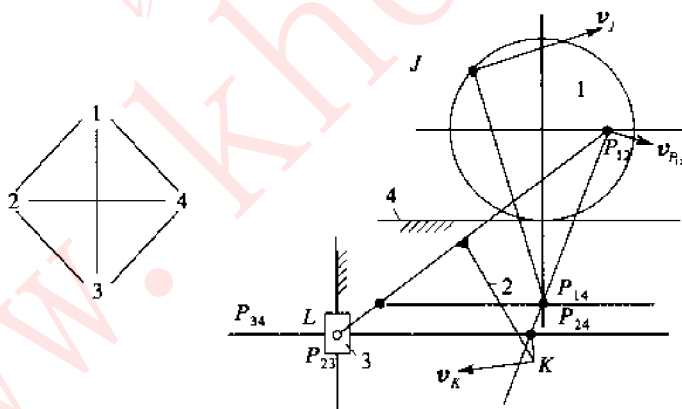


图 2-3

【分析】 此机构是含有高副的平面机构,用瞬心法求解速度比较方便。构件1和4组成高副,在确定组成高副的两构件的瞬心位置时,应分析在接触点处是否为纯滚动。若是纯滚动,则接触点即为其瞬心;若不是纯滚动,则瞬心在过接触点的公法线上。有时会注明有无相对滑动速度,由此可判断其瞬心属于哪种情况。而本题所组成的高副没有注明是否有相对滑动,但是告知了构件1上 J 点的速度,而据瞬心的定义可知瞬心 P_{14} 应在与速度 v_J 垂直的直线上,因此可确定构件1和4的绝对瞬心。应用三心定理及利用瞬心多边形,可以方便准确地确定其余瞬心。本题是综合利用各种速度瞬心求法求解速度瞬心及速度的典型例题。

【解答】 确定瞬心数目：
$$N = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{4 \times (4-1)}{2} = 6$$

用观察法确定出 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} ，在瞬心多边形中将 1-2、2-3 和 3-4 用实线连接，分别表示瞬心 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} ；根据瞬心定义 P_{14} 应在 v_j 垂线上，而 1、4 组成高副，所以瞬心 P_{14} 应同时在构件 1、4 接触点的法线上，由此可确定 P_{14} 的位置；根据三心定理，利用瞬心多边形确定出 P_{13} 、 P_{24} 。

求构件 2 上一点 K 的速度，可利用绝对瞬心 P_{24} 是构件 2 的瞬时转动中心来求解。

$$\text{因为 } v_j = \omega_1 l_{JP_1}, \text{ 所以 } \omega_1 = \frac{v_j}{l_{JP_1}} \quad (\text{顺时针})$$

$$v_{P_{12}} = \omega_1 l_{P_{14}P_{12}} = \omega_2 l_{P_{24}P_{12}}, \text{ 所以 } \omega_2 = \omega_1 l_{P_{14}P_{12}} / l_{P_{24}P_{12}} \quad (\text{顺时针})$$

$$v_K = \omega_2 l_{P_{24}K}$$

$$v_L = v_{P_{13}} = \omega_1 l_{P_{14}P_{13}} \quad (\text{方向} \uparrow)$$



利用速度瞬心法求速度的步骤：

- ① 确定已知运动构件与待求运动构件之间以及两者与中介构件（一般取机架为中介构件）之间的 3 个速度瞬心；
- ② 根据构件瞬心点速度相等原则，列出已知运动构件与待求运动构件之间的速度方程；
- ③ 求解速度方程。

例 2 在图 2-4 (a) 所示机构中，已知各杆长度和构件 1 的角速度 ω_1 （常数）， $l_{BC} = 2l_{CD}$ 。试用相对运动图解法求图示位置构件 2 的角速度 ω_2 和角加速度 α_2 及构件 5 的速度 v_5 和加速度 a_5 。

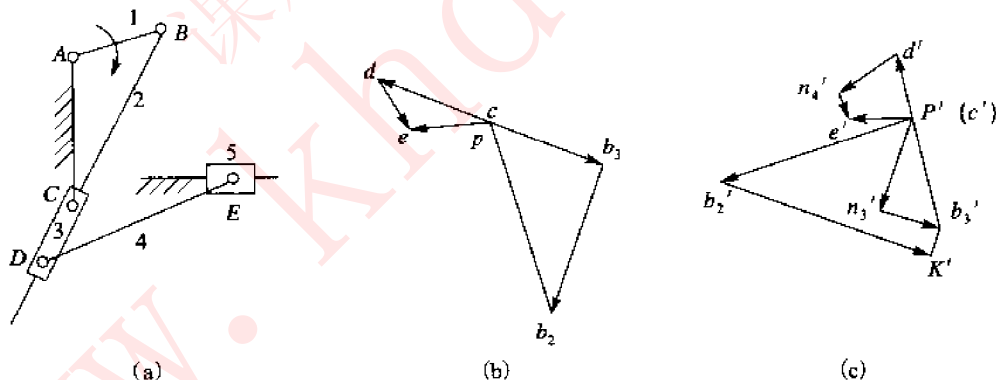


图 2-4

【分析】 此题是用相对运动图解法进行机构运动分析的一个典型题。灵活应用扩大构件法可简化解题过程。

此题有两种分析方法。一是构件 2 和 3 组成移动副，把点 C 作为重合点，由于点 C 在 3 构件上的点 C_3 的速度为 0，所以 $v_{C2} = v_{C2C3}$ 。再根据点 B 和点 C_2 同为构件 2 上的点可求出 v_{C2} ，然后求出 v_{D2} 、 v_{D3} （ v_{D2} ）、 v_{E5} 。加速度和角加速度的求解思路与上述相仿。二是把构件 3 扩大至点 B ，使点 B 成为构件 2 和 3 的重合点。求出点 B_3 的速度或加速度后用影像法求点 D 的速度或加速度，再由点 D 的速度或加速度求出 E 的速度或加速度。第二种方法较简洁，下面用第二种方法求解。

【解答】

①速度分析。扩大杆3至点B,则B可看成构件2和3的重合点,于是有

$$\begin{array}{lcl} v_{B3} & = & v_{B2} + v_{B3B2} \\ \text{大小} & ? & \omega_1 l_{AB} \quad ? \\ \text{方向} & \perp BC & \perp AB \quad // BC \end{array}$$

由于上式中只有两个未知数,故可用图解法求解。选 μ_v 作图2-4(b)求得 $v_{B3} = \mu_v \cdot \overline{pb_3}$,用影像法求得 $v_D = \mu_v \cdot \overline{pd_3}$ 。又由同一构件上两点间速度关系可得

$$\begin{array}{lcl} v_E & = & v_D + v_{ED} \\ \text{大小} & ? & \text{已知} \quad ? \\ \text{方向} & \text{水平} & \perp DC \quad \perp DE \end{array}$$

继续作出速度图,如图2-4(b)所示。于是有角速度

$$\begin{aligned} \omega_2 = \omega_3 &= v_{B3}/l_{BC} = \overline{pb_3}\mu_v \quad (\text{顺时针}) \\ \omega_4 &= v_{ED}/l_{ED} = \overline{de}\mu_v/l_{ED} \quad (\text{顺时针}) \end{aligned}$$

②加速度分析。

$$\begin{array}{lcl} a_{B3}^n + a_{B3}^t & = & a_{B2} + a_{B3B2}^k + a_{B3B2}^r \\ \text{大小} & \text{已知} \quad ? & \text{已知} \quad \text{已知} \quad ? \\ \text{方向} & B \rightarrow C & \perp BC \quad B \rightarrow A \quad \perp BC \quad // BC \end{array}$$

选 μ_a 作图2-4(c)。其中 $a_{B2} = \omega_1^2 l_{AB}$; $a_{B3}^n = \omega_3^2 l_{BC}$; $a_{B3B2}^k = 2\omega_3 v_{B3B2}$,其方向为由 v_{B3B2} 的矢量沿 ω_3 的方向转过 90° 。

由加速度影像法求出 a_D ,即 $\overline{p'd'}\mu_a$ 。根据同一构件上加速度的关系,有

$$\begin{array}{lcl} a_E & = & a_D + a_{ED}^n + a_{ED}^t \\ \text{大小} & ? & \text{已知} \quad \omega_4^2 l_{ED} \quad ? \\ \text{方向} & \text{水平} & \text{已知} \quad E \rightarrow D \quad \perp ED \end{array}$$

图2-4(c)所示为加速度图。角加速度为

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 &= a_{B3}^t/l_{BC} = \overline{n'_3b'_3}/l_{BC} \quad (\text{顺时针}) \\ \alpha_5 &= a_E/\overline{p'e'}\mu_a \quad (\text{方向如图2-4(c)所示}) \end{aligned}$$



应用速度及加速度影像法时要注意其条件,即同一构件上的点才存在影像关系,并注意在速度图及加速度图中字母的顺序与机构中保持一致。同时应特别注意加速度分析中加速度方向的判断。

例3 图2-5所示机构中,已知各构件的尺寸及原动件的角速度 ω_1 (为常数)。试求机构在图示位置时的 ω_3 及 α_3 (比例尺任选)。

【分析】 此题是对具有同一转动的组成移动副两构件上重合点间运动的求解,这个问题有以下3种解法:

方法一:扩大构件3[见图2-5(a)细线],并取B为重合点(B_2 及 B_3)。

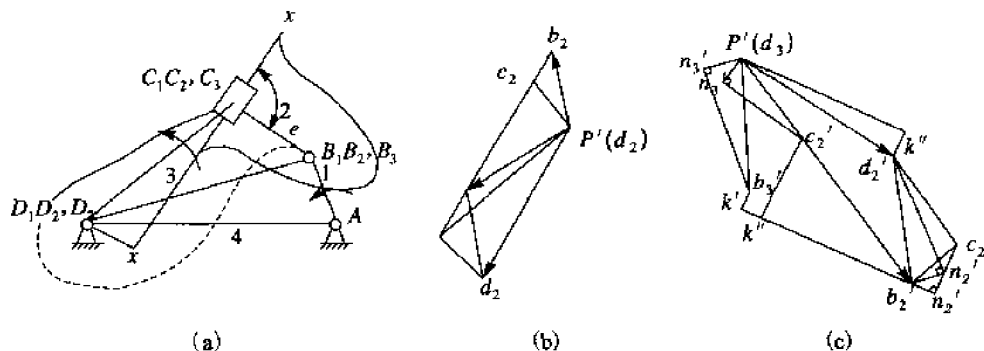


图 2-5

①速度分析。

根据

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{v}_{B3} & = & \boldsymbol{v}_{B2} & + & \boldsymbol{v}_{B3} \boldsymbol{v}_{B2} \\ \perp BD & & \perp AB & & // CE \\ ? & & \omega_1 / l_{AB} & & ? \end{array}$$

作速度图 pb_2b_3p , 如图 2-5 (b) 所示。由图可得

$$\omega_3 = \boldsymbol{v}_{B3} / l_{BD} = \mu_v \overline{PB_3} / (\mu_1 \overline{BD}) \quad (\text{逆时针})$$

②加速度分析。

根据

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{a}_{B3}^n & + & \boldsymbol{a}_{B3}^t & = & \boldsymbol{a}_{B2}^n & + & \boldsymbol{a}_{B3B2}^k + \boldsymbol{a}_{B3B2}^r \\ B \rightarrow D & & \perp BD & & B \rightarrow A & & B \rightarrow C \quad // xx \\ \omega_3^2 l_{BD} & & ? & & \omega_1^2 l_{AB} & & 2 \boldsymbol{v}_{B3B2} \omega_2 \quad ? \quad (\omega_2 = \omega_3) \end{array}$$

作加速度图 $p'b'_2k'n'_3p'$, 如图 2-5 (c) 所示。由图得

$$\alpha_3 = \boldsymbol{a}_{B3}^t / l_{BD} = \mu_a \overline{n'_3b'_2} / (\mu_1 \overline{BD}) \quad (\text{顺时针})$$

方法二：扩大构件 2 (如图 2-5 (a) 虚线所示)，取 D 为重合点 (D_2 及 D_3)。

①速度分析。

根据 $\boldsymbol{v}_{D2} = \boldsymbol{v}_{D3} + \boldsymbol{v}_{D2D3} = \boldsymbol{v}_{B2} + \boldsymbol{v}_{D2} \boldsymbol{v}_{B2}$ 作速度图 $p(d_3)d_2p$, 如图 2-5 (b) 所示。由图得

$$\omega_2 = \boldsymbol{v}_{D2B2} / l_{BD} = \mu_v \overline{d_2b_2} / (\mu_1 \overline{BD}) \quad (\text{逆时针})$$

而 $\omega_3 = \omega_2$ 。

②加速度分析。

根据 $\boldsymbol{a}_{D2} = \boldsymbol{a}_{D3} + \boldsymbol{a}_{D2D3}^k + \boldsymbol{a}_{D2D3}^r = \boldsymbol{a}_{B2} + \boldsymbol{a}_{D2D3}^n + \boldsymbol{a}_{D2D3}^t$ 作加速度图 $p'(d'_3)k''d_2n'_2b'_2p'$, 如图 2-5 (c) 所示，由图得

$$\alpha_2 = \boldsymbol{a}_{D2B2}^t / l_{BD} = \mu_a \overline{n'_2d'_2} / (\mu_1 \overline{BD}) \quad (\text{顺时针})$$

而 $\alpha_3 = \alpha_2$ 。

方法三：取 C 点为重合点 (C_2 及 C_3)。

①速度分析。

根据 $\boldsymbol{v}_{C3} = \boldsymbol{v}_{C2} + \boldsymbol{v}_{C3C2} = \boldsymbol{v}_{B2} + (\boldsymbol{v}_{C2B2} + \boldsymbol{v}_{C3C2})$ 作速度图 $pb_2c_2c_3p$, 如图 2-5 (b) 所示。由图得

$$\omega_3 = \boldsymbol{v}_{C3} / l_{CD} = \mu_v \overline{PC_3} / (\mu_1 \overline{BD}) \quad (\text{逆时针})$$

②加速度分析。

根据 $a_{C3}^n + a_{C3}^t = a_{C2} + a_{C3C2}^t + a_{C3C2}^n = a_{B2} + (a_{C2B2}^n + a_{C3C2}^t) + (a_{C2B}^t + \epsilon_{C3C2})$ 作加速度图 $p'b'_2n''_2k'''_3c'_3n'_3p'$, 如图 2-5(c) 所示。由图得

$$a_3 = a_{C3}^t / l_{CQ} = \mu_a \overline{n''_3c'_3} / (\mu_1 \overline{CD}) \quad (\text{顺时针})$$



由此题 3 种求解可知: 对具有同一转动的组成移动副两构件上重合点间的运动进行求解时, 重合点位置选取是有一定技巧的, 它直接影响其求解过程的繁简程度。因此, 解此类题时, 应把握两个基本点: ①应将这两构件视为始终沿移动副导路方向作相对移动的两个任意大的刚体平面; ②应尽可能地选择运动已知或运动方向已知的点为重合点进行求解。

2.4 原教材习题详解

2-2 题

【分析】 此题为含有高副机构的速度分析题, 用瞬心法求平面高副机构的速度较方便。已知构件 1 的角速度, 只要找出相对瞬心 P_{12} , 就可根据瞬心的概念求出 ω_2 。因瞬心法也属于图解法, 所以应按比例准确画出所求机构位置的运动简图, 所需尺寸可直接从图中量取折算。

【解答】 选择比例尺, 绘制机构简图。根据三心定理, 构件 1、2、3 共有 3 个瞬心 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{31} , 图中 A 点为 P_{13} , C 点为 P_{23} , 连接 OB 与 AC 相交得相对瞬心 P_{12} 。

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot P_{13}P_{12} / P_{23}P_{12} = 2.63 \text{ rad/s} \quad (\text{方向为逆时针})$$



在确定组成高副的两构件的瞬心位置时, 应分析在接触点处是否为纯滚动。若是纯滚动, 则接触点即为其瞬心; 若不是纯滚动, 则瞬心在过接触点的公法线上。本题是凸轮高副, 所以瞬心应在过接触点的公法线上。有时题中会注明有无相对滑动速度, 由此可判断其瞬心属于哪种情况。用瞬心法求平面高副机构的速度较方便。但应注意, 瞬心法只能用于求解速度而不能用求加速度。

2-3 题

【分析】 本题为四杆机构的速度分析问题, 可以用瞬心法和相对运动图解法求解。但题目要求用瞬心法, 所以应按题目要求求解。先将机构所求位置的速度瞬心求出, 然后利用瞬心是等速重合点的概念求出构件 3 的角速度, 进而求出 C 点的速度。

【解答】 选择比例尺 μ_1 , 绘制机构简图, 并求出机构所有瞬心。

1) 因已知构件 1 的角速度, 所以利用瞬心 P_{13} 是构件 1 和构件 3 的等速重合点来求出构件 3 的角速度, 即

$$\omega_1 l_{P14P13} = \omega_3 l_{P34P13}$$

所以

$$\omega_3 = \frac{l_{P14P13}}{l_{P34P13}} \cdot \omega_1 \quad (\text{方向为顺时针})$$

则

$$v_c = \mu_1 l_{PC} \cdot \omega_3 = 0.42 \text{ m/s}$$

2) 关键求出 P_{24} , P_{24} 是构件 2 绝对瞬心, 构件 2 上所有点均绕 P_{24} 以角速度 ω_2 转动, 由 P_{24} 作 BC 延长线的垂线得垂足 E , E 点即为速度最小位置, $v_E = \omega_2 l_{P_{24}E}$ 。

而由 $v_B = \omega_1 l_{BC} = \omega_2 l_{P_{24}B}$, 可得 $\omega_2 = \frac{l_{BC}}{l_{P_{24}B}} \omega_1$, 即

$$v_E = \frac{l_{BC}}{l_{P_{24}B}} \omega_1 l_{P_{24}E} = 0.38 \text{ m/s}$$

3) $v_c = 0$ 时, 当 AB 与 BC 共线时 P_{24} 与 C 点重合, $v_c = 0$, $\varphi = 146^\circ$ 。



速度瞬心法可以由主动件立即求出从动件上任何点的线速度和角速度, 且不受机构级别的限制。但瞬心法只能用来求速度, 而不能用来求加速度。对于简单的平面机构, 由于构件数目少, 理由速度瞬心法进行速度分析十分简便快捷, 而当机构复杂时瞬心数目较多, 此法则显得太复杂。

2-4 题

【分析】 本题考查对速度影像和加速度影像原理的理解和应用。

【解答】

1) 在求构件 1、2 和 3 上速度为 v_X 的点 X_1 、 X_2 和 X_3 位置时, 先作三角形 abx_1 , 得以 ab 为底边的两底角 α 和 β , 再在机构简图上以 AB 为底边, 过 A 和 B 作对应的 α 和 β , 得一交点为点 X_1 的位置, 此时 ABX_1 和 abx_1 均为顺时针方向; 同样, 根据速度多边形上三角形 bx_2c 的两个底角 α' 和 β' 。在机构图上作相似三角形 BX_2C 即得点 X_2 的位置, 再根据速度多边形上三角形 dcx_3 的两个底角 α'' 和 β'' , 在机构简图上作相似三角形 DCX_3 , 所得交点 x_3 就表示构件 3 上速度为 V_X 的一个点的位置。

2) 在求机构 2 上加速度为零的点 Q 的位置时, 先在加速度多边形图上作三角形 $b'c'q$ 。它们的底角为 ϕ 和 ψ , 再在机构简图上以 BC 为底边作相似三角形 BCQ , Q 点就是构件 2 上加速度为零的点的位置, 同样方法在速度多边形图上以 bc 为底边作相似三角形得 q 点, 连接 pq 即可求得 Q 点的速度 v_Q 的大小, 方向由 p 指向 q 。

3) 在求构件 2 上速度为零的点 I 的位置时, 先在速度多边形图上作三角形 bci , 它有两个底角 γ 和 δ , 再在机构图上以 bc 为底边作相似三角形 BCI , I 点就是构件 2 上速度为零的位置, 同样方法在加速度多边形图上以 $b'c'$ 为底边作相似三角形 $b'c'i$ 可得 I 点, 连接 πi 即得 I 点的加速度 a_i 的大小 ($\pi i \times \mu_a$) 和方向 (由 π 指向 i)。

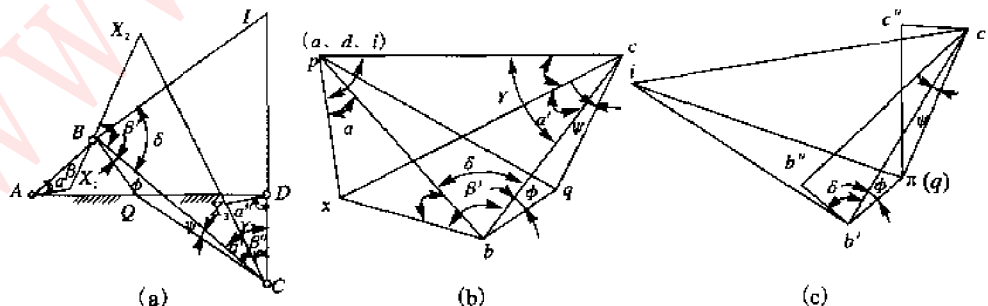


图 2-6



本题揭示了利用速度和加速度影像原理求解速度或加速度为某一值的点的方法。尤其是在求特殊点位置时很方便。但是所求的点，只是在这一机构位置时满足要求的点。

2-6 题

【分析】 选择比例尺绘制机构简图，如图 2-7 (a) 所示。由图可知，机构处于特殊位置。构件 3 的角速度用瞬心法求比较方便。此题综合利用瞬心法和矢量图解法来求解。构件 2、5 转动且构成移动副，所以存在哥氏加速度。

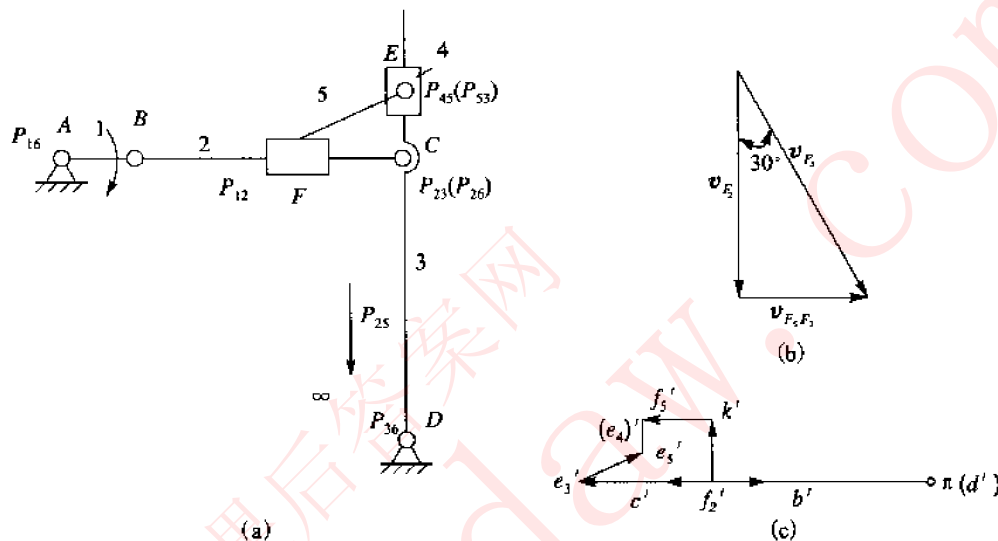


图 2-7

【解答】

1) 求 ω_5 , v_{E4}

用瞬心法求 ω_5 、 v_{E4} ，连接 P_{16} 、 P_{12} 和 P_{36} 、 P_{23} ，并延长得交点 P_{26} ，便是构件 2 的绝对瞬心，由于 P_{26} 与 C 点重合，所以在图示位置 C 点的速度为零，杆 3 在此瞬间不动， v_{E3} 为零。连接 P_{23} 、 P_{25} ， P_{45} 、 P_{34} 相交于 E 点，即为 P_{53} ，则 P_{53} 便是杆 5 相对杆 3 的绝对瞬心。由于 P_{53} 与 E 点重合，则 $v_{E5} = v_{E4} = 0$ 。

$\omega_2 = \omega_5 = 25 \text{ rad/s}$ ，其方向为逆时针方向

因

$$\begin{aligned} \overline{v_{F5}} &= \overline{v_{F2}} + \overline{v_{F5F2}} \\ \perp EF &\quad \perp CF \quad // CF \end{aligned}$$

由上式的矢量图 2-7 (b) 可知

$$v_{F5F2} = v_{F2} \tan 30^\circ = \omega_2 \cdot l_{CF} \cdot \tan 30^\circ = 2.5 \text{ m/s}$$

2) 求 α_5 , a_{E4}

$$\overline{a_c} = \overline{a_c'} + \overline{a_c''} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}''} + \overline{a_{CB}'}_{CH}$$

方向: $C \rightarrow D$ $\perp CD$ $B \rightarrow A$ $C \rightarrow B$ $\perp BC$

大小: $?$ $\omega_1^2 l_{AB}$ $\omega_1^2 l_{BC}$ $?$

作加速度多边形 $\pi b'c'$, 求得 $a'_{CB} = 0$, 故 $a_5 = a_4 = 0$, 利用影像原理可得 a_{F2} 及 a_{E3} , 并知 $a_{E5} = a_{E4}$

3) 求 F_5 点加速度, 列方程式

$$\bar{a}_{F5} = \bar{a}_{F2} + \bar{a}'_{F5F2} + \bar{a}''_{F5F2}$$

$$\bar{a}_{F5} = \bar{a}_{E3} + \bar{a}'_{F4E3} + \bar{a}''_{F5E3} + \bar{a}'_{F5E5}$$

式中: $\bar{a}'_{F5E5} = a_5 \cdot l_{EF} = 0$, 联立以上两方程式

$$\bar{a}_{F2} + \bar{a}''_{F5F2} + \bar{a}'_{F5F2} = \bar{a}_{E3} + \bar{a}'_{E4E3} + \bar{a}''_{F5E3}$$

方向: $\pi \rightarrow f_2 \perp BC \quad // BC \quad \pi \rightarrow e_3 \quad // CD \quad F_5 \rightarrow E_5$

大小: $\pi f_2 \quad 2\omega_2 v_{F5F2} \quad ? \quad \pi e_3 \quad ? \quad \omega_3^2 l_{F5E3}$

作加速度矢量多边形 $f'_2 k f'_5 e'_5 e_4 e'_3$, 求得

$$a_{E4} = \mu_a \pi e'_4 = 1436.4 \text{ m/s}^2$$



要注意机构在特殊位置时瞬心的特殊性。

2-7 题

【分析】 本题是对导杆机构的运动分析。其中存在具有转动的两构件 1、2 组成移动副, 所以存在哥氏加速度。如图 2-8 所示。

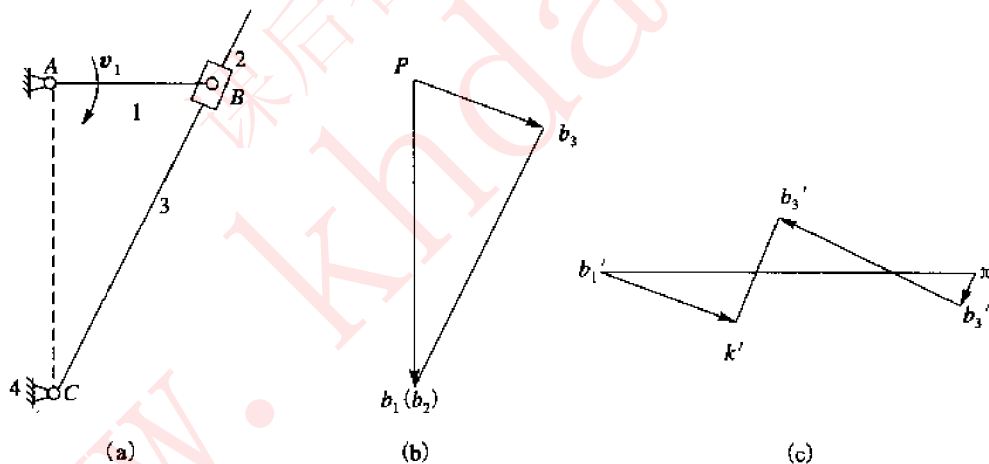


图 2-8

【解答】

1) 选取比例尺 μ_l (m/mm), 作机构运动简图 2-8 (a)

2) 绘速度多边形, 求 ω_3 , 比例尺 $\mu_v \left(\frac{\text{m/s}}{\text{mm}} \right)$

$$v_{B2} = \omega_1 l_{AB} = 1.8 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{B3} &= \bar{v}_{B2} = \bar{v}_{B3B2} \\ &\perp BC \quad \perp AB \quad // BC \end{aligned}$$

$$\omega_3 = \frac{v_{B3}}{l_{BC}} = 6.05 \text{ rad/s} \quad (\text{方向为顺时针})$$

3) 绘加速度多边形, 求 a_3

$$a_B = a_B^n = l_{AB} \cdot \omega_1^2 = 54 \text{ m/s}^2$$

取比例尺 $\mu_a \left(\frac{\text{m/s}^2}{\text{mm}} \right)$

$$\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B2} + \bar{a}_{B3B2}^k + \bar{a}_{B3B2}^c$$

$$B \rightarrow A \quad \perp BC \quad // BC$$

$$\bar{a}_{B3} = \bar{a}_C + \bar{a}_{B3C}^n + \bar{a}_{B3C}^t$$

$$a_{B3C}^t = (b''_3 b'_3) \mu_a = 28.8 \text{ m/s}^2$$

作图得

$$\alpha_3 = \frac{a_{B3C}^t}{l_{BC}} = 21.5 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{方向为逆时针})$$



注意哥氏加速度方向的确定。

2-8 题

【分析】 本题重在考查同一构件上各点之间速度和加速度关系, 其技巧在于运用速度和加速度影像原理。同时还考查了两构件以移动副相连时, 它们瞬时重合点的速度和加速度关系, 特别是哥氏加速度的概念。合理运用扩大构件法求解, 会使求解简单。

【解答】

1) 选取 μ_l , 作机构运动简图, 如图 2-9 (a) 所示。

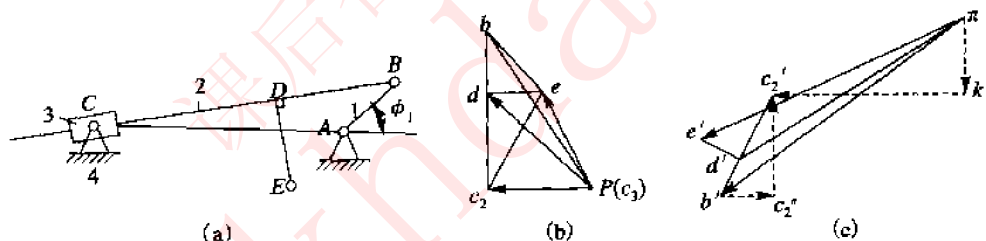


图 2-9

2) 求 \bar{v}_D 、 \bar{v}_E 、 ω_3

$$v_B = l_{AB} \cdot \omega_1 = 0.3 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_{C2} = \frac{\bar{v}_B}{\perp AB} + \frac{\bar{v}_{C2B}}{\perp CB} = \frac{\bar{v}_{C3}}{\perp CB} + \frac{\bar{v}_{C2C3}}{\perp CB}$$

pb

?

?

式中: $v_{C3} = 0$

如图 2-9 (b) 所示, 按比例尺 μ_v 作速度多边形 pbc_2 , 然后按速度影像法求得 e 点及 d 点

$$v_E = (pe) \mu_v = 0.1742 \text{ m/s} \quad (\text{指向如图 2-9 (b) 所示})$$

$$v_D = (pd) \mu_v = 0.2278 \text{ m/s} \quad (\text{指向如图 2-9 (b) 所示})$$

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{v_{C2B}}{l_{CB}} = \frac{(bc_2) \mu_v}{l_{CB}} = 2 \text{ rad/s} \quad (\text{方向为逆时针})$$

3) 求 \bar{a}_D 、 \bar{a}_E 、 a_3

$$a_B = a_B^n = l_{AB} \cdot \omega_1^2 = 3 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} \overline{a_{C2}} &= \overline{a_B} + \overline{a_{C2B}^n} + \overline{a_{C2B}^t} = \overline{a_{C3}} + \overline{a_{C2C3}^k} + \overline{a_{C2C3}^t} \\ B \rightarrow A & \quad C_2 \rightarrow B \quad \perp CB & \quad \perp CB & \quad // CB \\ \pi b' & \quad b'c''_2 & \quad c''_2c'_2 & \quad \pi k' & \quad k'c'_2 \\ a_{C3} &= 0 \end{aligned}$$

式中

$$a_{C2B}^n = l_{CB} \cdot \omega_2^2 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_{C2C3}^k = 2\omega_3 \cdot v_{C2C3} = 0.71 \text{ m/s}^2$$

选取 $\mu_a \left(\frac{\text{m/s}^2}{\text{mm}} \right)$, 则线段 $\pi b'$ 代表 $\overline{a_B}$ 。哥氏加速度 $\overline{a_{C2C3}^k}$ 方向的确定: 以矢量 $\overline{v_{C2C3}}$ 沿 ω_3 (现为逆时针) 回转 90° 。如图 2-9 (c) 所示, 作加速度多边形 $\pi b'c''_2c'_2k'$, 然后按加速度影像法作 $\triangle b'c'_2e' \sim \triangle BCE$ 且字母顺序一致, 得 e' 点, 再从 e' 点作 $e'd' \perp b'c'_2$ 得 d' 点, 于是

$$a_E = (\pi e') \mu_a = 2.8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{指向如图 2-9 (c) 所示})$$

$$a_D = (\pi d') \mu_a = 2.6 \text{ m/s}^2 \quad (\text{指向如图 2-9 (c) 所示})$$

$$\alpha_3 = \frac{a_{C2B}^t}{l_{CB}} = \frac{(c''_2c'_2)}{l_{C2B}} \mu_a = 8 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{方向为顺时针})$$



在求解时, 选构件 2、3 哪一点为重合点较有利? 为什么?

2-9 题

【分析】 本题中的机构是Ⅲ级机构, 若用矢量图解法, 由于 C 点速度和加速度大小和方向都不知, 所以无法直接求得 F 的速度和加速度。可用特殊点法求解速度和加速度, 即利用构件 3 上特殊点 S_3 , 来参与运动分析。如图 2-10 所示。

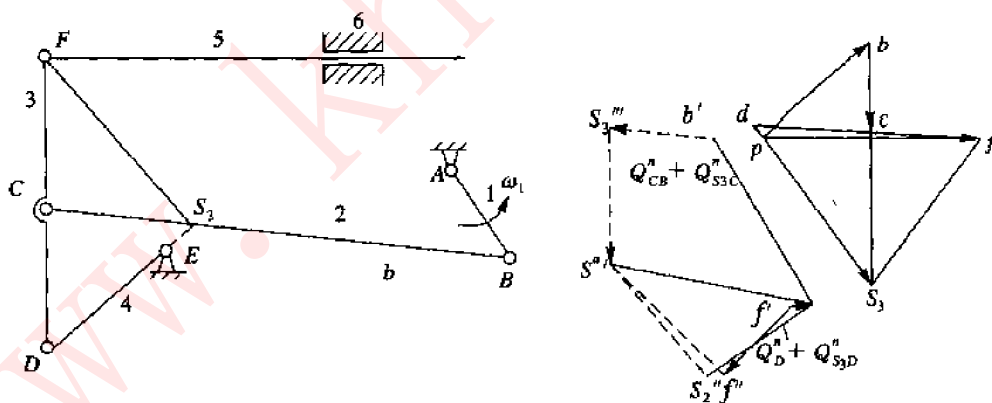


图 2-10

【解答】

1) 选择比例尺, 用轨迹相交法绘机构图。构件 3 上取一特殊点 S_3 , 它是 DE 延长线与 BC 线的交点。

2) 绘速度多边形, 选比例尺 $\mu_v \left(\frac{\text{m/s}}{\text{mm}} \right)$

$$v_B = l_{AB} \cdot \omega_1 = 0.6 \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$$

$$\boldsymbol{v}_{S3} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{S3C} = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{S3D}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}_{S3}} = \frac{\overline{\boldsymbol{v}_B} + (\overline{\boldsymbol{v}_{CB}} + \overline{\boldsymbol{v}_{S3C}})}{\perp AB \quad \perp CB \quad \perp DE} = (\overline{\boldsymbol{v}_D} + \overline{\boldsymbol{v}_{S3D}})$$

又

$$\overline{\boldsymbol{v}_F} = \overline{\boldsymbol{v}_{S3}} + \overline{\boldsymbol{v}_{FS3}}$$

水平 $\perp FS_3$

作图得

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_S = 1.1 \text{ m/s} \quad (\text{向右})$$

3) 绘加速度多边形, 选比例尺 $\mu_a \left(\frac{\text{m/s}^2}{\text{mm}} \right)$

$$\boldsymbol{a}_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 1.8 \text{ m/s}^2$$

$$\overline{\boldsymbol{a}_{S3}} = \frac{\overline{\boldsymbol{a}_D} + \overline{\boldsymbol{a}_{S3D}}}{D \rightarrow F \quad S_3 \rightarrow D} + (\frac{\overline{\boldsymbol{a}_D} + \overline{\boldsymbol{a}_{S3D}}}{\perp DE} + \frac{\overline{\boldsymbol{a}_D} + \overline{\boldsymbol{a}_{S3D}}}{B \rightarrow AC \rightarrow B \quad S_3 \rightarrow C} + \frac{\overline{\boldsymbol{a}_D} + \overline{\boldsymbol{a}_{S3D}}}{\perp CB})$$

又

$$\overline{\boldsymbol{a}_F} = \overline{\boldsymbol{a}_{S3}} + \frac{\overline{\boldsymbol{a}_{FS3}}}{F \rightarrow S_3} + \frac{\overline{\boldsymbol{a}_{FS3}}}{\perp FS_3}$$

水平 $F \rightarrow S_3 \quad \perp FS_3$

式中: $\boldsymbol{a}_{FS3} = \frac{\boldsymbol{v}_{FS3}^2}{l_{FS3}} = 1.54 \text{ m/s}^2$

作图得

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_S = 0.17 \text{ m/s}^2 \quad (\text{向左})$$

2-11 题

【分析】 用解析法进行运动分析的关键是列出机构位置方程, 对位置方程微分可得速度方程和加速度方程。

【解答】 由图可知位移

$$s = l_{AB} - l_{AB} \cos \varphi_1$$

$$\boldsymbol{v} = l_{AB} \cdot \omega \sin \varphi_1$$

$$\boldsymbol{a} = l_{AB} \omega^2 \cos \varphi_1$$

已知当 $\varphi_1 = 0^\circ$ 时,

$$s = 0$$

当 $\varphi_1 = 45^\circ$ 时,

$$\boldsymbol{v}_3 = l_{AB} \omega \sin \varphi_1 = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = l_{AB} \omega^2 \cos \varphi_1 = 20 \sqrt{2} \text{ m/s}^2$$



用解析法进行运动分析时, 首先考虑到是用哪种数学工具来建立位移方程, 选用的数学工具不同, 得到的解析法也不同。本题先用解析几何方法建立方程, 然后再对其求一次和二次导数, 即得速度和加速度方程。

2-12 题

【分析】 因为题目未要求用何种方法求解, 所以可用图解法也可用解析法。由于结构比较简单, 故选用图解法求解。

【解答】

1) 按已知条件作机构图, 如图 2-11 所示。构件 1 水平移动, 构件 2 铅垂移动, 以构件 1 与构件 2 的重合点为研究对象。

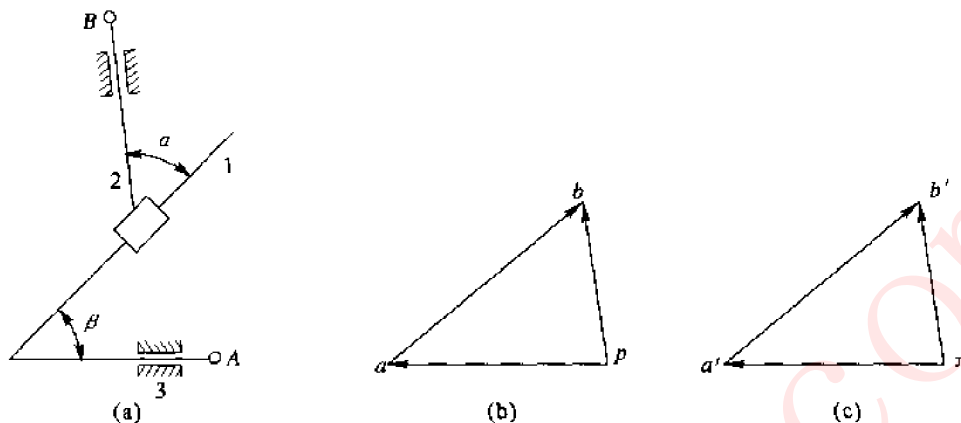


图 2-11

2) 求 \vec{v}_B :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

取比例尺 $\mu_v \left(\frac{\text{m/s}}{\text{mm}} \right)$ 。 \vec{v}_B 和 \vec{v}_{BA} 的方向为已知, 如图 2-11 作速度多边形 pba 得 b 点, 即有

$$\vec{v}_B = (pb) \mu_v = 0.52 \text{ m/s} \quad (\text{方向如图 2-11 (b) 所示})$$

3) 求 \vec{a}_B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

取比例尺 $\mu_a \left(\frac{\text{m/s}^2}{\text{mm}} \right)$ 。 \vec{a}_B 和 \vec{a}_{BA} 的方向为已知, 如图作加速度多边形 $\pi b'a'$ 得 b' 点, 即有

$$\vec{a}_B = (\pi b') \mu_a = 0.74 \text{ m/s}^2 \quad (\text{方向如图 2-11 (c) 所示})$$



虽然构件 1、2 间构成移动副, 但是由于没有相对转动, 所以不存在哥氏加速度。

2-15 题

【分析】 用解析法进行机构运动分析时, 采用解析几何法建立矢量方程式。

【解答】 如图 2-12 所示, 该机构的封闭矢量方程式为

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

将上式投影到 x 轴和 y 轴上得

$$AB \cos \varphi_1 = h \quad AB = \frac{h}{\cos \varphi_1}$$

$$AE \sin \varphi_1 = y$$

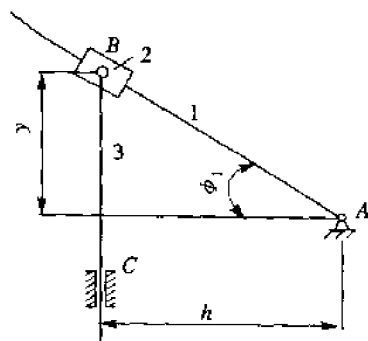


图 2-12

所以

$$\frac{h}{\cos \varphi_1} \sin \varphi_1 = y$$

$$y = h \tan \varphi_1$$

$$v_3 = \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt} = h \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 h \frac{1}{\cos^2 \varphi_1}$$

$$a_3 = \frac{dv}{dt} = 2h\omega_1^2 \frac{\sin \varphi_1}{\cos^3 \varphi_1}$$

$$\text{当 } \varphi_1 = 30^\circ$$

$$v_3 = 0.4 \times 6 \times \frac{1}{0.866^2} = 3.2 \text{ m/s}$$

$$a_3 = 2 \times 0.4 \times 36 \times \frac{0.5}{0.866^3} = 22.1 \text{ m/s}^2$$

2-16 题

【分析】 此题即可用瞬心法求解,也可用相对运动图解法求解。相对运动图解法比较简单。

【解答】 分析构件 2, 可列速度矢量式

$$\boldsymbol{v}_{B2} = \boldsymbol{v}_{A2} + \boldsymbol{v}_{B2A2}$$

$$\text{方向} \quad \perp x \quad // \tau \quad \perp AB$$

$$\text{大小} \quad ? \quad 100 \text{ mm/s} \quad ?$$

作速度多边形, $v_{A2} = \mu_v \omega_2 = 100 \text{ mm/s}$ 可得

$$\omega_2 = \mu_v a_2 b_2 / l_{AB} = 0.2309 \text{ rad/s} \quad (\text{逆时针方向})$$

根据速度影像原理, 可得

$$v_{c2} = \mu_v \rho c_2 = 57.74 \text{ mm/s} \quad (\text{方向如图 2-13 所示})$$



利用速度影像原理可以方便地求得构件 2 的中点

C 的速度 v_{C2} 。

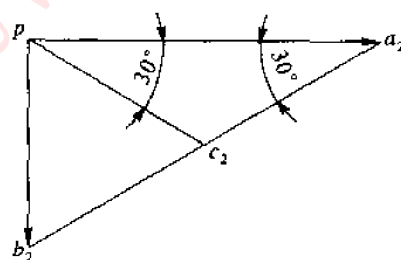


图 2-13

2-18 题

【分析】 图中机构是齿轮-连杆组合机构。

【解答】

1) 选取比例尺, 作机构运动简图, 如图 2-14 所示。

2) 用矢量图解法求 v_C :

$$\overline{\boldsymbol{v}_C} = \overline{\boldsymbol{v}_B} + \overline{\boldsymbol{v}_{CB}}$$

$$v_B = \omega_1 l_{AB} = 2 \text{ m/s}$$

已知 v_C 、 v_{CB} 的方向, 分别与构件 DC 和 BC 垂直, 故可用图解法求解。

选速度比例尺 μ_v 作速度图, 得

$$v_C = (\rho c) \mu_v = 2 \text{ m/s}$$

3) 求 v_H :

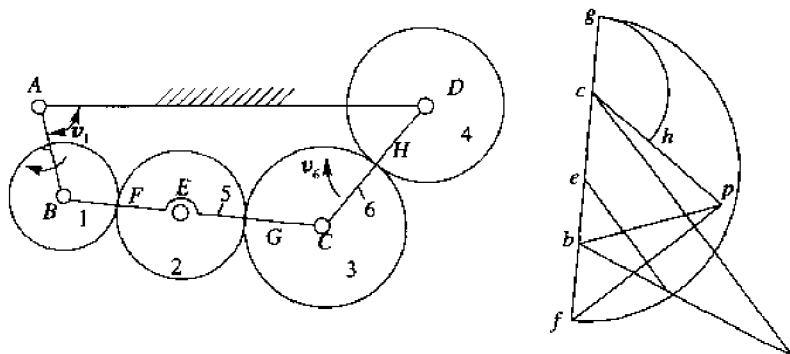


图 2-14

根据速度影像法。已知 v_B 、 v_C 求得 v_E ；已知 v_A 、 v_B 求得 v_F ；已知 v_E 、 v_F 求得 v_G ；已知 v_G 、 v_C 求得

$$v_H = (ph) \mu_v = 1.1 \text{ m/s}$$

4) 求 ω_4 、 ω_6 ：

$$\omega_4 = \frac{v_H}{l_{HD}} = 5.8 \text{ rad/s}$$

$$\omega_6 = \frac{v_C}{l_{CD}} = 5.84 \text{ rad/s} \quad (\text{顺时针方向})$$



本题技巧在于先由铰链四杆机构的速度分析求齿轮 1、2、3 的中心 B、E、C 的绝对速度和摇杆 6 的角速度 ω_6 ，再分别应用速度影像法于齿轮 1、2、3 上，求互相啮合两轮的节点 F、G、H 的绝对速度，从而求出 ω_4 。从速度图可知，机构中每一个构件都具有自己的速度影像，而且构件的速度影像具有以下特性：一般运动构件的速度影像与其构件图形相似，且字母顺序一致。如构件 1、5、6 及齿轮 2、3、4 的速度影像均与各自的构件图形相似。机架的速度影像就在速度多边形极点处，而整个机构则无影像关系。

2-19 题

【分析】 由于给定的构件 2 的角速度是相对于构件 1 的，若让构件 1 静止，则构件 2 的角速度就是其绝对角速度。为使整个机构相对运动不发生变化，现对整个机构加上一个 $-\omega_1$ ，再对转化机构作运动分析，然后通过原机构和转化机构的相对运动关系，即可求出原机构的 v_C 、 v_D 、 a_C 及 a_D 。

【解答】 如图 2-15 所示。

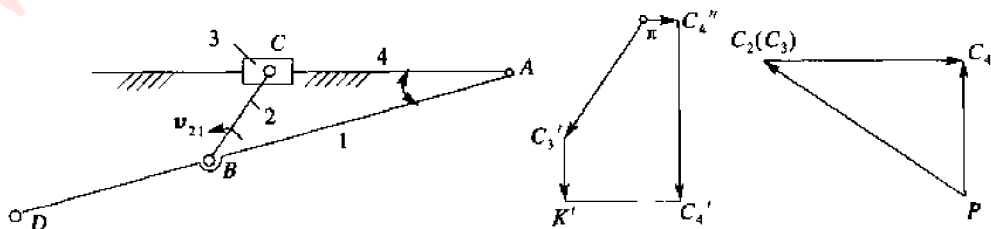


图 2-15

1) 对整个机构加上一个 ω_1 , 得到以构件 1 为机架的转化机构, 对其作运动分析求 ω_{41} 、 α_{41} 及 v_{C4C3} , 而实际机架为构件 4 时, 则

$$\omega_1 = -\omega_{41}$$

$$\alpha_1 = -\alpha_{41}$$

$$\bar{v}_C = -\bar{v}_{C4C3}$$

2) 选取比例尺作机构简图。

3) 求 \bar{v}_C 、 \bar{v}_D :

$$v_{C21} = \omega_{21} \cdot l_{BC} = 0.28 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_{C31} = \bar{v}_{C21}$$

$$\bar{v}_{C41} = \bar{v}_{C31} + \bar{v}_{C4C3}$$

选取速度比例尺 μ_v , 则有

$$v_{C4C3} = \mu_v (c_3 c_4) = 0.217 \text{ m/s} \quad (\text{指向右})$$

$$v_C = v_{C4C3} = 0.217 \text{ m/s} \quad (\text{指向左})$$

$$\omega_{41} = \frac{v_{C41}}{l_{CA}} = \frac{(p_{c4}) \cdot \mu_v}{l_{CA}} = 0.278 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \omega_{41} = 0.278 \text{ rad/s}$$

$$v_D = \omega_1 \cdot l_{AD} = 0.361 \text{ m/s}, \text{ 指向右下方, 垂直于 } AD。$$

4) 求 \bar{a}_C 、 \bar{a}_D :

$$\bar{a}_{C41}^n + \bar{a}_{C41}^t = \bar{a}_{C31} + \bar{a}_{C4C3}^k + \bar{a}_{C4C3}^t$$

$$a_{C41}^n = \frac{v_{C41}^2}{l_{AC}} = 0.049 \text{ m/s}^2$$

其中

$$a_{C31} = l_{BC} \cdot \omega_{21}^2 = 0.028 \text{ m/s}^2$$

$$a_{C4C3}^k = 2\omega_{41} \cdot v_{C4C3} = 0.121 \text{ m/s}^2$$

选取加速度比例尺 μ_a , 作加速度多边形得

$$\alpha_{41} = \frac{a_{C41}^t}{l_{CA}} = 0.534 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_1 = \alpha_{41} = 0.534 \text{ rad/s}^2$$

$$a_D = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^t$$

$$a_D^n = \frac{v_D^2}{l_{AD}} = 0.1 \text{ m/s}^2$$

$$a_D^t = l_{AD} \cdot \alpha_1 = 0.694 \text{ m/s}^2$$

$$a_D = \sqrt{0.1^2 + 0.694^2} = 0.7 \text{ m/s}^2$$

$$a_{C'4C3} = (K'C'_4) \mu_a = 0.23 \text{ m/s}^2 \quad (\text{指向右})$$

$$a_C = a_{C'4C3} = 0.23 \text{ m/s}^2 \quad (\text{指向左})$$

2.5 原教材思考题详解

思 2-3 题

【解答】 一个具有确定运动的机构，其速度图的形状与原动件的速度大小无关，即改变原动件时，其速度多边形不变，但其加速度多边形却无此特性。

思 2-4 题

【解答】 参考习题 2-4 的解法。

思 2-5 题

【解答】 速度瞬心法求机构的速度是利用相对瞬心为两构件的瞬时绝对速度相等的重合点（即同速点）的概念，建立待求运动构件与已知运动构件之间的速度关系来进行求解。进而可以求得两构件的角速度之比（或传动比），构件的角速度及构件上某点的速度，而且其求解比较直观、简便，也不受机构级别的限制。待求运动构件与已知运动构件无论相隔多少构件，利用它们的瞬心就可以直接求得未知速度参数，但不能用于求解机构的加速度。当机构只需作速度分析时，最好采用速度瞬心法进行求解，尤其对高副机构的速度求解显得更为简捷。

相对运动图解法可直接进行 II 级机构的运动分析，可进行速度和加速度分析。如果直接用矢量方程图解法求解 III 级机构的速度和加速度是不可解的。

2.6 自测试卷及答案

2.6.1 自测试卷

(1) 填空

- 1) 当构件组成转动副时，其瞬心就在_____处；当组成移动副时，其瞬心就位于_____处；当组成兼有滑动和滚动的高副时，其瞬心就在_____。
- 2) 当两构件的相对运动为_____动，而牵连运动为_____动时，两构件的重合点将有哥氏加速度。哥氏加速度的大小为_____；而方向则为_____的方向。
- 3) 相对瞬心与绝对瞬心的相同点是_____，不同点是_____；在由 N 个构件组成的机构中，有_____个相对瞬心，有_____个绝对瞬心。（1998 西北工业大学）
- 4) 速度影像的相似原理只能应用于_____的各点，而不能应用于机构的_____各点。

(2) 简答

- 1) 在对机构进行速度分析时，速度瞬心法一般适用于什么场合？能否利用速度瞬心法对机构进行加速度分析？
- 2) 什么情况下才会有哥氏加速度存在？其大小如何计算？方法又如何确定？
- (3) 已知摆动导杆机构如图 2-16 所示，其尺寸和运动参数如下： $l_{AB} = 30 \text{ mm}$ ， $l_{BC} = 67 \text{ mm}$ ， $l_{BD} = 15 \text{ mm}$ ， $l_{AC} = 60 \text{ mm}$ ， $\varphi_1 = 90^\circ$ ， $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 。试求：

- 1) 构件 3 的绝对速度瞬心；
- 2) D_3 点速度 v_{D3} （用相对运动图解法）；

3) 判断 B_2 , B_3 点相对运动是否存在哥氏加速度, 并简述理由。

(4) 在附图 2-17 所示的机构中, 已知点 A 到构件 3 的距离 $l = 0.2 \text{ m}$, 构件 3 有 B 点到 B' 点时, 要求以 0.2 m/s 的速度作等速移动, 用作图法分析机构在图示位置时构件 1 的角加速度。(列出矢量方程, 按比例绘出机构的速度和加速度多边形, 不写作图步骤。) (2003 西北工业大学)

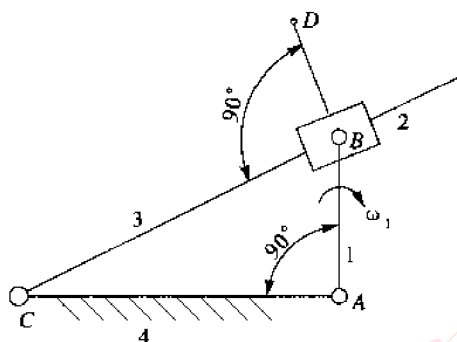


图 2-16

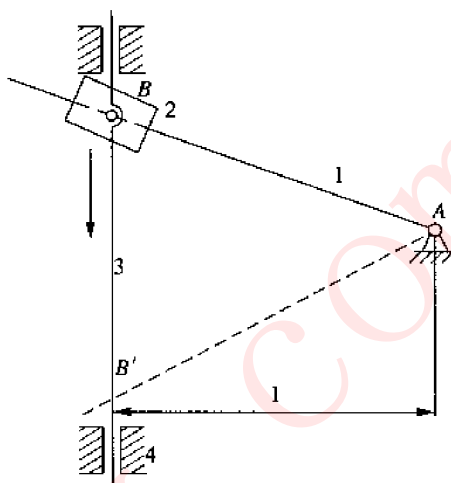


图 2-17

2.6.2 自测试卷答案

(1) 填空

1) 转动副中心; 垂直于导路方向无穷远; 接触点法线上

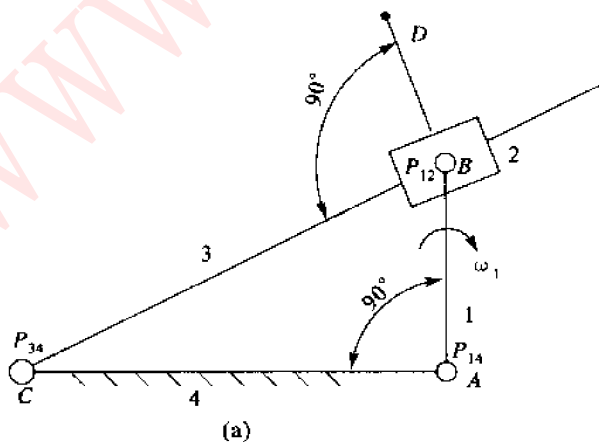
2) 移; 转; $\alpha^k = 2\omega \omega_r$; 将 ω_r 沿 ω 转 90°

3) 互作平面相对运动的两构件上瞬时相对速度为零的点; 后者绝对速度为零, 前者不是; $(N-1)$

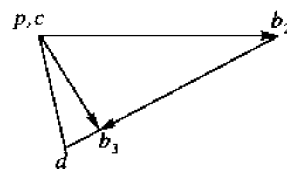
4) 同一构件上; 不同构件上的

(2) 简答 (略)

(3) 1) 见图 2-18 (a)。构件 3 的绝对速度瞬心在 C 点, 因为 C 点是构件 3 和构件 4 的速度瞬心 P_{34} , 而构件 4 是机架。



(a)



(b)

图 2-18

2) 见图 2-18 (b)。

	\boldsymbol{v}_{B3}	=	\boldsymbol{v}_{B2}	+	\boldsymbol{v}_{B3B2}
方向	$\perp BC$		$\perp AB$		$// BC$
大小	?		$\omega_1 l_{AB}$?

$$\boldsymbol{v}_{B2} = 10 \times 0.03 = 0.3 \text{ (m/s)} \quad \text{取 } \mu_v = 0.01 \left(\frac{\text{m/s}}{\text{mm}} \right)$$

作图得 $\boldsymbol{v}_{B3} = 0.136 \text{ (m/s)}$ ，用速度影像法求得 $\boldsymbol{v}_{D3} = 0.14 \text{ (m/s)}$

3) 存在哥氏加速度，因为 $\boldsymbol{a}^k = 2\omega_2 \boldsymbol{v}_{B3B2}$ ，该机构在此瞬时位置构件 3 作转动，构件 2 (滑块) 相对构件 3 作相对滑动 $\boldsymbol{v}_{B3B2} \neq 0$ 且 $\omega_2 = \omega_3$ 。

(4) 根据 $\boldsymbol{v}_{B1} = \boldsymbol{v}_{B2} + \boldsymbol{v}_{B1B2}$ 作速度图 (略)，可求得 $\omega_1 = \boldsymbol{v}_{B1} / l_{AB} = \mu_v p b_1 / l_{AB} = 0.95 \text{ rad/s}$ 。根据 $\boldsymbol{a}_{B1} = \boldsymbol{a}_{B1}^n + \boldsymbol{a}_{B1}^t = \boldsymbol{a}_{B2} + \boldsymbol{a}_{B1B2}^k + \boldsymbol{a}_{B1B2}^r$ ，作加速度图 (略)，可得 $\alpha_1 = \mu_a n' b'_1 / l_{AB} = 0.7 \text{ rad/s}^2$ 。

第3章

平面连杆机构及其设计

本章考点

- 绘制平面连杆机构运动简图，并确定该机构类型
- 根据机构中给定的各杆长度(或尺寸范围)来确定属于何种铰链四杆机构
- 根据机构中给定的各杆长度判定机构有无急回特性和死点位置，确定行程速比系数 k 和最小传动角
- 已知活动铰链中心的位置设计四杆机构，以实现2个(或3个)预定的连杆位置
- 已知固定铰链中心的位置设计四杆机构，以实现2个(或3个)预定的连杆位置
- 已知固定铰链中心的位置设计平面四杆机构，以实现预定的两连架杆2对(或3对)对应位置
- 按行程速比系数 k 设计四杆机构

本章难点

- 用反转法确定所设计四杆机构中活动铰链的位置
- 本章重点是平面四杆机构的基本形式及其演化、有关四杆机构的一些基本知识和平面四杆机构的基本设计方法

3.1 考核知识点

平面连杆机构又称平面低副机构，其各运动副均为低副，相邻构件之间的接触为平面或圆柱面。因平面与圆柱面具有加工方便，易达到高精度，并能承受较大载荷及形成几何封闭等优点，因此获得广泛应用。本章主要解决根据给定的运动运动要求（实现预定的运动规律或预定的越南队轨迹）及辅助的几何条件、动力条件，确定平面连杆机构的形成和各构件的尺寸参数问题。

3.1.1 基本要求

- 掌握平面四杆机构的基本形式及其演化方法；
- 熟练掌握铰链四杆机构有曲柄存在条件；灵活运用并判断铰链四杆机构的类型；
- 掌握平面四杆机构的压力角、传动角、急回特性、极位夹角、行程速比系数等基本概念；
- 掌握连杆机构最小传动角出现的位置及计算方法；
- 掌握极位夹角与行程速比系数的关系式；
- 掌握死点在什么情况下出现及死点位置在机构中的应用；
- 掌握平面四杆机构的运动特征及其设计的基本问题；掌握按给定行程速比系数设计四杆机构的方法。

3.1.2 内容提要 with 考点提示

(1) 平面四杆机构的类型及其演化方法

所有运动副均是转动副的平面四杆机构称为铰链四杆机构，它是平面四杆机构的基本形式。在此机构中，固定不动的构件被称为机架，与机架以转动副相连的构件被称为连架杆；能作整周回转连架杆被称为曲柄，而不能整周回转的连架杆被称为摇杆；与机架不相连的中间构件被称为连杆。能使两构件作整周相对转动的转动副被称为整转副；而不能作整周相对转动的转动副被称为摆动副。平面铰链四杆机构又根据两连架杆运动形式不同，分为：

- ① 曲柄摇杆机构：两连架杆中，有一个为曲柄；
- ② 双曲柄机构：两连架杆均为曲柄；
- ③ 双摇杆机构：两连架杆均为摇杆。

平面四杆机构的演化形式是在平面铰链四杆机构的基础上，通过一些演化方法演化而成其他形式的四杆机构。平面四杆机构的演化方法有：

- ① 改变构件的形状及运动尺寸；
- ② 改变运动副尺寸（扩大转动副）；
- ③ 取不同构件为机架。

(2) 有关四杆机构的一些基本知识

1) 四杆机构曲柄存在条件，归纳起来，有以下几个方面：

- ① 最短杆与最长杆的长度之和小于或等于其他两杆的长度之和（杆长条件）；
- ② 连架杆和机架中必有一杆为最短杆。

铰链四杆机构满足杆长之和条件时，选取不同构件为机架，可以得到不同形式的机构：

- ① 以最短构件的邻边为机架，则最短杆为曲柄，该机构为曲柄摇杆机构；
- ② 以最短杆为机架，则其相邻两构件均为曲柄，该机构为双曲柄机构；

③以最短构件的对边为机架,则无曲柄存在,机构为双摇杆机构。

如果最短杆与最长杆长度之和大于其余两杆长度之和,那么不管固定哪一个构件为机架,都无曲柄存在,而机构均为双摇杆机构。

2) 四杆机构的急回特性。在曲柄匀速转一周的过程中,作往复运动的从动件工作行程(慢行程)的时间 t_1 和空回行程(快行程)的时间 t_2 不同,即正反两个行程平均速度不相等,这称为机构的急回特性,通常用行程速比变化系数 K 来表示急回特性的相对程度。

$$K = \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}$$

式中: v_2, v_1 ——从动件空回行程和工作行程平均速度;

φ_1, t_1 ——从动件工作行程时曲柄转过的角度和用的时间;

φ_2, t_2 ——从动件空回行程时曲柄转过的角度和用的时间;

θ ——极位夹角。该夹角为

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1}$$

对已有机构进行分析时,要确定机构有无急回运动,其关键是确定机构是否存在极位夹角 θ 。 $K > 1$,即 $\theta > 0$,表明机构有急回运动,行程速比系数 K 随极位夹角 θ 增大而增大, θ 值越大,表明机构急回运动特性越明显。这样的机构有:一般曲柄摇杆机构、偏置曲柄滑块机构、摆动导杆机构以及具有曲柄的多杆机构。

如果 $K = 1$,即 $\theta = 0$,表明机构无急回运动。常见的有正弦机构、对心曲柄滑块机构等。

3) 压力角和传动角。

压力角 α ——曲柄通过连杆作用于从动件摇杆上的力 P 的作用线与力作用点的绝对速度之间夹的锐角 α 称为压力角。 P 力能做功的有效分力沿切线方向, $P_t = P \cos \alpha$, P 力不做功的分力沿法线方向, $P_n = P \sin \alpha$ 。可见,压力角 α 愈小,机构运转效率愈高。

传动角 γ ——力 P 与 P_n 所夹的锐角 γ 称为传动角,即压力角度余角。

因 $\alpha + \gamma = 90^\circ$,所以传动角 γ 愈大,压力角愈小对传动愈有利,可以用 γ 来衡量机构的传动质量。多数机构运动中的传动角是变化的,为使机构传动良好,一般规定机构的最小传动角 $\gamma_{\min} \geq 40^\circ$ 。为了检查机构的最小传动角,设四杆机构中连杆1与从动件所夹的内角为 δ ,则当 $\delta \leq 90^\circ$ 时,取 $\gamma = \delta$;当 $\delta > 90^\circ$ 时,取 $\gamma = 180^\circ - \delta$,其中 δ 可用作图法或解析法求得。由此分析可知,曲柄摇杆机构的最小传动角 γ_{\min} 出现在曲柄1与机架共线的两位置之一。

4) 死点的概念。四杆机构中若摇杆或滑块为原动件,曲柄为从动件时,摇杆在两极限位置时通过连杆加于曲柄的力将经过铰链 A 的中心,此时传动角 $\gamma = 0^\circ$,压力角 $\alpha = 90^\circ$, $P_t = 0$,它不能推动曲柄转动,而使整个机构处于静止状态,这种位置称为死点,传动中死点是缺陷,需克服。工程上有时也利用死点工作。

(3) 平面四杆机构的设计的基本问题及方法

1) 连杆机构的设计方法有:图解法、解析法及实验法。

①实现连杆给定位置的平面四杆机构求固定铰链点两个基本求解问题。连杆位置用活动铰链中心 B, C 表示。

如图3-1所示,已知连杆上活动铰链 BC 的预定位置点

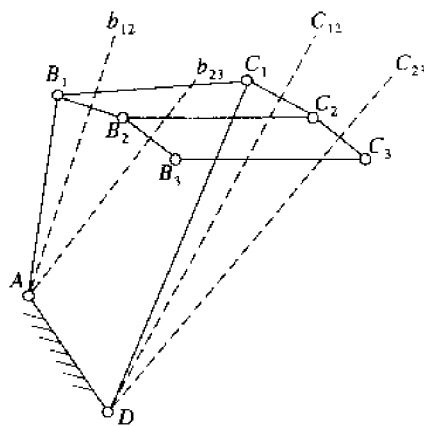


图3-1

B_iC_i ($i=1, 2, 3$): 作各位置点 B_i 连续的中垂线, 其交点即为所求的固定铰链 A 的位置; 作各位置点 C_i 连续的中垂线, 其交点即为所求的固定铰链 D 的位置。若 $N=2$, 即给定连杆的两个预定位置, 则设计有无穷多解; 若 $N=3$, 即给定连杆的 3 个预定位置, 则有惟一解。若 $N=4, 5$, 其设计要用到圆心曲线和中心点曲线理论。

② 连杆位置用连杆平面上任意两点表示。即已知连杆 EF (即连杆上的标线) 的预定位置 E_iF_i ($i=1, 2, 3$) 和固定铰链中心 A 和 D 的位置, 要求设计此四杆机构。

此问题可采用转换机架法进行设计。其原理与取不同构件为机架的演化方法, 即称为倒置的原理是一样的。构件绝对运动改变了, 但各构件之间的相对运动并不发生变化, 亦即各构件的相对尺寸不发生改变。具体做法是: 将原机构的各个位置 $AEFD$ 刚化, 然后搬动各刚性体, 使各位置的 EF 都与某一位置的 EF 重合, 而 AD 到达不同位置 A_iD_i 。这时搬动后所形成的机构是以 EF 为机架, 已知两铰链点的 AD 为连杆的四杆机构的几个位置, 即原机构的连杆 EF 转换为机架, 而原机构的机架 AD 变成了已知不同位置的连杆, 因此问题就转化为前述问题①, 如图 3-2 所示。

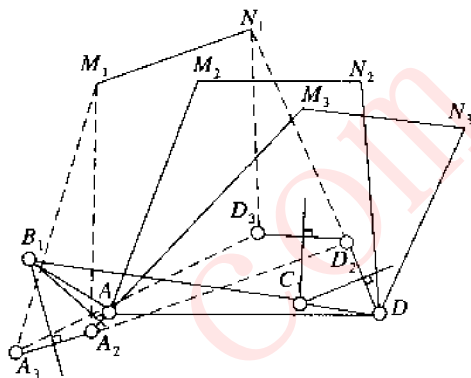


图 3-2

2) 实现已知运动规律的平面四杆机构运动设计。

① 按给定两连架杆对应位移设计四杆机构。依然欲将此问题转化为已知活动铰链点的连架杆求机架固定铰链点的问题。

转化方法: 选定某一位置 AB_iE_iD 不动, 将其余各位置 AB_iE_iD 刚化, 然后将已刚化各位置多边形绕 D 点转动, 使 DE_i 与选定的位置 DE_1 重合, 此时刚化的多边形 AB_iE_iD , 分别转到 $A_iB_iE_iD$, 可以看到此时已将原机构转化为以已知铰链点的连架杆 AB 为连杆, 未知铰链点的连架杆 DE 为机架的四杆机构, 因此问题转化为已知连杆 AB 的几个位置, 求固定铰链点 DC 。在作图时, 没有必要作出多边形的所有点, 因为要确定铰链点 C 的位置, 所以只要作出相应的 B_i 即可 (如图 3-3)。

② 按给定从动件的行程和行程速度变化系数设计四杆机构。如已知曲柄摇杆机构摇杆的长度 \overline{CD} , 摆角 ψ 及行程速比系数 K , 根据 K 可求出极位夹角 θ 并作出摆杆的两极限位置 C_1D 和 C_2D 时, 此机构设计的关键是确定固定铰链点 A 的位置。即作 $\angle C_2C_1O=90^\circ-\theta$, $\angle C_1C_2O=90^\circ-\theta$, 以 O 为圆心, OC_1 为半径作一辅助圆 η , 则 A 点在此辅助圆上, 至于 A 点在该圆上的位置则由其他附加条件来确定。在 A 点位置确定后, 便由式 $a = (\overline{AC_2} - \overline{AC_1})/2$, $b = (\overline{AC_2} + \overline{AC_1})/2$, 求得曲柄和连杆的长度, 如图 3-4 所示。

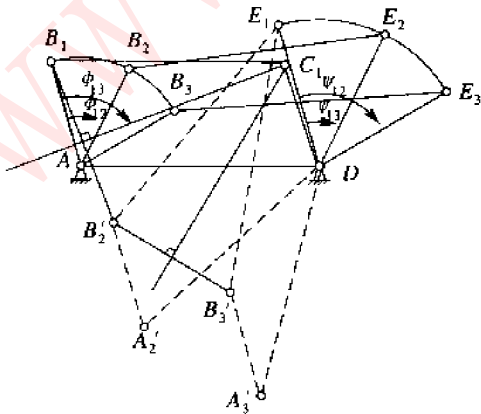


图 3-3

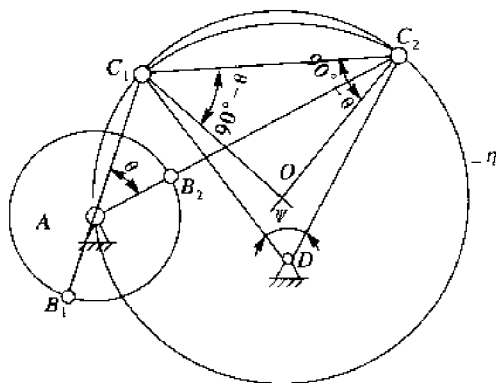


图 3-4

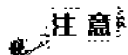
3.2 专题释疑

3.2.1 四杆机构设计的条件

在按给定行程速比系数设计四杆机构时,由图 3-4 中 $\triangle AC_1C_2$ 可知, $\angle A$ 为机构的极位夹角 θ ,两邻边为 θ , $AC_1=b-a$, $AC_2=b+a$,其中 a 及 b 分别为曲柄和连杆的长度,而对边 C_1C_2 的长度为摇杆 C 点的两极限位置的距离,即 $C_1C_2=2l_{CD}\sin(\psi/2)$ 。由此可见, $\triangle AC_1C_2$ 集中反映了此机构的运动、几何对参数(即 l_{CD} 、 a 、 b 和角 θ 及 ψ)的关系。因此,此类设计题目的求解一般可归结为如何按给定条件确定出机构的两个极端位置所形成的 $\triangle AC_1C_2$,并由此确定机构的运动尺寸参数。一般当已知机构摇杆 CD 或(滑块 C)的两个极限位置和行程速比系数 K (即已知 θ 角)时,若采用图解法,则可根据已知条件做出曲柄转动中心 A 所在的圆;若用解析法,则可根据 $\triangle AC_1C_2$,并按余弦定理来建立角 θ 与其二边的关系式。至于在此圆上 A 点位置的确定或该方程式的求解,还需另给定一些附加条件方可确定。

通常,附加条件有以下几种情况:

- ①要求设计成为某一四杆机构,如设计成曲柄摇杆机构,或双曲柄机构或双摇杆机构等;
- ②给定固定铰链 A 、 D 安装位置的某些限制,如要求 A 、 D 位于同一水平线上等;
- ③已给定该四杆机构中除连杆之外的某一杆的长度,如给定曲柄 AB 的长度 l_{AB} 或摇杆 CD 的长度 l_{CD} 或机架 AD 的长度 l_{AD} ;
- ④给出传动角 γ 的要求,如最小传动角 $\gamma_{\min} \geq 50^\circ$ 等;
- ⑤给定从动件的某一极限位置或连杆上某点的速度要求等。



注意 四杆机构的设计即使满足这些附加条件,其设计结果仍可能有多解。因此,此类题目的求解的正确性应以设计方法正确和满足设计要求为原则,而并非有惟一正确答案。

3.2.2 机构自锁、机构自由度为零、机构死点的本质区别

这3种情况都是机构不能运动,但它们之间有着本质的区别。机构自由度为零时,就其结构而言,机构本身各构件所受约束过多,而使整个机构成为一个桁架。机构的死点只是在机构运转周期内,在某一个点时运动的有效分力为0,致使在此点机构不能运动,但依靠外力可以顺利通过这一点,机构依然运动。机构自锁是指就其结构而言是可动的,但是机构所受摩擦力消耗能量,而使机构的效率为零,致使机构不能运动。

3.2.3 急回特性

一些装置要求在连续整周回转过程中,某一段的转速比另一段的转速要快。如图 3-5 所示的转动导杆机构就可满足此要求。转动导杆就其一个运动周期看,在曲柄整周回转过程中,导杆也可整周回转,没有急回特性,但在如图的特殊位置,曲柄转过 β 和 α ,导

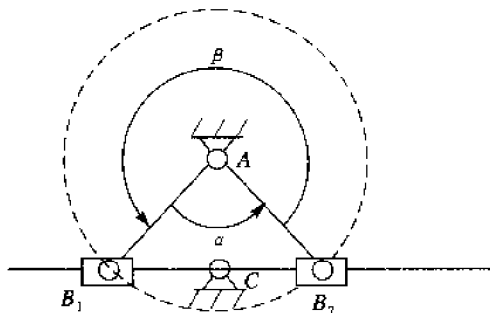


图 3 5

杆转动的角度都是 180° ，输入件的转速若是匀速的，则导杆在这两个过程中转速是不同的。

所以，若工作过程所用时间为 2 s ，回程的时间为 1 s ，则可根据上式设计出导杆机构。由机构的行程速比系数定义可知：

$$K = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{360^\circ - \alpha}{\alpha} = \frac{2}{1} = 2 \quad \alpha = 120^\circ$$

设机架 $AC = L_4$ ， $AB = L_1$ ，则

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{L_4}{L_1} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad L_1 = 2L_4$$

3.3 典型例题解析

例 1 已知3个构件的长度分别为： $a = 9$ ， $b = 11$ ， $E = 25$ ，拟把 E 分成两个整数部分（ $E = c + d = 25$ ），组成一个曲柄摇杆机构，试问 E 该怎样分？

【解答】 根据已知构件长度，最长杆必包含在 E 当中，即 c 、 d 当中必有一个为最长杆，设 d 为最长杆（设 c 为最长杆其结果相同），要组成曲柄摇杆机构，则根据“最长杆与最短杆之长度之和必小于其余两杆长度之和”的条件， c 必然不是最短杆，否则不满足杆长之和条件，故可知， a 杆为最短杆。根据曲柄存在条件，有

$$a + d < b + c, \quad a + (E - c) < b + c, \quad 9 + 25 - c < 11 + c$$

所以 $c > 11.5$ ，取 $c = 12$

则 $d = 13$

以最短杆 a 为连架杆，即可得到曲柄摇杆机构。

例 2 图3-6 (a)所示铰链四杆机构中，已知各杆长度 $l_{AB} = 20\text{ mm}$ ， $l_{BC} = 60\text{ mm}$ ， $l_{CD} = 85\text{ mm}$ ， $l_{AD} = 50\text{ mm}$ 。要求：

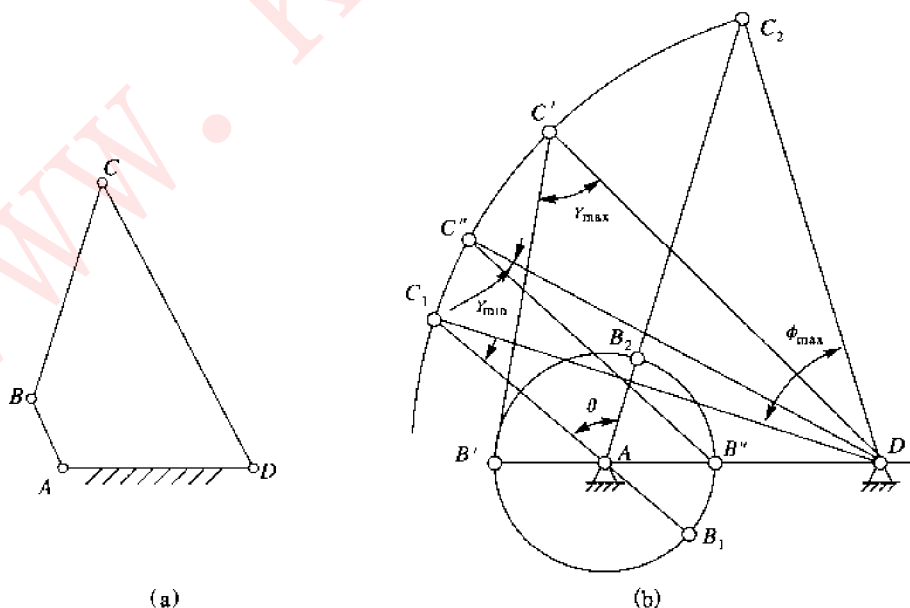


图 3-6

- ①试确定该机构是否有曲柄,并给出机构的名称;
- ②判断此机构是否存在急回运动。若存在,试确定其极位夹角,并估算行程速比系数;
- ③若以构件 AB 为原动件,试画出该机构的最小传动角和最大传动角位置,并分析该机构的传动性能;
- ④回答:在什么情况下此机构有死点位置?

【分析】 此题是关于平面四杆机构基本知识方面的题目,可从其基本概念着手解题。

【解答】

①因 $l_{AB} + l_{CD} = 20 + 85 = 105 \text{ mm} < l_{BC} + l_{AD} = 60 + 50 = 110 \text{ mm}$,且以最短杆 AB 的邻边为机架,所以该机构为曲柄摇杆机构。

②取 $\mu_l = 1 \text{ mm/mm}$ 分作摇杆 CD 处两极位时机构位置图 AB_1C_1D 和 AB_2C_2D ,如图3-6(b)所示,图中 $\angle C_1AC_2 = \theta$ 为极位夹角,且由图量得 $\theta = 59^\circ$,故此机构有急回特性,可求得

$$K = (180^\circ + \theta) / (180^\circ - \theta) = (180^\circ + 59^\circ) / (180^\circ - 59^\circ) \approx 1.98$$

③以曲柄 AB 为原动件,则机构在曲柄 AB 与机架 AD 共线的两位置时存在最小传动角和最大传动角。用作图法作出机构的这两个位置 $AB'C'D$ 与 $AB''C'D$,由图可知, $\gamma_{\min} = \angle B'C'D = 55^\circ$, $\gamma_{\max} = \angle B''C'D = 15^\circ$ 。因 $\gamma_{\min} = 15^\circ < 40^\circ$,故机构的传力性能较差,需改变机构的尺寸以改善传动性能。

④若以曲柄 AB 为原动件,如前所述 $\gamma_{\min} = \angle B''C'D = 15^\circ$,所以机构的传动角 $\gamma \geq 15^\circ$,不存在 $\gamma = 0^\circ$ 的位置,故该机构无死点位置。若以摇杆 CD 为原动件时,则从动件曲柄 AB 与连杆 BC 所夹锐角为机构的传动角 γ 。此时存在曲柄与连杆共线两位置,传动角 $\gamma = 0^\circ$ 位置,故机构存在两个死点位置。



本例为平面四杆机构的基本特性分析的典型例子。从此机构分析可知,四杆机构的分析常常涉及机构的类型、急回运动、传动角及死点这4方面的问题。其中,机构类型的判别关键是确定机构是否存在曲柄;机构急回运动分析的关键是确定机构的极位夹角 θ 的大小;而传动角和死点的分析要特别注意的是它与机构原动件有关。至于极位夹角 θ 和传动角 γ 大小的确定,除用作图法外,还可以用解析法进行精确求解,但求解较为繁琐。

例3 图3-7(a)所示为一个六杆机构。曲柄 AB 为主动件,曲柄轴 A 的转动中心位于过 D 点平行于滑块 F 移动导路的直线上。现要求满足机构的行程速比因数 $K = 1$,连杆 EF 在 F_1 和 F_2 处的压力角 $\alpha = 10^\circ$, $l_{AB} = 100 \text{ mm}$,其他有关尺寸见图3-7所示,试设计此机构。

【分析】 此题虽为设计六杆机构,但可分两部分设计,先根据给定的条件设计曲柄滑块机构,然后根据给定行程速比系数 $K = 1$ 的特点,设计满足要求的铰链四杆机构。

【解答】

解法1: 用反转法设计。先取 $\mu_l = 10 \text{ mm/mm}$ 作题给条件的位置图,如图3-7(b)所示。在连杆 EF 位置线上任取一点 N ,即可得连杆 FN 的两个位置 F_1N_1 及 F_2N_2 。为了求 E_1 的位置,视 F_1N_1 为机架,作 $\triangle F_1N_1D' = \triangle F_1N_1D$ 可求得 D' 点。再作连线 DD' 的中垂线 d_{12} ,且于 F_1N_1 交于点 E_1 ,即为连杆 EF 与摇杆 ED 的铰接点 E 在位置1的位置,故设计得摇杆滑块机构的 DE_1F_1 及 DE_2F_2 两位置。

解法2: 用半角转动法设计。选定 N 点后,分别作连线 F_1F_2 和中垂线 f_{12} 和 n_{12} ,且交于点 P_{12} ,即为连杆 EF 的转动极。根据等视角定理,作 $\angle DP_{12}E = \frac{1}{2} \angle F_2P_{12}F_1 = \frac{1}{2} \theta_{12} = \alpha$ (此处连杆 EF 两位置相对转角 $\theta_{12} = 2\alpha$),即求得了活动铰链 E 在位置1的位置 E_1 。

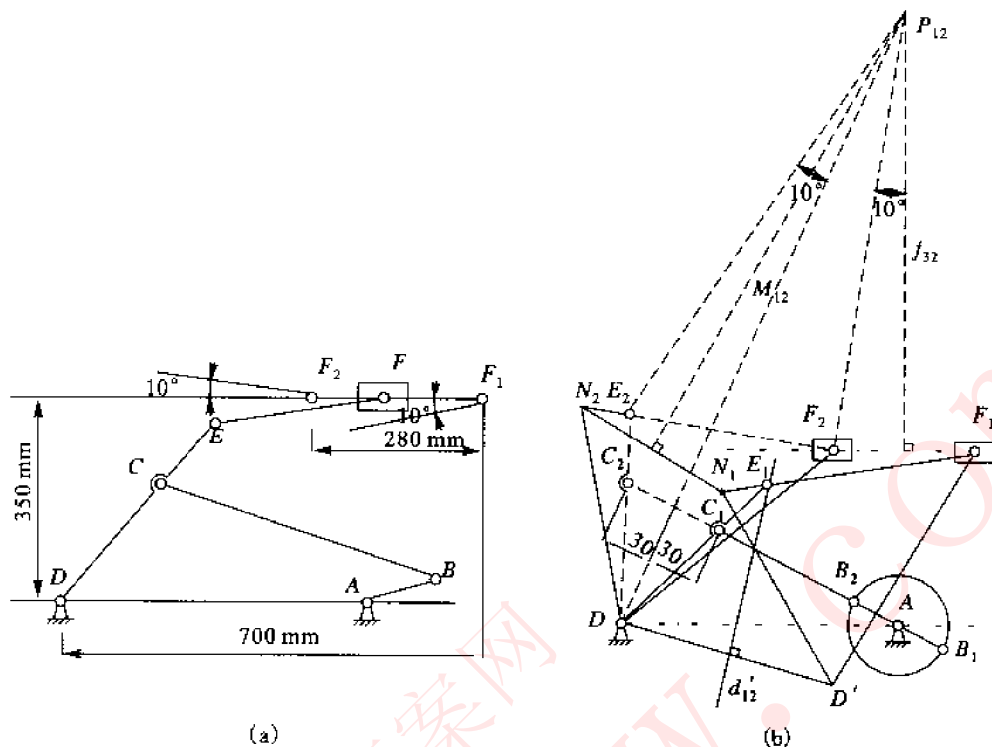


图 3-7

然后再设计曲柄摇杆机构 $ABCD$ 。因其机构 $K=1$, 则 $\theta=0^\circ$, 即摇杆 CD 处在两极端位置时, 曲柄 AB 与连杆 BC 共线的两位置将重合 (即 AC_1 与 AC_2 重合), 且有 $\overline{C_1C_2}=2\overline{AB}$ 。于是, 由连线 DP_{12} 沿其垂直方向向两侧取长度为 10 mm , 在摇杆 DE 的两位置上 C_1 和 C_2 点, 再作 C_1C_2 连线的延长线与 AD 线相交于 A 点, 即得曲柄 AB 的转动轴心 A 。由图 3-7 可知: $l_{BC}=495\text{ mm}$, $l_{CD}=270\text{ mm}$, $l_{DE}=415\text{ mm}$, $l_{EF}=395\text{ mm}$, $l_{AD}=550\text{ mm}$ 。



对于多杆机构的设计, 常常将其划分为几个四杆机构来设计。因此要注意四杆机构的划分及其各部分的连接关系问题, 以便正确确定四杆机构的设计次序和相应的设计条件。

例 4 图 3-8 所示的插床用转动导杆机构中, 导杆 AC 可作整周转动, 已知 $l_{AB}=50\text{ mm}$, $l_{AD}=40\text{ mm}$, 行程速比系数 $K=2$, 求曲柄 BC 的长度 l_{BC} 及插刀 P 的行程。

【分析】 本题是利用机构急回特性的概念来设计机构。只要理解了行程速比系数 K 的意义, 此题是不难解出的。

【解答】 此机构由一个对心曲柄滑块机构和一个转动导杆机构组成。 P 点的行程 S 为 AD 与 DP 拉直共线时 P 点的两极限位置之间的距离, 故可知 $S=2l_{AD}=80\text{ mm}$,

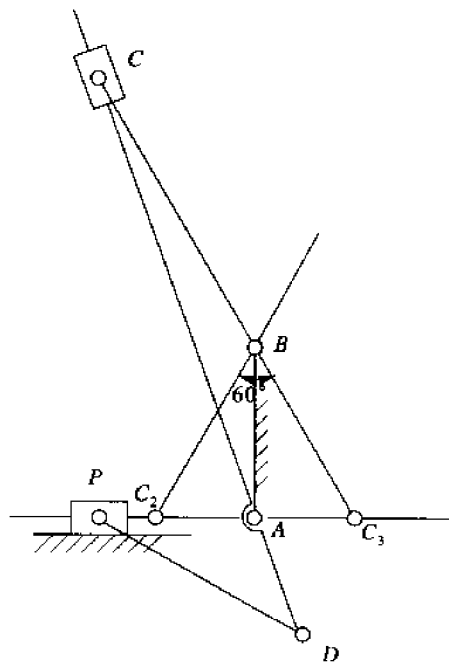


图 3-8

由极位夹角的概念可知,当从动件上 P 点位于极限位置 P_1 、 P_2 时,相应的主件 BC 处于 BC_1 和 BC_2 两位置, BC_1 与 BC_2 所夹锐角即为极位夹角 θ ,由于 $K=2$,所以 $\theta=180^\circ \frac{K-1}{K+1}=60^\circ$,则 $l_{BC}=l_{AB}/\sin 60^\circ=57.5 \text{ mm}$ 。



①对心曲柄滑块机构及转动导杆机构均无急回特性,但当它们组合后就可以有急回特性,机构有无急回特性应具体情况具体分析。

②分析机构有无急回特性时,应从急回特性的概念出发,找机构的极位夹角,从而确定机构是否有急回特性。

3.4 原教材习题详解

本章习题所涉及的内容主要是:实现连杆的几个位置设计;实现连架杆间对应的几个位置设计,实现给定行程速比系数 K 的设计和实现按给定轨迹的设计等。在完成上述设计命题时,还需注意检验的附加要求有:曲柄存在要求、运动连续性检验、传力条件要求即 ($\gamma_{\min} > [\gamma]$)、机构外廓尺寸和构件尺寸是否合适等。一般说,上述设计已有确定的方法,只要按部就班即可完成。解题的难点在于如何把一个实际的设计要求,转化为典型的设计命题。这又是一个实践的过程,多做题、多思考,自然有助于找出规律。

解本章习题时,题要完整。在求出各铰链点的位置后,要画出转动副、移动副、机架,并用铅笔加深各杆线条,以区别于作图细线。一张完整的设计图应包括:比例尺、机构运动简图、各杆长度尺寸。如有附加要求与问题时,则应根据设计结果论述完成。

3-1 题

【解答】 参见教材上的图。图(a)为曲柄摇块机构。图(b)所示机构是由偏心盘1、套环2、滑杆3和机架泵体4所组成。其中偏心盘1与泵体4构成转动副A,又与套环2构成转动副B,套环2与滑杆3构成转动副C,滑杆3与泵体4构成移动副,而套环2与泵体4构成平面高副,但由于套环2的外半径与偏心距AB之和始终等于泵体油腔的内半径,构成了虚约束,故为曲柄滑块机构。图(c)为转动导杆机构。

3-2 题

【分析】 该装置是曲柄滑块机构,转动副B扩大,曲柄演化为偏心轮,加大滑块的结构尺寸,使连杆包括在滑块之内。

3-3 题

【分析】 此题是关于机构是否有曲柄的条件方面的问题,可从四杆机构有曲柄的条件入手求解。本题讨论限于AD为机架。

【解答】 1) 当AD为机架,若此机构为曲柄摇杆机构,且AB为曲柄,则AB为最短构件,于是根据曲柄存在条件有

$$l_{AB} + l_{BC} \leq l_{CD} + l_{AD}$$

即
故

$$l_{AB} + 50 \leq 35 + 30$$

$$l_{AB} \leq 15$$

由上式知, l_{AB} 的最大值为 15 mm。

2) 当 AD 为机架, 若此机构为双曲柄机构, 则 AD 为最短构件, 根据曲柄存在条件, 分为两种情况讨论:

① 如 l_{AB} 为最长构件, 则有: $l_{AD} + l_{AB} \leq l_{BC} + l_{CD}$

即

$$30 + l_{AB} \leq 50 + 35 \quad \text{所以 } l_{AB} \leq 55$$

此时 l_{AB} 的最小值应根据 $50 < l_{AB} \leq 55$ 选取。

② 如 l_{AB} 不是最长构件, 则有 $l_{AD} + l_{BC} \leq l_{AB} + l_{CD}$

即

$$30 + 50 \leq l_{AB} + 35 \quad \text{所以 } l_{AB} \geq 45$$

综合上述两种情况, 可知 l_{AB} 的最小值应为 45 mm。

3) 当 AD 为机架, 若此机构为双摇杆机构, 则将上述能成为曲柄摇杆机构和双曲柄机构的 l_{AB} 长度范围排除, 即可得双摇杆机构 l_{AB} 的范围为

$$15 < l_{AB} < 45 \quad \text{或} \quad l_{AB} > 55$$

3-4 题

【分析】 这是设计题。从极位夹角概念及其与行程速比系数 K 之间的关系入手求解。

【解答】 选取比例尺 μ_l (m/mm), 作出摇杆的一个极限位置 CD。

$$\text{由 } \theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 180^\circ \times \frac{1.5-1}{1.5+1} = \frac{1}{5} \times 180^\circ = 36^\circ$$

连 AC 并以它为准作出 θ 角, 得另一极限位置 AC' 及 AC'', 则 C'D 或 C''D 为摇杆上另一极限位置。

由

$$AC' = l_{AB} + l_{BC}$$

$$AC = l_{BC} - l_{AB}$$

得

$$l_{AB} = 50 \text{ mm} \quad l_{BC} = 120 \text{ mm}$$

另由

$$AC = l_{AB} + l_{BC}$$

$$AC'' = l_{BC} - l_{AB}$$

故得另一解 $l_{AB} = 22.5 \text{ mm} \quad l_{BC} = 48.5 \text{ mm}$

3-5 题

【分析】 从题图中知 DC 与 DE 是同一构件, 当滑动齿轮的行程位置确定, 即 E 点的两个极限位置确定时, DC 的相应位置就已确定。此题目相当于给定连架杆的两个对应位置 AB_1 、 AB_2 和 DC_1 、 DC_2 以及固定铰链 A、D 的位置, 设计四杆机构, 只需设计出活动铰链 B 点位置即可。可采用转换机架法进行设计。

【解答】 如图 3-10, 选取 μ_l (m/mm), 由已知各几何尺寸作图, 得构件 CD 的两个极限位置 C_1D 及 C_2D 。刚化 $\triangle AC_2D$, 并将其绕 A 点转动, 当 AD 处于垂直位置

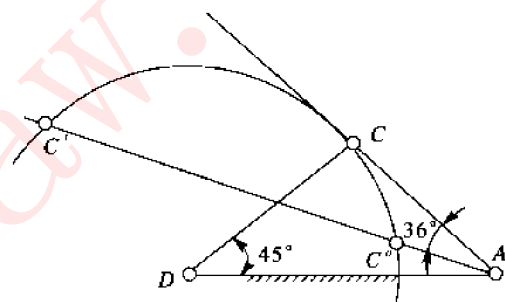


图 3-9

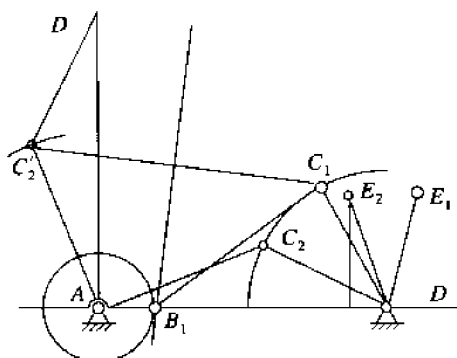


图 3-10

时, $\triangle AC_2D'$ 即为 $\triangle AC_2D$ 的新位置。连直线 C_1C_2 , 并作其垂直平分线, 此垂直平分线与水平线的交点即为 B_1 , 于是 AB_1C_1D 即为所求的机构, 由图得

$$l_{AB} = AB_1\mu_l = 48 \text{ mm}$$

$$l_{BC} = B_1C_1\mu_l = 180 \text{ mm}$$



在转换机架时, 选取未知铰链点的连架杆 AB_1 为机架, 则连架杆 DC 转换为已知铰链点的连杆。因为操纵手柄处于互相垂直两位置, 将原机构位置 2 的 $\triangle AC_2D$ 刚化并绕 A 旋转 90° (使 AB_2 与 AB_1 重合), 得到 $\triangle AC_2'D'$, 则 DC_1 , $D'C_2'$ 就是以 AB_1 为机架时连杆 DC 的两个位置。问题就转换为已知连杆铰链点位置, 设计固定铰链点的问题。因为已规定 AB_1 处于水平位置, 所以答案是唯一的。

3-6 题

【分析】 此题给定了连杆 BC 的两个位置, 设计固定铰链点 AD 。

【解答】 如图 3-11, 选 μ_l (m/mm), 作出连杆的两个位置 B_1C_1 及 B_2C_2 , 连接 B_1B_2 和 C_1C_2 并分别作其垂直等分线, 各垂直等分线与 YY 的交点即为 A 和 D , 于是 AB_1C_1D 即为所求的机构, 由图得

$$l_{AB} = AB_1\mu_l = 69 \text{ mm}$$

$$l_{CD} = C_1D\mu_l = 117.5 \text{ mm}$$

$$l_{AD} = AD\mu_l = 98 \text{ mm}$$



如果考虑炉门的自重, 应注意保证炉门的开闭停靠稳定。重心线作用在两连架杆线交点的右边, 不稳定。当重心线作用在两连架杆线交点的左边, 稳定。

为保证炉门的开闭停靠稳定, 可采用:

①在 AB 上加一弹簧, 在其作用下是开、闭两位置炉门靠紧炉壁;

②在 AB 上加一操作手柄, 手柄上配一重块, 手柄杆与 AB_1 成 90° 。依靠重块使 AB 在炉门关闭时, 有一逆时针转动趋势, 而在炉门开启时, 有顺时针转动趋势, 从而使炉门压紧在炉壁上;

③炉壁上安放两块永久磁铁, 利用磁力保证炉门被紧吸在炉壁上。

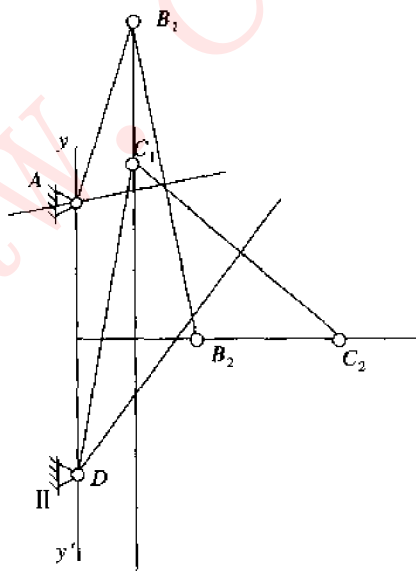


图 3-11

3-7 题

【解答】

解法 1: 如图 3-12 所示, 选取 μ_l (m/mm), 作出摇杆的两个极限位置 C_1D 及 C_2D , 计算

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 180^\circ \times \frac{1.25-1}{1.25+1} = 20^\circ$$

作出 $\theta = 20^\circ$ 时铰链 A 的轨迹圆 I, 其圆心为 O 。

以 C_2 (或 C_1) 为圆心, $2l_{AB} = 150 \text{ mm}$ 为半径作圆 II。

延长直线 DO 与圆 I 交于 O' , 以 $O'C_1$ (或 $O'C_2$) 为半径, 以 O' 为圆心作圆 III。

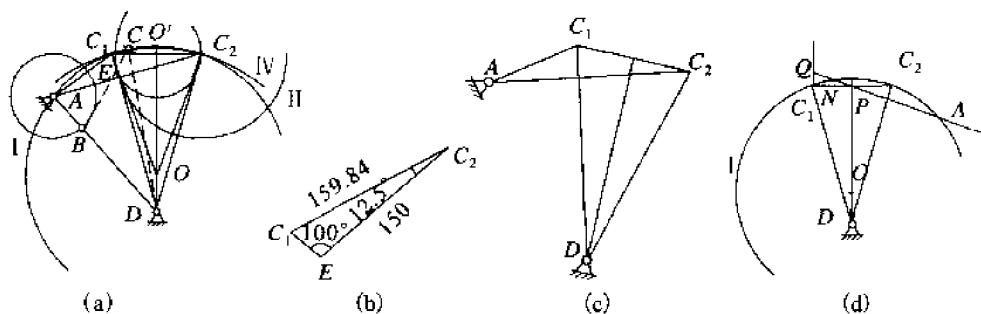


图 3-12

圆Ⅱ及圆Ⅲ交于 E 点, 连接 C_2E 并延长使之交圆Ⅰ于 A 点, 则 A 点即为所要求的铰链中心。

作机构的从动件处于 γ_{\min} 的位置, 即为当曲柄 AB 与机架 AD 重叠共线时, 以 B 为圆心, l_{BC} 为半径画弧与圆弧Ⅳ的交点即为 C 点 (圆弧为摇杆上 C 点的轨迹), 故 $\angle BCD = \gamma_{\min}$, 现在 $\angle BCD > 40^\circ$, 在允许值范围内。

于是 ABCD (图 3-12 (a) 中虚线所示) 即为所要求的曲柄摇杆机构, 由图得

$$l_{BC} = 176 \text{ mm}$$

$$l_{AD} = 278.7 \text{ mm}$$



解法 1 的作图方法, 其理论根据可证明如下:

$$\text{因 } AC_1 = AE \quad \text{所以 } \angle AEC_1 = \angle AC_1E = \frac{180^\circ - \theta}{2} = 80^\circ$$

$$\text{于是 } \angle C_1EC_2 = 180^\circ - \angle AEC_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

因此待求的 E 点, 可以从一个辅助圆的圆周上找, 此辅助圆Ⅲ可以 C_1C_2 为弦, 该弦所对的圆周角应为 $\angle C_1EC_2 = 100^\circ$, 如此辅助圆Ⅲ的圆心为 O' , 则在 O' 的圆心角 $\angle C_1O'C_2 = 160^\circ$, 于是在 $\triangle O'C_1C_2$ 中, $\angle O'C_1C_2 = \angle O'C_2C_1 = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 80^\circ$ 。

故在四边形 $OC_1O'C_2$ 中, $\angle OC_1O' = 90^\circ - \theta + 10^\circ = 80^\circ$, 同理 $\angle OC_2O' = 90^\circ - \theta + 10^\circ = 80^\circ$, 而 $\angle C_1O'C_2 = 160^\circ$, $\angle C_1OC_2 = 2\theta = 40^\circ$, 即四边形 $OC_1O'C_2$ 四内角之和未为 360° , 故 C_1, O', C_2 、三点应共圆弧, 现已知 C_1, C_2 两点在圆弧Ⅰ, 故 O' 点也应在圆弧Ⅰ上, 故延长 DO 线, 它与圆弧Ⅰ的交点即为辅助圆Ⅲ的圆心 O' 。

又因 $EC_2 = AC_2 - AC_1 = 2l_{AB}$, 故以 C_2 为圆心, 以 $2l_{AB}$ 为半径作辅助圆Ⅱ, 则 E 点又应在次辅助圆Ⅱ的圆周上。

故辅助圆Ⅱ和辅助圆Ⅲ的交点即为 E 点, 连接 EC_2 即为曲柄与摇杆拉直共线的位置, 故延长 EC_2 , 它与圆Ⅰ的交点即为所需的铰链中心 A。

解法 2: 分析 $\triangle C_1EC_2$, 在此三角形中, 已知 $l_{C_2E} = 2l_{AB}$, $l_{C_1C_2} = 2l_{CD} \sin \frac{\psi}{2}$, $\angle C_1EC_2 = 100^\circ$, 故可在图纸的一角先作出 $\triangle C_1EC_2$, 从此图中可量得 $\angle C_1C_2E = 12.5^\circ$, 如 3-12 (b) 图所示。

于是在机构图中, 以 C_1C_2 为基准, 作 $\angle C_1C_2E$ 等于上面所求得的数值, 因此 C_2E 线即可定出, 将其延长即可如解法 1 求得 A 点。

解法 3: 如图 3-12 (c) 如果用解析法列方程式求解, 则有

$$l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB}$$

$$l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB}$$

$$l_{C_1C_2} = 2l_{CD} \sin \frac{\psi}{2}$$

$$\text{由} \quad (l_{C_1C_2})^2 = (l_{AC_1})^2 + (l_{AC_2})^2 - 2l_{AC_1}l_{AC_2} \cos \theta$$

将有关数值代入得

$$(2 \times 290 \times \sin 16^\circ)^2 = (l_{BC} - 75)^2 + (l_{BC} + 75)^2 - 2(l_{BC} - 75)(l_{BC} + 75) \cos 20^\circ$$

故

$$l_{BC} = 175.85 \text{ mm}$$

于是

$$l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB} = 175.85 - 75 = 100.85 \text{ mm}$$

$$l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB} = 175.85 + 75 = 250.85 \text{ mm}$$

如图分别以 C_1 、 C_2 为圆心, 分别以 l_{AC_1} 、 l_{AC_2} 为半径画圆弧, 两圆弧交于 A 点, 则

$$l_{AD} = AD_{H_1} = 270 \text{ mm}$$

解法 4: 因 $l_{AC_2} - l_{AC_1} = 2a$, 即 A 点到 C_1 、 C_2 两点之差为定长, 则 A 点必在以 C_1 、 C_2 为焦点的双曲线上, 作此双曲线的渐近线与 A 点的轨迹圆的交点, 即为所求的 A 点, 于是得作图步骤如下 (如图 3-12 (d) 所示):

①作已知线段 $\overline{C_1C_2}$ 及其中点 P , 并量取 $PN = a$ 。

②以 PN 为直角边, 作直角三角形 PNQ , 使

$$NQ = \sqrt{C^2 - a^2}$$

式中: $C = C_1\bar{P} = C_2\bar{P} = \frac{1}{2}\overline{C_1C_2}$, a 为曲柄长度,

即

$$NQ = \sqrt{(80)^2 - (75)^2} = 27.84 \text{ mm}$$

$$\overline{PQ} = C$$

③连接 \overline{QP} 并延长与圆 I (A 点的轨迹圆) 交于 A 点, 即为所求的点。



提示 比较解法 1 和 3, 可看出图解法误差较大。有附加条件的设计原理与按行程速比系数设计的原理相同, 同样可设想已知连杆长度的设计。若已知机架 AD 的长度, 则设计更为简单。

3-8 题

【分析】如图 3-13 所示, 给定了连杆长度 (附加条件), 机构设计便有确定的解答。假设 A 为所求得的曲柄铰链中心, 延长 C_1A 至 E , 使 $AE = AC_2$ ($= l_{BC} + l_{AB}$), 则 $C_1E = 2l_{BC}$, $\angle C_1EC_2 = \theta/2$, E 点必在以 C_1C_2 为弦, 圆周角为 $\theta/2$ 的圆上。反之找到了 E 点就确定了 A 点。

【解答】选取 $\mu_l = 0.005 \text{ m/mm}$, 作出摇杆的两个极限位置 C_1D 及 C_2D , 作铰链 A 中心的轨迹圆。以 C_1 点为圆心, $2l_{BC}$ 为半径作圆 II。

以 C_1C_2 为弦, 作此弦所对圆周角为 $\frac{\theta}{2}$ 的圆 III。

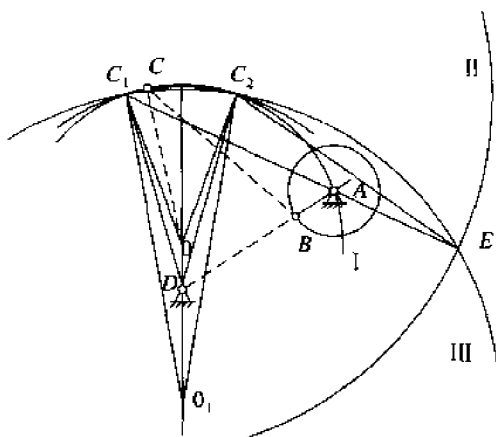


图 3-13

圆Ⅱ及圆Ⅲ交于 E 点, 连接 C_1E 与圆Ⅰ交于 A 点, 此 A 点即为所求的铰链中心。

由 $l_{AC_1} = l_{BC} + l_{AB} = 325 \text{ mm}$

故 $l_{AB} = 325 - 260 = 65 \text{ mm}$

$$l_{AD} = AD\mu_l = 255 \text{ mm}$$

作出机构的从动件处于 γ_{\min} 的位置, 如图中虚线所示, 量得 $\angle BCD = \gamma_{\min} > 40^\circ$, 即 γ_{\min} 在允许值范围内。

3-9 题

【分析】 题目要求设计一偏置曲柄滑块机构。当曲柄摇杆机构的摇杆 DC 变得无限长时, 铰链点 C 的运动就是平动, 而摇杆 DC 演变为滑块。因此可以按给定行程速度变化系数 K 来设计曲柄摇杆机构的方法设计曲柄滑块机构。

【解答】 如图 3-14 所示, 选取一定比例尺

$$\mu_l \text{ (m/mm)}, \text{ 计算 } \theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 36^\circ$$

作以 C_1C_2 为弦其所对圆周角为 θ 的圆, 圆与偏距位置线的交点即为所要求的铰链中心 A。

由 $l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB} = 25 \text{ mm}$

及 $l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB} = 68.5 \text{ mm}$

得 $l_{AB} = 21.5 \text{ mm}, l_{BC} = 46.5 \text{ mm}$

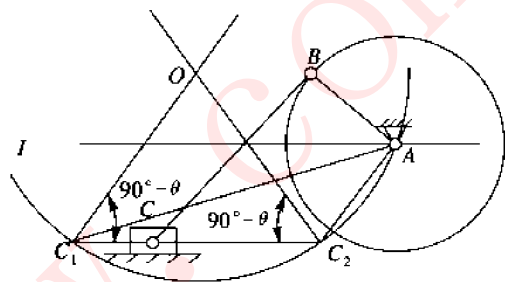


图 3-14

3-10 题

【分析】 此机构由一个对心曲柄滑块机构和一个转动导杆机构组成。E 点的行程 S 为 AD 与 DE 共线时 E 点的两极限位置之间的距离, 由极位夹角的概念可知, 当从动件上 E 点位于极限位置 E_1 、 E_2 时, 相应的主件 BC 处于 BC_1 和 BC_2 两位置, BC_1 与 BC_2 所夹角 $180^\circ - \beta$ 即为极位夹角 θ 。本题关键是正确确定极位夹角的位置。

【解答】 由于 $K=1.5$,

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 36^\circ, \beta = 180^\circ - \theta = 144^\circ$$

$$l_{BC} = b = l_{AB} / \cos \frac{\beta}{2} - \frac{50}{\cos 72^\circ} = 161.81 \text{ mm}$$



①对心曲柄滑块机构及转动导杆机构均无急回特性, 但当它们组合后就可以有急回特性, 机构有无急回特性应具体情况具体分析。

②分析机构有无急回特性时, 应从急回特性的概念出发, 找机构的极位夹角, 从而确定机构是否有急回特性。

3-11 题

【分析】 牛头刨床机构是由一个摆动导杆机构和一个滑块机构组成。摆动导杆机构具有急回特性且其摆角等于其极位夹角, 即 $\phi = \theta$ 。题目要求刨头在整个行程中有较小的压力角, 导路通过 F 点时的最大压力角小于导路在 D 点运动最高点 F 之上或低于最低点 D_1 (D_2) 时的最大压力角, 但此时整个行程平均压力角较大, 平均压力角最小时导路应通过 GF 的中心。最大压力角出现在曲柄与导路垂直位置。

【解答】 摆动导杆机构摆角

$$\psi = \theta = 180^\circ \times \frac{1.5-1}{1.5+1} = 36^\circ$$

由图可见, $D_1D_2 = E_1E_2 = H = 320 \text{ mm}$, 并从 $\triangle CGD_1$

得
$$l_{CG} = \frac{H/2}{\sin(\psi/2)} = \frac{160}{\sin 18^\circ} = 517.8 \text{ mm}$$

从 $\triangle AB_1C$ 得
$$l_{AC} = \frac{l_{AB}}{\sin(\psi/2)} = \frac{95}{\sin 18^\circ} = 307.4 \text{ mm}$$

为使刨头在整个行程中有较小的压力角, 刨头导路应通过 GF 的中心, 故得

$$\begin{aligned} y &= l_{CD} + \frac{1}{2} l_{CF} = l_{CG} + \frac{1}{2} (l_{CF} - l_{CG}) = \frac{1}{2} (l_{CG} + l_{CF}) \\ &= \frac{1}{2} (l_{CD} \cos \frac{\psi}{2} + l_{CD}) = \frac{l_{CD}}{2} (\cos 18^\circ + 1) = 505.1 \text{ mm} \end{aligned}$$

3-12 题

【分析】 本题给定了连架杆的 3 个对应位置以及机架长度, 要求设计铰链四杆机构。可以采用转换机架法(即旋转法)来进行设计。

【解答】 取 μ_l (mm/mm)。作 AB 及 DE 的 3 对对应位置 $AB_1, DE_1; AB_2, DE_2; AB_3, DE_3$ 。

刚化 $\triangle DE_2B_2$ 及 $\triangle DE_3B_3$, 绕 D 转动, 使 DE_2, DE_3 分别与 DE_1 重合, 而得到点 B_2' 及 B_3' 。

连接 B_1B_2' 及 $B_2'B_3'$, 并分别作其垂直等分线, 此两垂直等分线交于 C_1 点, 于是 $AB_1C_1D_1$ 即为所求的机构。由图 3-15 量得 $l_{DC} = 48 \text{ mm}$, $l_{CD} = 18.6 \text{ mm}$ 。

3-13 题

【分析】 要求设计的四杆机构的两连架杆能够按给定的对应位移运动。因为在 $x=1, 2, 4$ 所对应的位置要求能够准确实现, 所以首先按给定的函数关系确定此 3 个对应的角位移, 然后用图解法或解析法求解。机构实现的位移函数可以保证在要求的 3 个位置上精确没有误差, 而一般在其余位置上将产生偏差。

【解答】 选用图解法, 如图 3-16 所示。

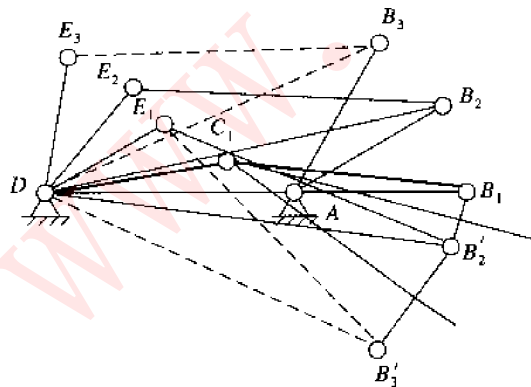


图 3-15

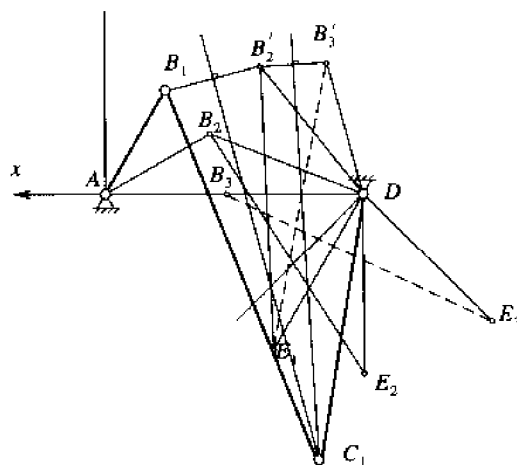


图 3-16

1) 计算 x, y 的 3 对对应位置

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } y = \frac{x}{2} (x+2) = \frac{2}{2} \times (2+2) = 4$$

当 $x=4$ 时, $y = \frac{x}{2} (x+2) = \frac{4}{2} \times (4+2) = 12$

当 $x=6$ 时, $y = \frac{x}{2} (x+2) = \frac{6}{2} \times (6+2) = 24$

2) 计算 3 对对应位置的相应 ϕ 、 ψ 之值

根据已知条件 $x_0=0$ 和 $x_m=6$, 得 $y_0 = \frac{x_0}{2} (x_0+2) = 0$, $y_m = \frac{x_m}{2} (x_m+2) = 24$

根据经验选取 $\varphi_m = 90^\circ$ 和 $\psi_m = 90^\circ$, 得比例系数为

$$\mu_\phi = \frac{x_m - x_0}{\varphi_m} = \frac{6 - 0}{90^\circ} = \frac{6}{90^\circ}$$

$$\mu_\psi = \frac{y_m - y_0}{\psi_m} = \frac{24 - 0}{90^\circ} = \frac{24}{90^\circ}$$

利用比例系数 μ_ϕ 、 μ_ψ 求得四杆机构连架杆对应角位移插值结点位置为

$$\phi = \frac{1}{\mu_\phi} (x - x_0), \quad \psi = \frac{1}{\mu_\psi} (y - y_0)$$

$$\phi_1 = \frac{\Delta x_1}{\mu_\phi} = \frac{90^\circ}{6} \times (2 - 0) = 30^\circ, \quad \psi_1 = \frac{\Delta y_1}{\mu_\psi} = \frac{90^\circ}{24} \times (4 - 0) = 15^\circ$$

$$\phi_2 = \frac{\Delta x_2}{\mu_\phi} = \frac{90^\circ}{6} \times (4 - 0) = 60^\circ, \quad \psi_2 = \frac{\Delta y_2}{\mu_\psi} = \frac{90^\circ}{24} \times (12 - 0) = 45^\circ$$

$$\phi_3 = \frac{\Delta x_3}{\mu_\phi} = \frac{90^\circ}{6} \times (6 - 0) = 90^\circ, \quad \psi_3 = \frac{\Delta y_3}{\mu_\psi} = \frac{90^\circ}{24} \times (24 - 0) = 90^\circ$$

3) 按 ϕ 、 ψ 的 3 对对应位置设计四杆机构 3 对对应位置。按转换机架法 (旋转法) 作图设计。

取 $\mu_l = 0.001 \text{ m/mm}$, 作出 AB_1 、 DE_1 ; AB_2 、 DE_2 ; AB_3 、 DE_3 。

连 $\triangle B_2E_2D$ 及 $\triangle B_3E_3D$, 并将它们绕 D 点转动, 使 DE_2 及 DE_3 分别与 DE_1 重合。

得到点 B'_2 及 B'_3 。

连接 $B_1B'_2$ 及 $B'_2B'_3$, 并分别作其垂直等分线。它们相交于 C_1 点, AB_1C_1D 即为所求的机构。

由图量得 $l_{AB} = 109 \text{ mm}$, $l_{CD} = 76 \text{ mm}$ 。



①用四杆机构两连架杆对应角位移关系来模拟实现某一函数关系, 可用插值法求出若干个插值点上对应角位移关系, 利用这关系来设计四杆机构。

②必须根据已知条件确定各相应参变量相互间的比例系数, 把给定函数 $y=f(x)$ 转换为角位移方程 $\psi=F(\varphi)$ 。

3-14 题

【分析】 题目给出了连架杆的 3 组对应位移, 要求用解析法进行设计。

【解答】 将 ϕ 、 ψ 的 3 对对应值代入教科书中的式 (3-26) 得

$$\begin{cases} \cos 45^\circ = P_0 \cos 52^\circ 10' + P_1 \cos (52^\circ 10' - 45^\circ) + P_2 \\ \cos 90^\circ = P_0 \cos 82^\circ 10' + P_1 \cos (82^\circ 10' - 90^\circ) + P_2 \\ \cos 135^\circ = P_0 \cos 112^\circ 10' + P_1 \cos (112^\circ 10' - 135^\circ) + P_2 \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} 0.7071 = 0.6133 P_0 + 0.9921 P_1 + P_2 & (1) \\ 0 = 0.1363 P_0 + 0.9906 P_1 + P_2 & (2) \\ -0.7071 = -0.3772 P_0 + 0.9216 P_1 + P_2 & (3) \end{cases}$$

联立并整理得

$$\begin{cases} 0.7071 = 0.477 P_0 + 0.0015 P_1 \\ 0.7071 = 0.5135 P_0 + 0.069 P_1 \end{cases}$$

解此方程组得

$$P_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0.7071 & 0.0015 \\ 0.7071 & 0.069 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.477 & 0.0015 \\ 0.5135 & 0.069 \end{vmatrix}} = 1.485$$

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0.477 & 0.7071 \\ 0.5135 & 0.7071 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.477 & 0.0015 \\ 0.5135 & 0.069 \end{vmatrix}} = 0.803$$

由式 (2) 得 $P_2 = 0.5918$

由教科书中的式 (3-25) 得

$$P_0 = n \quad \text{即} \quad n = 1.485$$

$$P_1 = \frac{n}{p}, \quad \text{故} \quad p = \frac{1.481}{0.8012} = 1.849$$

$$P_2 = \frac{p^2 + n^2 + 1 - m^2}{2p} = 0.593, \quad \text{故} \quad m = 2.103$$

最后, 按

$$p = \frac{d}{a} \quad \text{所以} \quad a = l_{AB} = \frac{d}{p} = \frac{50}{1.849} = 27.04 \text{ mm}$$

$$n = \frac{c}{a} \quad \text{所以} \quad c = l_{CD} = an = 27.04 \times 1.485 = 40.16 \text{ mm}$$

$$m = \frac{b}{a} \quad \text{所以} \quad b = l_{BC} = am = 2.103 \times 27.05 = 56.88 \text{ mm}$$



①建立方程式时必须将机构中各杆组成封闭矢量多边形。 φ 、 ψ 角必须从 x 轴正方向开始度量, $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ 。

②铰链四杆机构有4个尺寸 a 、 b 、 c 、 d , 其中只有3个参变量是独立的。当 b/a 、 c/a 、 d/a 比值保持不变, 则机构各杆件之间的相对运动保持不变, 参数 a 可任意选或给定。因此在 $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ 时, 位置方程式只有3个未知数 P_0 、 P_1 、 P_2 , 最多只能列出3个位置方程式, 求解连架杆3对对应位置。现给定了机架 d 的尺寸, 所以 a 不再任意选取。

3-15 题

【分析】题中虽给出了连杆 S (即 BC) 欲实现的两个位置, 但只给出一个固定铰链点 D 位置。不过却给出连杆 BC 的铰链点 B 两位置, 可以作两点的中垂线确定固定铰链点 A ; 给出连杆 S 的两个位置就可利用转换机架法设计出活动铰链点 C 。这是一道综合设计题。

【解答】如图3-17所示:

1) 按比例尺 μ_l 作构件两个位置 S_1 、 S_2 。

2) 在构件 S 上任取一点 E_1 (和 E_2), 连 B_1E_1 和 B_2E_2 代表两个给定位置。

3) 连接 B_1 和 B_2 作中垂线, 在中垂线上任取一点 A 作为固定铰链中心。

4) 连接 B_2D 、 E_2D 得 $\triangle B_2E_2D$, 搬动 $\triangle B_2E_2D$ 使其 B_2E_2 和 B_1E_1 相重合, 得到 D 点的新位置 D' , 连接 $D'D$ 作中垂线, 在中垂线上任取一点 C_1 , 即得所求 AB_1C_1D 等 4 个铰链中心。

3-16 题

【分析】 本题为满足连杆预定轨迹点位置要求的四杆机构设计问题。因为已知连架杆 DC 的长度, 所以实际上是已知连杆的 3 个位置 E_1C_1 、 E_2C_2 、 E_3C_3 以及固定铰链点 A 、 D 位置, 此时只需设计出活动铰链点 B 的位置即可。所以采用机架转换法, 选 E_1C_1 为转换机架即可。因给定了 3 个位置, 故仅有一解。

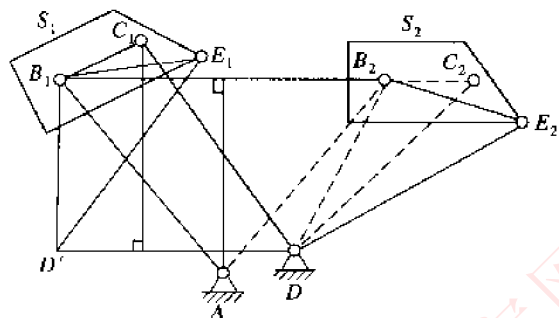


图 3-17

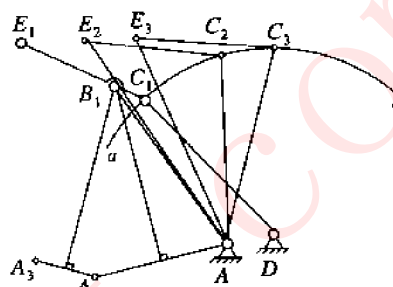


图 3-18

【解答】 如图 3-18 所示。

1) 先按比例尺 μ_l (m/mm) 作出 E 点的 3 个位置和固定铰链 A 、 D 的位置。

2) 以 D 为圆心, 以 CD (l_{CD}/μ_l) 为半径作圆弧 $\alpha-\alpha$ 。

3) 以 E_1 、 E_2 、 E_3 为圆心, 以 CE (l_{CE}/μ_l) 为半径作圆弧与 $\alpha-\alpha$ 弧交于 C_1 、 C_2 、 C_3 点。

4) 作 $\triangle E_2C_2A$ 、 $\triangle E_3C_3A$, 刚化后搬动使 E_2C_2 、 E_3C_3 边重叠到 E_1C_1 边上, 得 A 点的新位置 A_2 、 A_3 。

5) 连接 AA_2 、 A_2A_3 并分别作两连线的公垂线相交于一点, 即为 B_1 点, 连接 AB_1C_1D 即得所求铰链四杆机构。

3-17 题

【分析】 此题为六杆机构的设计问题, 但由于该六杆机构可以看作由铰链四杆机构 $ABCD$ 和曲柄滑块机构 DCE 组成, 因此可以分别分析设计铰链四杆机构 $ABCD$ 和曲柄滑块机构 DCE , 从而得到六杆机构的解。而根据所给定的条件可以确定连架杆 DC 的尺寸, 则曲柄滑块机构就已确定。这时问题的实质上就是设计出铰链四杆机构 $ABCD$ 的活动铰链点 B 位置。用转换机架法设计。

【解答】

1) 由图 3-19 可得下列两式:

$$C_1E_1^2 = C_1D^2 + DE_1^2 - 2 \overline{C_1D} \cdot \overline{DE_1} \cdot \cos \psi_{12}$$

$$C_2E_2^2 + \overline{DC_2}^2 = \overline{DE_2}^2 + S_{12}$$

其中 $C_1E_1 = C_2E_2$ $DC_2 = DC_1$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overline{DC_1}^2 + 60^2 - 2 \overline{DC_1} \cdot 60 \cdot \cos 45^\circ \\ = (80 - \overline{DC_1})^2 \end{aligned}$$

解得 $DC_1 = 37.2 \text{ mm}$

2) 取长度比例尺 μ_l (m/mm) 作出已知条件下机

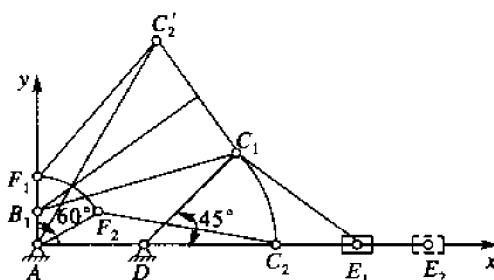


图 3-19

构的各铰链点及滑块、连架杆的位置。

3) 以 D 为圆心, 以 DC_1 为半径作圆弧, 得 C_1C_2 。

4) 以 A 为圆心, 以任意长度为半径作圆弧, 交标线上 F_1 、 F_2 点。

5) 连接 $\triangle AF_2C_2$, 然后沿 $-\varphi_{12}$ 的方向转动 AF_2 使 AF_2 与 AF_1 相重合, 使得 C_2 点转动后的新位置 C'_2 。

6) 连接 $C_1C'_2$, 作中垂线 b_{12} 与 AY 相交于 B_1 点, 连接 AB_1C_1D 即为所求机构的第一位置。

3.5 原教材思考题详解

思 3-4 题

【解答】 一个四杆机构成为双摇杆机构, 其 4 个杆之间的关系可以有两种情况:

①最长杆与最短杆长度之和大于其余两杆长度之和, 此时无论以哪一个构件为机架, 所得机构都为双摇杆机构;

②满足杆长之和条件, 但此时以最短杆的对边为机架, 所得机构为双摇杆机构, 但应注意此双摇杆机构的连杆 (即最短杆) 可作整周回转。

思 3-7 题

【解答】 铰链四杆机构中存在死点位置的机构有: 曲柄滑块机构、曲柄摇杆机构、双摇杆机构。

思 3-8 题

【解答】 可以通过改变曲柄的长度来改变摇杆 (滑块) 摆角 (行程) 的大小; 通过改变连杆的长度来改变摇杆 (滑块) 摆角 (行程) 的位置。

3.6 自测试卷及答案

3.6.1 自测试卷

(1) 填空

1) 平面四杆机构有无急回特性取决于_____的大小。 (1997 上海交通大学)

2) 平行四边形机构的极位夹角 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 度, 它的行程速比系数 $K = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (1999 上海交通大学)

3) 曲柄滑块机构, 当其曲柄处在与滑块的移动方向垂直时, 其传动角 γ 为_____, 导杆机构, 其中滑块对导杆的作用力方向始终垂直于导杆, 其传动角 γ 为_____。 (2000 上海交通大学)

4) 机构处于死点位置时, 其压力角为_____, 传动角为_____。 (1997 国防科技大学)

5) 在曲柄摇杆机构中改变_____而形成曲柄滑块机构, 在曲柄滑块机构中改变_____而形成偏心轮机构。 (1996 清华大学)

6) 以曲柄为主动件的曲柄滑块机构, 为使输出件滑块的最大压力角位置在回程中, 并具有急回特性, 则_____三者必须匹配。

(2) 简答

1) 平面铰链四杆机构存在曲柄的条件是什么? (南京航空航天大学)

2) 压力角的大小对连杆机构的传动性能有何影响?

(2000 浙江大学)

3) 何谓行程速比系数? 对心曲柄滑块机构的行程速比系数 K 等于多少? 可否使曲柄摇杆机构的极位夹角 $\theta=0$? (2001 浙江大学)

(3) 在图 3-20 所示的导杆机构中, $l_{AB}=a$, $l_{AC}=d$, 导杆偏距为 $l_{CD}=e$, $\angle CDB=90^\circ$ 。如果使该导杆机构成为曲柄导杆机构, 试求:

1) 推导使 AB 成为曲柄的条件。

2) 已知 $l_{AB}=40\text{ mm}$, $e=10\text{ mm}$, 求 l_{AC} 的最小值。

3) 标出该机构的极位夹角 θ 。 (2002 哈尔滨工业大学)

(4) 在曲柄等速转动的曲柄摇杆机构中, 已知曲柄的极位夹角 $\theta=30^\circ$, 摇杆工作时间为 7 s , 试求摇杆空回行程所需时间。

(1998 华中理工大学)

(5) 如图 3-21 所示, 已知: 曲柄摇杆机构, 摇杆长 $l_{CD}=75\text{ mm}$, 行程速比系数 $K=1.5$, 机架长 $l_{AD}=100\text{ mm}$, 摇杆一极限位置与机架夹角 $\phi=45^\circ$, 求: 曲柄长 l_{AB} 及连杆长 l_{BC} 。本题用解析法或图解法均可, 但要求出全部解。

(1998 吉林工业大学)

(6) 图 3-22 所示, 为一全铰链四杆机构的示意图。已知杆长 $l_{AB}=50\text{ mm}$, $l_{BC}=75\text{ mm}$, $l_{CD}=80\text{ mm}$, $l_{AD}=75\text{ mm}$ 。

(1999 西南交通大学)

1) 问在同转副 A 、 B 、 C 、 D 中哪些是周转副, 哪些是摆动副。

2) 如图所示坐标系, 当杆 AB 与 X 轴正方向成 30° 角时, 问如何确定铰链 C 的位置, 说明确定的根据。

3) 试确定连杆 BC 在机构运动过程中的角运动范围。

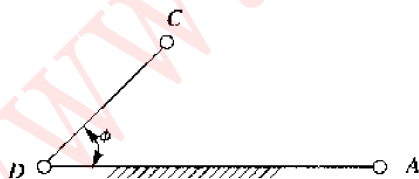


图 3-21

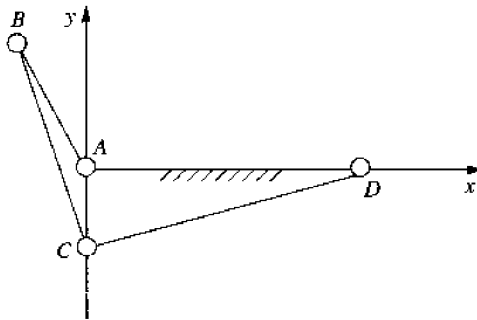


图 3-22

3.6.2 自测试卷答案

(1) 填空

1) 极位夹角 θ

2) 0 ; 1

3) 最小; 90°

4) 90° ; 0°

5) 摇杆长度为 ∞ ; 转动副半径

6) 曲柄长度 a , 连杆长度 b 以及偏距 e (包括偏置方向)

(2) 简答 (略)

(3) 1) $d+e \leq a$ 2) $d \leq 50 \text{ mm}$ 3) 如图 3-23。

(4) 根据 $K = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta} = \frac{T_{\text{上}}}{T_{\text{下}}}$, 可得 $T_1 = 5 \text{ s}$ 。

(5) (略)

(6) 1) 因满足杆长条件, 所以有整转副存在。且最短杆 AB 为连架杆, 所以该机构为曲柄摇杆机构, AB 两转动副为整转副, CD 为摆动副。

2) 如图 3-24 所示, 根据 30° , 确定 B 点位置 B' , 以 B' 为圆心、 $l_{HB'} = 75 \text{ mm}$ 为半径画弧; 再以 D 为圆心、 $l_{CD} = 80 \text{ mm}$ 为半径画弧, 两弧交点即铰链 C 的位置 C' 。

3) 取 $\mu_l = 0.001 \text{ m/mm}$ 作图。当 AB 、 BC 杆拉直共线时, 机构位置为 AB_2C_2D ; 当 AB 、 BC 杆重叠共线时, 机构位置为 AB_1C_1D 。 $\angle B_1AB_2$ 即为连杆 BC 的角运动范围。

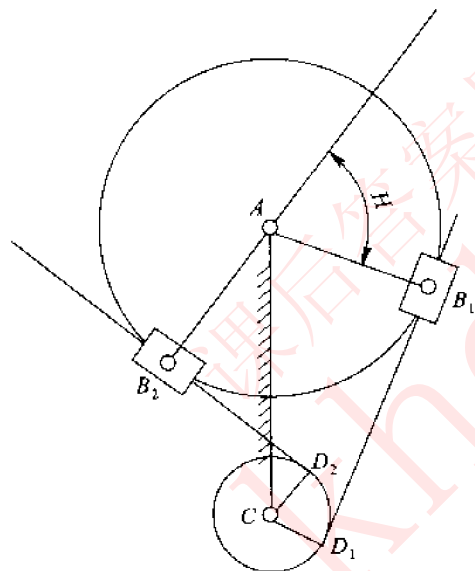


图 3-23

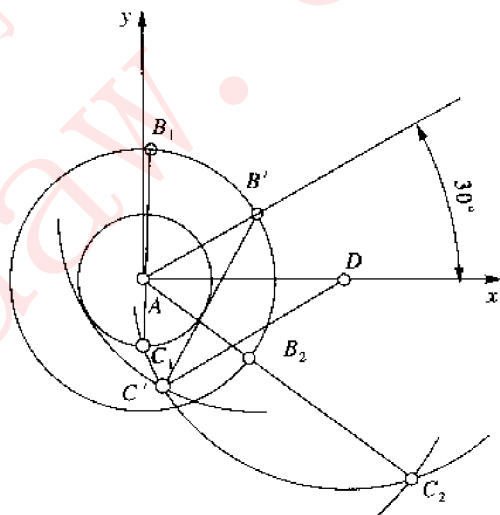


图 3-24

课后答案网
www.khdaw.com

第4章



本章考点

- 推杆常用的4种运动规律的特点及应用场合
- 平底、滚子推杆凸轮机构理论廓线与实廓线之间的关系
- 已知凸轮机构某一位置的机构运动简图，分析凸轮机构，如凸轮转过的某角度 δ ，求推杆的位移，求推杆的行程 h 或 ϕ_{\max} 等
- 凸轮机构压力角的概念，求凸轮机构在某一位置的压力角的大小及凸轮机构的压力角与凸轮机构受力的关系

本章难点

- 难点是反转法。反转法既是凸轮廓线设计的基本方法，也是凸轮机构分析常用的方法

4.1 考核知识点

凸轮机构是由凸轮、从动件及机架所组成的三构件高副机构。它结构简单、紧凑，易于使从动件得到各种预期的运动规律。本章主要解决根据给定的从动件预定规律及辅助的几何条件、动力条件，设计凸轮轮廓曲线及确定凸轮机构的基本尺寸等问题。

4.1.1 基本要求

- 了解凸轮机构的类型及应用；
- 对推杆的基本运动规律及推杆运动规律的选择有明确概念；
- 掌握凸轮机构的压力角和自锁概念；
- 能确定盘形凸轮机构的基本尺寸；
- 掌握盘形凸轮轮廓线的设计方法。

4.1.2 内容提要 with 考点提示

(1) 凸轮机构的类型

凸轮机构的类型按凸轮形状分为盘形凸轮和圆柱凸轮；按推杆形状分为尖顶推杆滚子推杆及平底推杆；按推杆的运动形式分为直动推杆、摆动推杆；而直动推杆又可根据其轴线与凸轮回转轴线的相互位置分为对心直动推杆和偏置直动推杆。

凸轮机构名称的命名，一般的顺序为推杆的运动形式 + 推杆的形式 + 凸轮的形式。

(2) 从动件的运动规律

①等速运动规律：在行程开始和终止位置，由于加速度产生惯性力在理论上突变为无穷大，致使机构发生强烈的刚性冲击，所以等速运动规律只能用于低速。如欲避免刚性冲击，可将位移曲线的始末两段改为过渡曲线。

②等加速—等减速运动规律：在位移始末和中间3处加速度发生有限的突变，使机构发生柔性冲击，所以该运动规律适用于中速。

③余弦加速度运动规律（简谐运动）：在行程的始末，加速度引起的有限惯性力突变，使机构发生柔性冲击，所以适用于中速。当从动件作无停歇区间的升—降—升连续往复运动时，可以获得连续加速度曲线，而用于高速。

④正弦加速度运动规律（摆线运动）：加速度的变化始终是连续的，没有刚性冲击和柔性冲击，所以适用于高速。

(3) 凸轮轮廓线的设计方法

当从动件的运动规律已经选定并作出位移线图后，各种片面凸轮的轮廓曲线都可以用图解法求出。为了在图纸上画出凸轮轮廓，应当使凸轮与图纸平面相对静止，常采用反转法，使整个机构以一个 $(-\omega)$ 的角速度运动，其结果是：从动件与凸轮的相对运动亦不改变，凸轮固定不动，机架和导路一方面以角速度 $(-\omega)$ 绕凸轮回转中心转动，同时从动件又以原有运动规律相对机架往复运动。根据这种关系，不难求出一系列从动件尖底的位置。由于尖底始终与凸轮轮廓接触，所以反转后，尖底的运动轨迹就构成凸轮轮廓曲线。

如果是滚子或平底从动件，则尖底从动件的轮廓为理论轮廓，只要在理论轮廓上选许多点作为一系列滚子或平底，最后作其包络线便可求得实际轮廓。

基本步骤:

- ①根据推杆的运动规律按选定的某一分度值计算出推杆各分点的位移值;
- ②选取尺寸比例尺 μ_l , 并作出基圆及推杆的初始位置;
- ③求出推杆在反转运动中占据的各个位置 (即偏距圆的切线);
- ④求出推杆尖顶在复合运动中依次占据的位置;
- ⑤将推杆尖顶的各位置点连成一条光滑曲线, 即为凸轮廓线。

(4) 凸轮机构基本尺寸的确定

1) 凸轮机构的压力角

即推杆与凸轮接触点所受正压力的方向 (即凸轮廓线在接触点处的法线方向) 与推杆上对应速度发现所夹的锐角, 用 α 表示。

①凸轮机构压力角与受力的关系: 压力角 α 是影响凸轮机构受力情况的一个重要参数。机构开始出现自锁现象的压力角称为极限压力角, 用 α_{lim} 表示。当压力角 α 接近极限压力角 α_{lim} 时, 急剧增加的驱动力将导致效率降低和轮廓严重磨损, 凸轮工作的条件恶劣。从减小推力和避免自锁的观点来看, 压力角愈小愈好。所以为保证凸轮机构能正常运转, 提高效率改善受力情况, 规定凸轮机构的最大压力角 $\alpha_{\text{max}} \leq [\alpha]$, 而 $[\alpha] \leq \alpha_{\text{lim}}$ 。

②凸轮机构压力角与凸轮基本尺寸的关系: 凸轮的基圆半径愈小, 凸轮的尺寸愈小, 凸轮机构愈紧凑。然而, 基圆半径的减小受到压力角的限制。这可以从压力角的计算公式中看出。

$$\alpha = \arctan \frac{|ds/d\varphi - \eta\delta e|}{s + \sqrt{r_b^2 - e^2}}$$

式中: η 、 δ 为凸轮的转向系数和从动件偏置方向系数。并规定当凸轮转向为顺时针时 $\eta = 1$, 逆时针时 $\eta = -1$; 经过滚子中心的从动件导路线位于凸轮转动中心右侧时 $\delta = 1$, 位于左侧时 $\delta = -1$ 。对于滚子 (尖底) 直动从动件盘形凸轮机构, 若 $\eta\delta = 1$, 称为正配置, 若 $\eta\delta = -1$, 称为负偏置。由式可知, 当其他条件不变时, 压力角 α 愈大, 基圆半径 r_b 愈小, 即凸轮机构愈紧凑。正配置可以减小推程压力角, 但同时增大了回程压力角, 而负配置虽可减小回程压力角, 但却使推程压力角增大。正确选择配置方式, 可以使凸轮机构结构紧凑, 所以对于直动从动件盘形凸轮机构, 一般采用正配置。

在平底推杆盘形凸轮机构中, 其压力角与平底和导路所夹的锐角有关, 而与其他因素无关。当平底和导路所夹的锐角为 β 时, 其机构的压力角为 $\alpha = 90^\circ - \beta$ 。

2) 基圆半径 r_b 的确定

凸轮机构对于压力角和基圆半径的要求是矛盾的, 仅从机构紧凑和改善受力的观点来看, 基圆半径 r_b 确定原则是: 在保证 $\alpha_{\text{max}} \leq [\alpha]$ 的条件下, 应使基圆半径尽可能小。

3) 滚子推杆的滚子半径的选择

①滚子半径 r_r 与凸轮理论轮廓及工作轮廓 ρ 的关系: 为避免工作轮廓变尖和失真现象, 滚子半径 r_r 应小于理论轮廓线的最小曲率半径 ρ_{min} 。

②滚子半径 r_r 的选择: 滚子 r_r 的选择除考虑变尖和失真现象, 还考虑强度和结构等因素, 设计时建议取 $r_r \leq 0.8 \rho_{\text{min}}$ 。

4) 平底推杆的平底尺寸确定

用作图法作出凸轮廓线, 即可确定出推杆平底中心至推杆平底与凸轮轮廓接触点间的最大距离 l_{max} , 推杆平底长度 l 应取 $l = 2l_{\text{max}} + (5 \sim 7) \text{ mm}$ 。 l_{max} 也可用计算求得, 即 $l_{\text{max}} = |ds/d\delta|_{\text{max}}$ 。

对于已知凸轮廓线 (通常给定的是实际廓线, 又称工作廓线), 应先根据包络原理求出理论廓线, 然后将所有分析项目 (基圆、位移、压力角等) 都针对理论廓线进行。对于解析法设计凸轮廓线, 重点是推导出凸轮廓线 (理论和实际廓线) 及刀具中心坐标方程式。

4.2 专题释疑

相对运动原理（反转法）

无论是用图解法还是解析法设计凸轮，所依据的基本原理都是反转法。运用反转法可以解决以下几方面的问题：

- ①已知从动件的运动规律，运用反转法原理绘制凸轮轮廓线；
- ②已知凸轮轮廓线，运用反转法原理求出从动件运动规律的位移曲线；
- ③已知凸轮轮廓线，运用反转法原理求出当凸轮从图示位置转过某一给定角度时，从动件走过的位移量、凸轮机构压力角的变化；
- ④已知凸轮轮廓线，运用反转法原理求出与从动件从某一点接触到另一点接触时，凸轮转过的角度。

已知凸轮机构的尺寸及其位置，凸轮的角速度的大小及其转向，运用反转法确定凸轮转过某一角度，从动件所产生的位移 s 、速度 v 及相应的机构压力角 α 、从动件行程 h 时，应注意以下几点：

- ①正确确定从动件的反转方向。明确标出与凸轮实际转向相反对从动件的反转方向；
- ②正确确定从动件在反转过程中占据的位置。从动件反转前后两位置线的夹角应等于凸轮的转角；
- ③正确确定从动件的位移 s 。从动件在复合运动中，其位移 s 应等于凸轮理论轮廓线与基圆在从动件对应反转位置上所夹的线段长度。

4.3 典型例题解析

例 1 在图 4-1 (a) 所示的运动规律线图中，各段运动规律未表示完全，请根据给定部分补足其余部分（位移线图要求准确画出，速度和加速度线图可用示意图表示）。

【分析】 本题考查对从动件运动的位移、速度加速度曲线之间关系的正确理解和灵活运用。位移对凸轮转角的导数是（类）速度，速度对凸轮转角度导数是（类）加速度。（类）加速度对凸轮转角度积分是（类）速度，（类）速度对凸轮转角的积分是位移。根据这个关系，可以逐段确定曲线现状。

【解答】 速度 $0 \sim \varphi_1$ 段由 $s - \varphi$ 线图可知为等速运动规律； $\varphi_1 \sim \varphi_2$ 段为停歇段； $\varphi_2 \sim \varphi_4$ 段为等加速—等减速回程运动规律； $\varphi_4 \sim 2\pi$ 段为停歇段。补足线见图 4-1 (b)。

例 2 图 4-2 (a) 所示为直动从动件盘形凸轮机构的 $\frac{ds}{d\varphi} - s$ 曲线。若令 $[\alpha]_I = 45^\circ$ ， $[\alpha]_{II} = 60^\circ$ ，试确定：①凸轮机构工作时，能满足 $\alpha \leq [\alpha]$ 的凸轮轴心的范围；②此凸轮机构的凸轮转向；③为改善从动件工作行程的工作条件，凸轮轴心应偏在从动件尖端移动轨迹线的哪一侧较好？为什么？

【分析】 本题用教材中所介绍的 $\frac{v}{\omega} \sim \varphi$ 曲线确定轴心安全区的方法来确定轴心区域。凸轮压力角的大小除与凸轮到轮廓曲线有关外，还与凸轮的转动方向及偏置方向有关。

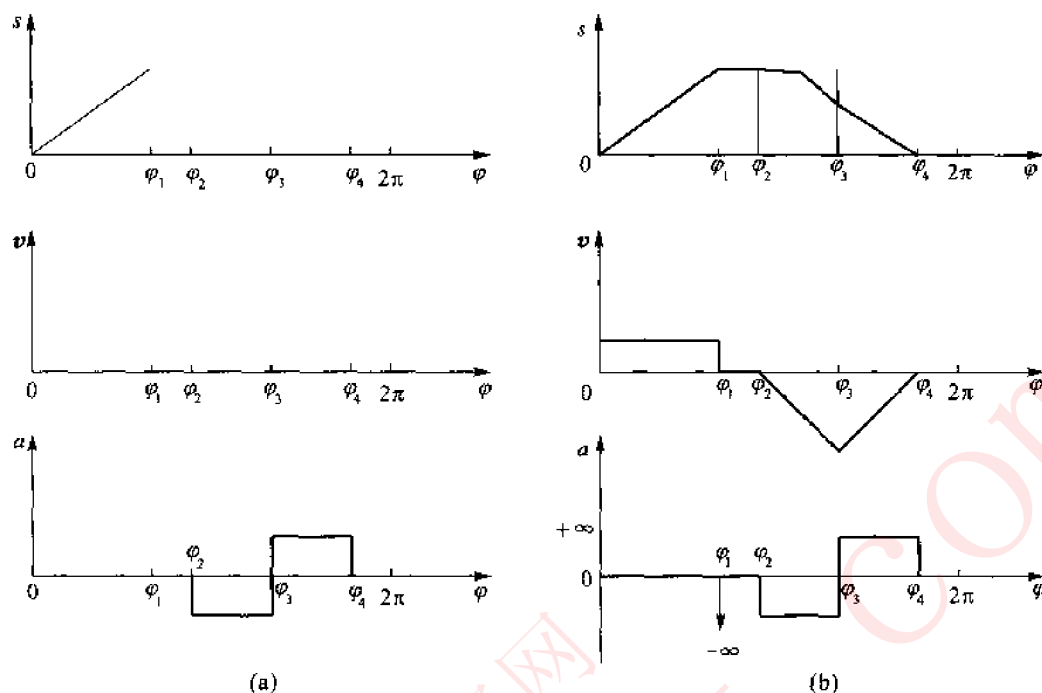


图 4-1

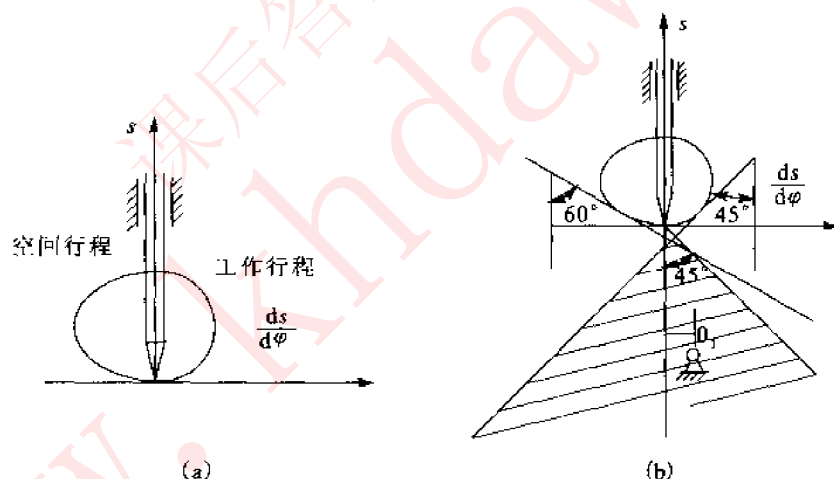


图 4-2

【解答】

①轴心范围如图 4-2 (b) 阴影线区域。

②由于工作行程在从动件移动轨迹线的右侧，所以凸轮为顺时针转动。

③凸轮轴心应偏在右侧好。原因是可减少升程的最大压力角。

例 3 按图 4-3 中所示位移曲线，设计尖端直动从动件盘形凸轮的廓线。分析最大压力角发生在何处 (提示：从压力角公式来分析)。

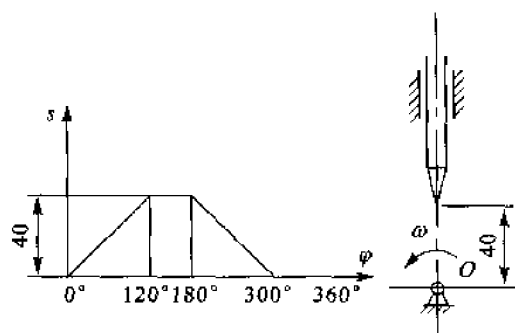


图 4-3


$$\tan \alpha = \frac{v_{pe}}{\sqrt{r_0^2 e^2 + s}}$$
$$\tan \alpha = \frac{v/\omega}{r_0 + s}$$

提示

本题在 $\varphi = 300^\circ \sim 360^\circ$ 一段 $s = 0$, α 是否也最大? 请从这一段 $v = 0$ 说明。

对于滚子从动件，理论廓线与实际廓线是一对等距曲线，基圆是指理论廓线上以最小矢径为半径的圆；压力角是指从动件上与凸轮理论廓线相对应当点的速度方向与该点受力方向之间所夹的锐角；升程从动件行程是指滚子中心点位置相对于基圆的距离。即凸轮机构的基圆半径及压力角等的概念都

是针对凸轮的理论廓线而言的,也就是要在理论廓线上作出,所以应先作出凸轮理论轮廓线,然后灵活运用反转法进行求解。

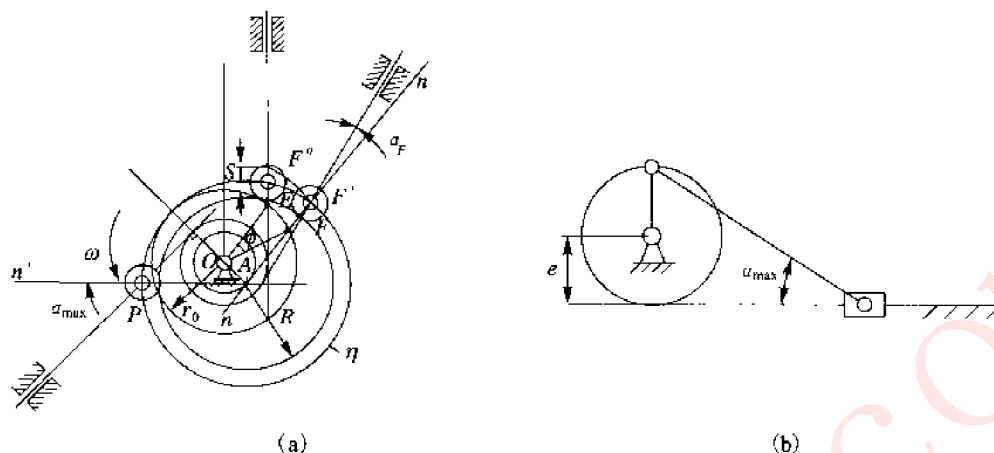


图 4-5

【解答】 用反向包络法作出凸轮的理论廓线 η : 以凸轮的实际廓线上的各点为圆心, 以滚子半径作一系列滚子圆, 然后作这些滚子圆的外包络线。由于凸轮实际廓线是圆, 所以理论廓线也是圆, 其为半径 $R' = R + r_T = 35 \text{ mm}$; 而基圆以 O 为圆心且与理论廓线圆相切, 正确作出偏距圆。

① 直动从动件凸轮机构, 在反转过程中, 从动件导路始终保持与凸轮回转中心的偏心距离, 因此始终与偏距圆相切。过点 F 作出凸轮实际廓线的法线 nm , 该法线交理论廓线 η 于点 F' , 则点 F' 即为滚子与凸轮在点 F 接触时滚子中心的位置; 过 F' 作偏距圆的切线, 该切线即为滚子与凸轮在点 F 接触时从动件的位置线, 该位置线与从动件在 E 点位置线间的夹角, 即为所求凸轮的转角 ϕ 。

② F 点接触时的滚子中心 F' 的法向 $n-n$ 与导路方向之间的夹角即为所求 F 点接触时的压力角 α_F 。即过点 F' 、 A 所作直线就是滚子在 F 点接触时的法线, 其与过 F' 所作偏距圆切线之间的夹角就是 F 点接触时的从动件压力角 α_F 。

③ 基圆应是凸轮理论廓线上的, 因此基圆半径 $r_0 = R' - l_{CA} = 25 \text{ mm}$ 。

④ 以 O 为圆心以 OF' 为半径作圆弧交 E 位置时导路的 F'' , 则 E 点接触时滚子中心与 F'' 之间的距离就是从 E 点到 F 点接触时从动件的位移 s 。

⑤ 用高副低代得到曲柄滑块机构的来分析最大压力角位置较方便。由于有偏距, 最大压力角应出现在如图 4-5 (b) 所示的位置, 此时导路与曲柄垂直。利用反转法作出导路与曲柄垂直时的位置, 其与理论廓线的交点为 P , 过 P 作廓线的法线 $n'-n'$ (此法线必过 A 点), 则位置线与法线的所夹锐角即为 α_{\max} 。

⑥ 当凸轮的实际廓线 η 保持不变, 而将滚子半径 r_T 改变, 连杆长度 l_{AH} 将随之改变, 因此从动件的运动将随之改变。若希望从动件的运动规律保持不变, 正确的方法是让理论廓线 η 保持不变, 作该理论廓线的法向等距曲线, 并使之距离等于 $R' - r'_T$, 得到新的凸轮实际廓线。

4.4 原教材习题详解

4-5 题

【分析】 考查对从动件运动曲线的掌握。

【解答】 由五次多项式加速度得

$$a = \frac{60h\omega^2}{\Phi^3}\phi - \frac{180h\omega^2}{\Phi^4}\phi^2 + \frac{120h\omega^2}{\Phi^5}\phi^3$$

$$\text{令 } \frac{da}{d\phi} = 0, \quad \frac{60h\omega^3}{\Phi^3} - \frac{360h\omega^3}{\Phi^4}\phi + \frac{360h\omega^3}{\Phi^5}\phi^2 = 0$$

$$6\left(\frac{\phi}{\Phi}\right)^2 - 6\left(\frac{\phi}{\Phi}\right) + 1 = 0$$

$$\text{解得 } \frac{\phi}{\Phi} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \quad \phi_1 = 0.21\Phi \quad \phi_2 = 0.79\Phi$$

$$a_{\max} = \frac{60h\omega^2}{\Phi^2} \times 0.21 \times (1 - 3 \times 0.21 + 2 \times 0.21^2) \approx 5.77 = \frac{h\omega^2}{\Phi^2}$$

4-6 题

【分析】 七次多项式具有 8 个待定量, 将给定的 8 个边界条件代入就可求出。关键是正确写出位移函数表达式 $s(\phi)$, 对位移函数求导数可得速度函数 $v(\phi)$, 而对速度函数求导数可得加速度函数 $a(\phi)$ 。

【解答】 令 $j = \frac{da}{dt}$, 则由题可得

$$\phi = 0, \quad s = 0 \quad \text{①} \quad \phi = 0, \quad v = 0 \quad \text{②}$$

$$\phi = 0, \quad a = 0 \quad \text{③} \quad \phi = 0, \quad j = 0 \quad \text{④}$$

$$\phi = \Phi, \quad s = h \quad \text{⑤} \quad \phi = \Phi, \quad v = 0 \quad \text{⑥}$$

$$\phi = \Phi, \quad a = 0 \quad \text{⑦} \quad \phi = \Phi, \quad j = 0 \quad \text{⑧}$$

$$s = C_0 + C_1\phi + C_2\phi^2 + C_3\phi^3 + C_4\phi^4 + C_5\phi^5 + C_6\phi^6 + C_7\phi^7 \quad (\text{a})$$

$$v = C_1 + 2C_2\omega\phi + 3C_3\omega\phi^2 + 4C_4\omega\phi^3 + 5C_5\omega\phi^4 + 6C_6\omega\phi^5 + 7C_7\omega\phi^6 \quad (\text{b})$$

$$a = \omega^2 (2C_2 + 6C_3\phi + 12C_4\phi^2 + 20C_5\phi^3 + 30C_6\phi^4 + 42C_7\phi^5) \quad (\text{c})$$

$$j = \omega^3 (6C_3 + 24C_4\phi + 60C_5\phi^2 + 120C_6\phi^3 + 210C_7\phi^4) \quad (\text{d})$$

将①、②、③、④式代入 (a)、(b)、(c)、(d) 式得

$$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

将⑤、⑥、⑦、⑧式代入 (a)、(b)、(c)、(d) 式得

$$C_4 + C_5\Phi + C_6\Phi^2 + C_7\Phi^3 = h/\Phi^4$$

$$4C_4 + 5C_5\Phi + 6C_6\Phi^2 + 7C_7\Phi^3 = 0$$

$$12C_4 + 20C_5\Phi + 30C_6\Phi^2 + 42C_7\Phi^3 = 0$$

$$24C_4 + 60C_5\Phi + 120C_6\Phi^2 + 210C_7\Phi^3 = 0$$

$$\text{解得 } C_7 = \frac{-20h}{\Phi^7} \quad C_6 = 70 \frac{h}{\Phi^6}$$

$$C_5 = \frac{-84h}{\Phi^5} \quad C_4 = 35 \frac{h}{\Phi^4}$$

故得该多项式为

$$s = h \left[35 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)^4 - 84 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)^5 + 70 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)^6 - 20 \left(\frac{\phi}{\Phi} \right)^7 \right]$$

4-8 题

【分析】 本题考查对从动件曲线、根据反转法求解凸轮轮廓线等知识点的掌握。

【解答】 已知作简谐运动，将 $e=0$ ， $s_0=r_0=40$ ， $r=10$ ， $\phi=30^\circ$ ， $h=40$ 代入简谐运动位移表达式可得

$$S = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{3}{2} \phi \right) = 5.8579$$

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{3h}{4} \sin \frac{3}{2} \phi = 21.2132$$

则凸轮理论廓线上的相应点的直角坐标为

$$x = (r_0 + s) \cos \phi = 39.7141$$

$$y = (r_0 + s) \sin \phi = 22.9289$$

极坐标为

$$r_B = \sqrt{x^2 + y^2} = 45.8579$$

$$\theta_B = \phi = 30^\circ$$

$$\frac{dx}{d\phi} = -(r_0 + s) \sin \phi + \cos \phi \frac{ds}{d\phi} = -4.5578$$

$$\frac{dy}{d\phi} = (r_0 + s) \cos \phi + \sin \phi \frac{ds}{d\phi} = 50.3207$$

则凸轮实际轮廓线上相应点的直角坐标为

$$X = x - r \frac{\frac{dy}{d\phi}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}} = 29.7548$$

$$Y = y + r \frac{\frac{dx}{d\phi}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}} = 22.0269$$

极坐标为

$$r_I = \sqrt{X^2 + Y^2} = 37.0207$$

$$Q_T = \arctan \frac{21.2132}{5.8579 + 40} = 24.8246^\circ$$

4-9 题

【解答】 原题中图 a 滚子直动从动件凸轮机构的题解参考本章例 4 题解。

【分析】 对于摆动从动件凸轮机构，在反转过程中机架长度和从动件杆长始终保持不变。压力角是针对凸轮理论廓线而言的，所以应是摆杆滚子中心的运动方向与其法线方向所夹的锐角。求接触点是 F 时的压力角，关键是必须确定出此刻滚子中心和摆杆的转动中心所在位置；过 F 作凸轮实际廓线的法线交理论廓线于 F' 点，则 F' 点即为接触点为 F 时滚子的中心位置。以 F' 为圆心，以 l_{BC} 为半径作圆弧交圆 1 于 B 点。滚子中心点的法线必通过凸轮到 $\angle CBO = \angle E'B_1O$ 。

将此滚子摆动从动件凸轮机构高副低代后是一个 I 型曲柄摇杆机构，而 I 型曲柄摇杆机构最大压力角应出现在曲柄和机架重叠共线时。过 OA 的直线交圆 1 于 B₂ 点，以 B₂ 为圆心， l_{BC} 为半径作圆弧

交凸轮理论轮廓线 η 于 M' , 则 M' 即为最大压力角时滚子中心所在位置, 而 B_2 为从动件转动中心, 其最大压力角 α_{\max} 如图 4-6 所示。

4.5 原教材思考题详解

思 4-1 题

【解答】 理论轮廓曲线与实际轮廓曲线在法向方向上相距滚子半径。两者并不时时相似。

思 4-2 题

【解答】 更换滚子后, 因为凸轮的实际轮廓线没有变化, 当滚子的半径发生变化后, 凸轮的理论轮廓线发生了变化, 所以从动件的运动规律和最大摆角都发生了变化。

思 4-3 (略)

思 4-4 题

【解答】 此时属于正偏置, 所以可以减小推程压力角。改变凸轮的转向, 凸轮的推程廓线段与回程廓线段互换, 由于有偏置, 这两个轮廓线段是不相同的, 所以推杆的运动规律要改变。

思 4-5 题

【解答】 平底从动件盘形凸轮的全部廓线必须外凸, 这样平底才能与轮廓上各点相接触, 以保证从动件完全实现预期的运动规律。

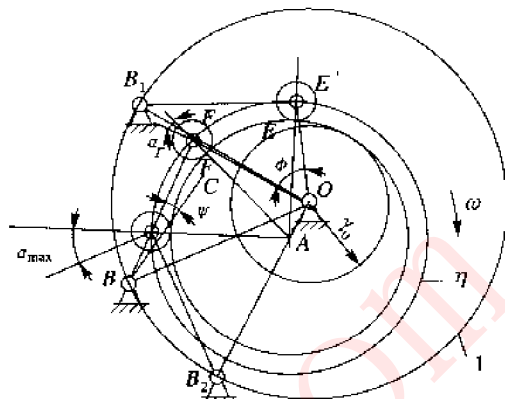


图 4-6

4.6 自测试卷及答案

4.6.1 自测试卷

(1) 填空

- 对于凸轮机构, 当从动件运动规律不变时, 若缩小基圆半径, 则压力角_____。(2001 华中科技大学)
- 在设计滚子推杆盘形凸轮机构时, 若发现凸轮实际廓线有变尖现象, 为了克服变尖现象, 可采取的措施有_____或_____。(2001 西北工业大学)
- 在凸轮机构的几种常用的推杆运动规律中, _____宜用于低速; _____不宜用于高速; 而_____和_____则可在高速下应用。
- 平底垂直于导路的直动推杆盘形凸轮机构, 其压力角等于_____。
- 在凸轮机构的 4 种常用的推杆运动规律中, _____运动规律有刚性冲击; _____、_____运动规律有柔性冲击; _____运动规律无冲击。
- 凸轮的基圆半径是从_____到_____的最短距离。(1997 上海交通大学)
- 设计凸轮机构, 若量得其中某点的压力角超过许用值, 可以用_____方法使最大压力角减小。(1999 华南理工大学)

8) 移动从动件盘形凸轮机构, 当从动件运动规律一定时, 欲同时降低升程和回程的压力角, 可采用的措施是_____。若只降低升程的压力角, 可采用_____方法。(2000 西安交通大学)

(2) 简答

1) 在设计偏置直动滚子推杆盘形凸轮机构时, 凸轮基圆半径和滚子半径的选择应分别考虑哪些因素? (2003 西北工业大学)

2) 直动推杆盘形凸轮机构中, 为减小磨损, 将尖底推杆改为滚子推杆, 而其他条件不变, 这时推杆的运动规律是否会发生变化? 为什么?

3) 在凸轮已制作好后, 再改变偏距大小、偏置方向或滚子大小会产生何种影响? 偏置方向对凸轮机构压力角有何影响?

4) 选取基圆半径时, 应考虑哪些因素? 按什么原则加以选择?

5) 如摆动尖顶推杆的推程和回程运动线图完全对称, 试问其推程和回程的凸轮轮廓是否也对称? 为什么?

(3) 滚子直动偏置从动件盘形凸轮机构以 1:2 的比例尺所作的凸轮轮廓线如图 4-7 所示, 凸轮沿顺时针方向转动, 对以下两小题, 试用图解法直接在图上作出答案。(1994 华中理工大学)

1) 从动件 3 的最大行程 h_{\max} ;

2) 凸轮 2 从图示位置回转 60° 时从动件的位移及该位置时的机构压力角。

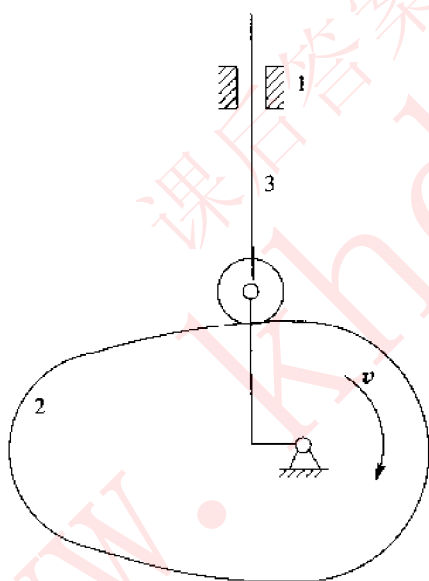


图 4-7

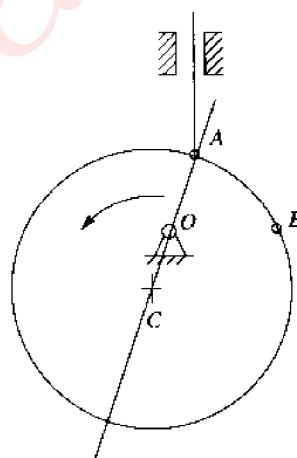


图 4-8

(4) 图 4-8 所示为一偏置尖底直动从动件盘形凸轮机构, 已知凸轮为一以 C 为中心的圆盘, 圆盘半径 $R = 30 \text{ mm}$, 偏心距 $e = 10 \text{ mm}$, 从动件偏距 $E = 10 \text{ mm}$, 转向如图所示。试用图解法求出 (按 1:1 的比例作图求解): (1999 浙江大学)

1) 凸轮的基圆半径 r_b 和从动件的升程;

2) 凸轮机构的推程角 δ_t 、回程角 δ_h 、远休止角 δ_s 和近休止角 δ'_s ;

3) 凸轮从动件运动的起始位置 (A 点) 转过 60° 到 B 点接触时, 凸轮机构的压力角 α 。

4.6.2 自测试卷答案

(1) 填空

1) 增大

2) 减小滚子半径; 增大基圆半径

3) 等速; 等加速等减速; 正弦运动规律; 多项式运动规律

4) 零

5) 等速; 等加速等减速; 余弦加速度; 正弦加速度

6) 凸轮转动中心; 凸轮理论轮廓线

7) 增大基圆半径或正确偏置

8) 增大基圆半径; 正确偏置

(2) 简答 (略)

(3) 见图 4-9

(4) 见图 4-10

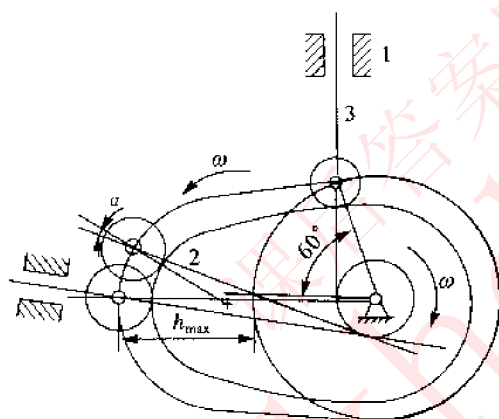


图 4-9

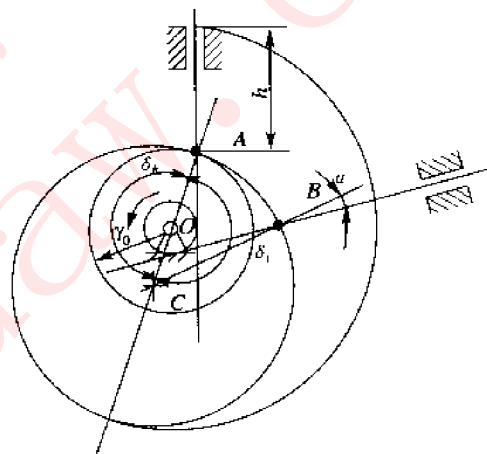


图 4-10

第5章

齿轮机构及其设计

本章考点

- 渐开线直齿圆柱齿轮啮合原理
- 渐开线的性质
- 标准直齿圆柱齿轮几何尺寸的计算；齿轮的切齿加工原理、根切现象及最小齿数
- 变位齿轮的设计
- 用图解法和解析法求重合度，重合度的意义
- 斜齿圆柱齿轮的特点及设计计算
- 当量齿轮、当量齿数及其用途
- 蜗轮蜗杆传动的特点、设计计算及旋向的确定

本章难点

- 一对渐开线直齿圆柱齿轮传动的啮合过程
- 齿廓工作段
- 当量齿轮及当量齿数的概念
- 无侧隙啮合方程式的推导
- 齿顶高变动系数

5.1 考核知识点

本章主要解决的问题是在掌握齿廓啮合基本理论的基础上, 确定渐开线齿轮传动的基本尺寸及其设计方法。

5.1.1 基本要求

- 了解齿轮机构的类型及应用;
- 理解齿廓啮合基本定律; 了解一对齿轮实现定传动比时两齿廓应满足的条件和渐开线的特性及渐开线齿廓的啮合特性及共轭齿廓;
- 深入理解并掌握渐开线直齿圆柱齿轮的啮合特性、基本参数和几何尺寸的计算;
- 了解根切现象及最少齿数、齿轮的变位修正和变位齿轮传动的基本概念;
- 理解平行轴斜齿圆柱齿轮的啮合特点、传动的啮合特性及当量齿轮与当量齿数的概念; 掌握标准斜齿圆柱齿轮传动的几何尺寸计算;
- 了解交错轴斜齿圆柱齿轮传动、蜗杆传动及直齿圆锥齿轮传动的特点; 了解标准直齿圆锥轮的齿形、背锥、当量齿数及其几何尺寸计算, 正确啮合条件传动比及从动轮转向。

5.1.2 内容提要 with 考点提示

(1) 齿廓啮合基本定律及共轭齿廓

共轭齿廓连续接触的过程称为啮合, 图 5-1 为两齿轮一对齿廓在 K 点啮合的情况, 齿廓曲线与传动比的关系为: 满足一定传动比变化规律的齿轮齿廓, 在这一点啮合时, 过接触点的齿廓公法线应与连心线交与相应的瞬时啮合节点。此规律称为齿廓啮合基本定律。齿轮的齿廓曲线首先应满足齿廓啮合基本定律。

凡是能实现预定传动比的一对齿廓或满足齿廓啮合基本定律而相互啮合的一对齿廓称为共轭齿廓。

(2) 渐开线的特性及其方程式

渐开线有下列几个特性:

- 发生线沿基圆滚过的长度等于基圆被滚过的弧长, 即 $\overline{BK} = \overline{AB}$ 。
- 发生线 BK 是渐开线在 K 点的法线, 它切于基圆。反之, 基圆的切线必为渐开线上某点处的法线。
- 发生线与基圆的切点 B 是渐开线在 K 点的曲率中心, 而 BK 为渐开线在 K 点的曲率半径。
- 渐开线愈接近基圆的部分, 其曲率半径愈小, 而在基圆上其曲率半径为零。
- 渐开线的形状取决于基圆的大小。
- 基圆以内无渐开线。
- 渐开线齿廓啮合特点。
- 渐开线齿廓能保证定传动比; 因为节点 P 位置始终不变。

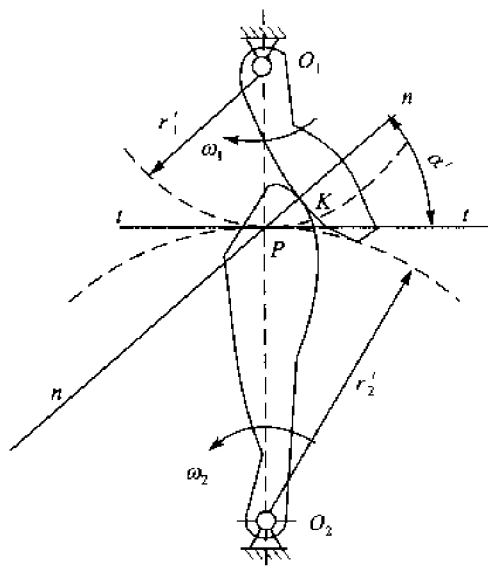


图 5-1

● 渐开线齿廓间的正压力方向不变。两渐开线齿廓啮合时，啮合线、两基圆内公切线、正压力作用线为同一条直线，故正压力方位始终不变，传动平稳。

● 渐开线齿廓传动具有可分性；即渐开线齿廓的传动具有 $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = \overline{O_2P}/\overline{O_1P} = r_{b2}/r_{b1}$ ，只要保证两齿廓接触，即使中心距略有变化，传动比也不变。

(3) 渐开线齿轮的基本参数、基本尺寸计算

1) 渐开线标准直齿圆柱齿轮的基本参数

● 齿数 z ：正整数。

● 模数 m ：是决定齿轮大小和承载能力的重要参数，是按标准系列取值的，单位为 mm。

● 压力角 α ：是决定齿轮齿廓形状和齿轮啮合性能的重要参数，一般取 20° 为标准值。

● 齿顶高系数 h_a^* ： $h_a^* = h_a^*/m$ 。

● 顶隙系数 c^* ： $c^* = c/m$ 。

2) 标准齿轮及其几何尺寸

● 标准齿轮：具有标准模数和标准压力角，且具有标准的齿顶高 $h_a = h_a^* m$ 和齿根高 $h_f = (h_a^* + c^*) m$ 、分度圆上的齿厚等于齿槽宽 ($s = e = \pi m/2$) 的齿轮。

● 几何尺寸：分度圆直径 $d = mz$ ；齿顶高 $h_a = h_a^* m$ ；齿根高 $h_f = (h_a^* + c^*) m$ ；齿全高 $h = (2h_a^* + c^*) m$ ；齿顶圆直径 $d_a = (z + 2h_a^*) m$ ；齿根圆直径 $d_f = (z - 2h_a^* - c^*) m$ ；基圆直径 $d_b = d \cos \alpha$ ；齿距 $p = \pi m$ ；齿厚 $s = \frac{\pi m}{2}$ ；齿槽宽 $e = \frac{\pi m}{2}$ ；顶隙 $c = c^* m$ 。

● 标准齿条的特点：

① 与齿顶线平行的各直线上的齿距都相等且 $p = \pi m$ 。

② 各点压力角相等且等于齿形角的大小。

3) 标准斜齿圆柱齿轮

由于轮齿的倾斜而引入螺旋角 β (一般取 $\beta = 8^\circ \sim 15^\circ$)，并且模数、压力角、齿顶高系数及顶隙系数有法面和端面之分，其中法面参数 m_n 、 α_n 、 h_{an}^* 及 c_n^* 为标准值，取值与直齿轮相同。

由于斜齿轮的端面是渐开线，所以斜齿圆柱齿轮的几何计算是按端面参数 m_t 、 α_t 、 h_{at}^* 及 c_t^* 来计算的，公式和直齿轮的计算公式相同，但斜齿轮的法面参数是标准参数，所以还需将端面参数换算成法面参数。端面参数与法面参数之间的换算关系是： $m_t = m_n / \cos \beta$ ， $\tan \alpha_t = \tan \alpha_n / \cos \beta$ ， $h_{at}^* = h_{an}^* \cos \beta$ ， $c_t^* = c_n^* \cos \beta$ 。

4) 蜗轮与蜗杆

蜗轮和蜗杆在其中间平面内就相当齿轮和齿条，蜗杆的形状又相似于螺杆，故它们的基本参数有：模数 m 、压力角 α 、导程角 γ 、蜗杆分度圆直径 d_1 (或蜗杆的直径系数 q)、齿顶高系数 h_a^* (取 1)、顶隙系数 c^* (取 0.2)、蜗杆头数 z_1 、蜗轮齿数 z_2 。其中模数 m 和压力角 α 是指蜗杆的轴面模数 m_{x_1} 和压力角 α_{x_1} ，亦即蜗杆的端面模数 m_{t_2} 和压力角 α_{t_2} ，且均为标准值。压力角一般取 $\alpha = 20^\circ$ ，但模数系列不同于齿轮的模数系列。而蜗杆的分度圆直径与其模数相匹配，并在国家标准中规定了标准系列值，以限制蜗轮滚刀的数目，并令 $d_1/m = q$ ， q 称为蜗杆的直径系数。

5) 圆锥齿轮

圆锥齿轮的特点是轮齿分布在一个圆锥面上，用来传递空间两相交轴之间的运动及动力。与圆柱齿轮相对应，在圆锥齿轮上有齿顶圆锥、分度圆锥和齿根圆锥。因圆锥齿轮是一个锥体，故有大端和小端之分。由于大端的尺寸比较大，利于测量和计算，所以通常取大端的参数为标准值。即模数 m 按标准系列取值，而压力角一般取 $\alpha = 20^\circ$ ， $h_a^* = 1$ ， $c^* = 0.2$ ，分度圆锥角 δ (其值由轴角 $\Sigma = \delta_1 +$

δ_2 及传动比 $i_{12} = \sin \delta_2 / \sin \delta_1$ 来确定, 一般取 $\Sigma' = 90^\circ$ 。

(4) 齿轮的加工及变位

用切削法切制渐开线齿廓时, 最常用的是仿形法和范成法。前者常采用刀具刀刃形状与被切齿轮的齿槽形状近似相同的盘形铣刀或指状铣刀在普通卧式或立式铣床上加工, 通常按被切齿轮的模数 m 、压力角 α 及齿数 z 来选择刀具的刀号, 由于一个刀号对应着某一范围的齿数, 其加工精度较低, 生产率低, 适合于修配和小量生产。后者常采用齿轮插刀 (或齿条插刀) 和齿轮滚刀分别在插齿机和滚齿机上来加工, 仅需按被切制齿轮的 m 和压力角 α 来选择刀具, 其加工精度较高, 特别是滚齿生产效率较高, 适合于大批量生产。

1) 标准齿轮的加工

采用标准齿条型刀具来切制齿轮, 使刀具的分度线刚好与轮坯的分度圆相切而范成加工出来的齿轮, 即为标准齿轮。

2) 根切现象

用范成法加工齿轮时, 若齿条型刀具的齿顶线 (或齿轮型刀具的齿顶圆) 与被切齿轮啮合线的交点超过了被切齿轮的啮合极限点 N_1 时, 则刀具的齿顶将把被切齿轮齿根已切出的渐开线齿廓又切去一部分, 这种现象称为根切现象。

3) 标准齿轮不发生根切的最少齿数

用标准齿条型刀具加工渐开线标准外齿轮时, 若刀具的齿顶线刚好通过啮合极限点 N_1 时, 恰好不发生根切。由此, 可推导出加工标准齿轮而又不发生根切的最少齿数为

$$z_{\min} = 2h_a^* / \sin^2 \alpha$$

当 $h_a^* = 1$, $\alpha = 20^\circ$ 时, $z_{\min} = 17$ 。

而加工渐开线标准斜齿轮时不发生根切的最少齿数为:

$$z_{\min} = 2h_{a\pi}^* \cos \beta / \sin^2 \alpha$$

圆锥齿轮不发生根切的最少齿数为:

$$z_{\min} = z_{t\min} \cos \delta$$

式中: $z_{t\min}$ ——圆锥齿轮的当量齿轮不发生根切的最少齿数。

4) 变位齿轮

为了达到切制齿数 $z < z_{\min}$ 的齿轮而又不发生根切、配凑中心距和改善齿轮的啮合性能等目的, 对齿轮可采用变位修正法。即改变刀具与被切齿轮轮坯的相对位置, 使刀具的分度线与被切齿轮轮坯分度圆不再相切的切制方法。用这种方法加工出来的齿轮称为变位齿轮, 这时刀具分度线与齿轮轮坯分度圆间移开的距离 xm 称为变位量, 其中 x 称为变位系数, 刀具远离轮坯时称为正变位, $x > 0$; 刀具移向轮坯时称为负变位, $x < 0$ 。

①切制齿轮时使齿轮不发生根切的最小变位系数。为使加工齿轮时不根切, 将刀具从标准位置移动, 当刀具的齿顶线刚好通过啮合极限点 N_1 时, 此时的变位量即为最小变位量, 则最小变位系数为:

$$x_{\min} = h_a^* (z_{\min} - z) / z_{\min}$$

当 $z < z_{\min}$ 时, $x_{\min} > 0$, 表明必须采用正变位才可避免根切; 当 $z > z_{\min}$ 时, $x_{\min} < 0$, 并不是说必须采用负变位, 而是说明即使采用负变位, 只要 $x > x_{\min}$, 也不会发生根切。

②变位齿轮的与参数相同标准齿轮比较, 由于变位齿轮的模数、压力角没有变化, 所以其分度圆、基圆、齿距也不变。而变化的量为: 分度圆齿厚 $s = (\pi/2 + 2x \tan \alpha)$ 、分度圆齿槽宽 $e = (\pi/2 - 2x \tan \alpha)$ 、齿顶高 $h_a = (h_a^* + x)m$ 、齿根高 $h_f = (h_a^* + c^* - x)m$, 进而齿顶圆、齿根圆也不同。

(5) 一对渐开线齿轮的啮合传动

1) 一对渐开线齿轮的正确啮合条件

① 一对渐开线直齿圆柱齿轮的正确啮合条件: 实现定传动比的正确啮合条件为两轮的法向齿距相等, 即基圆齿距相等, 也就是两齿轮的模数和压力角分别相等, 即 $m_1 = m_2 = m$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 。这个条件对直齿圆柱齿轮, 无论是标准齿轮还是变位齿轮, 无论是外啮合还是内啮合, 或齿轮齿条啮合均适用。

② 一对平行轴斜齿圆柱齿轮的正确啮合条件: 两齿轮法面模数和压力角分别相等, 螺旋角大小相等、方向相反 (外啮合) 或相同 (内啮合), 即 $m_{n1} = m_{n2} = m$, $\alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \alpha$, $\beta_1 = \mu\beta_2$ 。

③ 一对交错轴斜齿圆柱齿轮的正确啮合条件: $m_{n1} = m_{n2} = m$, $\alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \alpha$, 且两齿轮的螺旋角之和等于轴交角, 即 $\Sigma = |\beta_1 + \beta_2|$ 。

④ 蜗轮蜗杆传动的正确啮合条件: 在中间平面内蜗轮与蜗杆的模数和压力角分别相等, 为保持两者齿向一致, 当两轴交错角为 90° 时, 蜗杆导程角应等于蜗轮螺旋角, 即 $\gamma_1 = \beta_2$, 且两者螺旋线方向相同。

⑤ 圆锥齿轮的正确啮合条件: 因圆锥齿轮大端模数为标准值, 所以两齿轮大端的模数和压力角分别相等, 即 $m_1 = m_2 = m$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, 且 $\delta_1 + \delta_2 = \Sigma$ (两轴夹角)。

对于一对非标准参数的渐开线齿轮, 只要满足两齿轮的基圆齿距相等, 即 $p_{b1} = p_{b2}$, 也即 $m_1 \cos \alpha_1 = m_2 \cos \alpha_2$, 就能正确啮合, 这是齿轮正确啮合的基础条件。

2) 渐开线齿轮传动的无侧隙啮合

齿轮在安装时应满足两点要求: 保证两齿轮的齿侧间隙为零; 保证两齿轮的顶隙 c 为标准值。

① 标准齿轮传动的无侧隙啮合条件: 一个齿轮节圆上的齿厚等于另一个齿轮节圆上的齿槽宽。

由于标准齿轮的分度圆齿厚等于齿槽宽, 因此在安装时使两分度圆相切, 也就是使分度圆与节圆重合, 保证无侧隙啮合的条件, 把这种安装称为标准安装。

标准安装时的中心距 a 称为标准中心距, $a = r'_1 + r'_2 = r_1 + r_2 = m(z_1 + z_2)/2$ 。

标准安装时的顶隙 c 称为标准顶隙, $c = h_f - h_a = (h_a^* + c^*)m - h_a^* = c^*m$ 。

标准安装时, 由于节圆与分度圆重合, 即 $r' = r$, 而节圆压力角恒等于啮合角 α' , 所以分度圆压力角等于啮合角, 即 $\alpha = \alpha'$ 。

非标准安装时, (即 $a' \neq a$), 若 $a' > a$, 则两节圆大于两分度圆, 分度圆分离, 即 $r'_1 > r_1$, $r'_2 > r_2$; 其啮合角大于分度圆压力角, 即 $\alpha' > \alpha$; 其侧隙 $\delta > 0$, 顶隙 $c > c^*m$ 。此时, 实际中心距 a' 与啮合角 α' 的关系为 $a' \cos \alpha' = a \cos \alpha$ 。若 $a' < a$ 时, 两标准齿轮则无法安装。

② 变位齿轮传动的无侧隙啮合条件: 保证变位齿轮传动无侧隙啮合条件依然为一个齿轮节圆上的齿厚等于另一个齿轮节圆上的齿槽宽。

此时安装中心距 a' 、啮合角 α' 及变位系数和 $x_\Sigma = x_1 + x_2$ 之间的关系为

$$\text{inv } \alpha' = (2x_1 + x_2) \tan \alpha' / (z_1 + z_2) + \text{inv } \alpha \quad (1)$$

此式通常和公式

$$a' \cos \alpha' = a \cos \alpha \quad (2)$$

联立使用。通过 $a' \xrightarrow{(2)} \alpha' \xrightarrow{(1)} x_\Sigma$ 或 $x_\Sigma \xrightarrow{(1)} \alpha' \xrightarrow{(2)} a'$ 来确定设计所需的参数。

由于中心距发生了变化, 其与标准中心距之间的关系为

$$a' = a + ym = a + \frac{z_\Sigma}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right) m$$

式中: $y = \frac{z_1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right)$ 称为中心距变动系数。

为保证变位齿轮安装时既要无侧隙啮合又要具有标准顶隙, 在按无侧隙啮合中心距 a' 安装的同时, 需将两轮的齿顶都削去一段 $\Delta y m$ 。即齿轮的齿顶高变为

$$h_a = (h_a^* + x - \Delta y) m$$

式中: $\Delta y = x_{y1} - y$, 称为齿顶高变动系数。只要变位系数和 $x_{\Sigma} \neq 0$, 它就是一个总是大于零的系数。

$$\begin{cases} x_{y1} = 0 & \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \text{ 标准齿轮传动 (零变位齿轮传动)} & a' = a, a' = \alpha, y = 0, \Delta y = 0 \\ x_1 = -x_2 \neq 0 \text{ 等变位齿轮传动 (高度变位齿轮传动)} & a' = a, a' = \alpha, y = 0, \Delta y = 0 \end{cases} \\ x_{y1} > 0 & \text{正传动 } a' > a, a' > \alpha, y > 0, \Delta y > 0 \\ x_{y1} < 0 & \text{正传动 } a' < a, a' < \alpha, y < 0, \Delta y < 0 \end{cases}$$

从配凑中心距来看:

当 $a' = a$ 时, 可采用标准齿轮传动或等变位齿轮传动;

当 $a' > a$ 时, 须采用正传动;

当 $a' < a$ 时, 须采用负传动。

正传动优点较多, 所以一般采用正传动, 只是在配凑中心距时才选择负传动。

3) 一对渐开线齿轮连续传动条件

① 直齿圆柱齿轮传动的连续传动条件: 为了实现两齿轮连续传动, 必须保证在前一对轮齿尚未脱离啮合时, 后一对轮齿能及时地进入啮合。这就要求实际啮合线段 $\overline{B_1 B_2}$ 应大于或等于两齿轮的法向齿距 p_n (即基圆齿距 p_b)。通常把 $\overline{B_1 B_2}$ 与 p_b 的比值称为齿轮传动的重合度, 用 ϵ_a 表示。因此齿轮连续传动的条件为: 重合度必须大于或等于 1。工程上要求实际重合度应大于许用值 $[\epsilon_a]$, 即:

$$\epsilon_a = \overline{B_1 B_2} / p_b \geq 1 \quad \text{或} \quad \epsilon_a \geq [\epsilon_a]$$

重合度的意义: 一是反映一对齿轮能否实现连续传动; 二是反映同时参与啮合的轮齿对数的多少。比如 $\epsilon_a = 1.25$, 表明在实际啮合线段上有两段 (长度各为 $0.25 p_b$), 为两对齿啮合区, 而在节点 P 附近, 长度为 $0.75 p_b$ 的线段为一齿啮合区。同时有表明在轮齿转过一个基圆齿距的时间里, 两对轮齿同时啮合的时间占 25%, 而一对轮齿啮合的时间占 75%。由此可见, 重合度愈大, 齿轮传动愈平稳, 承载能力愈高。重合度计算公式如下:

$$\epsilon_a = [z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') \pm z_2 (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')] / 2\pi$$

式中: “+”号——外啮合;

“-”号——内啮合;

α_{a1}, α_{a2} ——轮 1、轮 2 的齿顶圆压力角;

α' ——啮合角。

若齿轮与齿条啮合时, 其重合度为:

$$\epsilon_a = z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') / 2\pi + 2h_a^* / (2 \sin^2 \alpha)$$

而变位齿轮传动的连续传动条件和重合度的计算与标准齿轮完全相同。

② 斜齿轮传动的重合度: 斜齿轮传动的重合度 ϵ_r 包含端面重合度 ϵ_a 和轴向重合度 ϵ_β 两部分, 端面重合度与直齿轮一样, 是用端面参数按照直齿轮的重合度公式来计算; 而轴向重合度则与斜齿轮的螺旋角 β 、斜齿轮的宽度 B 有关, 且随 β 和 B 的增大而增大。这是斜齿轮较直齿轮的一个优点。

$$\epsilon_r = \epsilon_a + \epsilon_\beta = \overline{B_1 B_2} / p_{b\beta} + B \sin \beta / (\pi m_n)$$

③ 圆锥齿轮传动的重合度: 圆锥内轮的重合度就是其当量齿轮传动的重合度。即用当量齿轮的参数按直齿轮重合度的计算公式来计算圆锥内轮的重合度的大小。

5.2 专题释疑

5.2.1 齿轮传动中易混淆的概念

(1) 分度圆与节圆

分度圆是指单个齿轮上具有标准模数和标准压力角的圆, 当一个齿轮加工好后, 分度圆就确定了。标准安装时两个分度圆相切。而节圆是一对齿 2 轮在啮合传动时两个相切作纯滚动的圆。单个齿轮无所谓节圆, 只有齿轮啮合时才存在节圆。节圆的大小和齿轮的安装位置, 即安装中心距有关。当标准安装时, 节圆与分度圆重合。否则不重合。

(2) 压力角 α 与啮合角 α'

压力角 α 是指单个齿轮渐开线齿廓上某一点的线速度方向与该点法线方向所夹的锐角。渐开线齿廓上各点的压力角的大小是不相等的。啮合角 α' 是指一对齿轮啮合时, 啮合线与节圆公切线之间所夹的锐角, 其值等于渐开线齿廓在节圆上的压力角, 由于节圆大小随中心距变化而变化, 故两轮的啮合角也随中心距变化而变化, 其关系式为 $a \cos \alpha = a' \cos \alpha'$ 。显然, 只有两轮中心距 a' 为标准中心距 a 时, 节圆与分度圆重合, 啮合角才等于分度圆上的压力角。

(3) 法向齿距 p_n 与基圆齿距 p_b

虽然 $p_n = p_b$, 但法向齿距 p_n 是指渐开线齿廓上任意一点的法线上度量的相邻两齿廓之间的直线长度, 而基圆齿距 p_b 是指基圆上度量的相邻两齿同侧齿廓之间的弧长。

(4) 标准齿轮与零变位齿轮

标准齿轮有 3 个条件, 即标准的基本参数、分度圆齿厚等于齿槽宽 ($s = e = \pi m / 2$)、标准齿顶高和齿根高。而在变位齿轮传动中, $x_{\Sigma} \neq 0$ 时, 也可以存在 $x_1 = 0$ (或 $x_2 = 0$) 零变位齿轮, 这时齿轮 1 (或齿轮 2) 具有标准的模数和压力角, 齿厚和齿槽宽也是标准值, 但由于与其相啮合的另一齿轮是变位齿轮, 故齿轮的齿顶高变动系数 $\Delta y > 0$, 即齿轮的齿顶高不再是标准值。

(5) 变位齿轮与传动类型

变位齿轮是指单个齿轮是正变位齿轮 ($x > 0$) 或负变位齿轮 ($x < 0$)。而传动类型是按一对相啮合的齿轮的变位系数和 $x_{\Sigma} = x_1 + x_2$ 的大小来区分的。变位系数和 $x_{\Sigma} = 0$ 时称为零变位或高度变位齿轮传动; $x_{\Sigma} > 0$ 时称为正传动; $x_{\Sigma} < 0$ 时称为负传动; 在这 3 种传动类型中的齿轮既有正变位齿轮, 又有负变位齿轮。比如在正传动中, 两齿轮可以都是正变位齿轮, 也可以一个是正变位齿轮, 一个是负变位齿轮, 只要保证 $x_{\Sigma} > 0$ 即可。

(6) 齿面接触线与啮合线

两轮齿廓齿面的瞬时接触线称为齿面接触线。当一对直齿圆柱齿轮啮合传动时, 两轮的齿面接触线是与轴线平行的直线。在主动轮的齿廓曲面上, 该接触线是由齿根逐渐走向齿顶。而在从动轮的齿廓曲面上, 该接触线是由齿顶逐渐走向齿根。啮合线是指一对齿廓曲线在啮合传动过程中, 其啮合点的轨迹。对于一对渐开线齿廓而言, 其啮合线既是两基圆的内公切线, 又是两齿廓在啮合点的公法线, 同时也是不计摩擦时两齿廓间力的作用线。

(7) 理论啮合线与实际啮合线

基圆的内公切线 $\overline{N_1 N_2}$ 是齿轮啮合时的啮合线, 由于基圆内无渐开线, 所以切点 N_1 、 N_2 分别为起始啮合和终止啮合的极限点, 因此 $\overline{N_1 N_2}$ 称为理论啮合线。实际啮合中, 齿轮开始啮合和终止啮合

的点是齿轮的齿顶圆与啮合线的交点 B_2 , B_1 确定的。所以称线段 $\overline{B_1B_2}$ 为实际啮合线。

5.2.2 齿轮齿条啮合传动与标准齿条型刀具范成加工齿轮

用齿条型刀具范成加工齿轮时, 需要注意两点: 一是运动条件, 即 $v_J = \frac{mz}{2} \omega_{\text{齿}} (-r\omega_{\text{齿}})$ 或 $z = \frac{2v_J}{m\omega_{\text{齿}}}$ 。该式表明: 被加工齿轮的齿数, 取决于 v_J 和 $\omega_{\text{齿}}$ 的比值, 而与刀具和轮坯的相对位置无关。在加工齿轮时, 应根据被加工齿轮的模数 m 和齿数 z 来调整整个机床传动系统的传动比, 使之满足上式表示的关系, 才能加工出指定齿数 z 的齿轮。如果机床的传动比调整不当, 不满足上述关系, 则加工出来的齿轮齿数即使是整数, 也不是所要求的齿数。而大多数情况下, 按上式计算出来的齿数不是整数, 则当刀具相对于齿轮滚切几周后, 轮坯上已范成出来的轮齿将逐渐被部分地切除, 最后只得到一个没有轮齿的直径等于齿根圆的小圆柱体。二是刀具与轮坯的相对位置, 即被加工轮齿的变位系数 x , 主要取决于轮坯中心与刀具中线之间的距离 L , $x = \frac{L-r}{m}$ 。

当 $L=r$ 时, 刀具中线与轮坯分度圆相切, $x=0$, 加工出来的是标准齿轮;

当 $L>r$ 时, 刀具中线与轮坯分度圆相分离, $x>0$, 加工出来的是正变位齿轮;

当 $L<r$ 时, 刀具中线与轮坯分度圆相交, $x<0$, 加工出来的是负变位齿轮。

5.2.3 齿轮传动的传动比及从动轮的转向

(1) 渐开线圆柱齿轮传动

渐开线内、外啮合标准直齿轮传动、变位齿轮传动及平行轴斜齿轮传动, 它们的传动比公式相同, 即

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

而两齿轮的转向为: 内啮合相同, 外啮合相反。

(2) 交错轴斜齿轮传动

其传动比为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2 \cos \beta_2}{d_1 \cos \beta_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

从动轮的转向可由两轮轮齿啮合节点处重合点间的速度矢量图来确定。当主动轮转向一定时, 从动轮的转向又可以用改变螺旋角的方法来获得。

(3) 蜗轮蜗杆传动

其传动比为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1 \tan \gamma} = \frac{d_2}{d_1 \tan \beta_2}$$

其从动轮蜗轮的转向可由其啮合节点处重合点间的速度矢量图来确定或用左、右手来判断。蜗轮的转向主要取决于蜗杆的转向和旋向。注意此时主动件是蜗杆, 用手握住蜗杆, 当蜗杆是右旋时用右手, 是左旋时用左手, 四指沿蜗杆的角速度方向弯曲, 则拇指所指的方向就是蜗杆的轴向力方向, 根据作用力与反作用力, 拇指的反方向就是蜗轮的切向力方向, 也就是蜗轮的在接触点的线速度方向, 由此判断出蜗轮的转动方向。当不知蜗杆的旋向或转动方向, 而知蜗轮的转动方向时, 可根据蜗轮的转动方向确定出蜗轮接触点的线速度方向, 进而确定出蜗轮在接触点所受到的切向力方向, 此方向的反方向就是蜗杆的轴向力方向。当蜗杆的轴向力确定后, 根据所给定的蜗杆的条件, 试着用左手或右手, 看哪一个能符合所确定的蜗杆的轴向力的方向, 则符合者的旋向和转向就是蜗杆的旋向或转向。

(4) 圆锥齿轮传动

当轴角 $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ 时

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = 1/\tan \delta_1 = \tan \delta_2$$

两齿轮的转向同时指向节点或同时背离节点。

5.2.4 当量齿轮及当量齿数

(1) 斜齿轮的当量齿轮及其当量齿数

用盘状铣刀切削斜齿轮时, 刀刃位于轮齿的法面内, 并沿着分度圆螺旋齿槽的方向切齿, 这样切出来的斜齿轮, 法面的齿形与刀刃的形状相对应。那就应当找出与斜齿轮法面齿形相当的直齿轮, 这个虚拟的直齿轮称为斜齿轮的当量齿轮, 其齿数称为当量齿数 z_v , $z_v = z/\cos^3 \beta$ 。

(2) 圆锥齿轮的背锥及其当量齿数

圆锥齿轮的齿廓曲线在理论上是球面渐开线, 但由于球面无法展成平面, 故给圆锥齿轮的设计和制造带来困难, 所以人们便采用一种近似的方法来研究圆锥齿轮的齿廓曲线。方法是作一圆锥与圆锥齿轮大端球面相切于圆锥齿轮的分度圆锥, 所作的这个圆锥就是背锥。将大端球面渐开线齿廓向背锥投影, 就可得到与大端齿廓极为相近的齿廓, 这样可以把球面渐开线在背锥上的投影, 近似作为圆锥齿轮的齿廓。由于背锥可以展成平面, 成为一个扇形齿轮, 其上齿数是圆锥齿轮的实有齿数 z , 今将扇形齿轮补足成为完整的圆柱齿轮, 则其齿数将增加为 z_v , 该虚拟的圆柱齿轮称为圆锥齿轮的当量齿轮, 其齿数 z_v 称为圆锥齿轮的当量齿数, $z_v = z/\cos \delta$ 。当量齿轮的模数和压力角分别是圆锥大端的模数和压力角, 其齿形与圆锥球面渐开线齿形的误差很微小。通过当量齿轮的概念就可以将圆柱齿轮的某些研究直接应用在圆锥齿轮上。

当用仿形法加工斜齿轮或圆锥齿轮时, 可按当量齿数选择盘状铣刀的号码; 在计算斜齿或圆锥齿轮的齿根抗弯强度时, 也按当量齿数来查取齿形系数。

5.3 典型例题解析

例 1 某传动中的一对正常齿标准渐开线直齿圆柱齿轮, 其模数 $m = 5 \text{ mm}$, 传动比 $i_{12} = 3$, 中心距 $a = 100 \text{ mm}$, 试分析计算以下问题:

- (1) 计算两齿轮的齿数 z_1 、 z_2 , 这两个齿轮加工时是否发生根切?
- (2) 在已知条件不变, 同时要求无根切, 这对齿轮应采用何种类型的齿轮传动? 为什么采用这种类型的齿轮传动? 其优缺点是什么? 这两个齿轮的变位系数值如何选择?
- (3) 若安装这对齿轮的箱体的齿轮轴孔中心距加工严重超差, 实际中心距为 $a' = 102 \text{ mm}$, 按所设计的两齿轮安装后, 其传动比、啮合角、齿侧间隙、重合度都发生了怎样的变化?
- (4) 根据箱体实际 $a' = 102 \text{ mm}$, 齿数 z_1 、 z_2 , 模数 $m = 5 \text{ mm}$ 不变的条件下, 这对齿轮传动应选择哪种传动类型方案较佳? 并简述其主要设计计算步骤。

【解答】

(1) 由 $i_{12} = z_2/z_1 = 3$ 和 $a = m(z_1 + i_{12}z_2)/2 = 100 \text{ mm}$, 求得 $z_1 = 10$, $z_2 = 30$ 。

因 $z_1 < 17$, $z_2 > 17$, 故齿轮 1 发生根切, 而齿轮 2 不根切。

(2) 因 $a' = a = 100 \text{ mm}$, 而 $z_1 < 17$, 故齿轮 1 必须采用正变位, 所以应采用等变位传动, 以满足中心距是标准中心距、齿轮 1 不根切的要求。

这种传动类型的优点是:

- ①可以减小齿轮机构的尺寸和重量;
- ②相对地提高齿轮的承载能力;
- ③改善齿轮的磨损情况;
- ④因中心距仍为标准中心距, 可以成对地替换标准齿轮及修复旧齿轮。

缺点是:

- ①必须成对地设计、制造和使用;
- ②小齿轮为正变位, 齿顶易变尖;

③重合度略有减小。而齿轮 1 不发生根切应满足 $mz_1 \sin \alpha / 2 \geq (h_a^* m - x_1 m) / \sin \alpha$, 可得 $x_1 \geq 0.415$, 而 $x_2 = -x_1$ 。

(3) 因为 $a' = 102 \text{ mm} > a = 100 \text{ mm}$, 若用上述第 (2) 问所设计的齿轮来进行安装, 根据渐开线齿廓啮合的可分性, 齿轮的传动比依然是 $i_{12} = z_2 / z_1 = 3$, 但已不再是无侧隙啮合, 即存在侧隙; 由于中心距增大, 所以顶隙也将增大, 不再是标准顶隙, 即 $c > c^* m$; 根据 $a' \cos \alpha' = a \cos \alpha$, 中心距增大, 啮合角 α' 将增大, 而重合度将减少。

(4) 因 $\alpha' > \alpha$, 为凑中心距, 采用正传动较好。

根据 $a' \cos \alpha' = a \cos \alpha$, 可以求出啮合角 α' , 然后根据无侧隙啮合方程式 $\text{inv } \alpha' = \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \tan \alpha + \text{inv } \alpha$, 求出变位系数和 $x_\Sigma = x_1 + x_2$ 。为避免根切, 小齿轮应采用正变位, 且在第 (2) 问中得出 $x_1 \geq 0.415$, 而 $x_2 = x_\Sigma - x_1$ 。根据变位系数的选择原则, 选择合适的变位系数。

例 2 用标准齿条刀具范成切制渐开线直齿圆柱齿轮, 其基本参数为 $m = 2 \text{ mm}$, $\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$ 。

(1) 当轮坯角速度为 $\omega_{\text{坯}} = \frac{1}{22.5} \text{ rad/s}$ 时, 欲切制齿数 $z = 90$ 的标准齿轮, 求轮坯中心与刀具中线之间的距离 L 和刀具移动线速度。

(2) 在保持所求出的 L 和 $\omega_{\text{坯}}$ 不变的情况下, 若将轮坯角速度改为 $\omega_{\text{坯}} = \frac{1}{22} \text{ rad/s}$, 求所切制的齿轮的齿数 Z 和变位系数 x 是正还是负。

(3) 在保持 L 和 $\omega_{\text{坯}}$ 不变的情况下, $\omega_{\text{坯}} = \frac{1}{22.1} \text{ rad/s}$, 求所切制的齿轮的齿数 Z 。

【分析】 齿条刀具加工齿轮过程相当于齿条和齿轮啮合的过程, 由此可知齿轮分度圆圆周速度应该与齿条刀具的移动速度相等; 齿轮转动中心与刀具分度线的距离等于齿轮分度圆半径与变位量 xm 之和。

【解答】 (1) 欲切制标准齿轮, 则

$$L = r = mz / 2 = 2 \times 90 / 2 = 90 \text{ mm}$$

$$v_{\text{刀}} = \frac{mz}{2} \omega_{\text{坯}} = 90 \times \frac{1}{22.5} = 4 \text{ mm/s}$$

$$(2) \quad z = \frac{2 v_{\text{刀}}}{m \omega_{\text{坯}}} = \frac{2 \times 4}{2 \times \frac{1}{23}} = 92 \text{ (个)}$$

$$r = \frac{mz}{2} = \frac{2 \times 92}{2} = 92 \text{ mm}$$

$$\text{而 } L = 90 \text{ mm, 因此 } x = \frac{L - r}{m} = \frac{90 - 92}{2} = -1$$

所以, 加工出来的齿轮是负变位齿轮。

$$(3) \quad z = \frac{2v_H}{m\omega_{\text{基}}} = \frac{2 \times 4}{2 \times \frac{1}{22.1}} = 88.4 \text{ (个)}$$

例3 图5-2 (a)所示为无侧隙啮合的渐开线标准直齿轮与齿条传动 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$)。齿轮主动, 逆时针方向转动, 其他条件如图所示, 图中 $\mu_l = 1 \text{ mm/mm}$ 。试求:

(1) 在该图上作出并标明: ①理论啮合线 N_1N_2 ; ②实际啮合线 B_1B_2 ; ③啮合角 α' ; ④齿条的节线; ⑤齿轮的节圆; ⑥齿轮的分度圆; ⑦齿轮的齿廓工作段; ⑧齿条的齿廓工作段。

(2) 估算模数 m 和重合度 ε 。

(3) 以估算的 ε 值为例, 解释重合度 ε 的含义。

(附: ①标准模数系列值 (部分): 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12。② $\sin 20^\circ = 0.3520$; $\cos 20^\circ = 0.9397$; $\tan 20^\circ = 0.3640$)

【分析】 此题应明确齿轮啮合线、啮合角、节线、节圆、分度圆的等基本概念。齿轮传动的重合度等于其实际啮合线的长度 $\overline{B_1B_2}$ 与齿轮的法向齿距 P_n (数值上等于齿轮到基圆齿距 P_b) 之比, 由此即可求得实际啮合线的长度 $\overline{B_1B_2}$ 。

【解答】 (1) 如图5-2 (b) 所示的齿轮与齿条啮合, 其理论啮合线 N_1N_2 应垂直于齿条齿廓且与齿轮的基圆相切, 即切点 N_1 为一啮合极限点, 另一啮合极限点 N_2 在无穷远处; 而其实际啮合线段 $\overline{B_1B_2}$ 为齿轮齿顶圆与 N_1N_2 的交点 B_2 至齿条齿顶线与 N_1N_2 线的交点 B_1 之间的线段。其传动的啮合角 α' 为啮合线 N_1N_2 与齿条节线的夹角, 且等于其齿轮分度圆压力角或齿条的齿形角 α ; 而齿条的节线则因为标准安装, 与其分度线相重合, 即为过 P 点作 PO 线的垂直线; 齿轮的节圆总是与其分度圆相重合, 即为以 O 为圆心, 以 \overline{OP} 为半径所作的圆; 齿轮的齿廓工作段为在其左侧齿廓上与过 B_1 所作圆 (圆心为 O) 的交点至齿顶圆之间的这段齿廓段, 而齿条的齿廓工作段则为齿条右侧齿廓上与过 B_2 的齿条分度线的平行线的交点至齿条齿顶线之间的这段齿廓段。

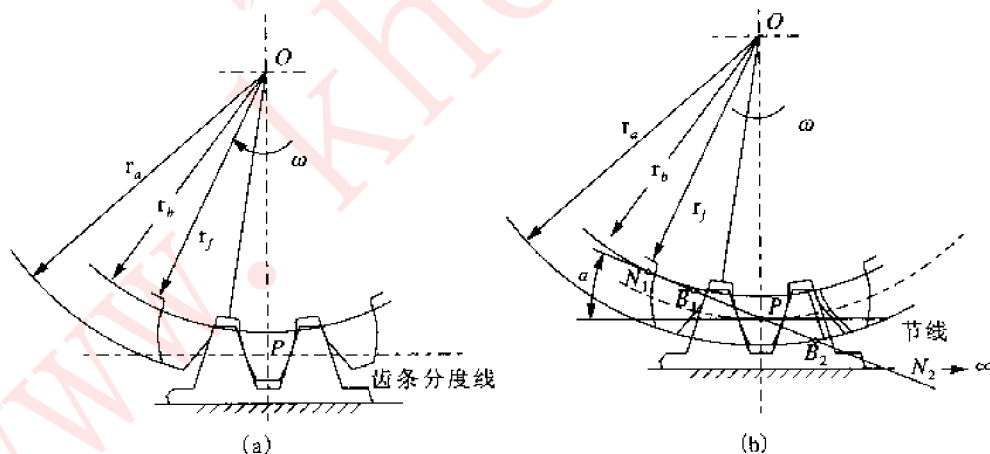


图 5-2

(2) 由图上量出齿顶高或分度圆半径来估算出其模数 m , 且 m 要靠模数系列取为标准值, 即 $m = 6 \text{ mm}$, 再由分度圆半径估算出 z_1 , 且为正整数, $z_1 = 26$; 然后由图量出 $\overline{B_1B_2}$ 尺寸, 再由 $\varepsilon = \overline{B_1B_2} / (\pi m \cos \alpha)$ 估算出重合度, 即 $\varepsilon = 1.8$ 。或先由尺寸, 并计算出 a_{a1} , 在图中量出 r_a 的估算出 ε , $d_a = 2r_a = 168 \text{ mm}$

$$\cos \alpha_a = mz \cos \alpha / d_a = 0.872, \quad \alpha_a \approx 29.24^\circ$$

$$\epsilon = [z_1 (\tan \alpha_a - \tan \alpha) + 2h_a / (\sin \alpha \cos \alpha)] / 2\pi \approx 1.8$$

(3) 重合度 $\epsilon = 1.8$ 表示平均有 1.8 对齿同时参与啮合。即在实际啮合线段 $\overline{B_1B_2}$ 上, 以 B_2 点和 B_1 点为起始点和终止点的两个 $0.8 p_b$ 段范围为双齿啮合区, 而其中间 $0.2 p_b$ 段范围为单齿啮合区。

5.4 原教材习题详解

5-5 题

【解答】 本题只需比较两圆的大小即可。

$$r_f = m (z/2 - h_a^* - c^*), \quad r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha$$

$$r_f - r_b = \frac{mz}{2} (1 - \cos \alpha) - m (h_a^* + c^*)$$

当 $r_f \geq r_b$ 时, 有

$$m (z/2 - h_a^* - c^*) \geq \frac{mz}{2} \cos \alpha$$

整理得 $z \geq 2 (h_a^* + c^*) / (1 - \cos \alpha) = 2 \times (1 + 0.25) / (1 - \cos 20^\circ) = 41.45 \approx 42$

因齿数为整数, 所以 $z \geq 42$ 。



因为齿轮的齿数一定是整数, 所以当 $z \geq 42$ 时, 齿根圆大于基圆; 而当 $z \leq 41$ 时, 齿根圆小于基圆, 根据渐开线的基本性质“基圆以内无渐开线”可知, 对于齿数小于或等于 41 的标准齿轮, 其齿根段的齿廓一定不是渐开线, 而是一段过渡曲线。此外, 对于两标准齿轮来说, 其齿根圆和基圆永远是不会完全重合的。

5-6 题

【分析】 由题图可得 $W_k = (k-1)P_b + S_b$, 由此可确定出齿轮的基圆齿距 P_b , 而 $P_b = \pi m \cos \alpha$, 因为齿轮的模数和压力角都是标准化了, 所以可以按标准压力角试算得出标准模数, 然后再求其他参数。齿顶变尖就是齿顶圆厚为零, 由此根据齿厚公式确定此时的向径。

【解答】

1) 因为

$$P_b = \pi m \cos \alpha = W_3 - W_2$$

所以

$$m = \frac{W_3 - W_2}{\pi \cos \alpha} = \frac{62.16 - 39.38}{\pi \cos \alpha} = \frac{7.2511}{\cos \alpha}$$

当 $\alpha = 20^\circ$ 时, $m = 7.2511 / \cos 20^\circ \approx 7.716 \text{ mm}$

当 $\alpha = 25^\circ$ 时, $m = 7.2511 / \cos 25^\circ = 8 \text{ mm}$

因齿轮的模数是标准模数, 所以齿轮的模数 $m = 8 \text{ mm}$, 压力角 $\alpha = 25^\circ$ 。

$$d_a = m (z + 2h_a^*), \quad d_f = m (z - 2h_a^* - 2c^*)$$

$$h_a^* = \frac{d_a}{2m} - \frac{mz}{2m} = \frac{208 - 8 \times 24}{2 \times 8} = 1$$

$$c^* = \frac{mz}{2m} - \frac{d_f + 2h_a^* m}{2m} = \frac{8 \times 24 - 172 - 2 \times 1 \times 8}{2 \times 8} = 0.25$$

2) 因为

$$r = mz/2 = 24 \times 8/2 = 96 \text{ mm}$$

$$r_b = r \cos \alpha = 96 \cos 25^\circ = 87.01 \text{ mm}$$

$$\alpha_a = \arccos(r_b/r_a) = \arccos(87.01/104) = 33^\circ 13'$$

所以

$$\begin{aligned} s_a - s &= \frac{r_a}{r} - 2r_a (\text{inv } \alpha_a - \text{inv } \alpha) = \frac{\pi m}{2} \cdot \frac{r_a}{r} - 2r_a (\text{inv } 33^\circ 13' - \text{inv } 25^\circ) \\ &= \frac{\pi \times 8}{2} \cdot \frac{104}{96} - 2 \times 104 \times (0.075\,075 - 0.029\,975) \\ &= 4.24 \text{ mm} \end{aligned}$$

又因为齿顶变尖时 $S_K = 0$, 则有

$$S \frac{r_K}{r} - 2r_K (\text{inv } \alpha_K - \text{inv } \alpha) = 0$$

故

$$\begin{aligned} \text{inv } \alpha_K - \frac{S}{2r} + \text{inv } \alpha &= \frac{\pi}{2z} + \text{inv } \alpha = \frac{\pi}{2 \times 24} + \text{inv } 25^\circ = 0.095\,425 \\ \alpha_K &\approx 35^\circ 42' \end{aligned}$$

所以

$$r_K = r_b / \cos \alpha_K = 87.01 / \cos 35^\circ 42' = 107.93 \text{ mm}$$



提示 $W_k - W_{(k-1)}$ 恰等于一个基圆齿距, 而在齿轮加工中, 基圆齿距 p_b 的误差是很小的, 故只要齿轮的压力角已知, 就可由此很准确地确定出模数 m 来, 而与齿轮是否变位、齿顶高系数大小和齿顶是否削减、齿厚是否变薄、齿顶圆直径偏差大小等无关。通过测量齿轮的公法线长度, 可以求得齿轮的基圆齿距和齿厚, 并进而确定齿轮的模数和压力角。另外, 增大齿轮的齿顶圆虽可使重合度增大, 但齿顶变尖, 使齿轮强度降低。

5-7 题

【分析】 用两个相同半径的圆柱体, 对称置于渐开线直齿圆柱齿轮直径两端的齿槽内, 让圆柱体与轮齿面在分度圆上相切, 可通过用 r_p 测得的 l 检验分度圆直径。

【解答】 两切点间所对的圆心角 β

$$\begin{aligned} \beta &= e/r = \pi/z - \pi/18 = 10^\circ \\ \angle PON &= \alpha + \beta/2 = 20^\circ + 5^\circ = 25^\circ \end{aligned}$$

因

$$NP = NK + r_p = r_b \tan \angle PON$$

所以

$$r_p = r_b \tan \angle PON = r_b \tan \alpha + \frac{mz}{2} \cos \alpha (\tan \angle PON - \tan \alpha) = 4.33 \text{ mm}$$

则

$$l - 2(OP + r_p) = 2(r_b / \cos \angle PON + r_p) = mz \cos \alpha / \cos \angle PON + 2r_p = 101.98 \text{ mm}$$

5-8 题

【分析】 齿轮传动的重合度等于其实际啮合线的长度 $\overline{B_1B_2}$ 与内轮的法向齿距 P_n (数值上等于齿轮到基圆齿距 P_b) 之比, 由此即可求得实际啮合线的长度 $\overline{B_1B_2}$ 。至于如何指出传动的双齿啮合区和单齿啮合区, 则应熟悉一对内轮的完整啮合过程。

【解答】 如图 5-3 所示。

$$1) \text{ 因 } \alpha_{a1} = \arccos(r_b/r_{a1}) = \arccos\left(\frac{z_1 \cos \alpha}{z_1 + 2h_a^*}\right) = \arccos\left(\frac{19 \cos 20^\circ}{19 + 2 \times 1}\right) = 31^\circ 46'$$

$$\text{故 } \alpha_{a2} = \arccos\left(\frac{z_2 \cos \alpha}{z_2 + 2h_a^*}\right) = \arccos\left(\frac{42 \cos 20^\circ}{42 + 2 \times 1}\right) = 26^\circ 14' 10''$$

$$\text{所以 } B_1P - B_1N_1 - N_1P = r_{b1} (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') = \frac{mz_1}{2} \cos \alpha (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') = 11.39 \text{ mm}$$

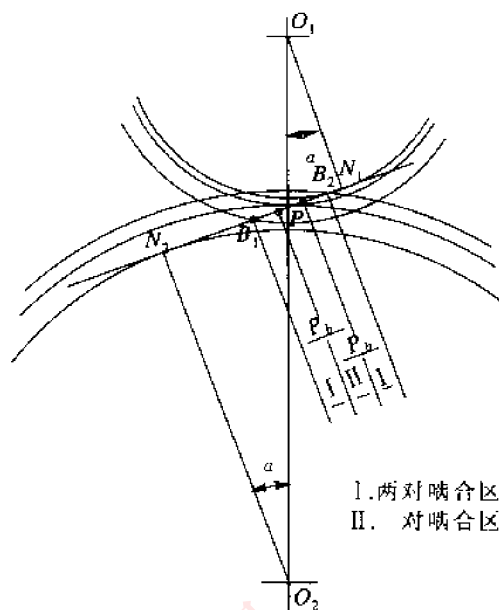


图 5-3

同理

$$B_2P = \frac{mz_2}{2} \cos \alpha (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha') = 12.72 \text{ mm}$$

所以

$$B_1B_2 = B_1P + B_2P = 24.11 \text{ mm}$$

作用弧

$$\overline{CD} = B_1B_2 / \cos \alpha' = 24.11 / \cos 20^\circ = 25.66 \text{ mm}$$

重合度

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= B_1B_2 / P_b = B_1B_2 / \pi m \cos \alpha \\ &= \frac{24.11}{\pi \times 5 \cos 20^\circ} = 1.63 \text{ mm} \end{aligned}$$

2) 作啮合区图并按图上尺寸计算 ϵ_α 。

由图中量得

$$B_1B_2 = 24.0 \text{ mm}$$

则

$$\epsilon_\alpha = \frac{24.0}{\pi \times 5 \cos 20^\circ} = 1.626$$

5-9 题

【分析】一对齿轮若能刚好连续传动，表示它们的重合度等于 1，因此可以根据重合度的计算公式，首先求得啮合角 α' ，然后进一步求解其他各项。

【解答】

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} = \frac{5 \times 19}{2} = 47.5 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{mz_2}{2} = \frac{5 \times 42}{2} = 105 \text{ mm}$$

$$a = r_1 + r_2 = 47.5 + 105 = 152.5 \text{ mm}$$

$$\alpha_{a1} = 31^\circ 46'$$

$$\alpha_{a2} = 26^\circ 14' 10''$$

由重合度公式得

$$\tan \alpha' = \frac{z_1 \tan \alpha_{a1} + z_2 \tan \alpha_{a2} - 2\pi \epsilon_\alpha}{z_1 + z_2}$$

当该对齿轮刚好能连续传动时, 其 $\epsilon_0 = 1$, 因此得

$$\tan \alpha' = \frac{19 \tan 31^\circ 46' + 42 \tan 26^\circ 14' 10'' - 2\pi}{19 + 42} = 0.4292$$

则

$$\alpha' = 23^\circ 13' 45''$$

$$r'_1 = r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 48.57 \text{ mm}$$

$$r'_2 = r_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 107.37 \text{ mm}$$

则

$$a' = r'_1 + r'_2 = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 155.94 \text{ mm}$$

$$c = a' - r_{f1} - r_{a2} = a' - \left(\frac{z_1}{2} - h_a^* - c^* \right) m - \left(\frac{z_2}{2} + h_a^* \right) m = 4.69 \text{ mm}$$

5-10 题

【证明】 1) 设两齿轮在任意点 K 接触, 两轮在 K 的速度分别为 \boldsymbol{v}_{k1} 和 \boldsymbol{v}_{k2} , \boldsymbol{v}_{k1} 和 \boldsymbol{v}_{k2} 在啮合线上的投影为 \boldsymbol{v}_{k1}^* 和 \boldsymbol{v}_{k2}^* .

因

$$\boldsymbol{v}_{k1}^* = \boldsymbol{v}_{k1} \cos \alpha_{k1} = \omega_1 r_{k1} \cos \alpha_{k1} = \omega_1 r_{b1}$$

$$\boldsymbol{v}_{k2}^* = \boldsymbol{v}_{k2} \cos \alpha_{k2} = \omega_2 r_{k2} \cos \alpha_{k2} = \omega_2 r_{b2}$$

又因

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} \quad \text{即} \quad \omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2} = \text{常数}$$

所以

$$\boldsymbol{v}_{k1}^* = \boldsymbol{v}_{k2}^* = \text{常数}$$

接触点 K 沿啮合线的移动速度为常数。

2)

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{k2k1} = \vec{\boldsymbol{v}}_{k2} - \vec{\boldsymbol{v}}_{k1}$$

则 $\vec{\boldsymbol{v}}_{k2k1}$ 的大小为

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{v}}_{k2k1} &= \omega_2 r_{k2} \sin \alpha_{k2} - \omega_1 r_{k1} \sin \alpha_{k1} \\ &= \rho_{k2} \omega_2 - \rho_{k1} \omega_1 \\ &= (N_2 P + PK) \omega_2 - (N_1 P - PK) \omega_1 \\ &= (PK) (\omega_1 + \omega_2) + (N_2 P \omega_2 - N_1 P \omega_1) \end{aligned}$$

因为

$$\triangle O_2 N_2 P \sim \triangle O_1 N_1 P$$

所以

$$\frac{N_2 P}{N_1 P} = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

即

$$(N_2 P) \omega_2 - (N_1 P) \omega_1 = 0$$

所以

$$\boldsymbol{v}_{k2k1} = (PK) (\omega_1 + \omega_2)$$



提示 接触点 K 离节点 P 愈远, 齿廓间的相对滑动速度愈大, 所以齿根处磨损大; 在节点 P 处接触时, 因 $PK = 0$, 则 $\boldsymbol{v}_{k2k1} = 0$, 即齿廓此刻瞬时作相对纯滚动, 所以节圆作纯滚动。

5-11 题

【分析】 若想用 $\alpha_{fj} = 25^\circ$ 的齿条刀具加工出 $\alpha = 20^\circ$ 、 $m = 4 \text{ mm}$ 、 $z = 25$ 的标准齿轮, 实质上即要用 $\alpha = 25^\circ$ 的齿条与该齿轮实现正确啮合, 为此必须满足正确啮合条件 (齿条的法向齿距等于齿轮的基节)。

【解答】 设齿条刀的法向齿距为 P_n , 则有

$$P_n = P_b$$

式中: P_b 为齿轮的基节, 又设齿条刀的齿距为 P'_{fJ} , 而 $P_n = P'_{fJ} \cos \alpha_{fJ}$

则

$$P'_{fJ} \cos \alpha_{fJ} = \pi m \cos \alpha$$

因此

$$P'_{fJ} = \frac{\pi m \cos \alpha}{\cos \alpha_{fJ}} = \frac{\pi \times 4 \cos 20^\circ}{\cos 25^\circ} = 13.029 \text{ mm}$$

上述可知, 只要齿条刀的 $P'_{fJ} = 13.029 \text{ mm}$, $\alpha = 25^\circ$, 就能范成加工出 $m = 4 \text{ mm}$ 、 $\alpha = 20^\circ$ 的标准齿轮。由于齿轮基圆半径 $r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha$, 则用 $\alpha = 25^\circ$ 的齿条刀具和标准齿条刀加工出的基圆一样, 因此轮齿的渐开线齿廓亦相同。

又因为齿轮节圆压力角 α' 应等于该齿条的齿形角 ($\alpha_{fJ} = 25^\circ$), 故齿轮的节圆不是分度圆, 此时的节圆半径为

$$r' = \frac{r_b}{\cos \alpha_{fJ}} = \frac{mz \cos \alpha}{2 \cos \alpha_{fJ}} = \frac{4 \times 25 \cdot \cos 20^\circ}{2 \cos 25^\circ} = 51.842 \text{ mm}$$

根据无侧隙啮合, 应满足 $s'_{fJ} = e'$, $e'_{fJ} = s'$, 即 $P' = P'_{fJ}$, 而 e'_{fJ} 和 s'_{fJ} 为

$$e'_{fJ} = s' = \frac{\pi m r'}{2 r} - 2r' (\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha) = 4.952 \text{ mm}$$

$$s'_{fJ} - e' = p' - s' = 13.029 - 4.952 = 8.077 \text{ mm}$$

刀具节线上的齿顶高 h'_{afJ} 和齿根高 h'_{fJ} 为

$$h'_{afJ} = r' - r_f = r' - \left(\frac{z}{2} - h_a^* - c^* \right) m = 6.842 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} h'_{fJ} &= h'_{afJ} + C^* m = 2m (h_a^* + c^*) - h'_{afJ} \\ &= 2 \times 4 \times (1 + 0.25) - 6.842 = 3.158 \text{ mm} \end{aligned}$$

上述求得的 p'_{fJ} 、 e'_{fJ} 、 s'_{fJ} 、 h'_{afJ} 及 h'_{fJ} 的值, 即为 $\alpha = 25^\circ$ 的非标准齿条刀齿形的基本尺寸。

5-12 题

【分析】 两齿轮齿顶圆正好通过啮合极限点, 说明实际啮合线段 B_1B_2

即为理论啮合线段 N_1N_2 。

【解答】 如图 5-4 所示:

因

$$N_1N_2 = 2N_1P = 2r \sin \alpha$$

所以

$$\begin{aligned} \tan \alpha_a &= \frac{N_1N_2}{O_1N_1} = \frac{2r \sin \alpha}{r \cos \alpha} = 2 \tan \alpha \\ &= 2 \tan 20^\circ = 0.72794 \\ \alpha_a &= 36^\circ 3' 9'' \end{aligned}$$

又因为

$$\cos \alpha_a = \frac{r_b}{r_a} = \frac{r \cos \alpha}{r + h_a} = \frac{z \cos \alpha}{z + 2h_a^*}$$

所以

$$z = \frac{2h_a^* \cos \alpha_a}{\cos \alpha - \cos \alpha_a} = 12.323$$

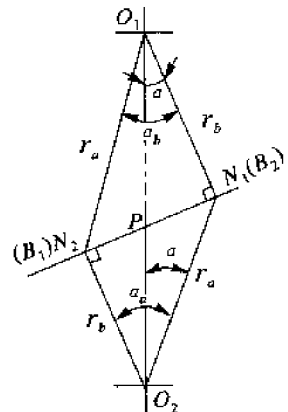


图 5-4



提示 当两轮齿数 $z = 12.323$ 时, 正好 $B_1B_2 = N_1N_2$, 此时正好不发生根切, 此为理论齿数, 但

齿轮的齿数只能取整数, 所以在两轮齿数相同的情况下, 不发生根切的最少齿数为 13 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$)。

5-13 题

【分析】 1) 用标准齿条刀具切制标准直齿轮,若要齿廓渐开线起始点在基圆上(即恰好不根切),刀具的齿顶线必须刚好过啮合极限点,而此时此轮的齿数 $z_{\min}=17$ 。若按标准齿轮加工,因为所要加工齿轮的齿数 $z=35$ 、 $h_a^*=1$ 、 $\alpha=20^\circ$,所以齿廓渐开线的起始点不在基圆上,若要齿廓渐开线起始点在基圆上,必须使刀具向轮坯靠近,即必须变位且采用负变位。

2) 由齿廓渐开线其始点在基圆上的条件得

$$h_a^* m - x m = MN$$

而且有

$$MN = PN \sin \alpha = OP \sin^2 \alpha = \frac{mz}{2} \sin \alpha$$

则

$$x = h_a^* - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha = 1 - \frac{35}{2} \sin^2 20^\circ = -1.0471$$



也可进行粗略计算,即算出不发生根切的最小变位系数:

$$x = \frac{17-z}{17} = \frac{17-35}{17} = -1.0588$$

5-14 题

【分析】 当 $a' > a$ 时,采用正传动凑中心距;当 $a' = a$ 时,可采用标准齿轮传动或等变位齿轮传动;当 $a' < a$ 时,必须采用负传动来凑中心距。而正传动优点较多,负传动缺点比较多。考虑结构的加工合理性,必须保证两对齿轮的中心距相等。

【解答】 计算两对齿轮的标准中心距:

$$a_{12} = \frac{m_{12}}{2} (z_1 + z_2) = \frac{2}{2} \times (20 + 48) = 68 \text{ mm}$$

$$a_{34} = \frac{m_{34}}{2} (z_3 + z_4) = \frac{2.5}{2} \times (18 + 36) = 67.5 \text{ mm}$$

因必须保证安装中心距 $a'_{12} = a'_{34}$, 按此条件主要有以下 4 种方案可供选择,即

	方案	齿轮 1、2	齿轮 3、4
I	$a'_{12} = a'_{34} = a_{12} = 68 \text{ mm}$	标准齿轮传动	正传动
II	$a'_{12} = a'_{34} = a_{12} = 68 \text{ mm}$	等变位齿轮传动	正传动
III	$a'_{12} - a'_{34} = a_{34} = 67.5 \text{ mm}$	负传动	标准齿轮传动
IV	$a'_{12} - a'_{34} = a_{34} = 67.5 \text{ mm}$	负传动	等变位齿轮传动

由于负传动缺点较多,故将方案 III、IV 舍去,又等变位齿轮传动质量优于标准齿轮传动,所以选择方案 II 较合理。

5-15 题

【分析】 首先根据标准中心距和实际中心距求出啮合角 α' , 然后按无侧隙啮合方程式求出这对齿轮到变位系数和 $x_1 + x_2$, 由于两个齿轮到齿数一样, 所以最好使它们的变位系数相等, 从而确定 x_1 和 x_2 , 进而求出其他各项。

【解答】

1) 选择传动类型

$$\text{标准中心距} \quad a = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) = \frac{10}{2} \times (12 + 12) = 120 \text{ mm}$$

而安装中心距

$$a' = 130 \text{ mm} > a$$

故必须采用正传动。

2) 求啮合角 α' 和变位系数和 x_{Σ} :

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{a}{a'} \cos \alpha\right) = \arccos\left(\frac{120}{130} \cos 20^\circ\right) = 29^\circ 50' 28''$$

$$x_{\Sigma} = \frac{(z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha' - \operatorname{inv} \alpha)}{2 \tan \alpha} = 1.2505$$

3) 分配 x_1 和 x_2

因 $z_1 = z_2 = 12 < z_{\min}$, 为了避免根切, 必须满足 $x_1 = x_2 > \frac{17-12}{17} = 0.2941$, 而且两轮齿数相等, 则 $x_1 = x_2 = x_{\Sigma}/2 = 1.2505/2 = 0.6253$, 这样既凑中心距又不发生根切。

4) 求 y 和 Δy

$$y = (a' - a) / m = (130 - 120) / 10 = 1$$

$$\Delta y = x_{\Sigma} - y = 1.2505 - 1 = 0.2505$$

5) 计算几何尺寸

$$r_{1,2} = \frac{mz_{1,2}}{2} = \frac{10 \times 12}{2} = 60 \text{ mm}$$

$$r_{a1,2} = r_{1,2} + (h_a^* + x_{1,2} - \Delta y) m = 73.75 \text{ mm}$$

$$r_{f1,2} = r_{1,2} - (h_a^* + c^* - x_{1,2}) m = 53.75 \text{ mm}$$

$$r_{b1,2} = \frac{mz_{1,2}}{2} \cos \alpha = \frac{10 \times 12}{2} \cos 20^\circ = 56.39 \text{ mm}$$

6) 验算 s_a 和 ϵ_a

$$s = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_{1,2} \tan \alpha \right) m = 20.26 \text{ mm}$$

$$\alpha_{a1,2} = \arccos(r_{b1,2}/r_{a1,2}) = \arccos\left(\frac{56.39}{73.75}\right) = 40^\circ 8' 23''$$

$$s_{a1,2} = s \frac{r_{a1,2}}{r_{1,2}} - 2r_{a1,2} (\operatorname{inv} \alpha_{a1,2} - \operatorname{inv} \alpha) = 6.05 \text{ mm} > 0.2 m$$

所以 s_a 验算合格。

$$\epsilon_a = \frac{1}{2\pi} [z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + z_2 (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')]$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 12 (\tan 40^\circ 8' 23'' - \tan 29^\circ 50' 28'')$$

$$= 1.03 > 1$$

所以 ϵ_a 验算合格。



虽然重合度大于 1, 但由于比较小, 若加工误差较大, 会使实际的重合度不能满足要求, 而使传动不连续, 所以需要制造精确。

5-16 题

【分析】 由于传动比必须保持不变, 所以新设计的小齿轮的齿数应保持不变。又原齿轮传动采用的是标准安装, 且其中心距就是新传动的实际中心距, 因此, 应采用等变位齿轮传动来修复。又因修复后大齿轮的齿顶圆要减小, 所以对大齿轮到修复应采用负变位, 那么新配小齿轮采用正变位。为

使小齿轮的齿顶厚尽可能大,其变位系数应尽可能小,即所采用的变位系数应刚好与大齿轮齿顶圆减小量相对应。

【解答】 依题意

$$\Delta d_{a2} = d_2 + 2(h_a^* + x_2)m - (d_2 + 2h_a^*m) = x_2m$$

则

$$x_2 = \frac{\Delta d_{a2}}{2m} = -\frac{8}{2 \times 4} = -1$$

而

$$x_1 = -x_2 = 1$$

用基本尺寸公式可算得

$$d_1 = 96 \text{ mm}, d_2 = 384 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = 112 \text{ mm}, d_{a2} = 384 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = 94 \text{ mm}, d_{f2} = 366 \text{ mm}$$

$$d_{b1} = 90.21 \text{ mm}, d_{b2} = 360.84 \text{ mm}$$

$$a' = a = 240 \text{ mm}$$

验算 s_a 和 ϵ_a

$$\alpha_{a1} = \arccos(d_{b1}/d_{a1}) = 36^\circ 21'$$

$$\alpha_{a2} = \arccos(d_{b2}/d_{a2}) = 20^\circ$$

$$s_{a1} = \left(\frac{\pi m}{2} + 2x_1 \tan \alpha \right) \frac{r_{a1}}{r_1} - d_{a1} (\operatorname{inv} \alpha_{a1} - \operatorname{inv} \alpha) = 1.02 \text{ mm} > 0.2 m$$

一般来说,齿顶圆齿厚应大于 0.2 倍的模数,显然

$$s_{a1} = 1.02 > 0.2 m = 0.2 \times 4 = 0.8 \text{ mm}$$

是合格的。

5-17 题

【分析】 本题主要是考查变位齿轮的基本几何尺寸及变位齿轮齿条传动的重合度计算。

【解答】 因 $x_1 m = 3x_1 = 0.4$, 故 $x_1 = 0.133$

于是

$$d_1 = mz_1 = 3 \times 12 = 36 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2(h_a^* + x_1)m = 42.8 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = d_1 - 2m(h_a^* + c^* - x_1) = 29.6 \text{ mm}$$

$$s_1 = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha \right) = 5.0028 \approx 5.003 \text{ mm}$$

$$\alpha_{a1} = \cos^{-1} \frac{d_1 \cos \alpha}{d_{a1}} = \cos^{-1} \frac{36 \times 0.93969}{42.8} = 37^\circ 47'$$

$$s_{a1} = s_1 \frac{d_{a1}}{d_1} - d_{a1} (\operatorname{inv} \alpha_{a1} - \operatorname{inv} \alpha) = 1.665 \text{ mm}$$

$$\epsilon_a = \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha) + \frac{2(h_a^* - x_1)}{\pi \sin 2\alpha} = 1.644$$



注意齿轮齿条传动的重合度与齿轮传动重合度计算的不同。

5-18 题

【分析】 本题考查斜齿圆柱齿轮传动的几何尺寸计算及当量齿轮等概念。斜齿轮传动的重合度由两部分组成,即由端面重合度 ϵ_α 和纵向重合度 ϵ_β 组成。

【解答】

1)

$$p_n = \pi m_n = 1.5\pi = 4.71 \text{ mm}$$

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{4.71}{0.707} = 6.66 \text{ mm}$$

2)

$$r_1 = r_2 = \frac{m_n z_1}{2 \cos \beta} = \frac{1.5 \times 18}{2 \times 0.707} = 19.09 \text{ mm}$$

$$a = r_1 + r_2 = 19.09 + 19.09 = 38.18 \text{ mm}$$

3)

$$\alpha_{t1} = \alpha_{t2} = \arctan \left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right) = \arctan \left(\frac{\tan 20^\circ}{\cos 45^\circ} \right) = 27^\circ 14' 10''$$

$$\alpha'_t = \alpha_t$$

$$r_{a1} = r_{a2} = r_1 + h_{an}^* m_n = 19.09 + 1 \times 1.5 = 20.59 \text{ mm}$$

$$r_{b1} = r_{b2} = r_1 \cos \alpha_{t1} = 19.09 \cos 27^\circ 14' 10'' = 16.97 \text{ mm}$$

$$\alpha_{a1} = \alpha_{a2} = \arccos \left(\frac{r_{b1}}{r_{a1}} \right) = \arccos \left(\frac{16.97}{20.59} \right) = 34^\circ 29' 38''$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} [z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{a2})] = 0.988$$

$$\varepsilon_\beta = b \tan \beta / p_t = 14 \times \tan 45^\circ / 6.66 = 2.102$$

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = 0.988 + 2.102 = 3.09$$

4)

$$z_{v1} = z_{v2} = z_1 / \cos^3 \beta = 18 / \cos^3 45^\circ = 50.9$$



当量齿数不一定是整数, 当计算出当量齿数不是整数时不要将所得小数圆整成整数。

5-20 题

【分析】在齿轮传动中除可采用变位齿轮传动来凑中心距外, 还可采用斜齿轮传动, 通过调节螺旋角来凑中心距。

【解答】 1) 求螺旋角 β

因为

$$a'_{34} = a_{12} = \frac{m_n}{2 \cos \beta} (z_3 + z_4) = 68 \text{ mm}$$

所以

$$\cos \beta = \frac{m_n (z_3 + z_4)}{2a_{12}} = \frac{2 \times (18 + 36)}{2 \times 68} = 0.79412$$

$$\beta = 37^\circ 25' 41''$$

2) 计算几何尺寸

$$d_3 = m_t z_3 = \frac{m_n z_3}{\cos \beta} = 45.33 \text{ mm}$$

$$d_4 = m_t z_4 = \frac{m_n z_4}{\cos \beta} = 90.67 \text{ mm}$$

$$d_{f3} = d_3 - 2(h_{an}^* + c_n^*) m = 40.33 \text{ mm}$$

$$d_{f4} = d_4 - 2(h_{an}^* + c_n^*) m = 85.67 \text{ mm}$$

$$d_{a3} = d_3 + 2h_{an}^* m = 49.33 \text{ mm}$$

$$d_{a4} = d_4 + 2h_{an}^* m = 94.67 \text{ mm}$$

$$\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} = \frac{\tan 20^\circ}{\cos 37^\circ 25' 41''} = 0.45833$$

$$\alpha'_t = \alpha_t = 24^\circ 37' 25''$$

$$d_{b3} = d_3 \cos \alpha_t = 45.33 \cos 24^\circ 37' 25'' = 41.21 \text{ mm}$$

$$d_{b4} = d_4 \cos \alpha_t = 90.67 \cos 24^\circ 37' 25'' = 82.42 \text{ mm}$$

$$\alpha_{at3} = \arccos\left(\frac{d_{b3}}{d_{a3}}\right) = \arccos\left(\frac{41.21}{49.33}\right) = 33^\circ 20' 35''$$

$$\alpha_{at4} = \arccos\left(\frac{d_{b4}}{d_{a4}}\right) = \arccos\left(\frac{82.42}{94.67}\right) = 29^\circ 28' 16''$$

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{1}{2\pi} [z_3 (\tan \alpha_{at3} - \tan \alpha_t) + z_4 (\tan \alpha_{at4} - \tan \alpha_t)] + \frac{b \sin \beta}{\pi m_n} = 3.118$$



采用变位方法来满足中心距的要求, 正变位将受到齿顶变尖的限制; 负变位又将受到根切的限制。而采用螺旋角调节的办法, 则 $0 < \beta < 90^\circ$, 但 β 太大会使轴向力增大, 效率降低, 甚至自锁, 这样给定的中心距与标准中心距相差不宜太大。斜齿轮传动较直齿轮平稳, 重合度大。但螺旋角过小不能显现斜齿轮的优点, 所以螺旋角 β 一般控制在 $8^\circ \sim 15^\circ$ 范围内。

5-21 题

【分析】 本题考查交错轴斜齿轮传动的几何计算。

【解答】

$$1) \quad a = \frac{m_n}{2} \left(\frac{z_1}{\cos \beta_1} + \frac{z_2}{\cos \beta_2} \right) = \frac{2.5}{2 \cos 45^\circ} \times (10 + 20) = 53.03 \text{ mm}$$

$$d_1 = m_t z_1 = \frac{m_n}{\cos \beta_1} z_1 = \frac{2.5 \times 10}{\cos 45^\circ} = 35.36 \text{ mm}$$

$$d_2 = m_t z_2 = \frac{m_n}{\cos \beta_2} z_2 = \frac{2.5 \times 20}{\cos 45^\circ} = 70.71 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{an}^* m_n = 35.36 + 2 \times 1 \times 2.5 = 40.36 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{an}^* m_n = 70.71 + 2 \times 1 \times 2.5 = 75.71 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = d_1 - 2(h_{an}^* + c_n^*) m_n = 35.36 - 2 \times (1 + 0.25) \times 2.5 = 29.11 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2(h_{an}^* + c_n^*) m_n = 70.71 - 2 \times (1 + 0.25) \times 2.5 = 64.46 \text{ mm}$$

2) 计算节点 P 处相对滑动速度:

$$v_{p1} = \frac{\pi n_1 d_1}{60 \times 1000} = \frac{\pi \times 150 \times 35.36}{60 \times 1000} = 0.278 \text{ m/s}$$

$$v_{p2p1} = v_{p1} \sin \Sigma / \cos \beta_2 = 0.278 \sin 90^\circ / \cos 45^\circ = 0.393 \text{ m/s}$$

5-22 题

【分析】 本题主要考查蜗轮蜗杆传动的几何尺寸计算。注意蜗杆直径计算公式。

【解答】

$$\lambda = \arctan\left(\frac{z_1}{q}\right) = \arctan\left(\frac{1}{10}\right) = 5^\circ 42' 38''$$

$$d_1 = qm = 10 \times 5 = 50 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 5 \times 40 = 200 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a^* m = 50 + 2 \times 1 \times 5 = 60 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a^* m = 200 + 2 \times 1 \times 5 = 210 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = d_1 - 2(h_a^* + c^*) m = 50 - 2 \times (1 + 0.2) \times 5 = 38 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2(h_a^* + c^*) m = 200 - 2 \times (1 + 0.2) \times 5 = 188 \text{ mm}$$

$$a = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) = \frac{5}{2} \times (10 + 40) = 125 \text{ mm}$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{40}{1} = 40$$

5-23 题

【分析】 本题主要考查圆锥齿轮传动各参数之间的关系。

【解答】 对于直齿圆锥齿轮机构：

$$\cot \delta_1 = \frac{i_{12} + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}$$

而依据题意

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 60^\circ, \quad i_{12} = 0.4$$

可解出

$$\delta_1 = 43^\circ 54'$$

$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1 = 60^\circ - 43^\circ 54' = 16^\circ 06'$$

5-24 题

【分析】 本题主要考查圆锥齿轮传动的几何尺寸计算。

【解答】

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{32}{24} = 1.33$$

$$\delta_2 = \arctan i_{12} = 53^\circ 7' 49''$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 = 90^\circ - 53^\circ 7' 49'' = 36^\circ 52' 11''$$

$$d_1 = mz_1 = 3 \times 24 = 72 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 3 \times 32 = 96 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a \cos \delta_1 = [z_1 + 2h_a^* \cos \delta_1] m$$

$$= (24 + 2 \times 1 \times \cos 36^\circ 52' 11'') \times 3 = 76.80 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = (z_2 + 2h_a^* \cos \delta_2) m = (32 + 2 \times 1 \times \cos 53^\circ 7' 49'') \times 3$$

$$= 99.60 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = d_1 - 2h_f \cos \delta_1 = [z_1 - 2(h_a^* + c^*) \cos \delta_1] m$$

$$= [24 - 2 \times (1 + 0.2) \cos 36^\circ 52' 11''] \times 3 = 66.24 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = [z_2 - 2(h_a^* + c^*) \cos \delta_2] m$$

$$= [32 - 2 \times (1 + 0.2) \cos 53^\circ 7' 49''] \times 3 = 91.68 \text{ mm}$$

$$R = \frac{m}{2} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \frac{3}{2} \sqrt{24^2 + 32^2} = 60 \text{ mm}$$

$$\theta_{a1} = \theta_{a2} = \alpha = \arctan \left(\frac{h_a}{R} \right) = \arctan \left(\frac{h_a^* m}{R} \right) = \arctan \left(\frac{1 \times 3}{60} \right) = 2^\circ 51' 45''$$

$$\theta_{f1} = \theta_{f2} = \arctan \left(\frac{h_f}{R} \right) = \arctan \left[\frac{(h_a^* + c^*) m}{R} \right]$$

$$= \arctan \left[\frac{(1+0.2) \times 3}{60} \right] = 3^\circ 26' 1''$$

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1} = 36^\circ 52' 11'' + 2^\circ 51' 45'' = 39^\circ 43' 56''$$

$$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2} = 53^\circ 7' 49'' + 2^\circ 51' 45'' = 55^\circ 59' 34''$$

$$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1} = 36^\circ 52' 11'' - 3^\circ 26' 1'' = 33^\circ 26' 10''$$

$$\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2} = 53^\circ 7' 49'' - 3^\circ 26' 1'' = 49^\circ 41' 48''$$

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} = \frac{24}{\cos 36^\circ 52' 11''} = 30$$

$$z_{v2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} = \frac{32}{\cos 53^\circ 7' 49''} = 53.33$$

5-25 题

【证明】

$$i_{v12} = \frac{z_{v2}}{z_{v1}} = \frac{z_2 / \cos \delta_2}{z_1 / \cos \delta_1} = \frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2} = \frac{z_2 \sin \delta_2}{z_1 \sin \delta_1} = i_{12}^2$$

5.5 原教材思考题详解

思 5-8 题

【解答】 用齿条型刀具范成加工齿轮时, 需要注意两点:

① 运动条件, 即

$$v_{刀} = \frac{mz}{2} \omega_{坯} \quad (= r \omega_{坯}) \quad \text{或} \quad z = \frac{2 v_{刀}}{m \omega_{坯}}$$

该式说明: 被加工齿轮的齿数取决于 $v_{刀}$ 和 $\omega_{坯}$ 的比值, 而与刀具和轮坯的相对位置无关。在加工齿轮时, 应根据被加工齿轮的模数 m 和齿数 z 来调整机床传动系统的传动比, 使之满足上式表示的关系, 才能加工出指定齿数 z 的齿轮。如果机床的传动比调整不当, 不满足上述关系, 则加工出来的齿轮齿数即使是整数也不是所要求的齿数, 而大多数情况下, 按上式计算出来的齿数不是整数, 则当刀具相对轮坯滚切几周后, 轮坯上已经范成出来的轮齿将逐次被部分地切除, 最后只能得到一个没有轮齿的直径等于齿根圆的小圆柱体。

② 刀具与轮坯的相对位置, 即被加工齿轮的变位系数 x , 主要取决于轮坯中心与刀具中线之间的距离 L , $X = \frac{L-r}{m}$ 。

当 $L=r$ 时, 刀具中线与轮坯分度圆相切, $x=0$, 加工出来的是标准齿轮;

当 $L>r$ 时, 刀具中线与轮坯分度圆相分离, $x>0$, 加工出来的是正变位齿轮;

当 $L<r$ 时, 刀具中线与轮坯分度圆相交, $x<0$, 加工出来的是负变位齿轮。

思 5-9 题

【解答】 正变位齿轮与标准齿轮比较, 分度圆齿厚增大和齿槽宽减小、轮齿的齿根高减小, 不变的几何参数有: 模数、压力角、分度圆、基圆。

思 5-11 题

【解答】 用标准齿条刀具加工直齿轮时, 变位系数 $x=0$ 的齿轮不一定是标准齿轮。如在变位齿轮传动中, $x_{\Sigma} \neq 0$ 时, 也可以存在 $x_1=0$ (或 $x_2=0$) 的变位为 0 的变位齿轮。这时齿轮 1 (或齿轮 2) 具有标准的模数和压力角, 齿厚和齿槽宽也是标准值, 但由于与其相啮合的另一齿轮是变位

齿轮,故齿轮的齿顶高变动系数 $\Delta y > 0$,即齿轮的齿顶高不再是标准值。所以这个齿轮虽然变位系数为0,但已不是标准齿轮了。

思 5-13 题

【解答】 当用仿形法切制斜齿圆柱齿轮时,其刀具刀刃的形状应与斜齿轮的法面齿形相当;在计算斜齿轮强度时,其轮齿的强度是按其法面齿形来计算的。因此,需要找出一个和斜齿轮法面齿形相当的直齿轮来。为此,让齿轮的模数、压力角、齿顶高系数及顶隙系数分别等于斜齿轮的法面模数、法面压力角、法面齿顶高系数及法面顶隙系数,让其齿数为 $z_v = z / \cos^3 \beta$ 。这样就构造出一个假想的直齿圆柱齿轮,即所谓的该斜齿轮的当量齿轮,其齿数 z_v 称为该斜齿轮的当量齿数。

思 5-18 题

【解答】 由于不等顶隙的圆锥齿轮,其齿根圆角半径和齿顶厚由大端到小端逐渐缩小,影响轮齿的强度,采用等顶隙收缩齿可克服不等顶隙齿的缺点,提高了轮齿的强度,应用日趋广泛,故国家标准规定采用等顶隙圆锥齿轮传动。

5.6 自测试卷及答案

5.6.1 自测试卷

(1) 填空

- 1) 影响渐开线直齿圆柱齿轮齿廓形状的参数有_____和_____等。
(2001 西北工业大学)
- 2) 一对渐开线直齿圆柱齿轮传动时,若重合度等于1.3,这表明啮合点沿公法线方向等速移动一个法节的距离时,有_____的时间是两对齿啮合,有_____的时间是一对齿啮合。
(2002 西北工业大学)
- 3) 渐开线齿廓上_____压力角为零,渐开线齿轮上_____的压力角最大。
(2002 西北工业大学)
- 4) 一模数为4 mm的渐开线标准直齿圆柱外啮合齿轮传动,当以标准中心距安装时,其顶隙为_____,理论上侧隙为_____;当中心距增大0.5 mm时,顶隙变为_____,侧隙_____于零。
(2003 西北工业大学)
- 5) 一对渐开线直齿圆柱齿轮的重合度 ϵ 与齿轮的基本参数中_____有关,与齿轮的_____无关。
- 6) 外啮合斜齿圆柱齿轮的正确啮合条件是_____、_____、_____。(2000 哈尔滨工业大学)
- 7) 渐开线斜齿圆柱齿轮的标准参数在_____面上,其几何尺寸计算却在_____面上;斜齿轮的当量齿数 $z_v =$ _____ (写出基本参数表达式)。
- 8) 当采用_____切制渐开线齿轮齿廓时,可能会产生根切,而切制渐开线标准齿轮不根切的最少齿数为_____。若用同一把刀具加工 m 、 a 、 z 参数均相同的标准齿轮和正变位齿轮,它们的几何尺寸(即 d 、 e 、 p 、 h_a 、 h_f 、 h 、 d_b 、 d_a 、 d_f)中,_____尺寸不变,_____尺寸变大;而_____尺寸变小。
- 9) 一对渐开线齿廓啮合传动时,它们的接触点在_____线上,它的理论啮合线长度为_____。
(1997 上海交通大学)

- 10) 图 5-5 所示为蜗轮蜗杆传动, 试写出蜗轮 2 的螺旋方向为____; 蜗轮 2 的转向应是____时针转向。

(1998 上海交通大学)

- 11) 渐开线上任一点的法线与基圆____, 渐开线上各点的曲率半径是____的。

(1999 华南理工大学)

- 12) 一对渐开线直齿圆柱齿轮 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$) 啮合时, 最多只有____对轮齿在同时啮合。当安装时的实际中心距大于标准中心距时, 啮合角 α' 是变大还是变小? ____; 重合度 ϵ 是增大还是减小? ____; 传动比 i 又是如何变化的? ____。

(2000 西安交通大学)

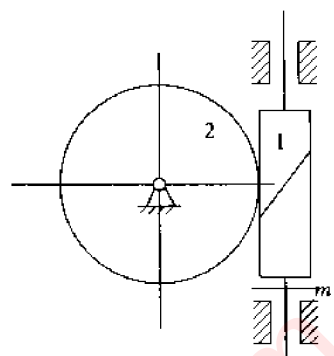


图 5-5

- 13) 直齿圆锥齿轮的背锥是与____相切的圆锥, 把背锥展开补齐的齿轮称为____, 其齿数称为____。它有以下用途: _____, _____, _____, _____。

(2) 简答

- 1) 渐开线圆柱斜齿轮机构主要有哪些优缺点?

- 2) 对齿轮变位修正可达到哪些目的?

(2003 西北工业大学)

- 3) 一对齿轮无侧隙啮合的条件是什么? 一对标准齿轮作无侧隙啮合时有什么重要特点?

- 4) 请分别说明下述一系列等式中每一步的含义。

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r_2'}{r_1'} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

- 5) 渐开线直齿圆柱齿轮正确啮合的条件是什么? 满足正确啮合条件的一对齿轮是否一定能连续传动?

(2001 浙江大学)

- 6) 简述渐开线标准直齿圆柱齿轮的基本参数和安装中心距对齿轮传动重合度 ϵ_a 的影响。

(1998 西北工业大学)

- 7) 一对渐开线标准圆柱直齿轮的啮合角为 20° , 它们肯定是标准齿轮吗? 为什么?

(2001 华南理工大学)

- (3) 今有一标准斜齿圆柱齿轮传动, 已知斜齿轮的法面参数: $m_n = 4 \text{ mm}$, $\alpha_n = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $c_n^* = 0.25$, 齿宽 $B = 30 \text{ mm}$, 中心距 $a = 121.5 \text{ mm}$, 齿数 $z_1 = 20$, $z_2 = 40$ 。试求:

- 1) 这对斜齿轮的螺旋角 β 及轴向重合度 ϵ_β 。

- 2) 若将这对斜齿轮传动改为直齿圆柱齿轮传动, 这对直齿轮的参数: 模数 m 、压力角 α 、齿顶高系数 h_a^* 、顶隙系数 c^* 都与斜齿轮的法面参数相同。其他如中心距、齿数、齿宽均和斜齿轮传动相同。

- ①为了保证这对齿轮无侧隙啮合, 齿轮应采用何种传动类型;

- ②求出这对齿轮的分度圆直径 d_1 、 d_2 ; 基圆直径 d_{b1} 、 d_{b2} ;

- ③求出两轮的节圆直径 d'_1 、 d'_2 。

- (4) 如图 5-6 所示已知一齿条型刀具的参数为 $m = 5 \text{ mm}$, $\alpha = 15^\circ$, $h_a^* = 0.8$, $c^* = 0.3$ 。

- 1) 用该刀具范成加工渐开线直齿圆柱齿轮时, 不产生根切的标准齿轮的最少齿数 z_{\min} 是多少? 不产生根切的变位齿轮最小变位系数 x_{\min} 表达式是什么? 试推导之。

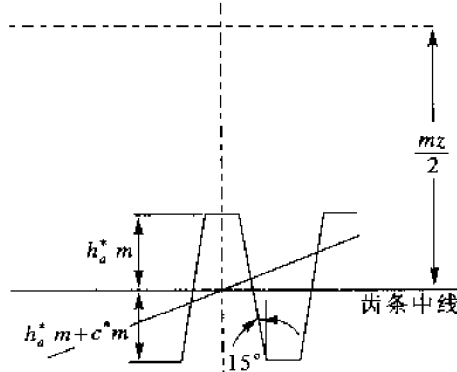


图 5-6

2) 用该刀具分别加工 $z_1 = 22$ 和 $z_2 = 28$ 的一对渐开线直齿圆柱齿轮, 且安装中心距 $a' = 124 \text{ mm}$, 试问该对齿轮为何传动? 它们的啮合角 α' , 节圆半径 r_1 、 r_2 分别为多少?

3) 用该刀具范成加工螺旋角 $\beta = 20^\circ$ 的渐开线斜齿圆柱齿轮时, 产生根切的原因是什么? 最少齿数 z_{\min} 为多少? 并与直齿圆柱齿轮的最少齿数作比较, 说明产生变化的根本原因。

5.6.2 自测试卷答案

(1) 填空

1) 模数 m ; 压力角 α

2) 30%; 70%

3) 基圆上; 齿顶圆

4) 1 mm; 0; 4.5; 大

5) 齿数 z ; 模数

6) $\frac{m_{n1} = m_{n2} = m}{\alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \alpha; \beta_1 = -\beta_2}$

7) 法; 端; $z/\cos^3 \beta$

8) 范成法; $z_{\min} = \frac{2h_a^*}{1 - \sin^2 \alpha}$; d 、 p 、 d_b ; h_a 、 d_a ; e 、 h_f 、 d_f

9) 啮合; $N_1 N_2$

10) 右; 逆

11) 相切; 变化的

12) 2; 变大; 减小; 不变

13) 圆锥大端球面; 当量齿轮; 当量齿数; 选择铣刀号; 判断是否根切; 查取齿形系数; 计算重合度

(2) 简答 (略)

(3)

1) $\beta = \arctan [m(z_1 + z_2) / (2a)] = 9^\circ 45''$, $\epsilon_\beta = B \sin \beta / (\pi m_n) = 0.374$

2) $a' = 121.5 \text{ mm} > a = 120 \text{ mm}$ 应采取正传动。

$$\alpha' = \arccos [a \cos \alpha / a'] = 21.86076^\circ$$

$$x_{\Sigma} = (z_1 + z_2) (\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha) / (2 \tan \alpha) = 0.392$$

其他基本尺寸计算略。

(4)

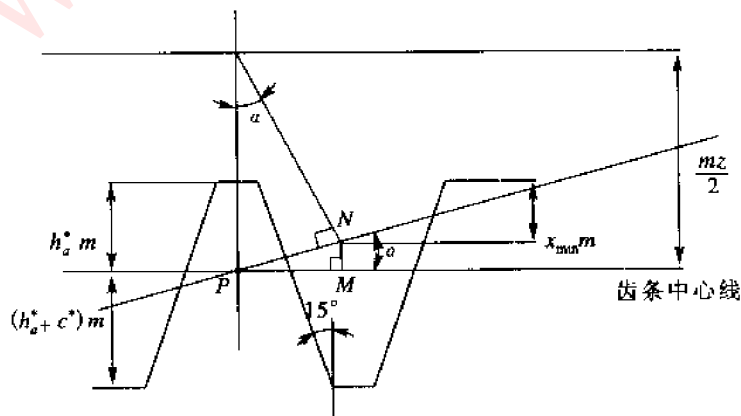


图 5-7

$$1) \quad NM = NP \sin \alpha = \frac{1}{2} m z \sin^2 \alpha$$

$$NM \geq h_a^* m, \quad Z \geq 2h_a^* / \sin^2 15^\circ = 23.89$$

$$z_{\min} = 24$$

$$x_{\min} = h_a^* - \frac{1}{2} z \sin^2 \alpha$$

因 $\frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{h_a^*}{Z_{\min}}$

所以 $x_{\min} = \frac{z_{\min} - z}{Z_{\min}} h_a^*$

$$2) \quad i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{28}{22}$$

$$a = \frac{1}{2} m (z_1 + z_2) = 125 \text{ mm} > a' \quad (\text{为负传动})$$

$$\alpha' = \arccos \left(\frac{a}{a'} \cos \alpha \right) = 18.69^\circ$$

$$a' = r'_1 + i r'_1 = (i + 1) r'_1$$

$$r'_1 = 54.56 \text{ mm}, \quad r'_2 = i r'_1 = 69.44 \text{ mm}$$

3) 产生根切的原因是齿数少于不根切最少齿数, 致使刀具齿顶超过理论啮合极限点 N 。

$$z_{\min} = z_{v \min} \cos^3 \beta = 19.9 \quad \text{取} \quad z_{\min} = 20$$

直齿圆柱齿轮不根切最少齿数为 24, $\beta = 20^\circ$ 的斜齿圆柱齿轮不根切的最少齿数为 20, 比直齿的小, 产生变化的根本原因是斜齿轮法面齿形相当于其当量的直齿圆柱齿轮齿形, 当量齿数大于实际齿数 ($z_v = Z / \cos^3 \beta$)。

课后答案网
www.khdaw.com